C. R. Acad. Sci. Paris, t. 320, Série I, p. 217-220, 1995 217

Systèmes dynamiques/*Dynamical Systems*

Symétrie des configurations centrales de quatre corps

Alain ALBOUY

Résumé – Nous montrons que toute configuration centrale du problème newtonien plan de quatre corps ayant tous la même masse possède au moins une symétrie.

Symmetry of central configurations of four bodies

Abstract – *We prove that every central configuration of the planar Newtonian problem of four bodies with equal masses has at least one symmetry.*

QUELQUES RÉSULTATS DE DZIOBEK. – Nous rappelons ici les résultats de l'article [2] dont nous avons besoin. Nous renvoyons le lecteur à [3] pour une introduction générale à cet article et au problème de la symétrie des configurations centrales.

Soient $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$, $\vec{r}_3$ et $\vec{r}_4$ des vecteurs repérant quatre points dans un espace vectoriel euclidien. Nous posons $r_{ij} = \|\vec{r}_i - \vec{r}_j\|$ et

$$a = r_{12}^2, \qquad b = r_{13}^2, \qquad c = r_{14}^2, \qquad d = r_{23}^2, \qquad e = r_{24}^2, \qquad f = r_{34}^2.$$

Nous supposerons les quatre points dans un même plan, ce qui revient à la nullité du déterminant de Cayley

$$S = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a & b & c \\ 1 & a & 0 & d & e \\ 1 & b & d & 0 & f \\ 1 & c & e & f & 0 \end{vmatrix}.$$

Soient Δ_1, Δ_2, Δ_3 et Δ_4 les aires orientées respectives des triangles (2, 3, 4), (4, 3, 1), (1, 2, 4) et (3, 2, 1), qui vérifient

$$\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \Delta_4 = 0. \tag{1}$$

Dziobek obtient, « aus analytisch-geometrischen Untersuchungen »,

$$\frac{\partial S}{\partial r_{ij}^2} = 32\, \Delta_i\, \Delta_j. \tag{2}$$

Introduisons les quatre masses m_1, m_2, m_3 et m_4, réels strictement positifs dont la somme est notée M, une fonction réelle ψ, et les deux fonctions

$$U = \sum_{1 \leq i < j \leq 4} m_i\, m_j\, \psi\,(r_{ij}^2) \qquad \text{et} \qquad I = \frac{1}{M} \sum_{1 \leq i < j \leq 4} m_i\, m_j\, r_{ij}^2,$$

respectivement appelées *fonction de forces* et *moment d'inertie par rapport au centre de masse.* Dziobek utilise une caractérisation simple des *configurations centrales* : ce sont les points critiques de la fonction U restreinte aux configurations planes de moment d'inertie

Note présentée par Michel HERMAN.

0764-4442/95/03200217 $ 2.00

fixé. Pour chacune de ces configurations il existe donc deux nombres réels λ et μ vérifiant, pour tout choix des indices i et j,

$$\frac{\partial U}{\partial r_{ij}^2} = \lambda \frac{\partial S}{\partial r_{ij}^2} + \mu \frac{\partial I}{\partial r_{ij}^2}. \tag{3}$$

COMPLÉMENTS ALGÉBRIQUES. – Les trois nombres $-\Delta_2/\Delta_1$, $-\Delta_3/\Delta_1$ et $-\Delta_4/\Delta_1$ sont les coordonnées barycentriques du premier point par rapport aux trois autres (Mœbius). Nous pouvons exprimer ceci avec le système

$$\begin{aligned} \Delta_2 a + \Delta_3 b + \Delta_4 c &= \Delta_1 a + \Delta_2 d + \Delta_4 e \\ &= \Delta_1 b + \Delta_2 d + \Delta_4 f = \Delta_1 c + \Delta_2 e + \Delta_3 f. \end{aligned} \tag{4}$$

De l'homogénéité de S et des équations (2) on déduit d'autre part

$$\sum_{1 \leqq i < j \leqq 4} \Delta_i \Delta_j r_{ij}^2 = 0. \tag{5}$$

Nous supposons désormais les quatre masses égales, de sorte que (3) équivaut à l'existence de deux nombres réels ν et ξ tels que, pour tout choix des indices i et j,

$$\psi'(r_{ij}^2) = \nu \Delta_i \Delta_j + \xi. \tag{6}$$

Soient $A = \psi'(a), \ldots, F = \psi'(f)$. Les équations (1), (4) et (6) entraînent

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ A & B & C \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ f & e & d \\ A & B & C \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ f & e & d \\ F & E & D \end{vmatrix} \tag{7_1}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & e & d \\ A & E & D \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ f & b & c \\ A & E & D \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ f & b & c \\ F & B & C \end{vmatrix} \tag{7_2}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ f & b & d \\ F & B & D \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & e & c \\ F & B & D \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & e & c \\ A & E & C \end{vmatrix} \tag{7_3}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ f & e & c \\ F & E & C \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & d \\ F & E & C \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & d \\ A & B & D \end{vmatrix} \tag{7_4}$$

Remarque. – Nous n'avons indiqué le système (4) que pour permettre la vérification directe des équations (7), qui semble requérir un calcul assez long. La coplanarité des quatre masses, qui n'est pas conséquence de (6) et de (7), sera exprimée dans la suite avec la seule équation (5). On peut montrer que quand les r_{ij}^2 correspondent à une configuration plane non alignée, le système (4) ou l'équation (5) caractérisent les aires Δ_i à un facteur près. Signalons enfin que les principes développés dans [1] permettent d'établir facilement les relations (2), (4) et (7), et d'interpréter ce dernier système comme donnant les « configurations équilibrées ».

Déduction du résultat. – Nous supposons simplement que la fonction ψ' est croissante ($\psi'' > 0$) et concave ($\psi''' < 0$). Ces hypothèses sont notamment vérifiées pour le potentiel newtonien, où l'on pose $\psi(x) = x^{-1/2}$. Le premier membre de (5) serait négatif si les r_{ij}^2 étaient tous égaux, d'après (1), et *a fortiori* s'ils décroissaient quand les $\Delta_i\,\Delta_j$ croissent. On doit donc avoir $\nu > 0$ dans l'équation (6).

On appelle « configuration convexe » toute configuration plane telle que

$$\Delta_1 \leqq \Delta_2 \leqq 0 \leqq \Delta_3 \leqq \Delta_4. \tag{8}$$

Si l'on a par contre

$$\Delta_1 \leqq 0 < \Delta_2 \leqq \Delta_3 \leqq \Delta_4 \tag{9}$$

la configuration est dite « non convexe ». On peut toujours se ramener à l'un de ces deux ordres en renumérotant les sommets et en choisissant l'orientation du plan.

Un tétraèdre symétrique possède soit un plan de symétrie contenant deux des sommets, soit un axe de symétrie. Le premier cas est caractérisé par une double égalité de côtés du type $a = b$, $f = e$, le second par une double égalité du type $a = f$, $b = e$. D'après les équations (6), et des identités découlant aisément de (1), du type

$$\Delta_3\,\Delta_4 - \Delta_1\,\Delta_2 = (\Delta_2 + \Delta_3)\,(\Delta_2 + \Delta_4), \tag{10}$$

toute configuration centrale plane non symétrique vérifie, quitte à renuméroter les sommets et à changer l'orientation du plan,

$$\Delta_1 < \Delta_2 < \Delta_3 < \Delta_4 \qquad \text{et} \qquad \Delta_1 + \Delta_4 < 0 < \Delta_2 + \Delta_3. \tag{11}$$

Proposition 1. – *Toute configuration centrale plane et convexe de quatre masses égales est symétrique.*

Démonstration. – En utilisant les identités (10), les équations (6), les inégalités (8) et (11) et la croissance de la fonction ψ', on ordonne les six côtés de la configuration supposée non symétrique :

$$c < b < e < d < a < f.$$

On en déduit, par exemple en interprétant ce déterminant comme l'aire orientée du triangle de $\mathbb{R}^2$ formé par les points (f, A), (e, B) et (d, C), que

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ f & e & d \\ A & B & C \end{vmatrix} > 0.$$

De même, en utilisant cette fois la concavité de la fonction ψ', on obtient

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ A & B & C \end{vmatrix} > 0 \qquad \text{et} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ f & e & d \\ F & E & D \end{vmatrix} < 0.$$

Ceci est absurde : l'équation (7_1) ne peut être vérifiée. On peut d'ailleurs contredire de la même façon n'importe laquelle des équations (7).

Proposition 2. – *Toute configuration centrale plane non convexe de quatre masses égales est symétrique.*

Démonstration. – On suppose encore la configuration non symétrique et on utilise cette fois l'inégalité (9) pour obtenir

$$c < b < a < d < e < f.$$

Fixons les variables D, E et F de sorte que $D < E < F$ et considérons la région de l'espace des $(d,\, e,\, f)$ définie par les deux inégalités

$$d < e \qquad \text{et} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ f & e & d \\ F & E & D \end{vmatrix} > 0.$$

Le triplet $(d,\, e,\, f)$ appartient à cette région quand il passe un graphe concave et croissant par les trois points $(d,\, D)$, $(e,\, E)$ et $(f,\, F)$ de $\mathbb{R}^2$. Il nous reste à contredire l'égalité (7_1) en montrant que la forme linéaire en $(d,\, e,\, f)$

$$2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ f & e & d \\ F & E & D \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ f & e & d \\ A & B & C \end{vmatrix}$$

est négative sur la région ainsi définie. Le troisième déterminant intervenant dans cette égalité est en effet positif. Cette forme est nulle sur la droite $d = e = f$. Il suffit donc de montrer qu'elle est négative sur les deux demi-plans « frontière » de la région, qui se coupent suivant cette droite. Elle vaut $(f - d)\,(2\,E - 2\,D - B + C)$ sur le plan $d = e$, et prend donc le signe de

$$2\,\Delta_2\,\Delta_4 - 2\,\Delta_2\,\Delta_3 - \Delta_1\,\Delta_3 + \Delta_1\,\Delta_4 = (2\,\Delta_2 + \Delta_1)\,(\Delta_4 - \Delta_3)$$

sur la frontière correspondante. L'identité (1) et les inégalités (9) montrent que cette quantité est négative. La forme se réduit d'autre part à son second terme sur le deuxième demi-plan frontière, pour lequel le triplet $(f,\, e,\, d)$ est combinaison linéaire de $(F,\, E,\, D)$ et $(1, 1, 1)$. Elle prend donc le signe de la quantité

$$-\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \Delta_3\,\Delta_4 & \Delta_2\,\Delta_4 & \Delta_2\,\Delta_3 \\ \Delta_1\,\Delta_2 & \Delta_1\,\Delta_3 & \Delta_1\,\Delta_4 \end{vmatrix} = -\Delta_1 \begin{vmatrix} \Delta_2 & \Delta_3 & \Delta_4 \\ 1 & 1 & 1 \\ \Delta_2^2 & \Delta_3^2 & \Delta_4^2 \end{vmatrix},$$

qui est négative, ce qui achève la démonstration.

Note remise et acceptée le 21 novembre 1994.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] A. ALBOUY et A. CHENCINER, Le problème des n corps et les distances mutuelles (en préparation).
[2] O. DZIOBEK, Ueber einen merkwürdigen Fall des Vielkörperproblems, *Astronom. Nachr.*, 152, 1900, p. 33-46.
[3] K. R. MEYER et D. S. SCHMIDT, Bifurcations of relative equilibria in the 4- and 5-body problem, *Ergodic. Theory Dynamical Systems*, 8*, 1988, p. 215-225.

Astronomie et Systèmes Dynamiques, Bureau des Longitudes, 3, rue Mazarine, 75006 Paris, France.