

Académie des sciences (France). Comptes rendus de l'Académie des sciences. Série 1, Mathématique. 1995/01/19.

1/ Les contenus accessibles sur le site Gallica sont pour la plupart des reproductions numériques d'oeuvres tombées dans le domaine public provenant des collections de la BnF. Leur réutilisation s'inscrit dans le cadre de la loi n°78-753 du 17 juillet 1978 :

*La réutilisation non commerciale de ces contenus est libre et gratuite dans le respect de la législation en vigueur et notamment du maintien de la mention de source.

*La réutilisation commerciale de ces contenus est payante et fait l'objet d'une licence. Est entendue par réutilisation commerciale la revente de contenus sous forme de produits élaborés ou de fourniture de service.

Cliquer [ici](#) pour accéder aux tarifs et à la licence

2/ Les contenus de Gallica sont la propriété de la BnF au sens de l'article L.2112-1 du code général de la propriété des personnes publiques.

3/ Quelques contenus sont soumis à un régime de réutilisation particulier. Il s'agit :

*des reproductions de documents protégés par un droit d'auteur appartenant à un tiers. Ces documents ne peuvent être réutilisés, sauf dans le cadre de la copie privée, sans l'autorisation préalable du titulaire des droits.

*des reproductions de documents conservés dans les bibliothèques ou autres institutions partenaires. Ceux-ci sont signalés par la mention Source gallica.BnF.fr / Bibliothèque municipale de ... (ou autre partenaire). L'utilisateur est invité à s'informer auprès de ces bibliothèques de leurs conditions de réutilisation.

4/ Gallica constitue une base de données, dont la BnF est le producteur, protégée au sens des articles L341-1 et suivants du code de la propriété intellectuelle.

5/ Les présentes conditions d'utilisation des contenus de Gallica sont régies par la loi française. En cas de réutilisation prévue dans un autre pays, il appartient à chaque utilisateur de vérifier la conformité de son projet avec le droit de ce pays.

6/ L'utilisateur s'engage à respecter les présentes conditions d'utilisation ainsi que la législation en vigueur, notamment en matière de propriété intellectuelle. En cas de non respect de ces dispositions, il est notamment passible d'une amende prévue par la loi du 17 juillet 1978.

7/ Pour obtenir un document de Gallica en haute définition, contacter reutilisation@bnf.fr.

Systèmes dynamiques/Dynamical Systems

Symétrie des configurations centrales de quatre corps

Alain ALBOUY

Résumé – Nous montrons que toute configuration centrale du problème newtonien plan de quatre corps ayant tous la même masse possède au moins une symétrie.

Symmetry of central configurations of four bodies

Abstract – We prove that every central configuration of the planar Newtonian problem of four bodies with equal masses has at least one symmetry.

QUELQUES RÉSULTATS DE DZIOBEK. – Nous rappelons ici les résultats de l'article [2] dont nous avons besoin. Nous renvoyons le lecteur à [3] pour une introduction générale à cet article et au problème de la symétrie des configurations centrales.

Soient $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3$ et \vec{r}_4 des vecteurs repérant quatre points dans un espace vectoriel euclidien. Nous posons $r_{ij} = \|\vec{r}_i - \vec{r}_j\|$ et

$$a = r_{12}^2, \quad b = r_{13}^2, \quad c = r_{14}^2, \quad d = r_{23}^2, \quad e = r_{24}^2, \quad f = r_{34}^2.$$

Nous supposons les quatre points dans un même plan, ce qui revient à la nullité du déterminant de Cayley

$$S = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a & b & c \\ 1 & a & 0 & d & e \\ 1 & b & d & 0 & f \\ 1 & c & e & f & 0 \end{vmatrix}.$$

Soient $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ et Δ_4 les aires orientées respectives des triangles (2, 3, 4), (4, 3, 1), (1, 2, 4) et (3, 2, 1), qui vérifient

$$(1) \quad \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \Delta_4 = 0.$$

Dziobek obtient, « aus analytisch-geometrischen Untersuchungen »,

$$(2) \quad \frac{\partial S}{\partial r_{ij}^2} = 32 \Delta_i \Delta_j.$$

Introduisons les quatre masses m_1, m_2, m_3 et m_4 , réels strictement positifs dont la somme est notée M , une fonction réelle ψ , et les deux fonctions

$$U = \sum_{1 \leq i < j \leq 4} m_i m_j \psi(r_{ij}^2) \quad \text{et} \quad I = \frac{1}{M} \sum_{1 \leq i < j \leq 4} m_i m_j r_{ij}^2,$$

respectivement appelées *fonction de forces* et *moment d'inertie par rapport au centre de masse*. Dziobek utilise une caractérisation simple des *configurations centrales* : ce sont les points critiques de la fonction U restreinte aux configurations planes de moment d'inertie

Note présentée par Michel HERMAN.

fixé. Pour chacune de ces configurations il existe donc deux nombres réels λ et μ vérifiant, pour tout choix des indices i et j ,

$$(3) \quad \frac{\partial U}{\partial r_{ij}^2} = \lambda \frac{\partial S}{\partial r_{ij}^2} + \mu \frac{\partial I}{\partial r_{ij}^2}.$$

COMPLÉMENTS ALGÈBRIQUES. — Les trois nombres $-\Delta_2/\Delta_1$, $-\Delta_3/\Delta_1$ et $-\Delta_4/\Delta_1$ sont les coordonnées barycentriques du premier point par rapport aux trois autres (Mœbius). Nous pouvons exprimer ceci avec le système

$$(4) \quad \begin{aligned} \Delta_2 a + \Delta_3 b + \Delta_4 c &= \Delta_1 a + \Delta_2 d + \Delta_4 e \\ &= \Delta_1 b + \Delta_2 d + \Delta_4 f = \Delta_1 c + \Delta_2 e + \Delta_3 f. \end{aligned}$$

De l'homogénéité de S et des équations (2) on déduit d'autre part

$$(5) \quad \sum_{1 \leq i < j \leq 4} \Delta_i \Delta_j r_{ij}^2 = 0.$$

Nous supposons désormais les quatre masses égales, de sorte que (3) équivaut à l'existence de deux nombres réels ν et ξ tels que, pour tout choix des indices i et j ,

$$(6) \quad \psi'(r_{ij}^2) = \nu \Delta_i \Delta_j + \xi.$$

Soient $A = \psi'(a)$, ..., $F = \psi'(f)$. Les équations (1), (4) et (6) entraînent

$$(7_1) \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ A & B & C \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ f & e & d \\ A & B & C \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ f & e & d \\ F & E & D \end{vmatrix}$$

$$(7_2) \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & e & d \\ A & E & D \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ f & b & c \\ A & E & D \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ f & b & c \\ F & B & C \end{vmatrix}$$

$$(7_3) \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ f & b & d \\ F & B & D \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & e & c \\ F & B & D \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & e & c \\ A & E & C \end{vmatrix}$$

$$(7_4) \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ f & e & c \\ F & E & C \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & d \\ F & E & C \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & d \\ A & B & D \end{vmatrix}$$

Remarque. — Nous n'avons indiqué le système (4) que pour permettre la vérification directe des équations (7), qui semble requérir un calcul assez long. La coplanarité des quatre masses, qui n'est pas conséquence de (6) et de (7), sera exprimée dans la suite avec la seule équation (5). On peut montrer que quand les r_{ij}^2 correspondent à une configuration plane non alignée, le système (4) ou l'équation (5) caractérisent les aires Δ_i à un facteur près. Signalons enfin que les principes développés dans [1] permettent d'établir facilement les relations (2), (4) et (7), et d'interpréter ce dernier système comme donnant les « configurations équilibrées ».

DÉDUCTION DU RÉSULTAT. — Nous supposons simplement que la fonction ψ' est croissante ($\psi'' > 0$) et concave ($\psi''' < 0$). Ces hypothèses sont notamment vérifiées pour le potentiel newtonien, où l'on pose $\psi(x) = x^{-1/2}$. Le premier membre de (5) serait négatif si les r_{ij}^2 étaient tous égaux, d'après (1), et *a fortiori* s'ils décroissaient quand les $\Delta_i \Delta_j$ croissent. On doit donc avoir $\nu > 0$ dans l'équation (6).

On appelle « configuration convexe » toute configuration plane telle que

$$(8) \quad \Delta_1 \leq \Delta_2 \leq 0 \leq \Delta_3 \leq \Delta_4.$$

Si l'on a par contre

$$(9) \quad \Delta_1 \leq 0 < \Delta_2 \leq \Delta_3 \leq \Delta_4$$

la configuration est dite « non convexe ». On peut toujours se ramener à l'un de ces deux ordres en renumérotant les sommets et en choisissant l'orientation du plan.

Un tétraèdre symétrique possède soit un plan de symétrie contenant deux des sommets, soit un axe de symétrie. Le premier cas est caractérisé par une double égalité de côtés du type $a = b, f = e$, le second par une double égalité du type $a = f, b = e$. D'après les équations (6), et des identités découlant aisément de (1), du type

$$(10) \quad \Delta_3 \Delta_4 - \Delta_1 \Delta_2 = (\Delta_2 + \Delta_3)(\Delta_2 + \Delta_4),$$

toute configuration centrale plane non symétrique vérifie, quitte à renuméroter les sommets et à changer l'orientation du plan,

$$(11) \quad \Delta_1 < \Delta_2 < \Delta_3 < \Delta_4 \quad \text{et} \quad \Delta_1 + \Delta_4 < 0 < \Delta_2 + \Delta_3.$$

PROPOSITION 1. — *Toute configuration centrale plane et convexe de quatre masses égales est symétrique.*

Démonstration. — En utilisant les identités (10), les équations (6), les inégalités (8) et (11) et la croissance de la fonction ψ' , on ordonne les six côtés de la configuration supposée non symétrique :

$$c < b < e < d < a < f.$$

On en déduit, par exemple en interprétant ce déterminant comme l'aire orientée du triangle de \mathbb{R}^2 formé par les points (f, A) , (e, B) et (d, C) , que

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ f & e & d \\ A & B & C \end{vmatrix} > 0.$$

De même, en utilisant cette fois la concavité de la fonction ψ' , on obtient

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ A & B & C \end{vmatrix} > 0 \quad \text{et} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ f & e & d \\ F & E & D \end{vmatrix} < 0.$$

Ceci est absurde : l'équation (7₁) ne peut être vérifiée. On peut d'ailleurs contredire de la même façon n'importe laquelle des équations (7).

PROPOSITION 2. — *Toute configuration centrale plane non convexe de quatre masses égales est symétrique.*

Démonstration. – On suppose encore la configuration non symétrique et on utilise cette fois l'inégalité (9) pour obtenir

$$c < b < a < d < e < f.$$

Fixons les variables D, E et F de sorte que $D < E < F$ et considérons la région de l'espace des (d, e, f) définie par les deux inégalités

$$d < e \quad \text{et} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ f & e & d \\ F & E & D \end{vmatrix} > 0.$$

Le triplet (d, e, f) appartient à cette région quand il passe un graphe concave et croissant par les trois points $(d, D), (e, E)$ et (f, F) de \mathbb{R}^2 . Il nous reste à contredire l'égalité (7₁) en montrant que la forme linéaire en (d, e, f)

$$2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ f & e & d \\ F & E & D \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ f & e & d \\ A & B & C \end{vmatrix}$$

est négative sur la région ainsi définie. Le troisième déterminant intervenant dans cette égalité est en effet positif. Cette forme est nulle sur la droite $d = e = f$. Il suffit donc de montrer qu'elle est négative sur les deux demi-plans « frontière » de la région, qui se coupent suivant cette droite. Elle vaut $(f - d)(2E - 2D - B + C)$ sur le plan $d = e$, et prend donc le signe de

$$2\Delta_2\Delta_4 - 2\Delta_2\Delta_3 - \Delta_1\Delta_3 + \Delta_1\Delta_4 = (2\Delta_2 + \Delta_1)(\Delta_4 - \Delta_3)$$

sur la frontière correspondante. L'identité (1) et les inégalités (9) montrent que cette quantité est négative. La forme se réduit d'autre part à son second terme sur le deuxième demi-plan frontière, pour lequel le triplet (f, e, d) est combinaison linéaire de (F, E, D) et $(1, 1, 1)$. Elle prend donc le signe de la quantité

$$-\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \Delta_3\Delta_4 & \Delta_2\Delta_4 & \Delta_2\Delta_3 \\ \Delta_1\Delta_2 & \Delta_1\Delta_3 & \Delta_1\Delta_4 \end{vmatrix} = -\Delta_1 \begin{vmatrix} \Delta_2 & \Delta_3 & \Delta_4 \\ 1 & 1 & 1 \\ \Delta_2^2 & \Delta_3^2 & \Delta_4^2 \end{vmatrix},$$

qui est négative, ce qui achève la démonstration.

Note remise et acceptée le 21 novembre 1994.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] A. ALBOUY et A. CHENCINER, Le problème des n corps et les distances mutuelles (en préparation).
- [2] O. DZIOBEK, Ueber einen merkwürdigen Fall des Vielkörperproblems, *Astronom. Nachr.*, 152, 1900, p. 33-46.
- [3] K. R. MEYER et D. S. SCHMIDT, Bifurcations of relative equilibria in the 4- and 5-body problem, *Ergodic Theory Dynamical Systems*, 8*, 1988, p. 215-225.