BIFURCATIONS DE DIFFEOMORPHISMES DE $\mathbb{R}^2$

AU VOISINAGE D'UN POINT FIXE ELLIPTIQUE

A. CHENCINER
Departement de Mathématiques
Université Paris VII
2, place Jussieu
75251 - PARIS Cedex 05

Cours à l'école d'été des Houches
Juillet 1981

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION : EQUATIONS DIFFERENTIELLES ET DIFFEOMORPHISMES ; EXEMPLES AUTOUR DE VAN der POL ET DE LIENARD.

1. Equations de Van der Pol et de Liénard
2. Bifurcations de familles à 1 paramètre
3. Bifurcations de familles à 2 paramètres
4. Equations non autonomes et difféomorphismes

I. DU THEOREME DES CONTRACTIONS AU THEOREME DES FONCTIONS IMPLICITES : PERSISTANCE DES POINTS FIXES

1. Contractions
2. Contractions déguisées : hyperbolicité
3. Fonctions implicites
4. Courbes invariantes

II. FORMES NORMALES DE DIFFEOMORPHISMES DE $\mathbb{R}^2$ AU VOISINAGE D'UN POINT FIXE

1. Calculs formels
2. Familles à paramètres
3. Etude géométrique des familles génériques de formes normales tronquées (cas "non fortement résonnant")
4. Résonances fortes

III. BIFURCATIONS DE COURBES INVARIANTES NORMALEMENT HYPERBOLIQUES

1. Domaines d'hyperbolicité normale $\mathcal{H}$
2. Théorèmes de bifurcation lorsque $\mu \in \mathcal{H}$
3. Dynamique sur les courbes invariantes

IV. BIFURCATIONS DE COURBES INVARIANTES NON NORMALEMENT HYPERBOLIQUES

1. Introduction
2. Résultats
3. Idée des démonstrations

V. BIFURCATIONS DE POINTS HOMOCLINIQUES

CONCLUSION

BIFURCATIONS DE DIFFEOMORPHISMES DE $\mathbb{R}^2$ AU VOISINAGE D'UN POINT FIXE ELLIPTIQUE

A. CHENCINER

Université Paris VII

Note liminaire : Le texte qui suit ne contient pas de démonstration précise ; il doit être considéré comme l'exposition d'un courant d'idées et un guide pour la littérature (un peu trop) abondante sur le sujet.

Par rapport aux approches existantes la nouveauté consiste en l'exhibition dès la codimension deux de phénomènes du type conservatif (déployés dans l'espace des paramètres) par opposition aux phénomènes dissipatifs étudiés dans la théorie classique des bifurcations.

Figure 0

INTRODUCTION : Equations différentielles et diffeomorphismes ; exemples autour de Van der Pol et Liénard :

Once in possession of the general theory two roads lay open before us. We could follow Poincaré, Levi-Civita, Birkhoff, and study "two degrees of freedom" and the extensive doctrine centering around the 3-body problem. The second and more modest road which we have selected led to non-linear differential equations of the second order : the group of problems stirred up a generation ago by Van der Pol.

Solomon Lefschetz 1957

1 - Le phénomène des oscillations non-linéaires a été particulièrement étudié sur les équations du type

$$(1) \qquad \frac{d^2x}{dt^2} + f(x)\frac{dx}{dt} + x = 0$$

En posant

$$y = \frac{dx}{dt} + F(x) \quad , \quad F(x) = \int_0^x f(\xi)\,d\xi \quad ,$$

on obtient le système (champ de vecteurs,...) equivalent

$$(2) \qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y - F(x) \\[2ex] \dfrac{dy}{dt} = -x \end{cases}$$

Soit $u(x,y) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}$; le long d'une solution (orbite, courbe intégrale, trajectoire,...) de (2) on a $\frac{du}{dt} = -x\,F(x)$;

u est donc une fonction de Liapunov (décroissante sur les orbites) dès que $x\,F(x) > 0$ pour $x \neq 0$, ce qui force alors l'origine à être un attracteur global (Fig. 1).

figure 1

Lorsque $x\,F(x)$ n'est pas de signe constant pour $x \neq 0$ des orbites périodiques peuvent apparaître (puisque $(0,0)$ est la seule singularité (=position d'équilibre=point singulier) de (2) il s'agit forcément de courbes fermées entourant l'origine) ; l'archétype de cette situation est l'équation de Van der Pol $[F(x) = \mu(x^2-1),\ \mu > 0]$ dont l'étude et l'origine, qui remontent aux années 20, sont résumées respectivement sur les figures 2 et 3 (on remarquera que $x\,F(x) < 0$ pour $x \neq 0$ assez petit : l'origine est donc un répulseur). Un bon article de revue, contenant une abondante bibliographie, est [V] Pour un bon exposé mathématique, voir [L] chapitre 11.

Remarque : Les figures 2 et 3 correspondent au cas où $\mu \ll 1$; le cas $\mu \gg 1$ est assez différent phénoménologiquement, mais pas topologiquement.

Figures 2 et 3

Plusieurs techniques sont disponibles pour prouver l'existence d'orbites

périodiques d'un champ de vecteurs dans le plan ; dans le cas de l'équation de Van der Pol il suffit, grâce à la symétrie par rapport à l'origine du champ de vecteurs, d'étudier l'application de "demi-premier retour" qui à un point A situé sur le demi-axe Oy positif fait correspondre le premier point C où l'orbite issue de A coupe le demi-axe Oy négatif (Fig. 2) : une orbite périodique correspond à OA = -OC ; un argument de monotonie montre alors l'existence et l'unicité de l'orbite périodique, ainsi que son caractère attractant.

Plus généralement, on peut chercher des anneaux dans lesquels rentre (ou sort) le champ de vecteurs ; s'il n'y a pas de singularité dans un tel anneau, le théorème de Poincaré-Bendixson (voir [L] ou [H.S.]) fournit une orbite périodique, mais l'unicité reste un problème difficile (voir figure 4). On trouvera dans [L.M.P.] une étude du nombre d'orbites périodiques de (2) en liaison avec le degré du polynôme $F(x)$.

Figure 4

Enfin, et c'est notre thème principal, on peut chercher à voir apparaître de petites orbites périodiques dans une famille à plusieurs paramètres d'équations différentielles : de global le problème devient local et donc justiciable de calculs de perturbation, ce qui ne peut que plaire à des physiciens .

Dans le paragraphe suivant nous indiquons l'esprit de cette approche

dans le cas de l'équation de Van der Pol avec μ petit.

2- Pour $\mu > 0$ le changement de variables

$$(3) \qquad \begin{cases} X = x\sqrt{\mu} \\ Y = y\sqrt{\mu} \end{cases}$$

transforme le système (2) (où $F(x) = \mu\left(\frac{x^3}{3} - x\right)$) en

$$(4) \qquad \begin{cases} \frac{dX}{dt} = Y - \left(\frac{X^3}{3} - \mu X\right) \\ \frac{dY}{dt} = -X \end{cases}$$

Nous allons étudier (4) pour μ voisin de 0 en oubliant la restriction $\mu > 0$.

(4) s'écrit encore

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{X^3}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de $A_\mu = \begin{pmatrix} \mu & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ sont (pour $|\mu| < 2$)

$$\lambda_\mu = \frac{\mu}{2} + i\sqrt{1 - \frac{\mu^2}{4}} \quad , \quad \bar{\lambda}_\mu = \frac{\mu}{2} - i\sqrt{1 - \frac{\mu^2}{4}} \quad ;$$

des vecteurs propres correspondants sont, par exemple,

$$e_\mu = \begin{pmatrix} \lambda_\mu \\ -1 \end{pmatrix} \quad , \text{ et } \quad \bar{e}_\mu = \begin{pmatrix} \bar{\lambda}_\mu \\ -1 \end{pmatrix} \quad .$$

Dans la base $\{e_\mu, \bar{e}_\mu\}$ les coordonnées d'un vecteur réel sont de la forme $(\xi, \eta = \bar{\xi})$; un tel vecteur est donc repéré par le seul nombre complexe ξ ; dans cette identification de $\mathbb{R}^2$ à $\mathbb{C}$, l'équation (4) s'écrit :

$$(5) \qquad \frac{d\xi}{dt} = \lambda_\mu \xi - \frac{1}{2i\sqrt{1-\frac{\mu^2}{4}}} \frac{(\lambda_\mu \xi + \bar{\lambda}_\mu \bar{\xi})^3}{3}$$

le changement de variables

$$(6) \qquad z = \lambda_\mu \xi \in \mathbb{C}$$

transforme (5) en

$$(7) \qquad \frac{dz}{dt} = \lambda_\mu z - \frac{\lambda_\mu}{2i\sqrt{1-\frac{\mu^2}{4}}} \frac{(z+\bar{z})^3}{3}$$

Si on remarque, comme l'a fait Poincaré dans sa thèse, qu'un changement de variables de la forme

$$(8) \qquad \zeta = z + \sum_{i+j=3} \gamma_{ij} z^i \bar{z}^j \qquad (\gamma_{ij} \in \mathbb{C})$$

transforme l'équation

$$\frac{dz}{dt} = \lambda z + \sum_{i+j=3} a_{ij} z^i \bar{z}^j \qquad \text{en}$$

$$\frac{d\zeta}{dt} = \lambda \zeta + \sum_{i+j=3} \left((i\lambda + j\bar{\lambda} - \lambda)\gamma_{ij} + a_{ij}\right) \zeta^i \bar{\zeta}^j + O(|\zeta|^4),$$

on peut ramener (7) à l'équation

$$(9) \qquad \frac{d\zeta}{dt} = \lambda_\mu \zeta - \frac{\lambda_\mu}{2i\sqrt{1-\frac{\mu^2}{4}}} \zeta |\zeta|^2 + O(|\zeta|^4)$$

Bien entendu, si $\mu \neq 0$, $\lambda_\mu + \bar{\lambda}_\mu \neq 0$ et on peut supprimer tous les termes d'ordre 3 dans (7) ; pour $\mu = 0$ ce n'est plus possible à cause de la "résonnance" $2\lambda_0 + \bar{\lambda}_0 = \lambda_0$; si on veut des changements de coordonnées dépendant gentiment de μ, il faut conserver les termes en $z|z|^2$ pour tous les μ proches de 0 (voir fig. 26). Une excellente référence est le chapitre 5 de [A_1] : nous verrons en détail le cas des difféomorphismes un peu plus loin.

L'équation (9) est facile à étudier si l'on oublie les termes $O(|\zeta|^4)$; elle a en effet la propriété particulièrement agréable de laisser invariant le "feuilletage" des cercles centrés à l'origine : l'image d'un tel cercle au bout du temps t est encore un cercle analogue (Fig. 5).

Figure 5

En particulier, une orbite périodique ne peut être qu'un cercle centré à l'origine et la recherche d'une telle orbite se ramène à la recherche des réels $r > 0$ tels que

$$\lambda_\mu \left(1 - \frac{r^2}{2i\sqrt{1-\frac{\mu^2}{4}}}\right) \qquad \text{soit purement imaginaire}$$

(en effet, si $|\zeta| = r$, $\frac{d\zeta}{dt}$ est alors orthogonal à ζ).

~~Cette~~ condition ~~(10)~~ s'écrit encore $r = \sqrt{\mu}$ ce qui prouve l'existence pour $\mu > 0$, d'une orbite périodique (attractante) pour l'équation (9) dans laquelle on oublie le terme $O(|\zeta|^4)$.

La figure 6 représente le "portrait de phase" de cette équation pour les diverses valeurs de μ , dans l'espace produit $\mathbb{R} \times \mathbb{C}$ (coordonnées μ, ζ) : cela signifie qu'on trace le portrait de phase de l'équation

$$(10) \quad \begin{cases} \dfrac{d\zeta}{dt} = \lambda_\mu \zeta - \dfrac{\lambda_\mu}{2i\sqrt{1-\frac{\mu^2}{4}}} \zeta |\zeta|^2 \\ \\ \dfrac{d\mu}{dt} = 0 \end{cases}$$

Figure 6

Il s'agit de ce qui est classiquement appelé (au moins en Occident) une "bifurcation de Hopf" supercritique (voir [A_1] chapitre 6 §.33, en particulier le haut de la page 259 où Arnold préfère l'appeler bifurcation de Poincaré-Andronov).

Lorsque $\mu > 0$ est assez proche de 0, on peut montrer (nous indiquerons comment à propos des bifurcations de Hopf des difféomorphismes, plus générales) que les termes en $O(|\zeta|^4)$ sont suffisamment petits par rapport à l'attraction de l'orbite périodique de l'équation tronquée pour que cette orbite périodique subsiste, légèrement perturbée, pour l'équation (9), et donc pour l'équation de Van der Pol.

Remarque 1 :

Contrairement aux apparences, l'équation (4) (ou plutôt la famille d'équations (4) paramétrée par μ) présente le phénomène de "bifurcation" d'une orbite périodique à partir d'une position d'équilibre

dans $\mathbb{R}^2$ dans toute sa généralité (il faudrait dire "généricité") : tout d'abord, pour la valeur critique $\mu = 0$, le spectre de l'équation linéarisée rencontre l'axe imaginaire $(\lambda_0 = i)$; s'il n'en était pas ainsi, l'origine serait un attracteur stable (deux valeurs propres de partie réelle négative) ou un répulseur stable (deux valeurs propres de partie réelle positive) ou un col stable (deux valeurs propres réelles non nulles de signes différents) et il ne se passerait rien de nouveau au voisinage de $z = 0$ pour $\mu \neq 0$ assez petit.

Si une des valeurs propres est égale à 0 pour $\mu = 0$, une petite perturbation fait en général disparaître le point singulier et aucune orbite périodique n'apparait (voir [A_1] chapitre 6 §.32). Il reste le cas où le spectre de l'équation linéarisée est, pour $\mu = 0$, sur l'axe imaginaire (et non nul) ; puisqu'aucune valeur propre n'est nulle pour $\mu = 0$ une application immédiate du théorème des fonctions implicites montre qu'une petite perturbation d'une telle équation possède encore une point singulier proche de 0 ; par un petit changement de coordonnées on peut supposer que ce point singulier est 0 : le fait que pour tout μ l'équation (4) ait un point singulier en 0 n'est donc pas une restriction.

Enfin, dans une famille à 1 paramètre générale, le spectre de l'équation linéarisée au point singulier traverse l'axe imaginaire lorsque μ traverse la valeur critique $\mu = 0$, ce qui est bien réalisé dans (4).

Sous ces seules conditions un théorème de nature <u>purement topologique</u>,

dû initialement à Alexander et Yorke, (voir [Lem] pour une exposé qui présente l'intérêt d'apprendre à ceux qui ne le savent pas ce qu'est un groupe d'homotopie et le J. homomorphisme) affirme l'existence dans l'espace produit $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^2$ d'une famille à 1 paramètre d'orbites périodiques issues de $(\mu, X, Y) = (0, 0, 0)$ (il s'agit d'un disque plongé dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^2$, dont les intersections avec les plans $\mu = \mu_0$ petit sont des orbites périodiques de l'équation correspondante : voir fig. 7).

Figure 7

"Génériquement", les termes non linéaires font de l'origine un attracteur ou un répulseur (faible) pour $\mu = 0$.
La famille d'orbites périodiques se trouve alors du côté $\mu > 0$ ou du côté $\mu < 0$ puisqu'elle ne peut intersecter le plan $\mu = 0$ (au moins au voisinage de l'origine).

C'est ce qui se passe pour la famille (4) (pour $\mu = 0$ l'origine est un attracteur faible) mais pas pour la famille de Van der Pol, qui au voisinage de 0 ne se distingue pas qualitativement d'une famille d'équations linéaires (la bifurcation est alors "dégénérée", toutes les orbites périodiques voisines de l'origine apparaissant pour la seule valeur $\mu = 0$ ainsi que le montre la Fig. 8).

Figure 8

Le mérite de notre calcul approché n'est donc pas tellement de prouver l'existence d'orbites périodiques pour μ petit, mais de les localiser assez précisément (en particulier pour l'équation de Van der Pol, on constate en suivant dans l'ordre inverse les changements de variable, que le cycle obtenu pour μ petit est voisin du cercle $x^2+y^2=4$; pour une démonstration rapide utilisant la méthode de moyennisation, voir [A_1] chapitre 4, §.17.D).

Remarque 2

Il existe beaucoup de démonstrations analytiques du théorème de bifurcation que nous venons d'évoquer ; pour une méthode utilisant l'application de premier retour de Poincaré au voisinage de 0, voir [R.T.] § 6 .

Remarque 3

Les théorèmes de bifurcation sont des théorèmes locaux : dès que μ grandit, on ne sait rien dire par ces méthodes de la localisation (ou du destin) de l'orbite périodique ainsi dénichée. Un bel exemple de cette affirmation se trouve dans [B.C.D.D.] à propos de l'équation

$$(11)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} + \mu\left(x^2-1\right)\dfrac{dx}{dt} + \mu\left(x-a\right) = 0 \ , \\ a \text{ voisin de } 1,\ \mu \text{ très grand} \ , \end{cases}$$

que les auteurs étudient (sous l'impulsion de G. Reeb) par des méthodes d'analyse non standard (μ infiniment grand).

On y relève en particulier les dessins suivants (Fig. 9)

Figure 9

3 - La famille de fonctions $F_\mu(x) = \frac{x^3}{3} - \mu x$ est un déploiement universel de $F_0(x) = \frac{x^3}{3}$ (pour une vue plongeante et des références sur la notion de déploiement universel, voir [A_1], [Ch_1], [Ch_2]).

Si on remplace x^3 par x^5 et que l'on ne considère comme Van der Pol que des fonctions impaires, on est amené à étudier la famille à deux paramètres d'équations du type (2) obtenue en posant

$$(12) \qquad F_{\mu,\nu}(x) = \frac{x^5}{5} - \nu\frac{x^3}{3} - \mu x$$

La figure 10 résume la forme du graphe de $F_{\mu,\nu}$ pour les différentes valeurs de μ et ν ; les experts reconnaitront dans la réunion de la droite $\mu = 0$ et de la parabole pointillée une section de la surface appelée "queue d'aronde".

Figure 10

Remarquons que, si (ν,μ) est en dessous de la courbe formée de la demi-droite $\mu = 0$, $\nu \leqslant 0$, et de la demi-parabole $\mu = -\frac{5\nu^2}{36}$, $\nu \geqslant 0$, on a $x\,F_{\mu,\nu}(x) > 0$ pour $x \neq 0$; nous avons vu au début que ceci indique que l'origine est un attracteur global (en particulier il n'y a pas d'orbite périodique). De même, si $\mu > 0$, on peut conclure à l'existence d'une unique orbite périodique (attracteur) par le théorème de Liénard (voir [L] chapitre XI §.2).

Fixons maintenant une valeur $\nu = \nu_0$ et considérons la famille à

un paramètre μ ainsi obtenue :

Si $\nu_0 < 0$, on assiste lorsque μ passe d'une petite valeur négative à une petite valeur positive au phénomène de bifurcation de Hopf décrit dans le paragraphe précédent (tout se passant au voisinage de l'origine, on peut pratiquement oublier le terme en x^5).

Si $\nu_0 > 0$, la situation est plus complexe :

lorsque μ passe d'une valeur légèrement positive à une valeur légèrement négative il apparait une petite orbite périodique répulsive (phénomène analogue à la bifurcation discutée plus haut à l'exception d'un signe ...) ; par ailleurs, l'orbite périodique attractante d'amplitude finie qui existe pour $\mu > 0$ par le théorème de Liénard continue à exister (stabilité), et un théorème de Ryckov (cité dans [L.M.P.]) affirme que l'équation (2) a au plus deux orbites périodiques lorsque le degré de F est égal à 5 .

Il existe donc une région bordée par la demi-droite $\mu = 0$, $\nu \geqslant 0$ et contenue entre cette demi-droite et la demi-parabole $\mu = -\frac{5\nu^2}{36}$, $\nu \geqslant 0$ correspondant à des $F_{\mu,\nu}$ ayant exactement deux orbites périodiques, l'une (la plus grande) attractante, l'autre répulsive (Fig. 12).

Figure 12

Lorsque $\mu < 0$, l'origine est un répulseur (local) ; il existe donc un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^2$ (d'autant plus petit que μ est proche de 0) dans lequel l'équation (2) n'a pas d'orbite périodique. Il est alors facile de montrer que la seule façon qu'ont les deux orbites

périodiques ci-dessus de disparaitre lorsque μ décroît ($\nu = \nu_0 > 0$ fixé) est d'entrer en collision (Fig. 13)

Figure 13

Exercice (Ayant été prévenu trop tard qu'il aurait à faire ce cours, l'auteur n'a pas eu le temps de faire l'exercice mais est néanmoins persuadé de la justesse de l'affirmation dont il demande la démonstration, sinon de la facilité de cette dernière) : montrer qu'il existe une courbe Γ régulière comme sur la figure 14, limitant le domaine du plan (μ, ν) correspondant à des équations ayant deux orbites périodiques (domaine noté 2).

Figure 14

Remarque :

Le phénomène de collision de 2 orbites périodiques l'une attractante, l'autre répulsive se produit "génériquement" pour des valeurs isolées du paramètre dans des familles à 1 paramètre d'équations différentielles ; pour ces valeurs critiques, les deux orbites périodiques sont confondues en une orbite périodique attractante d'un côté et répulsive de l'autre (on dit qu'elle est "non normalement hyperbolique"): bien que cette orbite soit d'amplitude finie, l'étude de ses avatars est encore un problème local car il se ramène par la méthode des sections de Poincaré à l'étude au voisinage d'un point fixe d'un difféomorphisme local de $\mathbb{R}$ dont la dérivée au point fixe est égale à 1 (voir [A_1] chapitre 6, §.34B).

Ce ne sera plus le cas pour la situation analogue concernant des familles de difféomorphismes ; cette dernière sera en fait la source des phénomènes de type Hamiltonien qui nous intéresseront.

4 - Le problème de la démultiplication des fréquences en électricité conduit à des équations de la forme

$$(13) \qquad \frac{d^2x}{dt^2} + f(x)\frac{dx}{dt} + x = \varphi(t)$$

qui ne diffèrent de (1) que par l'existence d'un second membre périodique en t (force électromotrice appliquée).

Une bonne partie des méthodes de la dynamique qualitative peut-être mise en oeuvre sur ce type d'équations, qui est d'ailleurs à l'origine de certaines d'entre elles (voir les souvenirs de S. Smale dans [S] concernant les travaux classiques de Cartwright-Littlewood et Levinson ; ceux-ci n'étant pas notre propos, nous renvoyons à [C_a] et [L_e]).

Si T est la période de φ, (13) définit un champ de vecteurs sur le tore plein $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}/T\mathbb{Z}$ (coordonnées x, $y = \frac{dx}{dt} + F(x)$, θ défini modulo T) par les formules

$$(14) \qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y - F(x) \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + \varphi(\theta) \\ \dfrac{d\theta}{dt} = 1 \end{cases}$$

Les solutions de (14) se projettent sur le cercle $\mathbb{R}/T\mathbb{Z}$ en les solutions de $\frac{d\theta}{dt} = 1$; une solution issue du plan $\theta = 0$ recoupe donc ce plan au temps $\theta = T$ (Fig.15) ce qui fournit un difféomorphisme $P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ appelé "application de Poincaré". Il est clair que l'étude qualitative de (14) equivaut à l'étude qualitative de P du point de vue de l'itération (une orbite périodique de (14) de période nT correspond à une orbite périodique de P de période n, un tore invariant de (14) correspond à une courbe fermée invariante de P, etc...

Figure 15

Si $\varphi = 0$, le difféomorphisme P (que nous noterons P_0) n'est autre que celui qui, au couple (x,y), associe la solution au temps T, $(x(T), y(T))$, de l'équation (2) qui vérifie $x(0) = x$, $y(0) = y$.

Pour des fonctions φ suffisamment petites, le difféomorphisme P obtenu est une perturbation de P_0 ; en particulier, les points fixes de P_0 en lesquels le spectre de DP_0 ne contient pas la valeur propre 1 existent encore (légèrement déplacés) pour P, ce qui fournit des orbites périodiques de période T de (14).

Puisque le spectre de DP_0 en un point fixe (x_0, y_0) de P_0 n'est autre que l'image par l'application $z \to e^{Tz}$ du spectre de l'équation (2) linéarisée en ce point, nous voyons apparaître des problèmes de résonnance : c'est en particulier le cas lorsqu'on perturbe une famille d'équations (2) présentant une bifurcation de Hopf par

un terme $\varphi(t)$ dont la période est égale à un multiple entier de la période de l'orbite périodique qui est en train de naître (le spectre de l'équation (2) linéarisée pour la valeur critique du paramètre est $(\pm i\omega)$, la période en question est $\frac{2\pi}{\omega}$; si $T = n.\frac{2\pi}{\omega}$, le spectre de DP_0 au point fixe correspondant est réduit à une valeur propre double égale à $1 = e^{n.\frac{2\pi}{\omega}(\pm i\omega)}$).

La méthode utilisée au paragraphe 2 nous ramène à l'étude d'une famille d'équations définies au voisinage de $0 \in \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ par

$$(15) \qquad \frac{dz}{dt} = (\mu + i\omega)z - \alpha z|z|^2 + O(|z|^4) + \varepsilon\Psi(t) .$$

Les paramètres sont $(\mu, \omega, \varepsilon)$ voisin de $(0, \omega_0, 0)$, Ψ est périodique de période $\frac{2\pi}{\omega_0}$, et P est le difféomorphisme local (i.e. défini au voisinage de 0) qui à $z(0)$ associe $z(T)$.

En utilisant la méthode de variations des constantes pour écrire $z(T)$, on approche la famille des difféomorphismes P par une famille de difféomorphismes $\tilde{P}$ (définis au voisinage de 0) de la forme :

$$(16) \qquad \tilde{P}(z) = (1+\mu)e^{i\gamma}z - a|z|^2 z + \varepsilon b$$

Les paramètres sont $(\mu, \gamma, \varepsilon)$ proches de $(0,0,0)$, et $\mathrm{Re}\, a > 0$.

La figure 16 indique suivant les régions de l'espace $(\mu, \gamma, \varepsilon)$ le nombre de points fixes de $\tilde{P}$; signalons que les difféomorphismes locaux $\tilde{P}$ definis par (16) sont loin d'être complètement compris.
(voir cependant [G]).

Figure 16

Dans la suite de ce cours nous étudions les modifications apportées par une petite perturbation périodique aux bifurcations qui ont été illustrées dans les paragraphes 2 et 3 ; si on excepte les phénomènes de résonance tel celui qui vient d'être évoqué, on est ramenés au problème suivant :

Etudier, du point de vue de l'itération, une famille de difféomorphismes locaux de $\mathbb{R}^2$ perturbant un difféomorphisme local $P_0 : \mathbb{R}^2, 0 \to \mathbb{R}^2, 0$ qui admette 0 comme point fixe elliptique (ce qui signifie que le spectre de $D P_0(0)$ est contenu dans le cercle unité de $\mathbb{C}$ et non réel).

Remarque :

La méthode des sections de Poincaré permet d'associer à toute orbite périodique d'une équation différentielle définie dans une variété de dimension n un difféomorphisme local $P : \mathbb{R}^{n-1}, 0 \to \mathbb{R}^{n-1}, 0$.
Pour une vue générale des bifurcations d'orbites périodiques, voir [A_1] chapitre 6 § 34.

I. DU THEOREME DES CONTRACTIONS AU THEOREME DES FONCTIONS IMPLICITES : PERSISTANCE DES POINTS FIXES

J'étais autrefois bien nerveux. Me voici sur une nouvelle voie :
Je mets une pomme sur ma table. Puis je me mets dans cette pomme. Quelle tranquillité !

Henri Michaux

Soit $P : \mathcal{V}, X_0 \to \mathcal{W}, X_0$ un difféomorphisme de classe C^∞ (C^1 suffirait) defini sur un voisinage $\mathcal{V}$ du point $X_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ tel que $P(X_0) = X_0$ (Fig. 17). Rappelons que " P de classe C^r " signifie que les dérivées partielles de P et P^{-1} jusqu'à l'ordre r existent et sont continues sur le domaine de définition de P, et que, d'après la règle de dérivation des applications composées, la dérivée de P en X_0, $DP(X_0)$, est un isomorphisme linéaire de $\mathbb{R}^2$ dont l'inverse est $DP^{-1}(X_0)$.

Figure 17

Soit $Q : \mathcal{V} \to \mathcal{U}$ un difféomorphisme de classe C^∞ proche de P dans la topologie C^1 (Q et ses dérivées partielles sont respectivement proches de P et ses dérivées partielles). Nous allons examiner plusieurs arguments prouvant sous certaines hypothèses que Q possède un point fixe Y_0 (i.e. $Q(Y_0) = Y_0$) proche de X_0.

1. Contractions

Supposons que le spectre de $DP(X_0)$ soit contenu dans l'intérieur du disque unité de $\mathbb{C}$ (s'il est contenu dans l'extérieur, on applique le même argument à l'inverse P^{-1}). Il existe alors un voisinage $\mathcal{V}' \subset \mathcal{V}$ de X_0 d'adhérence compacte (comme un disque) tel que

(i) $P(\overline{\mathcal{V}'}) \subset \overline{\mathcal{V}'}$

(ii) la restriction de P à $\overline{\mathcal{V}'}$ est une contraction.

Si Q est assez proche de P dans la topologie C^1, Q possède également ces deux propriétés et a donc un unique point fixe dans $\overline{\mathcal{V}'}$.

Le raisonnement ci-dessus est presque correct. Le seul problème est que, si le spectre de $DP(X_0)$ n'est pas réel, pour que $\|DP(X_0)\|$ soit inférieur à 1 et donc que $P|\mathcal{V}'$ soit vraiment une contraction, il faut bien choisir la mesure des longueurs (la norme) dans $\mathbb{R}^2$ ou, ce qui revient au même, faire un changement de coordonnées linéaires qui transforme $DP(X_0)$ en le composé d'une rotation et d'une homothétie de rapport < 1 (voir Figure 18).

Figure 18

Ce n'est pas parce que $DP(X_0)$ envoie chaque ellipse d'un feuilletage sur une ellipse strictement plus petite que $\|DP(X_0)X\| < \|X\|$; cela devient vrai après un changement de variables transformant les ellipses en cercles.

Remarquons que nous avons non seulement prouvé que Q possède un point fixe Y_0 proche de X_0, mais nous avons également une idée précise (au sens topologique) de la dynamique de Q au voisinage de Y_0 (Y_0 est un attracteur).

C'est en quelque sorte cette dynamique qui force le point fixe Y_0 à exister.

2. Contractions déguisées : hyperbolicité

Supposons maintenant que le spectre de $DP(X_0)$ soit formé de deux valeurs propres réelles λ_s, λ_u, telles que

$$0 < |\lambda_s| < 1 < |\lambda_u|$$

(λ_s comme stable, λ_u comme instable en anglais).

Il sera commode de supposer que $X_0 = O$ et que les vecteurs propres de $DP(0)$ sont portés par les axes de coordonnées (l'axe des x pour λ_u, l'axe des y pour λ_s).

Si Q est proche de P, on peut montrer que Q possède un point fixe Y_0 proche de $X_0 = O$ de la manière suivante :

i) on montre que P laisse (localement) invariantes deux courbes C^∞, $W_0^u(P)$ et $W_0^s(P)$, passant par O et respectivement tangentes aux axes de coordonnées, telles que la restriction $P|_{W_0^u(P)}$ (resp. $P|_{W_0^s(P)}$) soit une dilatation (resp. une contraction) : ces deux courbes sont une version locale non-linéaire des directions propres de $DP(0)$ (voir la Figure 19 où quelques orbites de P sont représentées); on les appelle variété instable et variété stable de P en O.

Figure 19

ii) on montre que si Q est assez proche de P, Q laisse également (localement) invariantes deux courbes C^∞, $W^u(Q)$, $W^s(Q)$, respectivement proches de $W^u_0(P)$, $W^s_0(P)$, et s'intersectant donc transversalement en un point Y_0 proche de $X_0 = 0$; une telle intersection vérifie forcément $Q(Y_0) = Y_0$ (Figure 20).

Figure 20

La démonstration de ces deux points utilise encore le théorème des contractions, mais cette fois dans un espace de courbes (donc de dimension infinie) et non plus dans un domaine de $\mathbb{R}^2$. Comme précédemment, le (ii) se déduit du (i) parce qu'une petite (dans le sens C^1) perturbation d'une contraction est encore une contraction.

Précisons un peu cette idée (qui remonte à Hadamard) car elle sera importante dans l'étude des bifurcations : soit $\sigma = \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue ; l'image par $DP(0)$ du graphe de σ est encore le graphe d'une application qu'on note $F(\sigma) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Le choix des axes de coordonnées implique que $DP(0)(x,y) = (\lambda_u x, \lambda_s y)$ et donc (voir Figure 21):

$$F(\sigma)(x) = \lambda_s \, \sigma\left(\frac{x}{\lambda_u}\right) \tag{17}$$

Figure 21

On remarque que la fonction nulle (dont le graphe est l'axe des x, variété instable de $DP(0)$, est un point fixe de cette transformation ; de plus, si σ est uniformément bornée, $F^n(\sigma)$ tend uniformément vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$; Enfin, si σ est C^k avec

des dérivés uniformément bornées, $F(\sigma)$ est C^k et les k dérivées de $F^n(\sigma)$ tendent uniformément vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.
Il est donc naturel de chercher $W_0^u(P)$ comme point fixe d'une "transformée de graphes" F qui soit une contraction dans un espace fonctionnel bien choisi : pour que l'image d'un graphe soit encore un graphe, on est amenés à ne considérer que des fonctions au moins Lipshitziennes $(|\sigma(x)-\sigma(x')| \leq k\,|x-x'|)$ et définies seulement sur un intervalle $[-r,+r]$ ($F(\sigma)$ est alors définie comme la restriction à cet intervalle de la fonction dont P (graphe σ) est le graphe, restriction qui existe car P dilate au voisinage de 0 dans la direction horizontale).

En choisissant un espace fonctionnel formé de fonctions ayant une certaine classe de dérivabilité, on montre que $W_0^u(P)$ (qui est unique, car caractérisée comme l'ensemble des points X proches de 0 tels que $\lim_{n\to+\infty} P^{-n}(X)=0$) est C^k ; ceci étant vrai pour tout k, $W_0^u(P)$ est C^∞.
Pour une démonstration raffinée donnant les meilleurs résultats (pas de perte de différentiabilité en différentiabilité finie) voir le chapitre 5 de [Sh].

Quant à l'existence de $W_0^s(P)$, elle se prouve en remarquant que $W_0^s(P) = W_0^u(P^{-1})$.

3. Fonctions implicites

Bien entendu, la meilleure démonstration de persistance d'un point fixe est celle qui, supposant simplement que 1 n'est pas dans le spectre de $DP(X_0)$ en déduit (c'est la définition) que $DP(X_0) - Id$ est inversible,

donc (théorème des fonctions implicites) que $(P - Id)$ est un difféomorphisme d'un voisinage de X_0 sur un voisinage de 0 ; il en est donc de même de $Q - Id$ si Q est C^1 proche de P, ce qui montre l'existence d'un point Y_0 proche de X_0 tel que $Q(Y_0) - Y_0 = 0$.

La différence essentielle entre cette approche et la méthode des contractions est que maintenant nous n'avons aucun moyen de comparer la dynamique de Q au voisinage de Y_0 à la dynamique de P au voisinage de X_0 (dans les deux cas précédents, on peut montrer que ces dynamiques sont topologiquement les mêmes dans le sens où il existe un changement local de coordonnées continu qui transforme Q en P et même en $DP(0)$; il y a stabilité locale ; voir [Sh] chapitre 7).
A titre d'exemple, si $DP(0)$ est une rotation, Q peut présenter des dynamiques aussi différentes que celles représentées sur la Figure 22.

Figure 22

... Heureusement, puisque le but du cours est justement d'étudier la dynamique de tels difféomorphismes Q, au moins de ceux qu'on rencontre dans des familles génériques dépendant d'un nombre fini de paramètres.

Remarques

La démonstration du théorème des fonctions implicites se ramène elle-même au théorème des contractions ; mais la contraction utilisée n'a pas de signification dynamique simple.

4. Courbes invariantes

Supposons qu'un difféomorphisme P de $\mathbb{R}^2$ laisse invariante une courbe fermée C (par exemple un cercle entourant l'origine). Comme dans le cas des points fixes, on peut se demander si un difféomorphisme Q proche de P laisse également invariante une courbe fermée D proche de C.

On peut essayer la méthode de contraction qui vient d'être invoquée en 2. : on identifie un voisinage Ω de C au produit de C par un intervalle $I \subset \mathbb{R}$, ce qui permet d'associer à une application $\sigma : C \to I$ son graphe contenu dans Ω, et de définir pour des σ "assez petites" la transformée de graphe $F(\sigma)$ comme l'application dont le graphe est l'image par P du graphe de σ (Figure 23).

Figure 23

La différence essentielle entre le cas d'un point fixe et le cas d'une courbe est que, dans ce dernier, ce n'est que lorsque $\sigma \mapsto F\sigma$ est une contraction (resp. une dilatation) dans un espace fonctionnel bien choisi qu'on peut affirmer la persistance d'une courbe fermée invariante de classe C^1 pour toute perturbation assez petite Q (pour une courbe dans $\mathbb{R}^n$, la condition est que $\sigma \to F(\sigma)$ soit hyperbolique : il peut y avoir des directions normales dilatantes et des directions normales contractantes). On dit alors que la courbe C est <u>normalement hyperbolique</u> (dans $\mathbb{R}^2$, normalement contractante ou normalement dilatante): intuitivement, cela signifie que la contraction (resp. dilatation) de P normalement à C l'emporte sur la contraction (resp. dilatation) de P tangentiellement à C. Les définitions techniques se trouvent dans [H.P.S.] qui n'est pas d'une

lecture facile, mais dans le cas de $\mathbb{R}^2$ il nous suffira de prendre le vocable "normalement hyperbolique" comme synonyme de la propriété de contraction de la transformée de graphe associée à P ou de celle associée à P^{-1}. L'exemple indiqué sur la Figure 24 devrait éclairer ceci (le nombre de flèches indique la force de la contraction ou de la dilatation ; la courbe fermée invariante n'est autre que l'adhérence de la variété instable d'un point fixe hyperbolique ; seul le cas (i) est normalement hyperbolique).

Figure 24

Remarquons que non seulement l'existence mais la différentiabilité de la courbe invariante D dépendent du rapport entre contraction (resp. dilatation) de P normalement à C et contraction (resp. dilatation) de P tangentiellement à C (on suppose ici P et C de classe C^∞) ; examinons en effet le cas le plus simple, celui d'un point fixe attractant sur la courbe C, qui se présente dans l'exemple de la Figure 24 : supposons que $P = DP(0)$ est linéaire et que ses valeurs propres sont λ_1, λ_2, $0 < |\lambda_2| < |\lambda_1| < 1$, la direction propre relative à λ_1 (resp. λ_2) étant l'axe des x (resp. l'axe des y) (Figure 25).

Figure 25

La transformée de graphes associée à P (remarquer qu'elle ne peut plus être définie localement, le domaine de définition se rétrécissant) s'écrit

$$F(\sigma)(x) = \lambda_2 \, \sigma\left(\frac{x}{\lambda_1}\right) \tag{18}$$

En particulier,

$$\left(F(\sigma)\right)^{(k)}(x) = \frac{\lambda_2}{\lambda_1^k} \, \sigma^{(k)}\left(\frac{x}{\lambda_1}\right) \tag{19}$$

Le degré k de différentiabilité des fonctions d'un espace sur lequel F puisse être une contraction est donc limité par une condition du type $\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1^k}\right| < 1$ qui ne peut être réalisée pour tous les entiers k puisque $\lim_{k \to +\infty} \left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1^k}\right| = +\infty$. Si cette condition est violée, il existe des perturbations Q de P dont la courbe invariante D n'est pas C^k. En particulier, si la restriction de P à la courbe fermée invariante C possède des points périodiques génériques (attractants et répulsifs) ce phénomène de perte de différentiabilité se produira (voir [A_1] figure 141).

La raison pour laquelle un théorème général de persistance d'une courbe invariante ne peut être obtenu par un théorème de fonctions implicites est la suivante : on cherche à résoudre l'équation $(F - Id)(\sigma) = 0$ mais en général, si C n'est pas normalement hyperbolique, le spectre de $DF(0)$ (ou de ce qui tient lieu de $DF(0)$) opérant dans un Banach bien choisi de fonctions, contient tout le cercle unité de $\mathbb{C}$; en particulier, 1 est dans le spectre et l'argument de 3. ne peut fonctionner.

L'exemple le plus simple d'une telle situation est fourni par un difféomorphisme $P : C \times \mathbb{R} \longrightarrow C \times \mathbb{R}$ (C cercle unité) défini au voisinage de $C \times 0$ par

$$P(\theta, x) = (f(\theta) + o(|x|), a(\theta)x + o(|x|^2))$$

La transformée de graphes F associée, définie sur un voisinage de 0 dans $C^k(C, \mathbb{R})$ (fonctions de classe C^k de C dans $\mathbb{R}$) n'est dérivable que si on la considère comme à valeurs dans $C^{k-1}(C, \mathbb{R})$; sa dérivée en 0 est alors la transformée de graphes linéaire G

associée à

$$N(\theta, x) = (f(\theta), a(\theta)x)$$

On remarquera que G applique $C^k(C, \mathbb{R})$ dans lui-même.

Si f est une rotation d'angle $2\pi\omega$, et si ω est irrationnel, le spectre de G coïncide pour tout k avec le cercle de $\mathbb{C}$ de rayon $\exp\left[\int_0^1 \log|a(\theta)|\, d\theta\right]$.

Si f est un difféomorphisme du cercle structurellement stable, le spectre de G peut contenir toute une couronne (voir [Ch-I] chapitre II).

Il est cependant possible de montrer que <u>certaines</u> perturbations de P préservent l'existence de C lorsque C n'est pas normalement hyperbolique ; l'outil est un théorème raffiné de fonctions implicites fonctionnant dans des espaces de Fréchet de fonctions C^∞ : le premier résultat de ce type est le célèbre théorème de Kolmogorov. Arnold. Moser sur l'existence de courbes invariantes pour des difféomorphismes préservant les aires au voisinage d'un point fixe elliptique (voir [M] chapitre 2,§4 et [H_1]). Nous montrerons au chapitre IV que ce type de méthode fournit également des résultats dans le cas dissipatif qui nous intéresse. Bien entendu, on ne contrôle plus la dynamique de Q au voisinage de la courbe invariante D dont on montre l'existence (dans le cas normalement hyperbolique il y a, comme pour les points fixes, une équivalence topologique entre la dynamique de P au voisinage de C et la dynamique de Q au voisinage de D et c'est précisément cette dynamique qui force l'existence de D).

II. FORMES NORMALES DE DIFFEOMORPHISMES DE $\mathbb{R}^2$ AU VOISINAGE D'UN POINT FIXE

Nous promenions notre visage
(Nous fûmes deux, je le maintiens)
Sur maints charmes de paysage,
O soeur, y comparant les tiens.

Stéphane Mallarmé

1. Calculs formels

Soit $P : \mathbb{R}^2, 0 \to \mathbb{R}^2, 0$ un difféomorphisme local C^∞ de $\mathbb{R}^2$ défini au voisinage de son point fixe 0 .

Dans tout ce qui suit nous supposerons que le spectre de $DP(0)$ est formé de deux valeurs propres non réelles $\lambda = \rho e^{2\pi i \omega}$ et $\bar{\lambda}$.

Se plaçant dans une base propre sur $\mathbb{C}$ de $DP(0)$ et identifiant $\mathbb{R}^2$ à $\mathbb{C}$ comme en I.2, on écrit P sous la forme

(20) $P(z) = \lambda z + O(|z|^2)$ (le terme O est fonction de z et $\bar{z}$)

Par des changements de variables formels (i.e. définis par des séries dont on ne se préoccupe pas de la convergence), on cherche à simplifier le développement de Taylor en 0 de P . Le résultat obtenu, s'il converge, donne souvent une compréhension géométrique très (trop, d'où la divergence dans bien des cas) simple de P .

Plus précisément, la conjugaison de P par

(21) $$H(z) = z + \sum_{i+j=r} \gamma_{ij} z^i \bar{z}^j$$

ne change pas les termes de degré inférieur à r et ajoute aux termes de degré r le commutateur

$$(22) \quad \sum_{i+j=r} (\lambda^i \bar{\lambda}^j - \lambda)\, \gamma_{ij}\, z^i \bar{z}^j$$

Une relation de la forme $\lambda^i \bar{\lambda}^j - \lambda = 0 \; (i+j \geqslant 2)$ est appelée une <u>résonnance</u> ; notons

$$(23) \quad \mathcal{C}P(z) = \lambda + \sum_{i+j=2}^{+\infty} c_{ij}\, z^i \bar{z}^j$$

le développement de Taylor de P en 0 . Un terme $c_{ij}\, z^i \bar{z}^j$ de ce développement est dit résonnant si $\lambda^i \bar{\lambda}^j - \lambda = 0$.

Le calcul précédent montre qu'il existe toujours une série formelle

$$(24) \quad H(z) = z + \sum_{i+j=2}^{+\infty} h_{ij}\, z^i \bar{z}^j \quad ,$$

obtenue en composant une infinité de polynômes du type (21) de degrés croissant, telle que la série formelle $H \circ \mathcal{C}P \circ H^{-1}(z)$ ne comporte que des termes résonnants (on appelle cette dernière une "<u>forme normale formelle</u>" de P).

S'il n'y a pas de résonnance, c'est-à-dire si $|\lambda| \neq 1$, $H \circ \mathcal{C}P \circ H^{-1}(z) = \lambda z$; autrement dit, il existe un changement de coordonnées formel qui "linéarise" P . En fait, dans ce cas, la situation est bien meilleure : si P est analytique au voisinage de 0 , H l'est également (i.e. son rayon de convergence est non nul), si P est C^∞ , H est le développement de Taylor d'un difféomorphisme local C^∞ qui linéairise P par conjugaison au voisinage de 0 . On comprend donc parfaitement la dynamique de P dans un petit voisinage de 0 (voir [A_1] chapitre 5, § 25 et [Cha] pour les démonstrations de tous les

théorèmes possibles de linéarisation C^∞).

Si $|\lambda| = 1$, il y a au moins les <u>résonnances inévitables</u> de la forme $\lambda(\lambda\bar{\lambda})^i - \lambda = 0$.

Ce sont les seules si λ n'est pas racine de l'unité ; dans ce cas, on peut choisir H de façon que

$$(25) \quad H \circ \mathcal{T} P \circ H^{-1}(z) = z\left(\lambda + \sum_{i=1}^{+\infty} c_i |z|^{2i}\right)$$

mais il y a divergence en général (comparer la figure 22 et la propriété (*) de (32), et lire la dernière remarque du chapitre V).

Si λ est racine de l'unité de nouvelles résonnances apparaissent ; si $\lambda^q = 1$, les nouveaux termes résonnants de degré le plus bas seront des termes en $\bar{z}^{q-1}$ (résonnance $\bar{\lambda}^{q-1} - \lambda = 0$).

<u>Remarque importante</u> : il résulte de l'étude ci-dessus que l'on peut, par un changement de coordonnées local H polynomial (composé d'un nombre fini de changements de variables du type (21)) supprimer les termes non résonnants du développement de Taylor de P en 0 jusqu'à un ordre fixé. Par exemple, si λ est de module 1 mais n'est pas racine q-ième de l'unité pour $q \leqslant 2n+3$, on peut toujours choisir des coordonnées locales au voisinage de 0 telles que P s'écrive

$$(26) \quad P(z) = z\left(\lambda + \sum_{i=1}^{n} c_i |z|^{2i}\right) + O\left(|z|^{2n+3}\right)$$

(Ecrire P est un abus de notation, il faudrait écrire $H \circ P \circ H^{-1}$)

2. Familles à paramètres

Soit $P_\mu(z)$ une famille de difféomorphismes locaux de $\mathbb{R}^2$ dépendant différentiablement de paramètres $\mu \in \mathbb{R}^N$, telle que

(i) $P_0(0) = 0$

(ii) spectre $DP_0(0) = \{\lambda_0, \bar{\lambda}_0\}$, $\lambda_0 = e^{2\pi i \omega_0} \neq 1$

D'après le théorème des fonctions implicites (voir I.3) il existe pour tout μ voisin de 0 un point $X_\mu \in \mathbb{R}^2$ proche de 0 (et dépendant différentiablement de μ) tel que $P_\mu(X_\mu) = 0$. Après une éventuelle famille de changements affines de coordonnées dépendant différentiablement de μ, on peut supposer que $X_\mu = 0$ et que

(27) $$P_\mu(z) = \lambda_\mu z + O(|z^2|)$$

pour (μ, z) voisin de (0,0).

Supposons de plus que, pour $\mu \neq 0$, $|\lambda_\mu| \neq 1$: pour chaque $\mu \neq 0$ voisin de 0, on peut linéariser P_μ par un changement C^∞ de coordonnées H_μ mais lorsque μ tend vers 0 les coefficients des termes en $z^i \bar{z}^j$ du développement de Taylor de H correspondant à des résonnances $\lambda_0^i \bar{\lambda}_0^j - \lambda_0 = 0$ de P_0 tendent vers l'infini (ils ont $\lambda_\mu^i \bar{\lambda}_\mu^j - \lambda_\mu$ au dénominateur) ; ceci implique que le voisinage de 0 dans lequel est défini H_μ se rétrécit au fur et à mesure que μ tend vers 0 (voir Figure 26). Si l'on veut simplifier le développement de Taylor de P_μ par une famille de changements de coordonnées formels dépendant différentiablement de μ au voisinage de $\mu = 0$, il faut conserver, même pour $\mu \neq 0$, les termes correspondant à des résonnances de P_0. Par exemple, si λ_0 n'est pas une racine de l'unité, on se ramènera suivant la situation à :

(28) $$\mathcal{C}P_\mu(z) = z\left(\lambda_\mu + \sum_{i=1}^{+\infty} c_i(\mu)\,|z|^{2i}\right)$$

ou à

(29) $$P_\mu(z) = z\left(\lambda_\mu + \sum_{i=1}^{n} c_i(\mu)\,|z|^{2i}\right) + O\left(|z|^{2n+3}\right)$$

Remarque

Même s'il existe dans tout voisinage de $0 \in \mathbb{R}^N$ des valeurs de μ telles que $|\lambda_\mu| = 1$ (ce sera le cas en général pour $N \geqslant 2$) une condition du type $\lambda_0^q \neq 1$ pour $q \leqslant 2n+3$ implique la même condition sur λ_μ dès que μ est assez proche de 0 . On pourra donc toujours mettre la famille sous la forme (29).

Figure 26

3. Etude géométrique des familles génériques de formes normales tronquées (cas "non fortement résonnant")

Soit P_0 comme précédemment $\left(P_0(0) = 0\,,\ \text{spectre } DP_0(0) = \{\lambda_0, \bar{\lambda}_0\}\,,\ |\lambda_0| = 1\right)$.
On suppose que $\lambda_0 = e^{2\pi i \omega_0}$ n'est pas une "petite" racine de l'unité ($\lambda_0^q \neq 1$ pour $q \leqslant 2n+3$).

Dans un système de coordonnées convenable, une famille P_μ dépendant différentiablement de $\mu \in \mathbb{R}^N$ peut alors s'écrire sous la forme (29) pour (μ, z) voisin de (0,0), ou ce qui revient au même sous la forme

(30) $$P_\mu(z) = z\left[1 + f(\mu, |z|^2) + O\left(|z|^{2n+2}\right)\right] e^{2\pi i\left[g(\mu, |z|^2) + O\left(|z|^{2n+2}\right)\right]}$$

où f et g sont des polynômes de degré n en la deuxième variable à coefficients réels dépendant différentiablement des paramètres μ, que l'on notera

$$(31)\quad \begin{cases} f(\mu, X) = a_0(\mu) + a_1(\mu)X + \dots + a_n(\mu)X^n, & a_0(0) = 0 \\ g(\mu, X) = b_0(\mu) + b_1(\mu)X + \dots b_n(\mu)X^n, & b_0(0) = \omega_0 \end{cases}$$

On appelle famille de formes normales tronquées (à l'ordre n) associée à la famille P_μ la famille de difféomorphismes locaux

$$(32)\quad N_\mu(z) = z\left[1 + f(\mu, |z|^2)\right] e^{2\pi i g(\mu, |z|^2)}$$

Les difféomorphismes N_μ ont les propriétés caractéristiques suivantes (comparer la Figure 5 et la Figure 27)

(*) (i) le feuilletage des cercles de centre 0 est invariant (le cercle $|z| = r$ est envoyé sur le cercle $|z| = r(1 + f(\mu, r^2))$) ;

(ii) un cercle de centre 0 est envoyé sur un autre cercle de centre 0 par une rotation (pour le cercle de rayon r, la rotation est d'un angle de $2\pi g(\mu, r^2)$).

Figure 27

Remarque

(*) traduit l'équivariance de N_μ sous l'action du groupe des rotations : Pour tout α, $N_\mu(z e^{i\alpha}) = N_\mu(z) e^{i\alpha}$.

Supposons qu'il existe $N \leqslant n$ tel que

$$(33)\quad \begin{cases} a_0(0) = a_1(0) = \dots = a_{N-1}(0) = 0 \\ a_N(0) \neq 0 \end{cases}$$

(Cette condition implique que 0 est un attracteur ou un répulseur pour N_0).

On dira alors que P_0 est formellement de codimension N. (La notion de codimension se réfère à la codimension d'une classe d'équivalence dans un espace fonctionnel (voir [A_1] chapitre 6, § 29 et [Ch_2] Chapitre 5) ; il apparaîtra qu'au sens de l'équivalence topologique les difféomorphismes envisagés sont sans doute de codimension infinie. La forme normale N_0 est de codimension finie si on prend une relation d'équivalence très grossière ne tenant compte que de la variable radiale : on se sert du fait que N_0 commute avec les rotations pour passer au quotient par la variable angulaire).

Pour une famille générique dépendant de N paramètres (i.e. d'un paramètre $\mu = (\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_{N-1}) \in \mathbb{R}^N$), l'application de $\mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{R}^N$

$$(34) \qquad \mu \longmapsto \left(a_0(\mu), \dots, a_{N-1}(\mu)\right)$$

a une dérivée en 0 qui est un isomorphisme. D'après le théorème des fonctions implicites cette application est un difféomorphisme local d'un voisinage de $0 \in \mathbb{R}^N$ sur un voisinage de $0 \in \mathbb{R}^N$. On peut donc prendre $a_0(\mu)$, $a_1(\mu)$, ..., $a_{N-1}(\mu)$, comme coordonnées locales dans $\mathbb{R}^N$, ce qui revient à écrire

$$(35) \quad \begin{cases} f(\mu_0, \dots, \mu_{N-1}, X) = \mu_0 + \mu_1 X + \dots + \mu_{N-1} X^{N-1} + a_N(\mu) X^N + \dots + a_n(\mu) X^n \\ a_N(0) \neq 0 \end{cases}$$

Sous cette forme, il est facile de déterminer les courbes fermées invariantes (proches de 0) de N_μ : tout d'abord la propriété caractéristique (*)(i) implique qu'une telle courbe est nécessairement un cercle de centre 0 ; d'autre part les rayons r des cercles invariants sont les solutions de l'équation

$$(36) \qquad f(\mu, r^2) = 0 \quad .$$

Les Figures 28 et 29 indiquent dans les cas $N=1$ et $N=2$ la forme de la surface définie par (36) dans $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$ et le nombre de cercles invariants par N_μ en fonction de la position de μ dans $\mathbb{R}^N$: dans les deux cas, on a choisi $a_N(0) < 0$ (par exemple $a_N(0) = -1$) ; le cas $a_N(0) > 0$ est analogue avec des dynamiques inversées.

Ne pas oublier en lisant ces figures que tout est local au voisinage de $(\mu, r) = (0,0)$.

Figure 29

Une fois déterminées les courbes invariantes de N_μ , la dynamique de N_μ est transparente ; elle est indiquée dans les cas $N=1$ et $N=2$ sur la Figure 30 et la Figure 31 que l'on comparera respectivement à la Figure 6 et à la Figure 14 (le sens de rotation n'est pas significatif) :

Figure 30

Figure 31

4. Résonnances fortes

On suppose maintenant que le spectre de $DP_0(0)$ est formé de deux valeurs propres λ_0 , $\bar{\lambda}_0$ non réelles telles que $\lambda_0^q = 1$ ($q \geqslant 3$ est le plus petit entier ayant cette propriété).

Une résonnance $\lambda_0^i \bar{\lambda}_0^j - \lambda_0 = 0 \ (i+j \geqslant 2)$ peut toujours s'écrire sous l'une des deux formes suivantes :

$$(37) \begin{cases} (1) \quad \lambda_0^{kq+1} (\lambda_0 \bar{\lambda}_0)^j - \lambda_0 = 0 \ (k \geqslant 0) \text{ si } i \geqslant j \\ (2) \quad \bar{\lambda}_0^{\ell q-1} (\lambda_0 \bar{\lambda}_0)^i - \lambda_0 = 0 \ (\ell \geqslant 1) \text{ si } i \leqslant j \end{cases}$$

Les termes résonnants correspondant $(i-j = 1 \bmod q)$ sont représentés pour $q = 3$ sur la Figure 32 (les puissances de z sont en abcisse, celles de $\bar{z}$ sont en ordonnée).

Figure 32

Une propriété fondamentale apparaît sur la formule

$$(38) \quad N_0(z) = \lambda_0 z \left[1 + \sum_{k+j \geqslant 1} \alpha_{kj} z^{kq} (z\bar{z})^j + \sum_{\substack{\ell \geqslant 1 \\ i \geqslant 0}} \beta_{kj} \bar{z}^{\ell q} (z\bar{z})^{i-1} \right]$$

à savoir l'équivariance de la forme normale sous une rotation de $\frac{2\pi}{q}$ (et non plus sous tout le groupe des rotations comme en (*)) :

$$(39) \quad N_0 \left(z e^{\frac{2\pi i}{q}} \right) = N_0(z) \, e^{\frac{2\pi i}{q}}$$

Remarquons que, parmi les termes ajoutés à ceux provenant des résonnances inévitables, celui de plus bas degré correspond à $\bar{z}^{q-1}$. On peut donc se ramener à

$$(40) \quad P_0(z) = z \left(1 + f(|z|^2) \right) e^{2\pi i g(|z|^2)} + c \bar{z}^{q-1} + O(|z|^q)$$

où f et g sont des polynômes de degré $\leqslant \left[\frac{q-2}{2} \right]$ ($[a]$ signifie "le plus grand entier $n \leqslant a$ ").

Soit $d \geqslant 1$ la valuation de f (plus petit degré d'un terme non nul du polynôme f) :
si $1 \leqslant d \leqslant \left[\frac{q-3}{2}\right]$, on peut écrire

$$(41) \qquad P_0(z) = z(1 + a_d |z|^{2d})\, e^{2\pi i g(|z|^2)} + O(|z|^{2d+2}) ,$$

et l'origine est un attracteur (faible) ou un répulseur (faible) suivant que $a_d < 0$ ou $a_d > 0$.

Dans le cas contraire, et si $c \neq 0$, le terme $c\bar{z}^{q-1}$ intervient qualitativement dans la dynamique de P_0 au voisinage de 0 (voir par exemple la Figure 33) : on dira alors qu'il y a <u>résonnance forte</u>.
C'est en particulier le cas pour $q \leqslant 4$ dès que $c \neq 0$, et c'est dans cette dernière circonstance qu'on emploie le terme de résonnance forte dans la littérature ([A_1] Chapitre 6, § 34 , et [I] chapitre 4).
(Si $c = 0$ on peut donner les mêmes définitions en remplaçant $c\bar{z}^{q-1}$ par le premier terme non nul ne provenant pas des résonnances inévitables).

Nous reviendrons sur la formule (40) au dernier chapitre, lorsque nous chercherons des points homocliniques dans les bifurcations génériques de codimension 2.

<u>Figure 33</u>

Nous n'étudierons pas ici les bifurcations dans le cas des résonnances fortes (voir [A_1] chapitre 6, § 34 E et 35 K ; et [I] chapitre 4)
Donnons simplement un exemple dans le cas où $q = 3$.
Soit P_μ une famille de difféomorphismes locaux de $\mathbb{R}^2$ de la forme

$$(42)\quad \begin{cases} P_\mu(z) = \lambda_\mu z + c_\mu \bar{z}^2 + O(|z|^3) \\ \lambda_0^3 = 1 \end{cases}$$

On calcule l'itéré troisième de P_μ :

$$(43)\quad P_\mu^3(z) = \lambda_\mu^3 z + c(\lambda_\mu^2 + \bar{\lambda}_\mu^4 + \lambda_\mu \bar{\lambda}_\mu^2)\bar{z}^2 + O(|z|^3)$$

Les points périodiques de période 3 de P_μ (proches de 0) sont les solutions de

$$(44)\quad (\lambda_\mu^3 - 1) + c(\lambda_\mu^2 + \bar{\lambda}_\mu^4 + \lambda_\mu \bar{\lambda}_\mu^2)\frac{\bar{z}^2}{z} + O(|z|^2) = 0$$

Il n'est pas difficile de voir qu'il y en a 3 si $\lambda_\mu^3 - 1 \neq 0$.

Remarque

Dans une famille à 1 paramètre générique de difféomorphismes ou de formes normales telle que (42) il n'apparait pas de courbe fermée invariante au voisinage de 0 pour μ voisin de 0 . Cependant, de telles courbes peuvent apparaître dans des familles particulières. Ce phénomène est beaucoup mieux compris si l'on considère des familles à deux paramètres du type (42) dans lesquelles les deux paramètres ne sont autre que le module et l'argument de $\lambda_\mu^3 - 1$ (voir [A_1] Figure 144). On reviendra sur ce point au chapitre suivant (voir III.3).

Figure 34

Figure 35

III. BIFURCATIONS DE COURBES INVARIANTES NORMALEMENT HYPERBOLIQUES

O belle, je ne sais pas pourquoi j'aime ta trace
Dans le sable durci par l'habitude des vagues,
Miroir, je ne demande rien au reflet de ma face,
Tout est si simple.

Georges Ribemont-Dessaignes

On a vu (chapitre II) que la propriété pour un difféomorphisme de laisser invariante une courbe fermée normalement hyperbolique persistait pour une déformation suffisamment petite.

Nous exploitons maintenant cette idée : étant donnée une famille de difféomorphismes locaux de la forme

$$(45)\quad \begin{cases} P_\mu(z) = z\left[1 + f(\mu, |z|^2) + O(|z|^{2n+2})\right] e^{2\pi i\left[g(\mu, |z|^2) + O(|z|^{2n+2})\right]} \\ \mu = (\mu_0, \dots, \mu_{N-1}) \\ f(\mu, X) = \mu_0 + \mu_1 X + \dots + \mu_{N-1} X^{N-1} + a_N(\mu) X^N + \dots + a_n(\mu) X^n \\ a_N(0) \neq 0 \end{cases}$$

nous déterminons des régions (voisines de 0) de l'espace des paramètres dans lesquelles la perturbation apportée par les termes $O(|z|^{2n+2})$ est suffisamment petite par rapport à l'attraction (ou la répulsion) des cercles invariants de la forme normale N_μ pour que ceux-ci se perturbent en des courbes fermées invariantes de P_μ.

Contrairement à ce qui est fait dans beaucoup de textes sur le sujet nous montrons que, pour ces valeurs des paramètres, la dynamique de P_μ ressemble (dans un sens qu'on précisera) à celle de N_μ dans un voisinage de $0 \in \mathbb{R}^2$ <u>uniforme</u> par rapport aux μ suffisamment proches de $0 \in \mathbb{R}^N$.

1. Domaines d'hyperbolicité normale

Soit p un réel, $N \leqslant p \leqslant n$; on note

(46) $$f_p^{\pm}(\mu, X) = f(\mu, X) \pm \varepsilon |X|^p, \quad \left[0 < \varepsilon \ll |a_N(0)| \text{ si } p = N,\right]$$

Les Figures 36 et 37 représentent $f_p^{\pm}(\mu, r^2) = 0$ dans les cas $N = 1$ et $N = 2$ lorque $a_N(0) < 0$ (situation des Figures 28 et 29)

Figure 36

Figure 37

Si $N = 1$, le contour apparent des surfaces $f_p^{\pm}(\mu, r^2) = 0$ sur l'espace des paramètres est le même que celui de $f(\mu, r^2) = 0$.

Si $N = 2$, ce contour apparent contient, en plus de l'axe $\mu_0 = 0$, une courbe $\Gamma_p^{\pm}$; les deux courbes Γ_p^{+} et Γ_p^{-} définissent un voisinage effilé $\mathcal{V}$ de la courbe

$\Gamma = \{\mu \mid N_\mu$ laisse invariant un cercle non normalement hyperbolique$\}$

Si $N \geqslant 2$, tout se passe comme pour $N = 2$: la partie non triviale du contour apparent de $f_p^{+}(\mu, r^2) = 0$ et $f_p^{-}(\mu, r^2) = 0$ définit un voisinage effilé $\mathcal{V}$ de l'hypersurface Γ de $\mathbb{R}^N$ correspondant aux valeurs de μ pour lesquelles N_μ possède au moins un cercle invariant non normalement hyperbolique.(On remarquera que $\mathcal{V}$ est d'autant plus effilé que p est grand).

Nous appellerons <u>domaine d'hyperbolicité normale</u> (et nous noterons $\mathcal{H}$) le complémentaire de $\mathcal{V}$ dans un voisinage de 0 de $\mathbb{R}^N$ (Figure 38) . Remarquons que dans le cas $N=1$ et dans ce cas seulement un domaine d'hyperbolicité normale est un voisinage de 0 . (Tous ces voisinages de 0 devront être choisis assez petits pour que ce qui suit soit correct).

Figure 38

Si $\mu \in \mathcal{H}$, les inéquations $f_p^-(\mu, |z|^2) \leq 0 \leq f_p^+(\mu, |z|^2)$ définissent un anneau au voisinage de chaque cercle invariant de N_μ ; l'appartenance de μ à $\mathcal{H}$ équivaut à la disjonction de tous ces anneaux (Figure 39)

Figure 39

2. Théorèmes de bifurcation lorsque $\mu \in \mathcal{H}$

Nous sommes maintenant en mesure d'esquisser la démonstration d'un théorème de bifurcation dans un domaine d'hyperbolicité normale :

(i) on montre que dans chacun des anneaux définis à l'instant la transformée de graphes (voir I.4) associée à P_μ (resp. P_μ^{-1} suivant les cas) est une contraction (à condition d'avoir bien choisis p et n). P_μ possède donc dans chacun de ces anneaux une courbe C^k invariante attractante (resp. répulsive) dont le bassin d'attraction (resp. de répulsion) contient tout l'anneau. Le degré de différentiabilité k est d'autant plus grand que μ est proche de $0 \in \mathbb{R}^N$.

(ii) on montre qu'étant donné un voisinage suffisamment petit $\mathcal{M}$ de 0 dans $\mathbb{R}^N$ et un domaine d'hyperbolicité $\mathcal{H} \subset \mathcal{M}$, il existe un voisinage Ω de 0 dans $\mathbb{R}^2$ ayant les propriétés suivantes :

(46)
$$\begin{cases} (*) & P_\mu \text{ a autant de courbes fermées invariantes dans } \Omega \text{ que } N_\mu \ ; \\ (**) & \text{Les partitions de } \Omega \text{ en bassins d'attraction et de répulsion de} \\ & \text{l'origine et des courbes fermées invariantes sont les mêmes pour} \\ & P_\mu \text{ et } N_\mu \ . \end{cases}$$

<u>Remarque</u>

Nous verrons que (ii) n'implique pas du tout l'équivalence topologique de N_μ et P_μ dans Ω : leurs dynamiques sur les courbes fermées invariantes sont en général différentes.

Commençons par démontrer (ii) en admettant provisoirement le point (i) : il suffit de remarquer que, puisque $p \leqslant n$, on a pour $(\mu, z) \in \mathcal{M} \times \Omega$ assez petit

(47)
$$\begin{cases} |P_\mu(z)| \leqslant |z| \cdot \left(1 - \frac{\varepsilon}{2} |z|^{2p}\right) & \text{si } f_p^+(\mu, |z|^2) \leqslant 0 \\ |P_\mu(z)| \geqslant |z| \cdot \left(1 + \frac{\varepsilon}{2} |z|^{2p}\right) & \text{si } f_p^-(\mu, |z|^2) \geqslant 0 \end{cases}$$

On en déduit, si $\mu \in \mathcal{H}$, qu'à l'extérieur des anneaux entourant les cercles invariants de N_μ, la dynamique est la même pour P_μ et pour N_μ : le seul problème pourrait être l'éventualité d'un saut de l'orbite d'un point par dessus un des anneaux, mais ceci est impossible à cause de (i) .

En ce qui concerne la démonstration de (i), il suffit d'indiquer le cas $N = 1$ (le cas général est analogue, la condition $\mu \in \mathcal{H}$, vide

pour $N=1$, impliquant que l'attraction (resp. la répulsion) des cercles invariants de N_μ est suffisante par rapport à la perturbation par les termes $O(|z|^{2n+2})$ (à condition que p soit bien choisi et que μ soit assez proche de $0 \in \mathbb{R}^N$). On considère donc une famille à 1 paramètre de difféomorphismes locaux de la forme (45), avec

$$(48) \quad \begin{cases} f(\mu, X) = \mu + a_1(\mu) X \\ n = N = 1 \quad , \quad a_1(0) < 0 \end{cases}$$

(on se ramène à ce cas dès que $\lambda_0 = e^{2\pi i \omega_0}$, $\lambda_0^q \neq 1$ pour $q \leq 5$).
en coordonnées polaires $z = re^{2\pi i \theta}$, P_μ s'écrit

$$(49) \quad \tilde{P}_\mu(r,\theta) = \left((1+\mu)r + a_1(\mu) r^3 + O(r^5),\ \theta + b_0(\mu) + b_1(\mu) r^2 + O(r^4)\right)$$

Exercice :

Soit $P : \mathbb{R}^2, 0 \to \mathbb{R}^2, 0$ un difféomorphisme local C^∞ fixant l'origine ; soit $\Psi : \mathbb{T}^1 \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ le "passage en coordonnées polaires" défini par $\Psi(\theta, r) = (r \cos 2\pi\theta, r \sin 2\pi\theta)$ ($\mathbb{T}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ est le cercle (= tore de dimension 1) de longueur 1).
Montrer qu'il existe un unique difféomorphisme C^∞ (local au voisinage de $\mathbb{T}^1 \times 0$) $\tilde{P} : \mathbb{T}^1 \times \mathbb{R}, \mathbb{T}^1 \times 0 \longrightarrow \mathbb{T}^1 \times \mathbb{R}, \mathbb{T}^1 \times 0$ laissant $\mathbb{T}^1 \times 0$ invariant , tel que

$$(50) \quad \Psi \circ \tilde{P} = P \circ \Psi$$

L'exercice consiste à montrer que $\tilde{P}$ est défini et C^∞ sur tout un voisinage de $\mathbb{T}^1 \times 0$ dans $\mathbb{T}^1 \times \mathbb{R}$ et pas seulement sur un voisinage de $\mathbb{T}^1 \times 0$ dans $\mathbb{T}^1 \times \mathbb{R}^+$.

On choisit des coordonnées locales dans un anneau entourant le cercle

invariant $|z| = \sqrt{\frac{\mu}{-a_1(\mu)}}$ de N_μ pour $\mu > 0$ (ce serait pour $\mu < 0$ si on avait supposé $a_1(0) > 0$) en posant :

$$(51) \qquad r = \sqrt{\frac{\mu}{-a_1(\mu)}} \left(1 + y\sqrt{\mu}\right)$$

On constate alors que $\tilde{P}_\mu$ s'écrit $(\mu > 0)$:

$$(52) \quad \begin{cases} \tilde{P}_\mu(y, \theta) = (Y, \Theta), \\ Y = (1 - 2\mu)\, y + \mu^{3/2} H_\mu(y, \theta) \\ \Theta = \theta + b_0(\mu) - \dfrac{\mu b_1(\mu)}{a_1(\mu)} + \mu^{3/2} K_\mu(\mu, \theta) \end{cases}$$

où les termes H_μ et K_μ sont uniformément bornés en norme C^k dans un voisinage de $y = 0$. C'est la petitesse de la perturbation (en $\mu^{3/2}$) par rapport à l'attraction du cercle invariant de N_μ (en $1-2\mu$) qui permet alors de conclure en montrant que, dans l'anneau qui nous intéresse, la transformée de graphe F associée à P_μ est une contraction (si $|\mu|$ est assez petit).

Techniquement, on définit F sur l'espace U_k formé des fonctions $u : \mathbb{T}^1 \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^k telles que

$$(53) \quad \begin{cases} (1) \quad |u| \leqslant 1 \quad \text{(le graphe reste dans un anneau du type considéré à condition de choisir } p = 3/2) \\ (2) \quad \text{Pour tout } i,\ 1 \leqslant i \leqslant k,\ |D^{(i)} u| \leqslant 1 \\ (3) \quad D^{(k)} u \text{ est Lipshitzienne de rapport } \leqslant 1, \text{ c'est-à-dire que} \\ \qquad \text{pour tous } \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{T}^1,\ |D^{(k)} u(\theta_1) - D^{(k)} u(\theta_2)| \leqslant |\theta_1 - \theta_2| \end{cases}$$

(on munit U_k de la topologie de la convergence uniforme, ce qui le rend bien complet (Merci M. Ascoli !).

Remarque

Lorsque $\lambda_0^5 = 1$, on peut se débrouiller pour faire encore marcher cette méthode (il suffit d'approcher un peu mieux la courbe fermée invariante recherchée : voir [I] chapitre 3 page 43).

On vient donc de "montrer" (et non "démontrer") le théorème de bifurcation de (disons) Hopf pour les difféomorphismes de $\mathbb{R}^2$, qui assure la bifurcation (pour $\mu > 0$ ou $\mu < 0$ suivant les cas) d'une courbe fermée invariante C^k (k d'autant plus grand que $|\mu|$ est petit) dans toute famille à 1 paramètre générique P_μ de difféomorphismes locaux de $\mathbb{R}^2$ telle que $P_0(0) = 0$ et spectre $DP_0(0) = \{\lambda_0, \bar{\lambda}_0\}$, $\lambda_0^q \neq 1$ pour $q \leq 4$.

Remarque importante

Contrairement au théorème de bifurcation de Hopf pour les équations différentielles évoqué dans l'introduction (et qui est d'ailleurs dans les cas génériques une conséquence de l'énoncé ci-dessus), ce théorème n'est pas de nature topologique ; autrement dit, la condition de généricité, qui assure que l'origine est un attracteur (faible) ou un répulseur (faible) pour P_0 n'a pas pour seul rôle de forcer une famille de courbes fermées invariantes (ou de points périodiques) qui existerait forcément à se trouver dans le demi-espace $\mu > 0$ ou $\mu < 0$ (comparer aux Figures 6 et 7) ; elle est ici fondamentale pour assurer que ces courbes invariantes existent ! Pour s'en convaincre, il n'est que de considérer une famille de la forme :

$$P_\mu(z) = (1+\mu)\, P_0(z) \tag{54}$$

où P_0 est un difféomorphisme d'Anosov-Katok, c'est-à-dire un difféomorphisme

préservant les aires ergodique dans le disque D^2 , et tel que $P_0(0) = 0$ spectre $DP_0(0) = \{\lambda_0, \bar{\lambda}_0\}$, $\lambda_0^q \neq 1$ pour tout q (voir [M] page 56). On voit facilement que pour tout μ assez proche de 0 (y compris,bien sûr, $\mu = 0$) P_μ n'a pas de courbe invariante proche de 0 , ni de points périodiques bifurquant à partir de 0 . Pourtant le spectre de $DP_\mu(0)$ traverse aussi gentiment que possible (i.e. "transversalement") le cercle unité lorsque μ traverse la valeur 0 .

3. Dynamique sur les courbes invariantes

Lorsque $\mu \in \mathcal{H}$, ce n'est qu'au niveau de la restriction de P_μ à une courbe invariante C_μ que se révèle la différence entre P_μ et N_μ : alors que le difféomorphisme du cercle ainsi obtenu est une rotation lorsqu'il s'agit de N_μ , le difféomorphisme $P_\mu | C_\mu$ peut n'être pas même topologiquement conjugué à une rotation : c'est en général le cas lorsque son nombre de rotation $\rho_\mu = \rho(P_\mu | C_\mu)$ est rationnel : nous verrons qu'on obtient un difféomorphisme du cercle "structurellement stable" (au sens de l'article "Differentiable Dynamical Systems" dans [S]) ayant un nombre fini de points périodiques attractants et un nombre égal de points périodiques répulsifs.

[Rappelons (voir [H_2] chapitre II pour les démonstrations) qu'étant donné un homéomorphisme du cercle préservant l'orientation $f : \mathbb{T}^1 \to \mathbb{T}^1 (\mathbb{T}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ on peut le relever en un homéomorphisme $\tilde{f} = \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de la forme $\tilde{f}(\theta) = \theta + \varphi(\theta)$, $\varphi(\theta+1) = \varphi(\theta)$ et que la suite de fonctions $\dfrac{\tilde{f}^n - Id}{n}$ ($\tilde{f}^n$ = itéré $n^{\text{ème}}$ de $\tilde{f}$) converge uniformément vers une fonction constante dont la valeur $\rho(\tilde{f}) \in \mathbb{R}$ est appelée nombre de rotation

de $\tilde{f}$ (H. Poincaré). Deux relèvements $\tilde{f}_1$ et $\tilde{f}_2$ de f différent d'un entier, et il en est de même de $\rho(\tilde{f}_1)$ et $\rho(\tilde{f}_2)$, ce qui permet d'associer à f son nombre de rotation $\rho(f) \in \mathbb{T}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ (classe de $\rho(\tilde{f})$ modulo $\mathbb{Z}$) ; $\rho(f)$ est une "rotation moyenne" de f, en particulier égal à α si $f = R_\alpha$ est la rotation de α définie par $R_\alpha(\theta) = \theta + \alpha$.
Les propriétés essentielles de $f \mapsto \rho(f)$ sont les suivantes :

1) $f \mapsto \rho(f)$ est continu pour la topologie de la convergence uniforme sur f ;
2) ρ est un invariant de conjugaison C^0 : $\rho(f) = \rho(h \circ f \circ h^{-1})$ si $h : \mathbb{T}^1 \to \mathbb{T}^1$ est un homéomorphisme ;
3) $\rho(f)$ est rationnel si et seulement si f possède au moins un point périodique (de période q si $\rho(f) = \frac{p}{q}$);
4) lorsque f est un difféomorphisme de classe C^2, $\rho(f)$ est irrationnel si et seulement si $f = h \circ R_{\rho(f)} \circ h^{-1}$, $h : \mathbb{T}^1 \to \mathbb{T}^1$ homéomorphisme (A. Denjoy) ;
5) il existe $A \subset \mathbb{T}^1 - \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ de mesure de Lebesgue égale à 1 tel que si f est un difféomorphisme C^∞ de nombre de rotation $\rho(f) \in A$, $f = h \circ R_{\rho(f)} \circ h^{-1}$, $h : \mathbb{T}^1 \to \mathbb{T}^1$ difféomorphisme C^∞ (M. Herman)].

Pour comprendre la façon dont apparaissent des points périodiques sur les courbes invariantes données par les théorèmes de bifurcation du paragraphe précédent, nous considérons maintenant certaines familles génériques à deux paramètres $P_{\mu,t}$ (on peut étudier de la même manière des familles à $(N+1)$ paramètres $\mu_0, \dots, \mu_{N-1}, t$; voir le chapitre V pour le cas N = 2) telles que

$$(55) \begin{cases} 1) \text{ Spectre } DP_{0,0}(0) = \{\lambda_{0,0}\ \bar{\lambda}_{0,0}\},\ \lambda_{0,0} = e^{2\pi i \frac{p}{q}},\ q \geqslant 5 \\ 2) \text{ L'application } (\mu,t) \mapsto \lambda_{\mu,t} \text{ est un difféomorphisme local de } \mathbb{R}^2 \text{ dans } \mathbb{C} \text{ au voisinage de } (0,0). \end{cases}$$

$(\{\lambda_{\mu,t}, \bar{\lambda}_{\mu,t}\}$ est le spectre de $DP_{\mu,t}(0))$

(comparer à [A_1] chapitre 6, § 35 L).

On peut supposer après changement éventuel de coordonnées (comparer à (40)) que

$$(56)\quad \begin{cases} P_{\mu,t}(z) = N_{\mu,t}(z) + e^{2\pi i \frac{p}{q}} c(\mu,t)\bar{z}^{q-1} + O(|z|^q) \ , \ c(0,0) \text{ réel } \neq 0 \\ N_{\mu,t}(z) = z\left(1+f(\mu,t,|z|^2)\right) e^{2\pi i\, g(\mu,t,|z|^2)} \\ f(\mu,X) = \mu + a_1(\mu,t)X + \dots \ , \ a_1(0,0) \neq 0 \quad \text{(par ex. =-1)} \\ g(\mu,t,X) = \frac{p}{q} + t + b_1(\mu,t)X + \dots \ , \ b_1(0,0) \neq 0 \quad \text{(par ex. =1)} \end{cases}$$

Si on note l'itéré $k^{\text{ème}}$ de $N_{\mu,t}$ sous la forme

$$(57)\quad N^k_{\mu,t}(z) = e^{2\pi i k \frac{p}{q}} z\, \alpha_k(|z|^2)\, e^{2\pi i \beta_k(|z|^2)}$$

on constate sans peine que

$$(58)\quad P^k_{\mu,t}(z) = N^k_{\mu,t}(z) + e^{2\pi i k \frac{p}{q}} c_k(\mu,t)\bar{z}^{q-1} + O(|z|^q)$$

Soit $r_q = r_q(\mu,t)$ l'unique (si elle existe) petite racine positive de l'équation

$$(59)\quad \beta_q(r_q^2) = 0$$

r_q est le rayon de l'unique cercle (s'il existe) transformé "radialement" par $N^q_{\mu,t}$ (Figure 40) : si $b_1(0,0) > 0$ un tel cercle existe pour $t < 0$.

Figure 40

Si de plus $\alpha_q(r_q^2) - 1 = 0$, le cercle $|z| = r_q$ est fixé par $N^q_{\mu,t}$.
C'est clairement au voisinage d'un tel cercle qu'il faut chercher d'éventuels points périodiques de période q de $P_{\mu,t}$ qui bifurquent à partir de l'origine (cas $(\mu,t) = (0,0)$).

Le changement de variables (pour $t < 0$)

$$(60) \qquad r = r_q \rho \quad , \quad z = r\, e^{2\pi i \theta}$$

conduit à l'expression suivante de $P^q_{\mu,t}$:

$$(61) \quad \begin{cases} P^q_{\mu,t}(\theta,\rho) = (\theta_q, \rho_q) \\ \theta_q = p + \theta + \tilde{\beta}_q(r_q^2\rho^2)\, r_q^2\, \hat{f}_1(\mu,t,\rho,\theta) \\ \rho_q = \rho + \delta_q\, r_q^{q-2}\, \hat{f}_2(\mu,t,\rho,\theta) \end{cases}$$

où

$$(62) \quad \begin{cases} \hat{f}_1(\mu,t,\rho,\theta) = (\rho^2-1) - \dfrac{\delta_q\, r_q^{q-4}\, \rho^{q-2}}{2\pi\, \tilde{\beta}_q(r_q^2\rho^2)\, \alpha_q(r_q^2\rho^2)} \sin 2\pi U_q + O(r_q^{q-3}) \\ \hat{f}_2(\mu,t,\rho,\theta) = \rho^{q-1} \cos 2\pi U_q + \dfrac{\tilde{\alpha}_q(r_q^2\rho^2)\,\rho(\rho^2-1)}{\delta_q\, r_q^{q-4}} + \dfrac{\rho}{\delta_q} \dfrac{(\alpha_q(r_q^2)-1)}{r_q^{q-2}} + O(r_q) \end{cases}$$

et

$$(63) \quad \begin{cases} c_q(\mu,t) = \delta_q\, e^{2\pi i u_q} \\ \tilde{\alpha}_q(r^2) = \dfrac{\alpha_q(r^2) - \alpha_q(r_q^2)}{r^2 - r_q^2} \\ \tilde{\beta}_q(r^2) = \dfrac{\beta_q(r^2) - \beta_q(r_q^2)}{r^2 - r_q^2} = \dfrac{\beta_q(r^2)}{r^2 - r_q^2} \\ U_q = q\theta - u_q + \beta_q(r_q^2\rho^2) \end{cases}$$

Les points fixes de $P^q_{\mu,t}$ proches de l'origine sont donnés par les équations

$$(64)\quad \begin{cases} \hat{f}_1(\mu, t, \rho, \theta) = 0 \\ \hat{f}_2(\mu, t, \rho, \theta) = 0 \end{cases}$$

La première se résoud sans problème par le théorème des fonctions implicites et fournit pour (μ, t) proche de (0,0) une courbe de la forme $\rho = \rho_{\mu,t}(\theta)$ proche du cercle $|z| = r_q$ (i.e. $\rho = 1$) transformée "radialement" par $P^q_{\mu,t}$ (Figure 41).

Figure 41

Remarquons que, si $\hat{f}_1(\mu, t, \rho, \theta) = 0$, la deuxième équation s'écrit

$$(65)\quad \cos 2\pi U_q + \frac{\alpha_q(r_q^2 \rho^2)}{2\pi \tilde{\beta}_q(r_q^2 \rho^2)\alpha_q(r_q^2 \rho^2)} \sin 2\pi U_q + \frac{1}{\delta_q \rho^{q-2}} \frac{\alpha_q(r_q^2) - 1}{r_q^{q-2}} + O(r_q) = 0$$

C'est donc la taille de $\dfrac{\alpha_q(r_q^2) - 1}{r_q^{q-2}}$ qui détermine l'existence ou non de solutions de (64) ou, ce qui revient au même, l'existence ou non d'intersection entre la courbe $\rho = \rho_{\mu,t}(\theta)$ et son image par $P^q_{\mu,t}$.

Il y aura en particulier $2q$ solutions si

$$\frac{\alpha_q(r_q^2) - 1}{r_q^{q-2}} < \gamma \quad \text{assez petit.}$$

Il reste à remarquer que $\alpha_q(r_q^2) - 1$ est de l'ordre de $q(\mu + a_1(0,0) r_q^2)$ et r_q de l'ordre de $\sqrt{\dfrac{-t}{b_1(0,0)}}$ pour obtenir le domaine $\mathcal{D}_q$ de l'espace des paramètres dans lequel $P_{\mu,t}$ possède deux orbites de points périodiques de période q (Figure 42)

Figure 42

Remarques

-1- A t fixé, μ est dans un domaine d'hyperbolicité normale et les points périodiques obtenus ne peuvent qu'appartenir à une courbe invariante (voir (46)). On comparera à la Figure 145 de $[A_1]$

-2- L'idée de chercher une courbe $\rho = \rho_{\mu,t}(\theta)$ transformée "radialement" par $P^q_{\mu,t}$ remonte à Birkhoff et Lewis dans le cas conservatif (où alors cette courbe recoupe forcément son image par $P^q_{\mu,t}$).

-3- Nous verrons au chapitre V que $c'(0,0)$ est simplement relié à l'angle des variétés stables et instables des points fixes de $P^q_{\mu,t}$ qui sont des cols.

Comme le remarque Arnold, les considérations précédentes permettent de comprendre en termes locaux l'infinité de bifurcations que subit la restriction du difféomorphisme P_μ à une courbe fermée invariante C_μ apparue par bifurcation de Hopf générique (la généricité est ici au sens de la catégorie de Baire comme dans le chapitre V) : il suffit de plonger cette famille dans une famille à deux paramètres dans laquelle le spectre de la dérivée en 0 des difféomorphismes de la famille parcourt tout un voisinage dans $\mathbb{C}$ du spectre de $DP_0(0)$; au voisinage de chaque racine de l'unité, le phénomène décrit ci-dessus d'apparition de points périodiques isolés sur une courbe fermée invariante se produit, la période tendant vers l'infini lorsque le spectre du difféomorphisme se rapproche du cercle unité (Figure 43 : remarquer que ceci reste vrai même si $\lambda_0^q = 1$, $q \geqslant 5$).

Figure 43

Il y a donc, pour la famille $P_\mu | C_\mu$ de difféomorphismes du cercle, une infinité de bifurcations du type collision et apparition de points périodiques

dans tout voisinage de $\mu = 0$.

On a représenté sur la Figure 44 la fonction $\mu \longmapsto \rho\,(P_\mu \,|\, C_\mu)$ pour une famille à 1 paramètre générique présentant une bifurcation de Hopf (formules (48)) et pour la famille de formes normales N_μ qui lui correspond.

D'une fonction C^∞ (formes normales), cette fonction devient un "escalier du diable" ayant des paliers à chaque valeur rationnelle.

Au voisinage de $\mu = 0$, le graphe est contenu entre les graphes de deux fonctions polynomiales ayant un contact d'ordre arbitrairement grand pour $\mu = 0$ (voir [I] III.3, Théorème 3).

Figure 44

Génériquement, l'ensemble des valeurs de μ pour lesquelles $\rho(P_\mu \,|\, C_\mu)$ est rationnel est un ouvert dense dans $\mathbb{R}$ au voisinage de 0 ; mais on déduit de [H_3] que la mesure relative de l'ensemble des μ pour lesquels $\rho(P_\mu \,|\, C_\mu)$ est irrationnel tend vers 1 lorsque μ tend vers 0 (voir également [Ch_1]).

IV. BIFURCATIONS DE COURBES INVARIANTES NON NORMALEMENT HYPERBOLIQUES

Que saisir sinon qui s'échappe,
Que voir sinon qui s'obscurcit,
Que désirer sinon qui meurt,
Sinon qui parle et se déchire ?

Yves Bonnefoy

1. Les phénomènes étudiés dans ce chapitre et le suivant apparaissent dans leur généralité dès la codimension 2. Nous supposons donc que $N = 2$, et étudions des familles génériques à deux paramètres de difféomorphismes locaux de $(\mathbb{R}^2, 0)$ de la forme (45) (au changement près du nom des paramètres, qui a plus à voir avec le sentiment qu'avec la logique, et du nom de l'argument du difféomorphisme, qui aura, lui, son utilité) :

$$(66)\quad \begin{cases} P_{\mu,a}(z) = e^{2\pi i\omega}\, z\left[1 + f(\mu,a,|z|^2) + O(|z|^{2n+2})\right] e^{2\pi i\left[g_\omega(\mu,a,|z|^2) + O(|z|^{2n+2})\right]} \\ f(\mu,a,X) = \mu + aX + a_2(\mu,a)X^2 + \dots + a_n(\mu,a)X^n, \quad a_2(0,0) \neq 0 \\ g_\omega(\mu,a,X) = \omega(\mu,a) - \omega + b_1(\mu,a)X + \dots + b_n(\mu,a)X^n, \quad b_1(0,0) \neq 0 \end{cases}$$

Remarquons la nouvelle condition (générique) $b_1(0,0) \neq 0$

Pour fixer les idées, nous supposerons

$a_2(0,0) = -1$, $b_1(0,0) = 1$, $\omega(0,0) = \omega_0$.

Rappelons qu'une telle famille est générique si $\omega_0 \neq \frac{p}{q}$ pour $q \leqslant 2n+3$ ce que nous supposerons. Remarquons enfin que l'indice ω est muet ($P_{\mu,a}$ ne dépend pas de ω).

Nous supposerons que (μ,a) est dans le voisinage effilé $\mathcal{V}$ de la courbe Γ représenté sur la Figure 37 (où l'on se contentera de remplacer μ_0 par et μ_1 par a).

Lorsque $(\mu, a) \in \Gamma$, la forme normale $N_{\mu,a}$ de $P_{\mu,a}$ possède, au voisinage de 0, un unique cercle invariant non normalement hyperbolique. Un exemple typique de difféomorphisme ayant des courbes invariantes non normalement hyperboliques est un difféomorphisme qui conserve les aires, au voisinage d'un point fixe elliptique (voir [M]). L'expérience de ce genre de difféomorphismes (qui est, pour nous, hautement non générique) nous apprend deux choses :

(1) il ne faut pas s'attendre à une dynamique trop simple de $P_{\mu,a}$ lorsque $(\mu, a) \in \mathcal{V}$

(2) le paramètre important (qui va remplacer l'attraction ou la répulsion normale d'un cercle invariant de $N_{\mu,a}$) est le cisaillement tangentiel (twist) de $N_{\mu,a}$ au voisinage d'un cercle invariant, c'est-à-dire le taux de variation par rapport au rayon du cercle de l'angle de rotation de la restriction de $N_{\mu,a}$ à un cercle proche d'un cercle invariant). Sa non-nullité est assurée par $b_1(0,0) \neq 0$.

Enfin, heuristiquement, la famille à un paramètre de cercles invariants de $N_{\mu,a}$ obtenue lorsque (μ, a) parcourt la courbe Γ, va remplacer la famille des cercles centrés à l'origine qui sont tous laissés invariants par la forme normale de Birkhoff d'un difféomorphisme P conservant les aires. On est donc amenés à faire, en plus de l'hypothèse $b_1(0,0) \neq 0$ l'hypothèse (génériquement vérifiée) que le nombre de rotation de la restriction de $N_{\mu,a}$ a son unique cercle invariant <u>varie effectivement</u> lorsque (μ, a) parcourt Γ. (C'est l'analogue de l'hypothèse de "twist" dans [M] ; si on ne la fait pas, on peut s'attendre à des pathologies analogues à celles décrites par Anosov et Katok, dont on a parlé à la fin de III.2 (voir [M] page 56).

Si l'on pose

$$(67) \quad \eta(\mu,a) = 1 - \frac{2a_2(\mu,a)}{b_1(\mu,a)} \frac{\partial\omega}{\partial a}(\mu,a)$$

cette dernière condition est

$$(68) \quad \eta(0,0) = 1 + 2\frac{\partial\omega}{\partial a}(0,0) \neq 0$$

En effet, en un point $(\mu,a)\in\Gamma$ le rayon r de l'unique cercle invariant de $N_{\mu,a}$ est de la forme

$$(69) \qquad r^2 = \frac{a}{2} + O(|a|^2)$$

et la rotation induite par $N_{\mu,a}$ sur ce cercle a pour angle

$$(70) \quad 2\pi\omega = 2\pi\left[\omega_0 + \frac{1}{2}\eta(0,0)\,a + O(|a|^2)\right]$$

Comparons maintenant les stratégies de recherche de courbes fermées invariantes de $P_{\mu,a}$ suivant que $(\mu,a)\in\mathcal{V}$ ou $(\mu,a)\in\mathcal{H}$ (on fera le parallèle avec I.1 et I.3) :

1- Lorsque $(\mu,a)\in\mathcal{H}$, on cherche une courbe fermée invariante par pour une valeur donnée (μ_0,a_0) de (μ,a) . Lorsque $(\mu,a)\in\mathcal{V}$, on pourra seulement affirmer l'existence de valeurs de (μ,a) proches de $(\mu_0,a_0)\in\Gamma$ pour lesquelles $P_{\mu,a}$ aura une courbe fermée invariante.

2- Lorsque $(\mu,a)\in\mathcal{H}$ les courbes obtenues sont de classe C^k, k fini.

Lorsque $(\mu,a)\in\mathcal{V}$, les courbes obtenues seront de classe C^∞.

Plus précisément, les courbes sont obtenues dans le premier cas comme conséquence du théorème des contractions dans un Banach de fonctions C^k

et sont donc automatiquement normalement hyperboliques ; dans le deuxième, elles viendront de l'application d'un théorème raffiné de fonctions implicites dans un Fréchet de fonctions C^∞, et pourront ne pas être normalement hyperboliques.

3- Lorsque $(\mu, a) \in \mathcal{H}$ on ne contrôle pas la dynamique de $P_{\mu,a}$ sur la courbe invariante cherchée.
Lorsque $(\mu, a) \in \mathcal{V}$, on trouvera uniquement des courbes fermées invariantes sur lesquelles $P_{\mu,a}$ induise un difféomorphisme conjugué à une rotation d'un angle irrationnel fixé.

Remarquons l'opposition entre 2- et 3- : dans un cas on contrôle bien la dynamique au voisinage de la courbe mais pas sur la courbe ; dans l'autre on contrôle la dynamique sur la courbe mais pas au voisinage.

Dans la suite du chapitre, nous donnons une idée précise des résultats concernant l'existence pour $P_{\mu,a}$ de courbes fermées invariantes lorsque $(\mu, a) \in \mathcal{V}$, ainsi que des étapes de leur démonstration.
Dans le chapitre suivant, nous étudions, toujours lorsque $(\mu, a) \in \mathcal{V}$, les problèmes liés à l'existence et au comportement des points périodiques de $P_{\mu,a}$.

2. Les résultats énoncés ci-dessous sont démontrés dans [Ch_3] sous l'hypothèse parasite que ω_0 satisfasse une condition diophantienne de la forme $\left|\omega_0 - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{C}{|q|^2 + \beta}$ pour tous $p, q \in \mathbb{Z}$; cela vient de l'exigence d'une dépendance C^1 des paramètres dans une version du théorème de Rüssman énoncé plus loin. Qu'une telle dépendance soit vraie dans le cas

août 1982 : $\boxed{\omega_0 \neq \frac{p}{q},\ q \leq 33 \text{ suffit}}$

général m'a été juré par Rüssman et Herman, mais il apparait qu'une preuve écrite de ce résultat doive coûter un effort non négligeable ; cet effort est fait dans [Ch_3] pour des cas où le dit théorème se démontre à l'aide du théorème de fonctions implicites de Hamilton (voir [H_1])
Suivant sa déontologie propre, le lecteur oubliera ou n'oubliera pas cette hypothèse presque sûrement superflue.

Nous allons montrer, sous les hypothèses précédentes, que :

(i) Lorsqu'on passe de la famille $N_{\mu,a}$ de formes normales à une famille $P_{\mu,a}$ générique de la forme (66) , la courbe Γ de la Figure 37 est remplacée par un ensemble de Cantor $\tilde{\Gamma}$ (adhérant à 0) de valeurs de (μ,a) pour lesquelles $P_{\mu,a}$ possède une courbe fermée invariante C^∞ non normalement hyperbolique $\tilde{\mathcal{C}}_{\mu,a}$, telle que $P_{\mu,a} \mid \tilde{\mathcal{C}}_{\mu,a}$ soit C^∞-conjuguée à une rotation irrationnelle $R_{\omega(\mu,a)}$ (voir Figure 45).

(ii) Chaque point $(\mu_0,a_0)\in\tilde{\Gamma}$ est centre d'un petit morceau de courbe $\tilde{C}_{\omega(\mu_0,a_0)}$ dont les extrémités sont au-dessus de $\mathcal{V}$, formé de valeurs de (μ,a) pour lesquelles $P_{\mu,a}$ possède , si $(\mu,a)\neq(\mu_0,a_0)$, une courbe fermée invariante C^∞ normalement hyperbolique $\tilde{\mathcal{C}}_{\mu,a}$, telle que $P_{\mu,a} \mid \tilde{\mathcal{C}}_{\mu,a}$ soit C^∞ conjuguée à la rotation $R_{\omega(\mu_0,a_0)}$; cette courbe est un attracteur si (μ,a) est d'un côté de (μ_0,a_0), un répulseur de l'autre (de quel côté dépend du signe de $\eta(0,0)$) (voir Figure 46).

(iii) On déduit de (ii), et de la stabilité des courbes invariantes normalement hyperboliques, que chaque point $(\mu_0,a_0)\in\tilde{\Gamma}$ est en fait centre d'un double cône effilé formé de valeurs de (μ,a) pour lesquelles $P_{\mu,a}$ possède une courbe fermée invariante C^k normalement hyperbolique si

$(\mu,a) \neq (\mu_0,a_0)$, attracteur si (μ,a) est d'un côté de (μ_0,a_0), répulseur s'il est de l'autre (Figure 47).

(iv) En un point d'intersection (μ,a) de deux des demi-cônes ouverts dont il est question en (iii), $P_{\mu,a}$ possède deux courbes fermées invariantes C^k l'une attractante, l'autre répulsive.

(il ne faudrait cependant pas en déduire que $P_{\mu,a}$ "ressemble" à $N_{\mu,a}$).

Figure 45

Figure 46

Figure 47

3. Les démonstrations de ces résultats reposent sur une analyse des structures obtenues dans l'espace des paramètres (μ,a) lorsqu'on s'intéresse aux $N_{\mu,a}$ ayant un cercle invariant $\mathcal{C}$ tel que $N_{\mu,a} | \mathcal{C}$ soit une rotation de nombre de rotation fixé.

Plus précisément, on montre facilement que

(71) $C_\omega = \{(\mu,a) \mid$ il existe un cercle $\mathcal{C}_{\omega,\mu,a}$ invariant par $N_{\mu,a}$ tel que $N_{\mu,a} | \mathcal{C}_{\omega,\mu,a} = R_\omega \}$ est une courbe C^∞ si $\eta(0,0) \neq 0$.

(on identifie un cercle $|z| = \rho$ avec $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ par $\theta \longmapsto \rho e^{2\pi i \theta}$; R_ω correspond donc à une rotation d'angle $2\pi\omega$).

De plus, lorsque $\eta(0,0) > 0$ (resp. < 0), C_ω est tangente en un unique point γ_ω à Γ si $\omega \geqslant \omega_0$ (resp. $\omega \leqslant \omega_0$) (la Figure 48 représente respectivement les quatre cas génériques; on a toujours $\omega_2 < \omega_0 < \omega_1$).

Figure 48

Nous pouvons introduire maintenant ce qui, dans [Ch_3] est appelé "système de coordonnées" adapté à un ω ($\gtrless \omega_0$ si $\eta(0,0) \gtrless 0$) :
Pour (μ, a) proche de γ_ω, soit $r(\omega,\mu,a)$ l'unique solution positive proche de 0 de l'équation

$$(72) \qquad g_\omega\left(\mu, a, r(\omega,\mu,a)^2\right) = 0$$

$N_{\mu,a}$ applique le cercle $|z| = r(\omega,\mu,a)$ sur le cercle $|z| = r(\omega,\mu,a)\left[1 + f\left(\mu,a,r(\omega,\mu,a)^2\right)\right]$ par la rotation R_ω. Posons, pour α donné,

$$(73) \begin{cases} \nu = f\left(\mu,a,r(\omega,\mu,a)^2\right) & \text{(la courbe } C_\omega \text{ est définie par } \nu = 0\text{)} \\ \varepsilon = f\left(\mu,a,r(\omega,\mu,a)^2\right) + 2\dfrac{\partial f}{\partial x}\left(\mu,a,r(\omega,\mu,a)^2\right) \cdot r(\omega,\mu,a)^2 \\ \tau = 2\dfrac{\partial g_\omega}{\partial x}\left(\mu,a,r(\omega,\mu,a)^2\right) \cdot r(\omega,\mu,a)^2 \cdot \alpha \\ r = |z| = r(\omega,\mu,a)\,(1+\alpha\sigma) \quad (*) \end{cases}$$

On montre que

1- l'application $\Phi_\omega : (\mu,a) \longmapsto (\nu,\varepsilon)$ est un difféomorphisme local au voisinage de γ_ω, pourvu que ω soit assez proche de ω_0 ; son déterminant jacobien au point γ_ω est en effet égal à
$2\eta(\mu_\omega, a_\omega)\rho_\omega^2 + O(\rho_\omega^4)$ où $\gamma_\omega = (\mu_\omega, a_\omega)$, $\rho_\omega = r(\omega,\mu_\omega,a_\omega)$.

2- Soit $(\nu,\varepsilon) = \Phi_\omega(\mu,a)$; si (μ,a) est voisin de $(0,0)$, et si α est assez petit, $N_{\mu,a}$ définit un difféomorphisme de $\mathbb{T}^1 \times [-1,+1]$ sur un voisinage de $\mathbb{T}^1 \times \{0\}$ dans $\mathbb{T}^1 \times \mathbb{R}$ de la forme suivante:

(*) $r = r(\omega,\mu,a)\sqrt{1+\alpha\sigma}$ est un meilleur changement de variables ; il permet en particulier de choisir $\alpha = 1$ dans le lemme (75) (Note ajoutée sur épreuves).

$$(74)\quad \begin{cases} N_{\mu,a}(\Theta,\sigma) = \Theta, \Sigma \\ \Theta = \theta + \omega + \tau\sigma + O(\tau\alpha)\sigma^2 + O(\tau^2\alpha)\sigma^3 + \dots + O(\tau^n\alpha^n)\sigma^{2n} \\ \Sigma = \frac{\nu}{\alpha} + (1+\varepsilon)\sigma + O\left[(\varepsilon-\nu)\alpha + \tau r(\omega,\mu,a)^2\right]\sigma^2 + \dots + O(\tau^n\alpha^n)\sigma^{2n+1} \end{cases}$$

où les termes notés $O(x)$ sont de la forme $x.\alpha^k.\varphi(\omega,\mu,a)$, k entier $\geqslant 0$, φ fonction C^∞ définie au voisinage de $(\omega_0, 0, 0)$.

La signification de τ, $\frac{\nu}{\alpha}$, ε apparaît clairement sur cette formule : ce sont respectivement le twist (cisaillement tangentiel), la "translation" (différence des rayons) et la contraction normale, associées à l'application $N_{\mu,a}$ au voisinage du cercle $|z| = r(\omega,\mu,a)$.

Remarquons que lorsqu'on parcourt $C_\omega(\nu = 0)$, le passage par $\gamma_\omega(\varepsilon = 0)$ correspond à un changement de nature (attractant ou répulsif) du cercle invariant $|z| = r(\omega,\mu,a)$ de $N_{\mu,a}$. C'est ce fait qui va nous permettre de prouver que, pour un Cantor de valeurs de (μ,a) proches de Γ, le difféomorphisme $P_{\mu,a}$ possède une courbe fermée C^∞ invariante non normalement hyperbolique.

Le lemme fondamental est le suivant :

$$(75)\quad \begin{cases} \text{Si } \alpha = \rho_\omega^2,\ |\varepsilon| \leqslant \rho_\omega^6,\ |\nu| \leqslant \rho_\omega^8,\ n \geqslant 3,\ (\nu,\varepsilon) = \Phi_\omega(\mu,a), \\ \text{on a } P_{\mu,a}(\Theta,\sigma) = \left(\theta + \omega + \tau_\omega\sigma + \tau_\omega^{3/2} A_{\omega,\mu,a}(\Theta,\sigma),\ \sigma + \tau_\omega^{3/2} B_{\omega,\mu,a}(\Theta,\sigma)\right); \\ \text{où } \tau_\omega = \tau(\omega,\mu_\omega,a_\omega) = 2\rho_\omega^4 + O(\rho_\omega^6), \text{ et où les fonctions} \\ A_{\omega,\mu,a},\ B_{\omega,\mu,a}, \text{ sont bornées en norme } C^k \text{ (pour tout } k\text{) sur} \\ \mathbb{T}^1 \times [-1,+1] \ \underline{\text{uniformément}} \text{ par rapport à } \omega, \mu, a \text{ vérifiant} \\ \text{les conditions ci-dessus.} \end{cases}$$

Pour contraste, dès qu'on s'éloigne de γ_ω, on a des estimations du type "hyperbolicité normale", où le rôle joué par τ dans (75) est maintenant

tenu par ε :

$$(76)\quad \begin{cases} \text{Si } \alpha = \varepsilon^{3/2},\ 0 < r(\omega,\mu,a)^{\frac{2n+2}{3}} \leq |\varepsilon|,\ |\nu| \leq \varepsilon^3,\ (\nu,\varepsilon) = \Phi_\omega(\mu,a), \\ \text{on a} \\ P_{\mu,a}(\theta,\sigma) = \left(\theta+\omega+|\varepsilon|^{3/2} C_{\omega,\mu,a}(\theta,\sigma),\ (1+\varepsilon)\sigma+|\varepsilon|^{3/2} D_{\omega,\mu,a}(\theta,\sigma)\right), \\ \text{où les fonctions } C_{\omega,\mu,a} \text{ et } D_{\omega,\mu,a} \text{ sont bornées en norme } C^k \\ \text{(pour tout } k \text{) sur } \mathbb{T}^1\times[-1,+1],\ \underline{\text{uniformément}} \text{ par rapport à } \omega, \\ \mu, a \text{ vérifiant les conditions ci-dessus.} \end{cases}$$

La Figure 49 représente le système de coordonnées (ν,ε) au voisinage de γ_ω, la Figure 50 indique les zônes respectives de validité de (75) et (76) (les deux figures sont faites dans le cas où $\frac{\partial\omega}{\partial a}(0,0) > 0$).

Figure 49

Figure 50

Nous supposerons dorénavant satisfaites les hypothèses de (75) ; on peut voir que $A_{\omega,\mu,a}(\theta,\sigma)$ et $B_{\omega,\mu,a}(\theta,\sigma)$ sont chacun la somme d'un polynôme en σ (indépendant de θ) et d'un terme de la forme $\tau_\omega^{(n-3)/2}\cdot U_{\omega,\mu,a}(\theta,\sigma)$; si ce terme supplémentaire est nul (cas de la forme normale $N_{\mu,a}$), le cercle $\sigma = 0$ (c'est à dire $|z| = r(\omega,\mu,a)$) est appliqué sur le cercle "translaté" (au sens des coordonnées θ,σ) $\sigma = \frac{\nu}{\rho_\omega^2}$. Un théorème de Rüssmann (voir [H_1]) adapté à notre

situation (voir [Ch_3] appendice : c'est là que viennent les conditions parasites provisoires sur ω_0) nous permet d'affirmer qu'une situation analogue se produit dans le cas général à condition que ω soit mal approché par les rationnels (i.e. $\exists\, C,\ \beta > 0$ tels que pour tout rationnel $\frac{p}{q}$, $\left|\omega - \frac{p}{q}\right| \geqslant \frac{C}{|q|^{2+\beta}}$; la condition parasite disparait si on peut remplacer C par $C\,\tau_\omega$).

Plus précisément, dans le domaine de validité de (75), il existe, pour de tels ω , une unique courbe fermée C^∞ , $\tilde{\mathcal{C}}_{\omega,\mu,a}$ d'équation $\sigma = \Psi_{\omega,\mu,a}(\theta)$, que $P_{\mu,a}$ applique sur la courbe "translatée" d'équation $\sigma = \Psi_{\omega,\mu,a}(\theta) + \lambda_{\omega,\mu,a}$ par un difféomorphisme C^∞ conjugué à R_ω (on paramètre les deux courbes par θ).

Le théorème de Rüssmann est déduit dans [H_1] du théorème de fonctions implicites de Hamilton ; ceci a pour nous une conséquence fondamentale: la "translation" $\lambda_{\omega,\mu,a}$ dépend de manière C^∞ (C^1 suffirait), dans un sens raisonnable, des perturbations $\tau_\omega^{3/2}.A_{\omega,\mu,a}$ et $\tau_\omega^{3/2}.B_{\omega,\mu,a}$, et est donc proche de $\frac{\nu}{\rho_\omega^2}$ si ω est proche de ω_0 (il faut bien entendu des estimations précises).

On en déduit que, si ω est assez proche de ω_0 (et n assez grand), $\lambda_{\omega,\mu,a}$ s'annule sur une courbe $\tilde{C}_\omega$ d'équation $\nu = t(\varepsilon)$, où $t : \left[-\rho_\omega^6, \rho_\omega^6\right] \longrightarrow \left[-\rho_\omega^8, \rho_\omega^8\right]$ est C^∞ et proche de 0 (Fig. 51).

Si $\Phi_\omega(\mu,a) = (t(\varepsilon),\varepsilon)$ (c'est-à-dire si $(\mu,a) \in \tilde{C}_\omega$) , la courbe $\tilde{\mathcal{C}}_{\omega,\mu,a}$ est donc laissée invariante par $P_{\mu,a}$, et $P_{\mu,a} \,|\, \tilde{\mathcal{C}}_{\omega,\mu,a}$ est C^∞ conjugué à R_ω .

Figure 51

Nous venons donc de trouver pour $P_{\mu,a}$ l'analogue de C_ω, et en fait l'analogue des courbes ν = constante (les courbes $\lambda_{\omega,\mu,a}$ = cste) lorsque ω est mal approché par les rationnels.

Nous allons maintenant trouver l'analogue des courbes ε = constante : par un changement de coordonnées $(\theta,\sigma)\mapsto(\xi,x)$ tel que $\tilde{\mathcal{C}}_{\omega,\mu,a}$ s'écrive $x=0$, $P_{\mu,a}$ devient

$$(77)\quad P_{\mu,a}(\xi,x)=\left(\xi+\omega+O(|x|),\ \lambda_{\omega,\mu,a}+X_{\omega\,\mu\,a}(\xi)x+O(|x|^2)\right)$$

Au voisinage de γ_ω, $X_{\omega,\mu,a}(\xi)$ est proche de 1, donc positif ; puique ω est mal approché par les rationnels, l'équation aux différences

$$(78)\quad \operatorname{Log} Y_{\omega,\mu,a}(\xi,\omega)-\operatorname{Log} Y_{\omega,\mu,a}(\xi)=\operatorname{Log} X_{\omega,\mu,a}(\xi)-\int_0^1 \operatorname{Log} X_{\omega,\mu,a}(\xi)\,d\xi$$

a une unique solution $Y_{\omega,\mu,a}(\xi)$ C^∞ et proche de 1 (démonstration par séries de Fourier).

Le changement de variables

$$(79)\quad (\xi,x)\longmapsto\left(\xi,\ y=\frac{x}{Y_{\omega,\mu,a}(\xi)}\right)$$

transforme alors $P_{\mu,a}$ en

$$(80)\quad P_{\mu,a}(\xi,y)=\left(\xi+\omega+O(|y|),\ \exp\left[\int_0^1 \operatorname{Log} X_{\omega,\mu,a}(\xi)\,d\xi\right]y+O(y^2)\right)$$

<u>pourvu que $(\mu,a)\in\tilde{C}_\omega$</u> (i.e. que $\tilde{\mathcal{C}}_{\omega,\mu,a}$ soit une courbe fermée <u>invariante</u> de $P_{\mu,a}$).

Si ω est assez proche de ω_0, et n assez grand, l'application Ψ_ω définie par

$$(81)\quad \Psi_\omega(\nu,\varepsilon)=\left(\lambda_{\omega,\Phi_\omega^{-1}(\nu,\varepsilon)},\ \exp\left[\int_0^1 \operatorname{Log} X_{\omega,\Phi_\omega^{-1}(\nu,\varepsilon)}(\xi)\,d\xi\right]\right)$$

est un difféomorphisme de $\left[-\rho_\omega^8,\rho_\omega^8\right]\times\left[-\rho_\omega^6,\rho_\omega^6\right]$ sur son image et cette dernière contient (0,1) (Figure 52 sous les mêmes hypothèses que 49, 50, 51). Soit $\tilde{\gamma}_\omega=\left(\Psi_\omega\circ\Phi_\omega\right)^{-1}(0,1)$: on déduit de (80) que $\tilde{\gamma}_\omega$ est l'unique point de la courbe $\tilde{C}_\omega$ tel que la courbe invariante $\tilde{\mathcal{C}}_{\omega,\tilde{\gamma}_\omega}$ de $P_{\tilde{\gamma}_\omega}$ soit non normalement hyperbolique, ce qui démontre toutes les assertions du paragraphe 2 .

Figure 52

Remarques

1- Même pour les valeurs de (μ,a) telles que $P_{\mu,a}$ ait deux courbes fermées invariantes C^∞, l'une attractante, l'autre répulsive, on est loin de pouvoir décrire complètement la dynamique de $P_{\mu,a}$: les bassins d'attraction ou de répulsion des courbes sont à priori très étroits et il est vraisemblable qu'existent entre eux des points périodiques homocliniques du type de ceux décrits dans le chapitre V.

2- Le théorème de Rüssmann était initialement destiné à prouver le théorème de Kolmogorov.Arnold. Moser : dans ce dernier, la condition de conservation de l'aire intervient en effet comme une condition de codimension 1 : chaque courbe fermée entourant l'origine doit recouper son image. En particulier,

si la dite image est une courbe "translatée", la translation ne peut être que nulle. Dans la situation dissipative que nous avons considérée, c'est la présence de paramètres qui fournit des valeurs de (μ, a) pour lesquelles la "translation" s'annule.

On remarquera que, contrairement à ce que semblait penser son auteur à l'époque, le théorème de Rüssmann n'est nullement artificiel : il suffit de le comparer aux propriétés caractéristiques (*) des difféomorphismes $N_{\mu,a}$ énoncés en II.3 .

3- ~~Si on se débarasse effectivement de l'hypothèse parasite discutée au début du paragraphe 2,~~ On pourrait montrer qu'on obtient un Cantor $\tilde{\Gamma}$ de mesure positive (en projection sur l'axe des a).

V. BIFURCATIONS DE POINTS HOMOCLINIQUES

Vous vous êtes abordés
Comme coquelicot et blé
Ma fille, ma fille, je tremble

René Char

Dans le chapitre précédent, les techniques fournissant la structure générique d'un difféomorphisme local de $\mathbb{R}^2$ préservant les aires au voisinage d'un point fixe elliptique ont permis d'établir l'existence de courbes fermées invariantes non normalement hyperboliques de $P_{\mu,a}$ pour certaines valeurs de (μ,a) voisines de Γ : le Cantor de courbes invariantes de la situation conservative est devenu un Cantor de valeurs de (μ,a) ; en quelque sorte, la situation conservative générique a été "déployée" dans la direction de Γ (de même que, dans la bifurcation de Hopf, la situation linéaire elliptique est "déployée" dans la direction du paramètre (Figure 6)).

Nous poursuivons maintenant l'analogie au niveau des points ~~périodiques~~ homoclin~~iques~~es (*) relatifs à des orbites périodiques.

Alors que dans le cas conservatif générique, tout voisinage de l'origine contient un point ~~périodique~~ homoclin~~ique~~e transversal (relatif à une orbite périodique) dont la période tend vers l'infini lorsque le voisinage se rétrécit ([Z]), nous allons montrer que pour une famille $P_{\mu,a}$ générique, étant donné un voisinage Ω de 0 dans $\mathbb{R}^2$, il existe une valeur de (μ,a) dans $\mathcal{V}$, proche de (0,0), telle que $P_{\mu,a}$ possède dans Ω un~~e orbite périodique~~ point homoclin~~ique~~e transversal~~e~~ (voir [Ch_4]) .

(*) Rappelons qu'un point est homocline s'il est dans l'intersection des variétés stable et instable de 2 points périodiques appartenant à la même orbite.

Remarque

Jusqu'ici, le mot "générique" signifiait le plus souvent "pourvu que certaines expressions algébriques ne s'annulent pas" . Dans ce chapitre, la signification est (comme dans [Z]) plus restreinte : c'est la généricité au sens de la catégorie de Baire (propriété vraie pour tous les éléments d'une intersection dénombrable d'ouverts denses) telle qu'elle intervient dans la théorie de la stabilité structurelle (voir [S]) .

Comme dans [Z] , on commence par considérer des familles de difféomorphismes analytiques, que l'on rend génériques par une suite infinie de modifications élémentaires.

Nous nous bornerons ici à la description de ces modifications élémentaires.

L'idée principale est de trouver les points périodiques comme traces des bifurcations qui se produisent lorsque ω_0 prend des valeurs rationnelles (souvenir des résonnances). Pour cela, on plonge comme dans III.3 la famille $P_{\mu,a}$ étudiée dans une famille à trois paramètres, qu'on peut supposer de la forme suivante (à ceci près qu'on a supposé c constant pour l'exposé) :

$$(82)\quad \begin{cases} P_{\mu,a,t}(z) = N_{\mu,a,t}(z) + e^{2\pi i \frac{p}{q}} c\,\bar{z}^{\,q-1} + O(|z|^q), \quad c \text{ réel } \neq 0 \\ N_{\mu,a,t}(z) = e^{2\pi i\left(\frac{p}{q}+t\right)}\, z\left(1+\hat{f}(\mu,a,|z|^2)\right) e^{2\pi i\, g_{\frac{p}{q}}(\mu,a,|z|^2)} \\ f(\mu,a,X) = \mu + aX + a_2(\mu,a)X^2 + \dots, \\ g_{\frac{p}{q}}(\mu,a,X) = \omega(\mu,a) - \frac{p}{q} + b_1(\mu,a)X + \dots, \\ a_2(0,0) = -1, \quad b_1(0,0) = 1, \quad \omega(0,0) = \frac{p}{q} \end{cases}$$

que l'on comparera à (56).

Dans la suite, on supposera $t < 0$ assez petit.

Tous les calculs faits en III.3 restent valables; on garde les mêmes notations α_k , β_k , r_q ,... (voir (57), (59), (63)).

Exercice

Montrer qu'on a les évaluations grossières

$$\alpha_q(r_q^2)-1 \sim q\, f(\mu, a, r_q^2), \quad \tilde{\alpha}_q(r_1^2) \sim q \frac{\partial f}{\partial x}(\mu, a, r_q^2),$$

$$\tilde{\beta}_q(r_q^2) \sim q \frac{\partial g}{\partial X}(\mu, a, r_q^2), \quad \delta_q \sim q \cdot c$$

Le changement de variables (60) conduit aux formules (61) dont on déduit comme précédemment l'existence de $2q$ points fixés par $P^q_{\mu,a}$ pourvu que

(83) $\left|\alpha_q(r_q^2)-1\right| < \gamma\, r_q^{q-2}$, γ assez petit .

Remarquons que cette condition signifie exactement que (μ,a) est assez proche de la courbe (comparer à (71))

(84) $C_{\frac{p}{q}}(t) = \{(\mu,a) \in \mathbb{R}^2 \mid$ Il existe un cercle $\mathcal{C}_{\frac{p}{q},\mu,a,t}$ invariant par $N_{\mu,a,t}$, tel que $N_{\mu,a,t} \mid \mathcal{C}_{\frac{p}{q},\mu,a,t} = R_{\frac{p}{q}} \}$

dont une équation est justement $\alpha_q(r_q^2)-1 = 0$, puisque la dernière condition équivaut, si t est proche de 0, à $\left(N_{\mu,a,t} \mid \mathcal{C}_{\frac{p}{q},\mu,a,t}\right)^q =$ Identité (on sait a priori que c'est une rotation car $N_{\mu,a,t}$ est une forme normale, et si $\frac{p'}{q}$ est assez proche de $\frac{p}{q}$, on a $p = p'$).

Notons $(\theta_\nu(t), \rho_\nu(t))$, $\nu = 1, 2, \ldots, 2q$ les points fixes de $P^q_{\mu,a,t}$ ainsi obtenus, et faisons le changement de variables

(85) $$\begin{cases} \theta = \theta_\nu(t) + \psi \\ \rho = \rho_\nu(t) + r_q^{q/2-1} \cdot x \end{cases}$$

dans un anneau entourant le cercle $\rho = 1$.

Si, en plus de (83), on impose que

$$(86) \qquad \tilde{\alpha}_q \left(r_q^2\right) = O(r_q) \qquad \text{(notations de (63))}$$

c'est-à-dire que (μ, a) n'est pas trop loin du point $\gamma_{\frac{p}{q}}(t) \in C_{\frac{p}{q}}(t)$, on obtient,

$$(87) \quad \begin{cases} P^q_{\mu,a,t}(\psi, x) = (\psi_q , x_q) \\ \psi_q = p + \psi + 2\tilde{\beta}_q\left(r_q^2\right) r_q^{q/2} x + O\left(r_q^{q-1}\right) \\ x_q = (-1)^{\nu} \delta_q r_q^{q/2} \sin 2\pi q \psi + \left[1 + 2\tilde{\alpha}_q\left(r_q^2\right) r_q^2\right] x + O\left(r_q^{q/2+1}\right) \end{cases}$$

(ν pair correspond aux cols, ν impair aux centres, puits, ou sources).

Remarquons l'analogie avec les formules de [Z] , la seule différence provenant du terme $2\tilde{\alpha}_q\left(r_q^2\right) r_q^2 x$ qui s'annule en particulier au point $\gamma_{\frac{p}{q}}(t)$.

Très près de $\gamma_{\frac{p}{q}}(t)$, c'est-à-dire de la courbe Γ , plus précisément dès que

$$(88) \qquad \tilde{\alpha}_q\left(r_q^2\right) = O\left(r_q^{q/2-1}\right) ,$$

ce terme disparaît et on retrouve les formules de [Z] dans le cas conservatif.

Lorsque ν est pair, $P^q_{\mu,a,t}$ est proche au voisinage de 0 de l'application "solution au temps 1" de l'équation différentielle

$$(89) \quad \begin{cases} \dfrac{d\psi}{dt} = 2\tilde{\beta}_q\left(r_q^2\right) r_q^{q/2} x \\ \dfrac{dx}{dt} = \delta_q r_q^{q/2} \sin 2\pi_q \psi + 2\tilde{\alpha}_q\left(r_q^2\right) r_q^2 x \end{cases}$$

c'est-à-dire (avec les notations de (63))

$$(90) \qquad \frac{d^2\psi}{dt^2} = 2\,\delta_q\,\tilde{\beta}_q(r_q^2)\,r_q^q \sin 2\pi q\psi + 2\,\tilde{\alpha}_q(r_q^2)\,r_q^2\,\frac{d\psi}{dt}$$

qui admet la fonction de Liapounov (de Hamilton si $\tilde{\alpha}_q(r_q^2) = 0$)

$$(91) \qquad F(x,\psi) = 2\,\tilde{\beta}_q(r_q^2)\,r_q^{q/2}\,\frac{x^2}{2} + \frac{\delta_q}{2\pi q}\cos 2\pi_q\,\psi$$

(équation du pendule avec frottement).

Le portrait de phase de cette équation est donné sur la Figure 53 pour les diverses valeurs du frottement $2\tilde{\alpha}_q(r_q^2)\,r_q^2$; on a indiqué sur la Figure 54 les régions correspondantes de l'espace des paramètres.

Exercice

Calculer l'angle des variétés stables et instables des cols en fonction de δ_q , et donc de C (on trouvera une expression qui s'annule avec C).

Figure 53

Figure 54

Remarquons que les variétés stables et instables de deux cols consécutifs de l'équation différentielle se traversent lorsqu'on passe de 1 à 5 .
On peut montrer que la perturbation qui fait passer de la solution au temps 1 des diverses équations (89) (correspondant aux q cols) à l'application $P^q_{\mu,a,t}$ est suffisamment petite pour que cette propriété soit préservée.

Un argument standard permet alors d'affirmer que l'intersection se fera transversalement en général, CQFD. (Figure 55 où le mouvement d'ensemble est indiqué).

Figure 55

Remarques

1- Les cas 1 et 5 correspondent à des valeurs de (μ, a) en dehors de $\mathcal{V}(t)$; les points périodiques appartiennent donc à une courbe différentiable invariante de $P_{\mu,a,t}$. Cette courbe est un attracteur en 1 , un répulseur en 5 .

2- Un simple argument de continuité montre qu'il existe des valeurs de (μ, a) proches de $\gamma_{\frac{p}{q}}(t)$ pour lesquelles les variétés stables et instables de deux cols consécutifs de période q de $P_{\mu,a,t}$ sont tangentes ; il est alors possible que des phénomènes du type de ceux décrits par S. Newhouse ("infinitely many sinks") apparaissent .

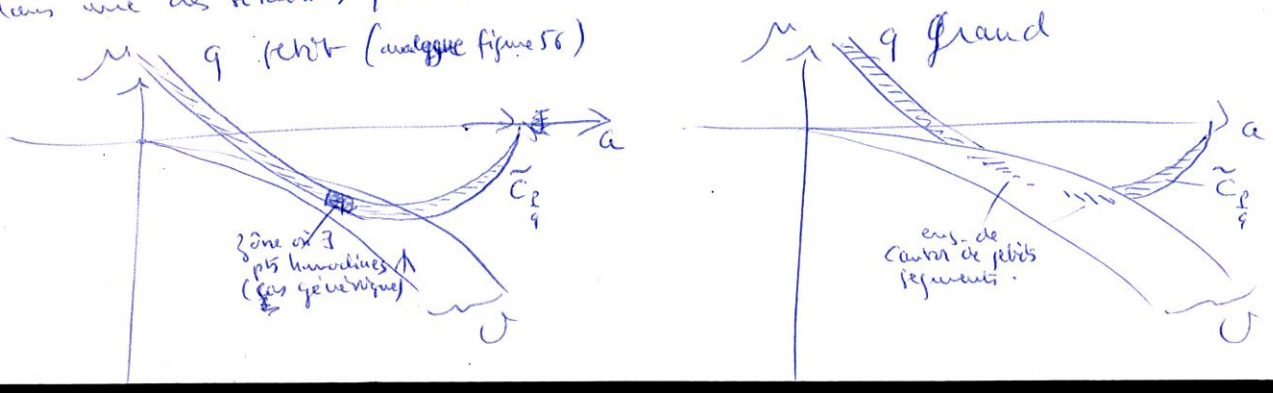
3- Lorsqu'on s'éloigne de la courbe $C_{\frac{p}{q}}(t)$, les points périodiques s'éliminent par paires ; près de $\gamma_{\frac{p}{q}}(t)$ on obtient ainsi des valeurs de (μ, a) au voisinage desquelles se produit (en plus complexe) l'analogue pour les difféomorphismes de ce que Bogdanov a décrit pour les champs de vecteurs (voir [A_1] Figure 135) : on peut donc s'attendre à de nouvelles bifurcations de Hopf pour $P^q_{\mu,a,t}$, etc...

Figure 56

4- Pour une famille <u>donnée</u> $P_{\mu,a}$ l'existence de points périodiques se montre directement par un argument du type Birkhoff. Lewis (Figure 41) à condition que la période q ne soit pas trop grande par rapport à la distance $|\omega_0 - \frac{p}{q}|^{-1}$ (par exemple si $P_{\mu,a}$ est de la forme $P_{\mu,a,t}$ (voir (82)) avec $|t|$ assez petit) : en suivant un chemin transverse à $C_{\frac{p}{q}}$ dans le plan (μ,a), la courbe transformée "radialement" par $P^q_{\mu,a}$ est à l'intérieur puis à l'extérieur de son image ; il existe donc un moment où elle rencontre cette image (en général transversalement) ; la continuité de la dépendance par rapport à (μ,a) vient de ce qu'une telle courbe s'obtient à partir d'un banal théorème de fonctions implicites. Si l'intersection est transverse, il y a un nombre fini de points périodiques de période q, et la courbe $C_{\frac{p}{q}}$ définie pour $N_{\mu,a}$ "explose" en une courbe épaisse (voir Figure 56) $\tilde{C}_{\frac{p}{q}}$ de valeurs de (μ,a) pour lesquelles $P^q_{\mu,a}$ possède une orbite q-périodique de nombre de rotation $\frac{p}{q}$.

5- Dans le cas conservatif générique, chaque voisinage de l'origine contient un point homoclinique transversal. Si ω_0 est irrationnel, ceci prouve <u>géométriquement</u> la divergence des séries transformant un tel difféomorphisme (supposé analytique) en une forme normale : cette dernière devrait en effet laisser invariant chaque cercle de centre l'origine.

6. Lorsque q est grand par rapport à $|\omega_0 - \frac{p}{q}|^{-1}$ on obtient des points dans $\tilde{C}_{\frac{p}{q}} \cap U$ (en fait un ensemble de Cantor) en utilisant une version dérivable du théorème géométrique de Poincaré-Birkhoff. Les figures ci-dessous montrent notre connaissance de $\tilde{C}_{\frac{p}{q}}$ suivant les valeurs de q dans une des situations possibles :



CONCLUSION

Nuit putride et glaciale, épouvantable nuit,
Nuit du fantôme infirme et des plantes pourries,
Incandescente nuit, flamme et feu dans les puits,
Ténèbres sans éclairs, mensonges et roueries !

Robert Desnos.

Les deux voies évoquées par Lefschetz se sont rejointes : dès la codimension deux, des phénomènes de type conservatif se présentent "déployés" au voisinage des hypersurfaces de l'espace des paramètres qui correspondent à des formes normales ayant au moins un cercle invariant non normalement hyperbolique.

Ainsi qu'on a commencé de le faire au début du chapitre V, on compare dans la Figure 57 les couples
(difféomorphisme linéaire elliptique / Bifurcation de Hopf générique)
et
(difféomorphisme conservatif générique / Bifurcation de Hopf de codimension deux au voisinage de Γ).

Figure 57

En fait, la Figure 57 n'est qu'un lointain reflet de la réalité ; en particulier, des points homoclines transversaux peuvent a priori coexister avec une courbe invariante.

Un exemple intéressant est obtenu en composant un difféomorphisme

conservatif générique $\mathcal{A}$ avec une famille à deux paramètres $N_{\mu,a}$ de formes normales comme celles que nous avons considérées (voir (32) et (35)) : On peut s'attendre à voir apparaitre des "attracteurs de Birkhoff" (voir [B]) construits en composant un difféomorphisme conservatif générique $\mathcal{A}$ avec un difféomorphisme ayant une courbe fermée invariante très légèrement attractante séparant en deux une zône d'instabilité de $\mathcal{A}$.

Une façon de montrer l'existence de tels "attracteurs" dans une famille générique $P_{\mu,a}$ à deux paramètres serait de trouver une des courbes $\tilde{C}_\omega$ et une des "courbes épaisses" $\tilde{C}_{\frac{p}{q}}$ s'intersectant dans une zône de $\tilde{C}_{\frac{p}{q}}$ pour laquelle $P_{\mu,a}$ possède des points homoclines transversaux, et dans une zône de $\tilde{C}_\omega$ pour laquelle $P_{\mu,a}$ possède une courbe fermée invariante C^∞ repulsive. Il existerait alors un anneau A invariant par $P_{\mu,a}$ contenant une orbite homoclinie et l'"attracteur" serait l'intersection des itérés de cet anneau (Figure 58); malheureusement, les estimations dont on dispose ne permettent pas d'assurer que cette situation se produit en général.

Figure 58

On peut retirer de ce qui précède le "slogan" suivant : pour étudier les bifurcations génériques, au voisinage d'un point fixe, de familles de difféomorphismes locaux de $\mathbb{R}^2$, il est utile de comprendre la structure de ceux qui préservent les aires.

Ces derniers concentrent en effet dans leur structure les éléments (points périodiques, courbes invariantes, etc...) qui, dans des familles génériques de difféomorphismes ne préservant pas les aires, apparaissent un à un pour différentes valeurs des paramètres (voir Fig. 57) ;

la Figure 59 donne des exemples de champs de vecteurs et de difféomorphismes conservatifs pour lesquels le lecteur pourra chercher des analogues en théorie de bifurcations :

Figure 59

Je finirai par deux commentaires :

Le premier sur le fait, qu'en général, l'ouvert de l'espace des difféomorphismes d'une variété formé par ceux qui possèdent un attracteur d'un certain type (autre qu'un point fixe, par exemple une courbe fermée) est "bordé" par une zône complexe dont la structure est au moins aussi riche que celle du produit d'une variété de dimension infinie par un ensemble de Cantor ; le problème de la bifurcation de cet attracteur en fonction de paramètres n'est donc pas un problème local dans l'espace de ces paramètres. Cependant, dans le cas où une courbe fermée attractante d'un difféomorphisme local de $\mathbb{R}^2$ disparait par "collision" avec une courbe fermée répulsive, les deux courbes venant de naître d'un point fixe elliptique (chemin transverse à Γ), il y a une probabilité non nulle (à condition d'avoir effectivement montré que la mesure de $\tilde{\Gamma}$ est positive) de rencontrer une valeur du paramètre pour laquelle le difféomorphisme considéré laisse invariante une courbe fermée C^∞ non normalement hyperbolique .

Ceci donne un intérêt au problème <u>local</u> de bifurcation consistant à comprendre les déformations possibles d'un tel difféomorphisme.

Le second commentaire concerne la notion d'attractivité (répulsivité) "vague", c'est à dire "non linéaire" (ou faible) telle

qu'elle est postulée en (33) : .

Si P est un difféomorphisme local de $(\mathbb{R}^2, 0)$ dont la dérivée en 0, $DP(0)$, est elliptique, les termes non linéaires du développement de Taylor de P en 0 font génériquement de l'origine un attracteur ou un répulseur sauf dans les cas de résonnance forte (dont on comprend cependant la dynamique locale, voir chapitre II, § 4).

Il n'en est plus du tout de même lorsqu'on remplace le point fixe 0 par une variété invariante V (une courbe fermée par exemple) d'un difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$.

La dérivée $DP(0)$ est remplacée par une application "skew-produit" $S : V \times \mathbb{R}^{n-k} \longrightarrow V \times \mathbb{R}^{n-k}$ $(k = \dim V)$ de la forme $S(\theta\ x) = (f(\theta), A(\theta)\, x)$, où f est un difféomorphisme de V, et $A(\theta)$ une famille de matrices inversibles $n \times n$ paramétrées par $\theta \in V$ (on a supposé le fibré normal de V dans $\mathbb{R}^n$ trivial).

Le spectre de $DP(0)$ peut être remplacé par le spectre de la transformée de graphes $\mathcal{S}$ de S, définie sur l'espace $C^k(V, \mathbb{R}^{n-k})$ (par exemple) par

$$S(\text{graphe } \varphi) = \text{graphe } (\mathcal{S}\varphi)$$

Mais, même si le spectre de $\mathcal{S}$ est contenu dans le cercle unité de $\mathbb{C}$, on ne peut en général rien dire de la dynamique de S ; par exemple, si V est le cercle et f une rotation irrationnelle, les orbites peuvent être localement denses et le slogan qui précède devient vide de sens : c'est comme si la géométrie d'un difféomorphisme local générique de $\mathbb{R}^2$ préservant les aires était remplacée par celle d'un des exemples d'Anosov et Katok cités à la fin de III.2).

Ceci explique que des hypothèses très fortes doivent être faites pour

assurer la persistance d'une courbe invariante pour de petites perturbations du difféomorphisme (comparer à la fin du chapitre I) ou la bifurcation de variétés invariantes telles le tore (voir par exemple [Ch. I] , en particulier V.3) .

La seule façon d'éviter partiellement ce type de problèmes est de considérer des familles dépendant de suffisamment de paramètres pour contenir la naissance de la variété V à partir d'un point fixe. Mais de toute façon, les problèmes liés aux "skew-produits" persistent.

BIBLIOGRAPHIE

[A_1] V.I. ARNOLD, Chapitres Supplémentaires de la Théorie des Equations Différentielles Ordinaires, Ed. de Moscou 1980.

[B] G.D. BIRKHOFF, Sur Quelques courbes fermées remarquables, Bulletin Soc. Math. France, 1932, vol. 60, pages 1-26.

[B.C.D.D.] E.B. BENOIT, J.L. CALLOT, F. DIENER, M. DIENER, Chasse au canard, Publ. Mme I.R.M.A. Strasbourg 1980.

[Ca] M.L. CARTWRIGHT, Forced Oscillations in Nonlinear Systems, in LEFSCHETZ, Contribution to the Theory of Nonlinear Oscillations, Princeton 1950.

[Cha] M. CHAPERON, Thèse et cours à l'ENS 1981, à paraître.

[Ch_1] A. CHENCINER, Stabilité Structurelle et Ergodicité (ou Catégorie et Mesure) Journal de Physique. Supplément au n° 8, 39, août 1978, C5.69-77.

[Ch_2] A. CHENCINER, Singularités des Fonctions Différentiables, Encyclopédia Universalis, 2e Edition, 1980.

[Ch_3] A. CHENCINER, Courbes fermées invariantes non normalement hyperboliques au voisinage d'une bifurcation de Hopf dégénérée de difféomorphismes de $\mathbb{R}^2$. Note C.R.A.S., t. 292, Série I, 9 mars 1981, 507-510, et article à paraître (Preprint Université Paris VII).

[Ch_4] A. CHENCINER , Points homocliniques au voisinage d'une bifurcation de Hopf dégénérée de difféomorphismes de $\mathbb{R}^2$, à paraître.

[Ch.I] A. CHENCINER & G. IOOSS, Bifurcation de tores invariants, Archives for Rational Mechanics and Analysis, 69, n° 2, 109-198, 1979.

[G] J.M. GAMBAUDO, Thèse de 3e Cycle, en préparation, Université de Nice.

[H_1] M. HERMAN, Cours à l'E.N.S. 1980, à paraître dans Astérisque.

[H_2] M. HERMAN, Sur la conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle à des rotations. Publ. Math. I.H.E.S. n° 49, 1979 .

[H_3] M. HERMAN, Mesure de Lebesgue et nombre de rotation, Geometry and Topology, Rio 1977, Springer LN n° 597.

[H.P.S.] M.W. HIRSCH, C.C. PUGH, M. SHUB, Invariant Manifolds, Springer LN n° 583, 1977.

[H.S.] M.W. HIRSCH, S. SMALE, Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra, Acad. Press 1974 .

[I] G. IOOSS, Bifurcation of Maps and Applications, North Holland 1979.

[L] S. LEFSCHETZ, Differential Equations : Geometric Theory, Dover 1977.

[Lem] J.M. LEMAIRE, Bifurcation de Hopf, Preprint, Université de Nice.

[Le] M. LEVI, Thèse, Courant Institute, New York 1978.

[L.M.P.] A. LINS, W. DE MELO, C.C. PUGH, On Lienard's Equation. Geometry and Topology, Rio 1977, Springer LN n° 597.

[M] J. MOSER, Stable and random motion in dynamical systems. Annals of Math. Study 77, Princeton 1973 .

[R.T.] D. RUELLE, F. TAKENS, On the nature of turbulence, Comm. Math, Phys. 20, 167-192, 1971 et 23, 343-344, 1971.

[Sh] M. SHUB, Stabilité Globale des systèmes dynamiques, Astérisque 56, Paris 1978.

[S] S. SMALE, The dynamics of time, Springer, 1980.

[V] B. VAN DER POL, Nonlinear theory of electric oscillations, Proceedings of the I.R.E., 22, n° 9, 1051-1086, Septembre 1934.

[Z] E. ZEHNDER, Homoclinic points near elliptic fixed points, Communications Pure and Applied Math., vol. XXVI, 1973, p. 131-182.

LEGENDES DES FIGURES

Figure 5 Si $\zeta(0) = a, b, c \ldots$, $\zeta(t) = a', b', c' \ldots$

Figure 8 L'équation de Van der Pol pour μ voisin de 0 :

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y - \mu\left(\dfrac{x^3}{3} - x\right) \\ \dfrac{dy}{dt} = -x \end{cases}$$

Figure 9 Sur la partie gauche de la figure, une orbite périodique vient d'apparaître par bifurcation de Hopf.

Figure 22
(1) Rotation
(2) Point fixe attractant
(3) Point fixe répulsif entouré d'une courbe fermée invariante
(4) Point fixe entouré d'une zône ergodique (Anosov et Katok)
(5) Point fixe entouré d'un Cantor de coubes fermées invariantes (situation hamiltonienne générique).

Figure 26 La linéarisation de P_μ $(\mu \neq 0)$ se fait obligatoirement dans un voisinage de 0 trop petit pour voir la courbe fermée invariante apparue par bifurcation en $\mu = 0$.

Figure 28 Cas N = 1 .

Figure 29 Cas N = 2 : l'axe $\mu_0 = 0$ est une ligne de points de bifurcation de Hopf, générique si $\mu_1 \neq 0$.

Figure 30 Cas N = 1.

Figure 31 Cas N = 2 .

Figure 33 $$P_0(z) = e^{\frac{2\pi i}{3}} \cdot (z + \bar{z}^2)$$

Les droites $\theta = \dfrac{2k\pi}{3}$, $k = 0, 1, 2$, sont permutées par P_0 ; l'origine n'est ni attracteur, ni répulseur.

Figure 34 Exemples de déformations du difféomorphisme P_0 de la Figure 33. On a représenté les variétés stables et instables des points périodiqu de période 3 et les éventuelles courbes fermées invariantes.

Figure 35 Une autre déformation du même (comparer au Chapitre V).

Figure 36 Cas N = 1.

Figure 37 Cas N = 2 : Γ_p^- (resp. Γ_p^+) est contenu dans le contour apparent de $f_p^-(\mu, r^2) = 0$ (res. $f_p^+(\mu, r^2) = 0$).

Figure 38 Domaines d'hyperbolicité normale.

Figure 40 Le cercle $|z| = r_q$ est transformé "radialement" par $N^q_{\mu,t}$.

Figure 41 Suivant que la courbe transformée "radialement" par $P^q_{\mu,t}$ intersecte ou non son image, on obtient ou non des points périodiques de période q de $P_{\mu\, t}$.

Figure 42 Le domaine $\mathcal{P}_{\frac{p}{q}}$: approximativement $\left|\mu - \frac{a_1(0,0)}{b_1(0,0)} t\right| < \gamma |t|^{\frac{q-2}{2}}$
On a représenté le cas où $a_1(0,0) = -1$, $b_1(0,0) = 1$.
L'orientation bizarre de l'axe des t vient de ce qu'on le pense comme un morceau de cercle orienté dans le sens trigonométrique.

Figure 43 On a représenté une partie des valeurs des paramètres pour lesquelles le difféomorphisme $z \mapsto e^{2\pi i t} P_\mu(z)$ possède des points périodiques proches de 0 : la famille P_μ est supposée générique, et telle que Spectre $DP_\mu(0) = \{\lambda_\mu, \bar{\lambda}_\mu\}$, $\lambda_\mu = (1+\mu)\lambda_0$, $|\lambda_0| = 1$, $\lambda_0^q \neq 1$ pour $q < 5$.

Figure 46 Cas $\eta(0,0) > 0$; A = attracteur, R = Répulseur .

Figure 52 En tous les points de $\hat{C}_\omega$, $P_{\mu,a}$ possède une courbe fermée C^∞ invariante $\tilde{\mathcal{C}}_{\omega,\mu,a}$, attractante (A) si (μ, a) est à gauche de $\tilde{\gamma}_\omega$, répulsive (R) s'il est à droite.

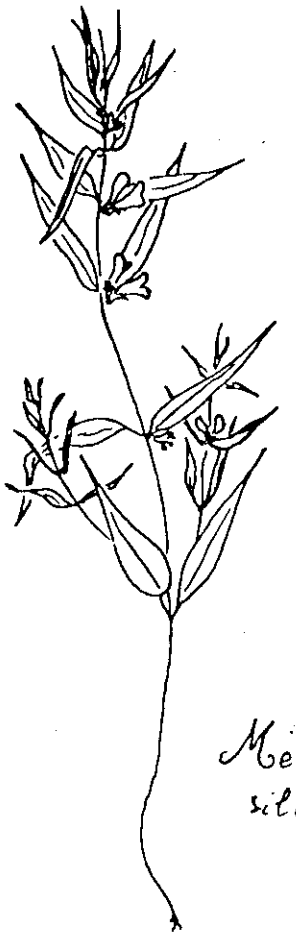
Figure 53 L'orientation de Ψ correspond à celle du cercle.

Figure 54 La figure correspond à $N_{\mu,a,t}$ pour $t < 0$ petit fixé. Les points 1 , 2 , 3 , 4 , 5 sont voisins de $C_{\frac{p}{q}}(t)$ et peuvent en particulier être choisis sur cette courbe.

Figure 56 La région $\tilde{C}_{\frac{p}{q}}(t)$ est l'intersection avec un plan "t = constante" de l'analogue à 3 paramètres de la région $\mathcal{P}_{\frac{p}{q}}$ représentée sur la Figure 42.

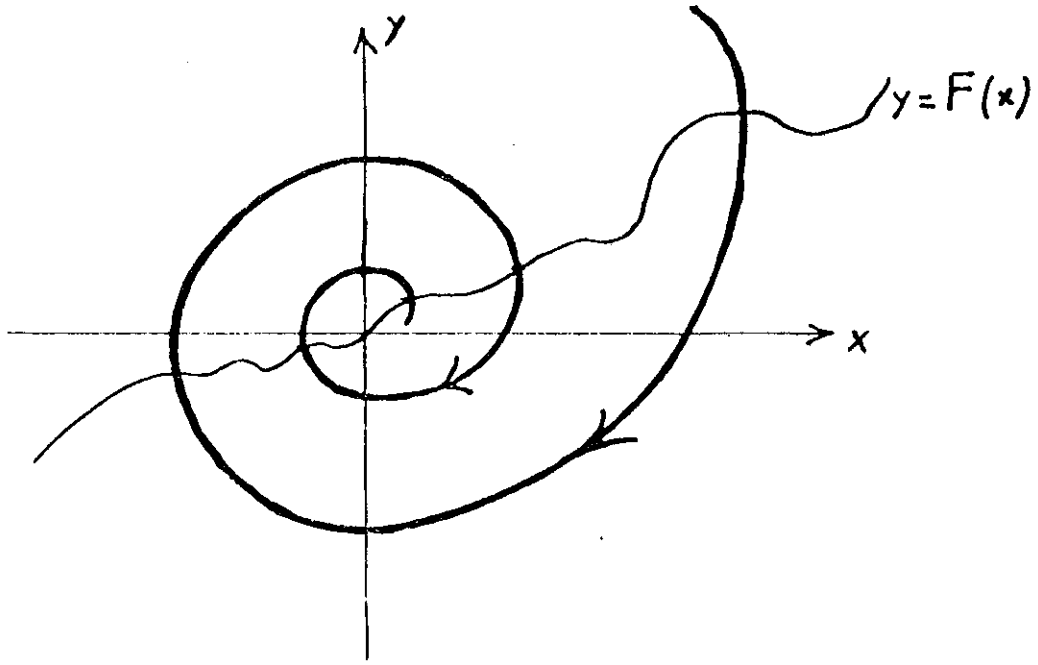
Figure 59 Ces figures ne sont bien sûr que qualitatives.

0

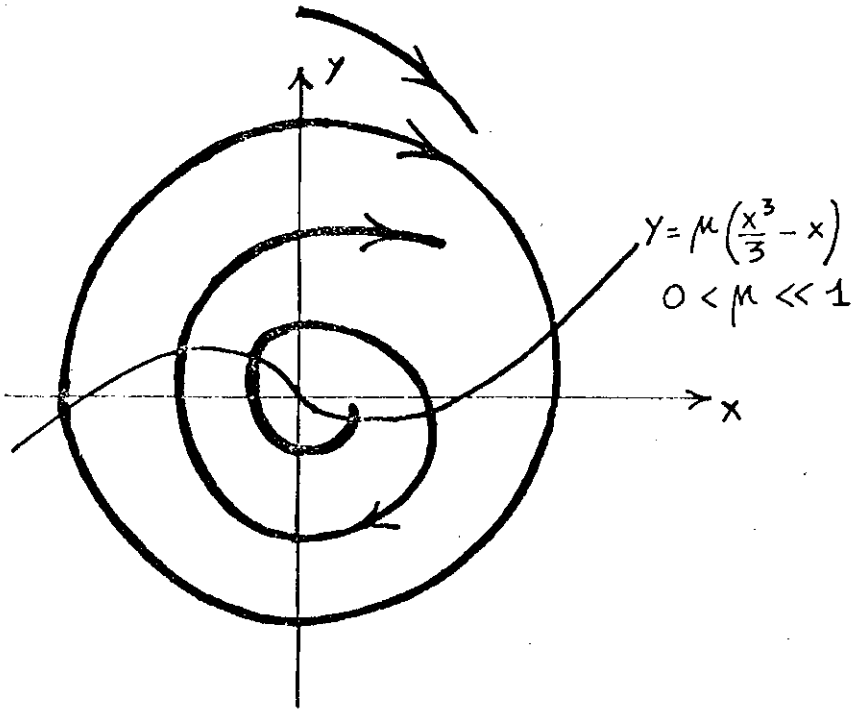


Melampyrum
silvaticum

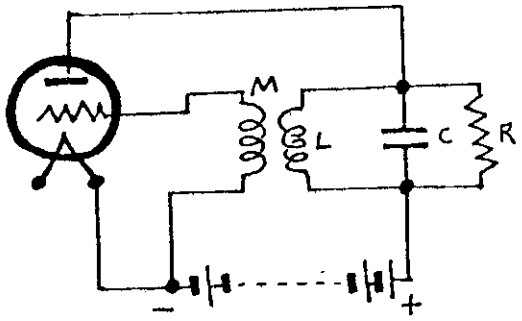
1



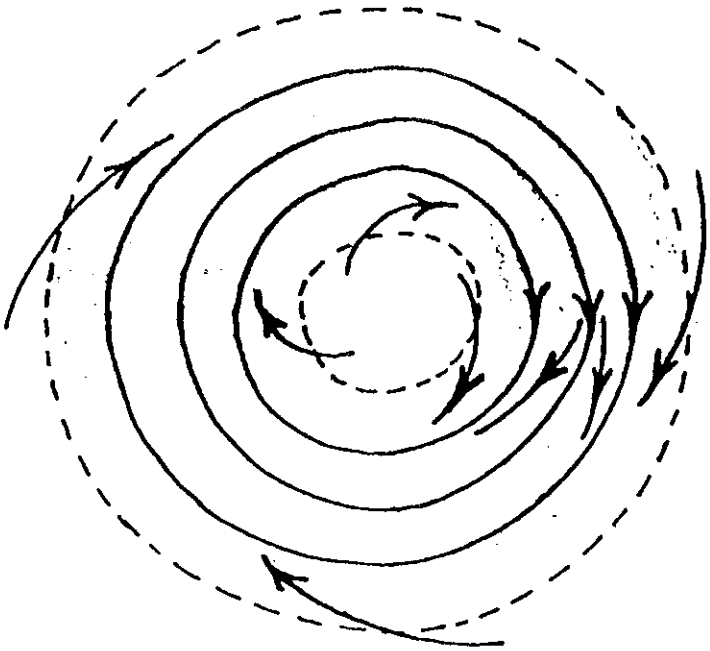
2



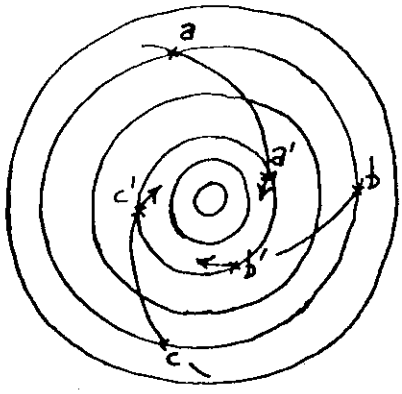
3

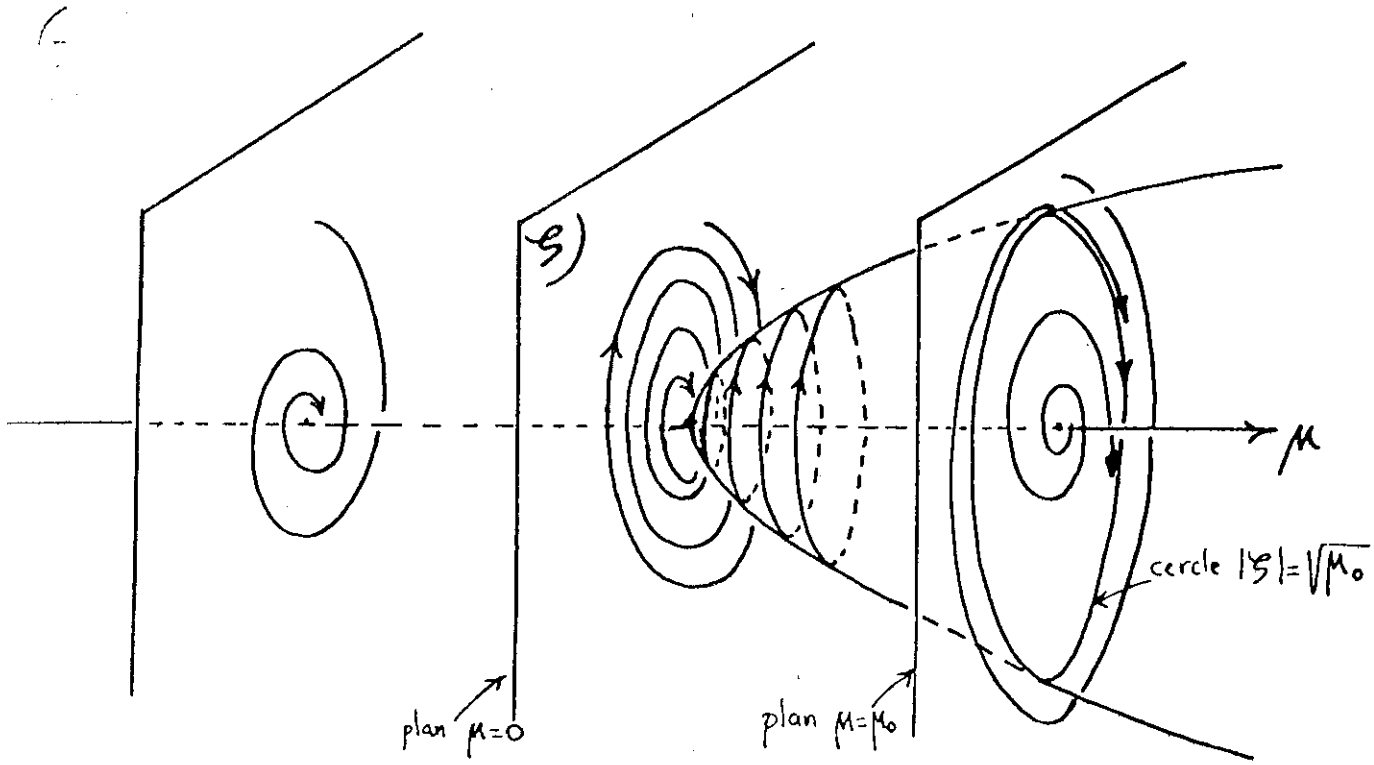


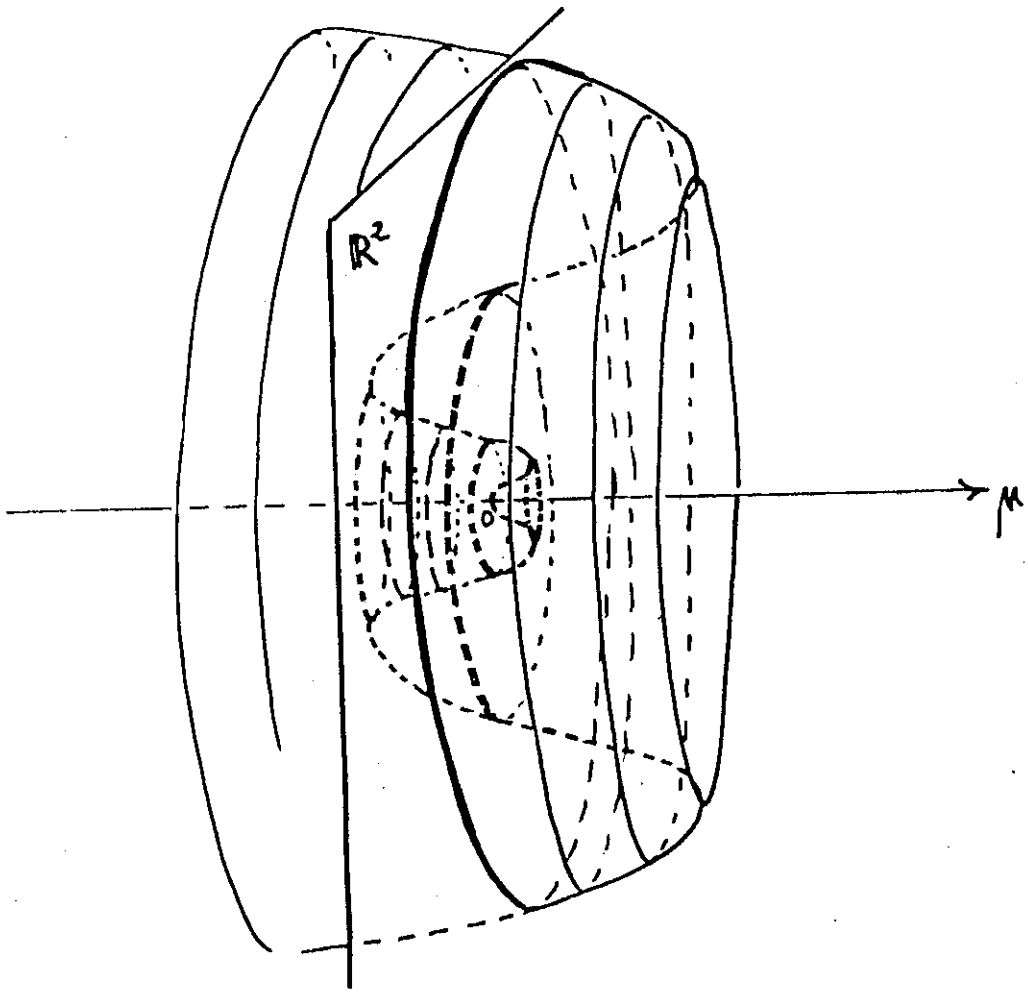
4



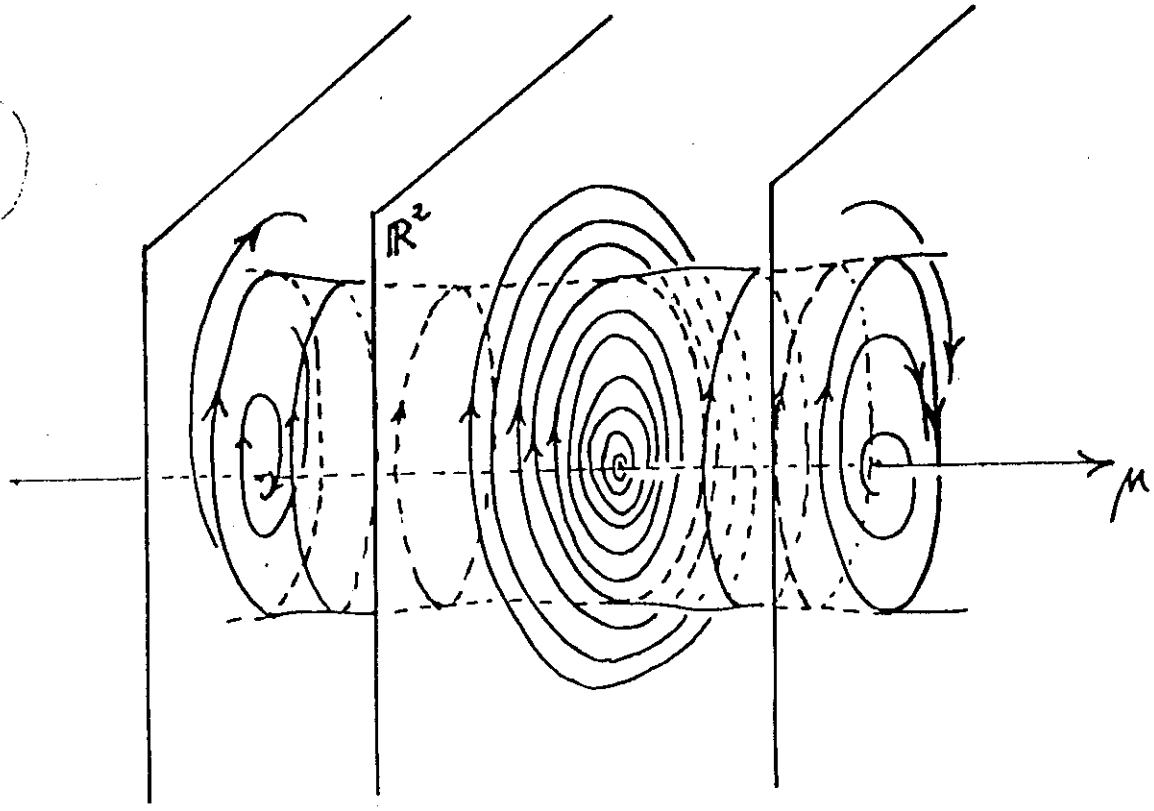
5

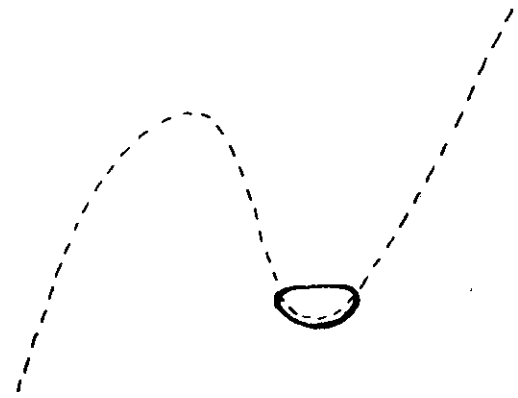



μ
cercle $|\xi| = \sqrt{\mu_0}$
plan $\mu = 0$
plan $\mu = \mu_0$

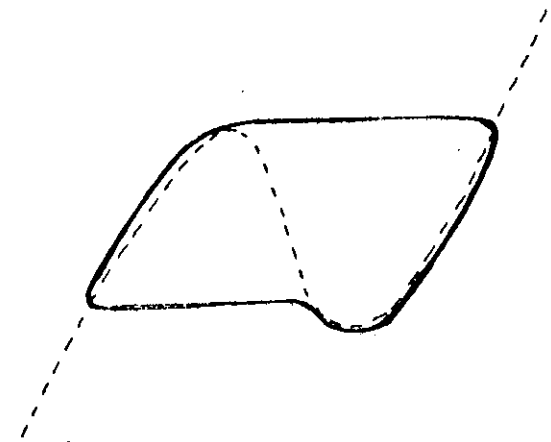

$\mathbb{R}^2$
μ

8



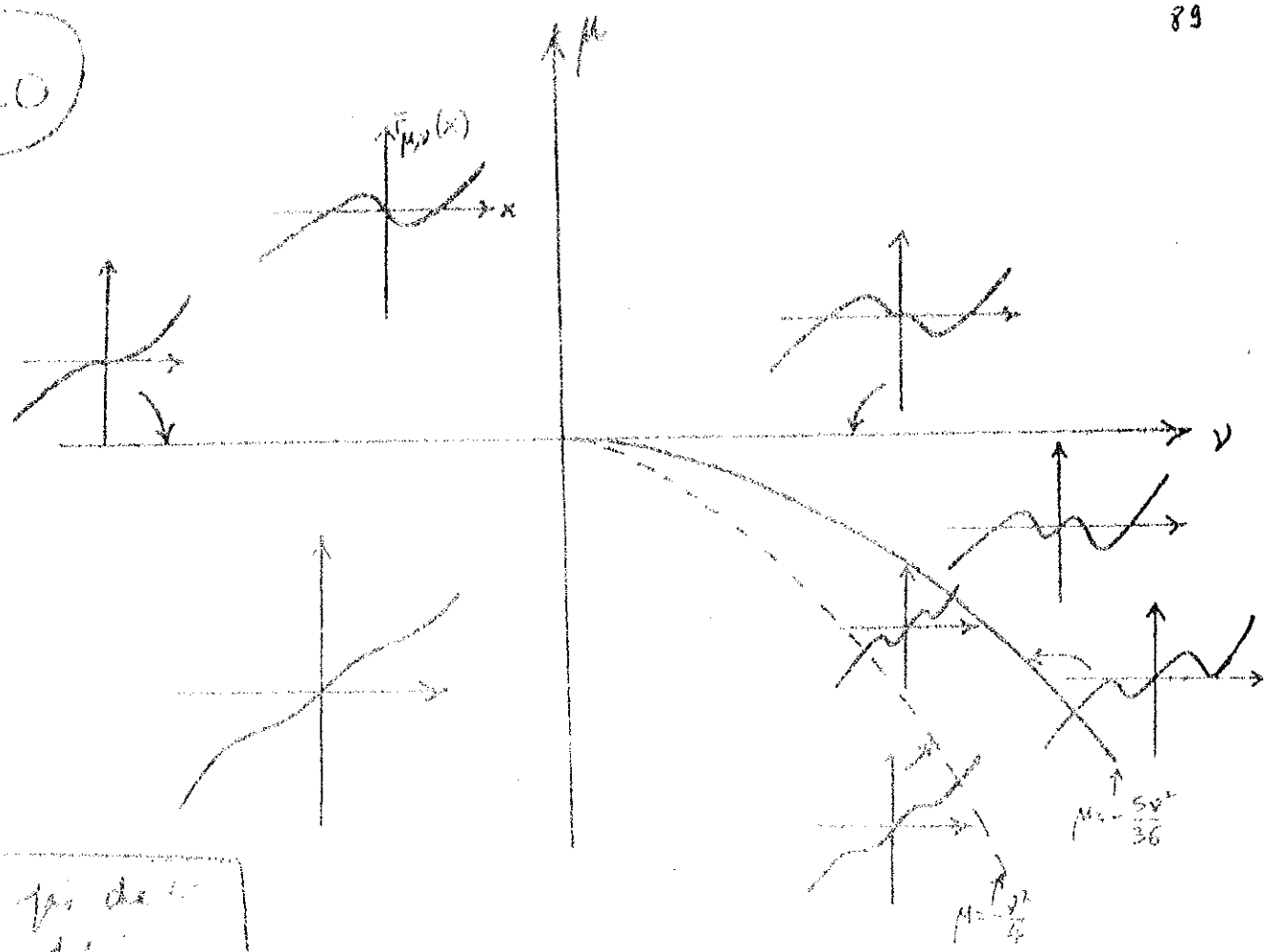


$\mu = 100$, $a = 0{,}9987404513$



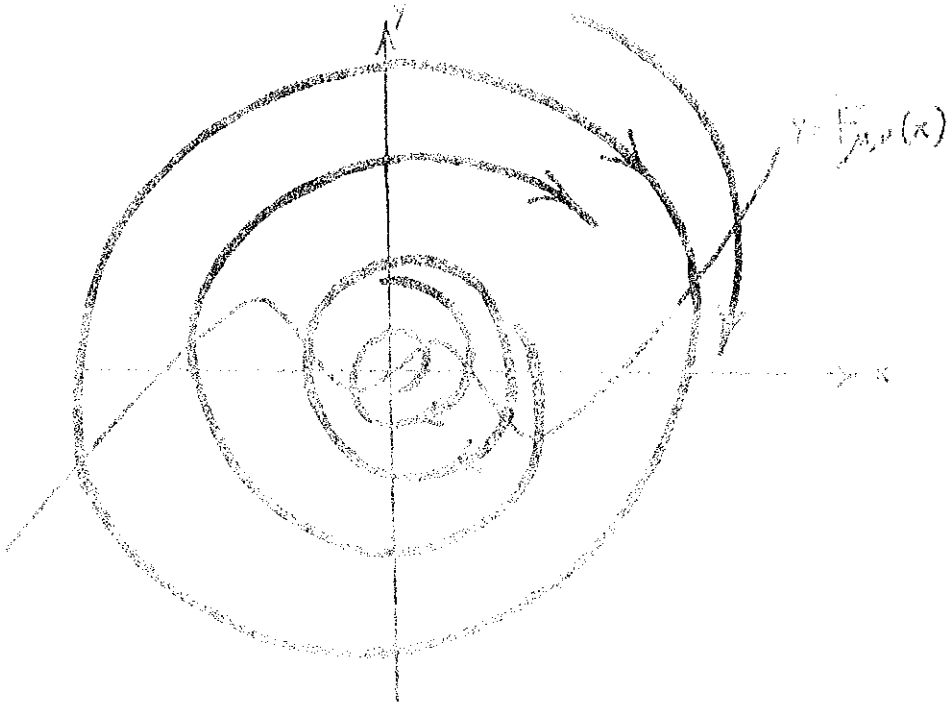
$\mu = 100$, $a = 0{,}9987404512$

10

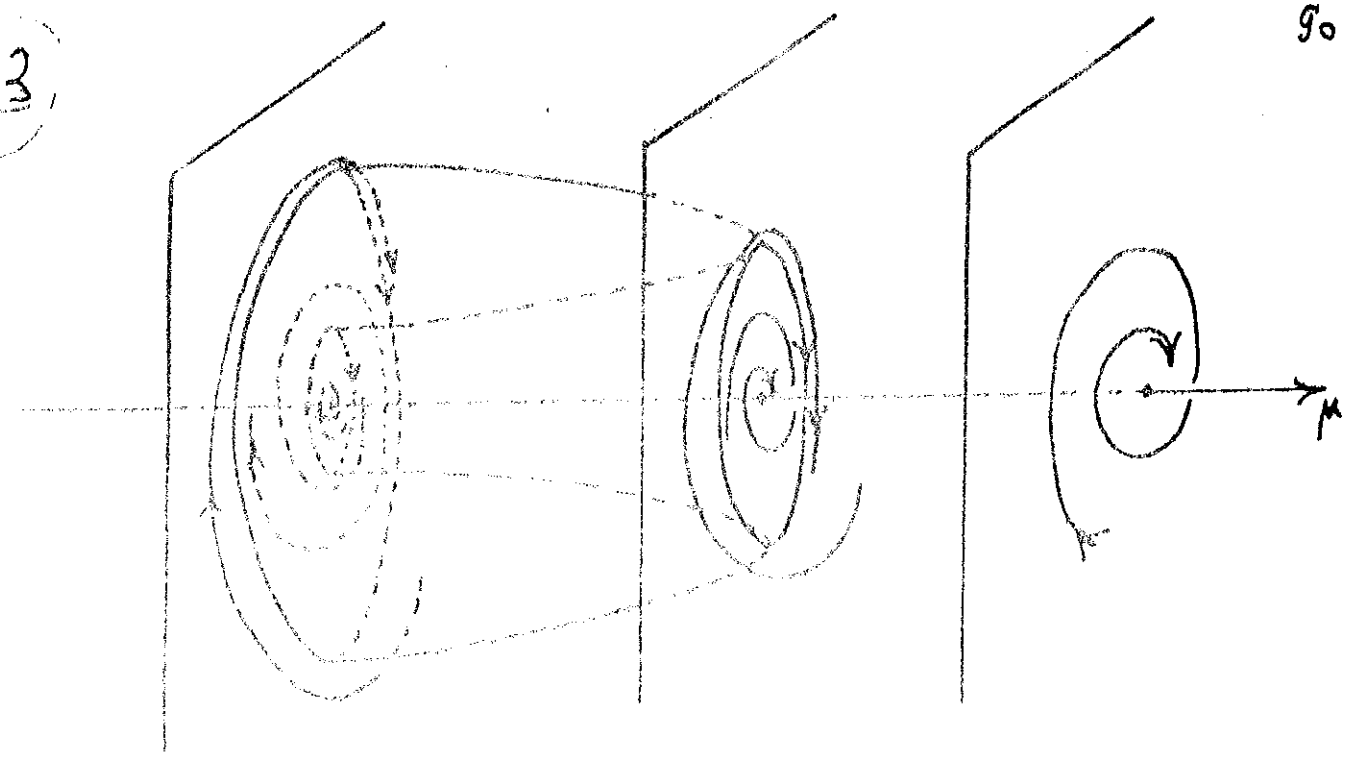


Il n'y a pas de figure 1-1

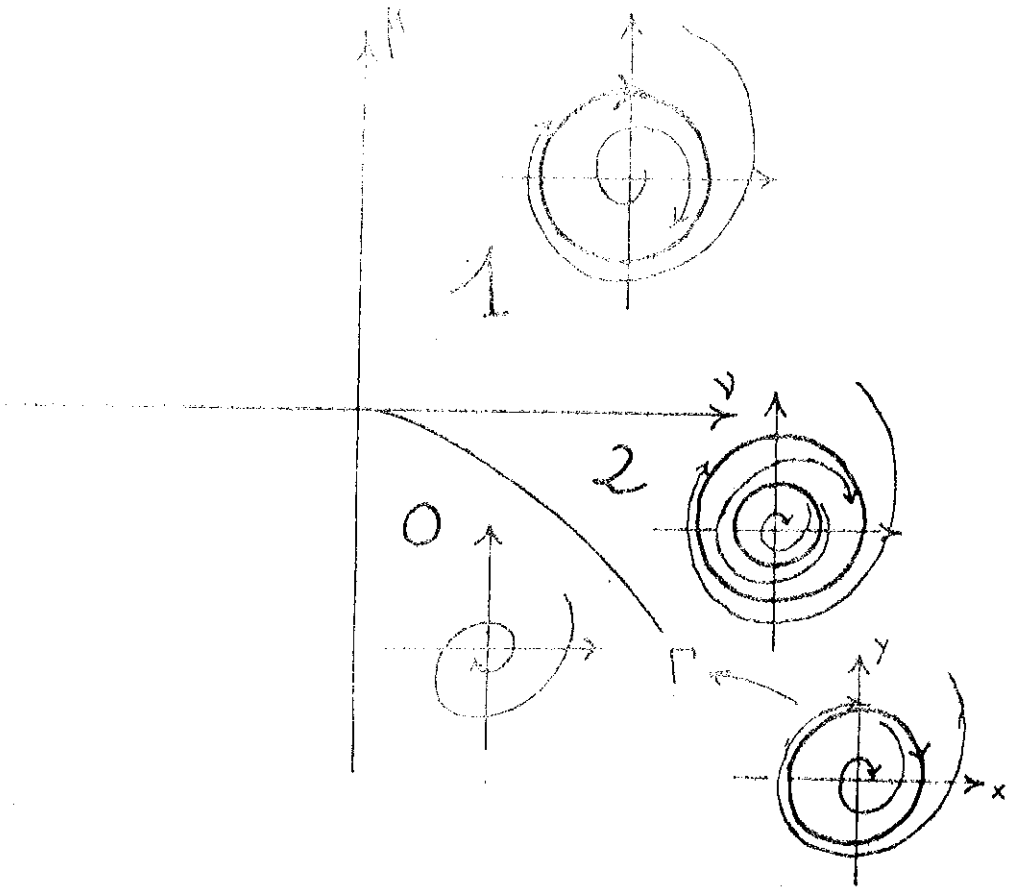
10



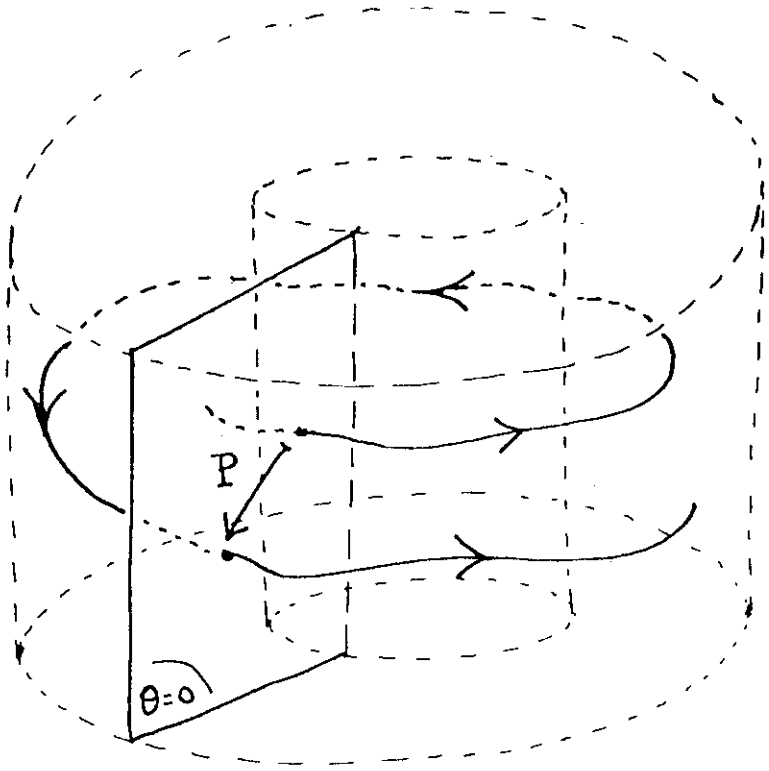
13



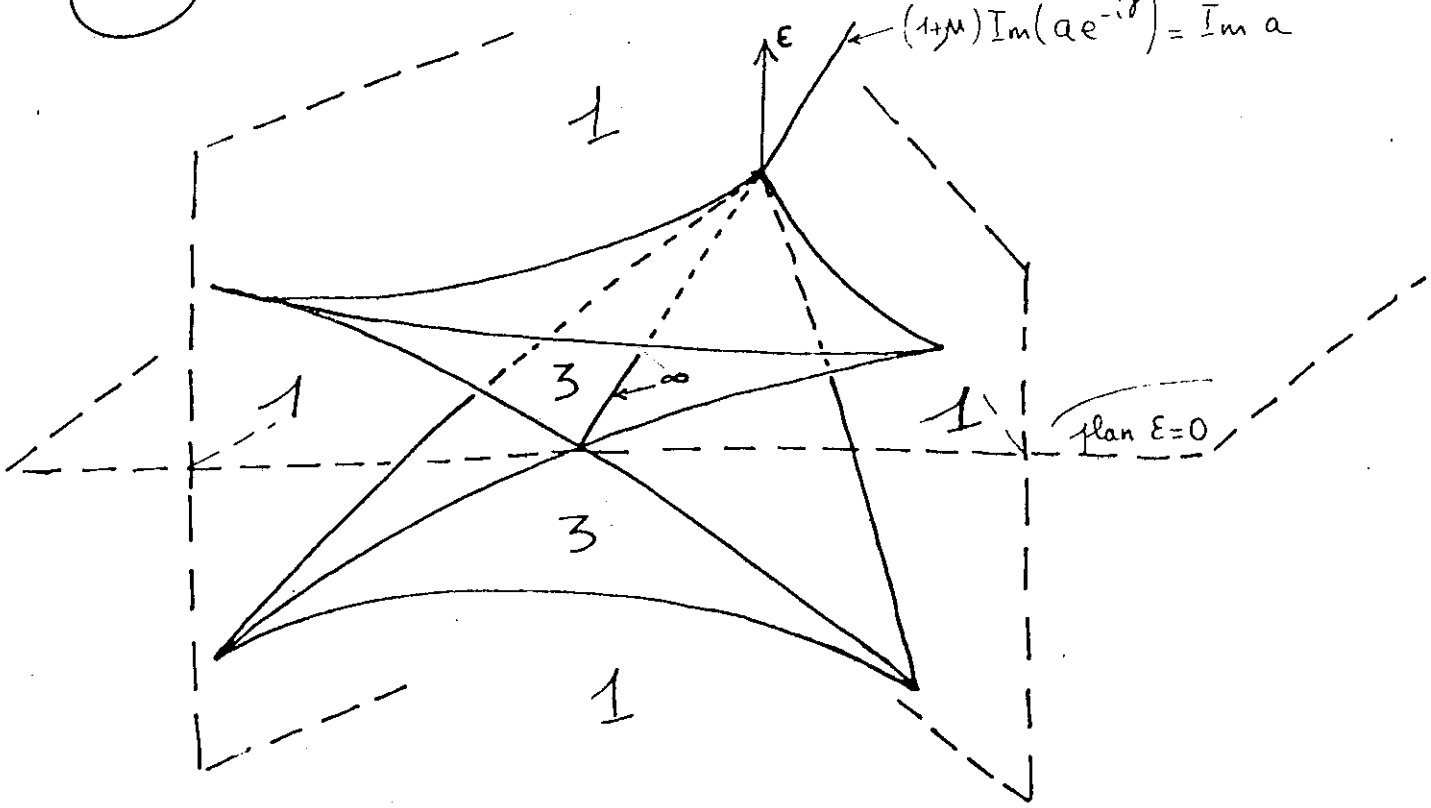
14



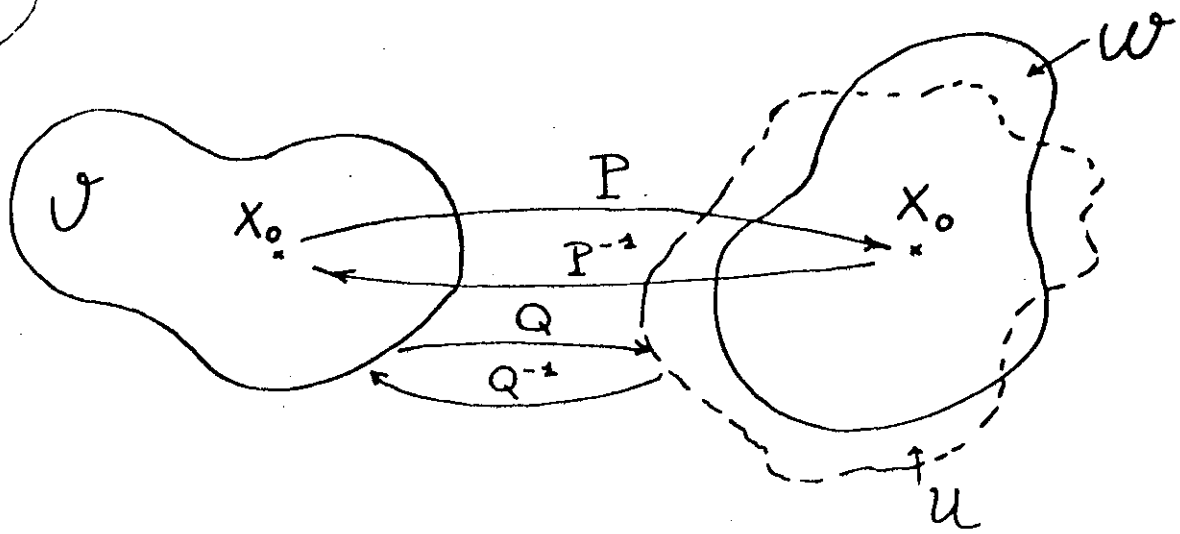
15



16

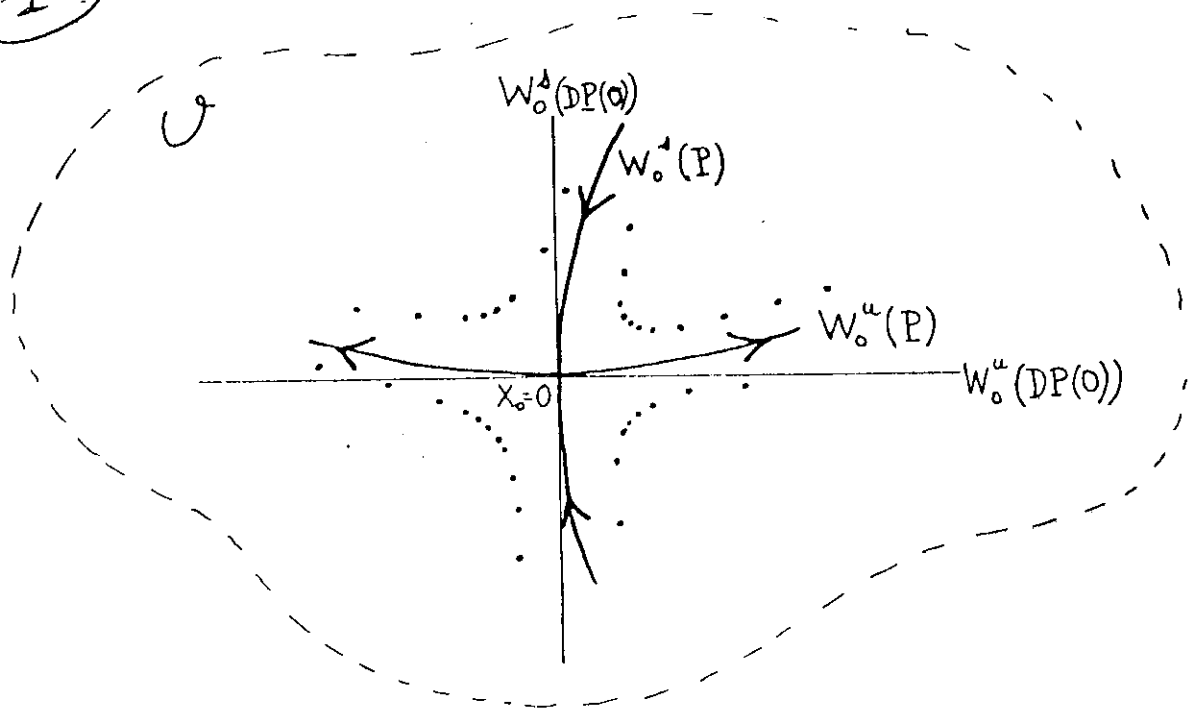


17

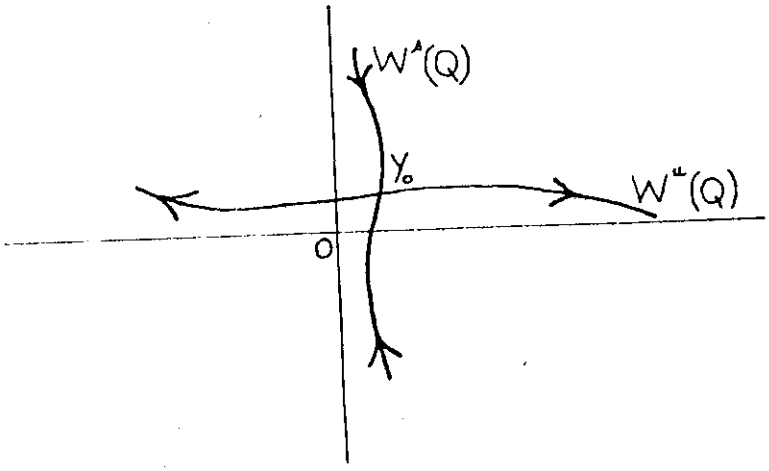


18

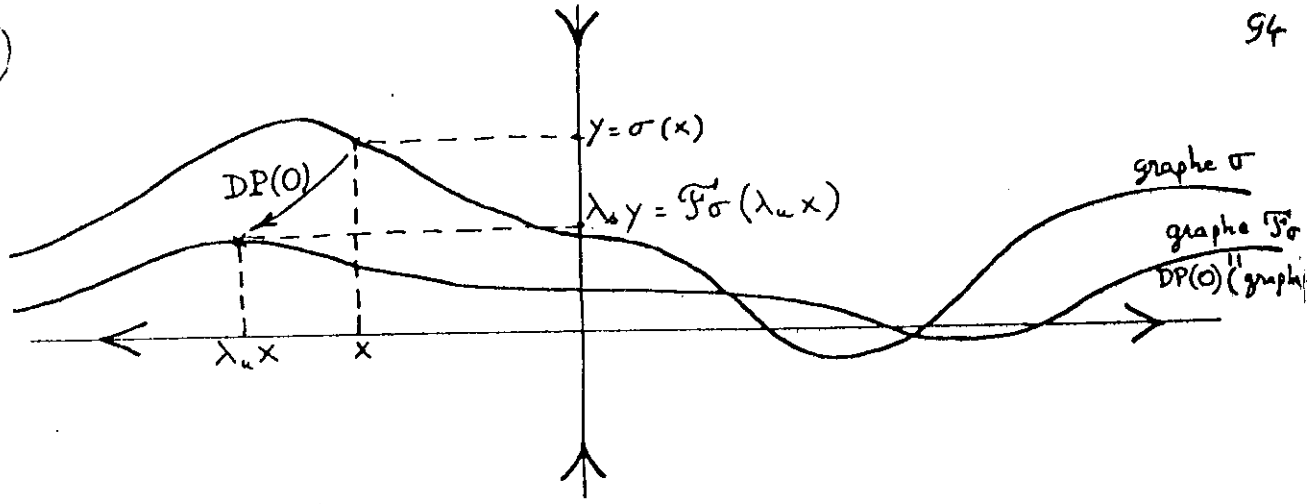
19



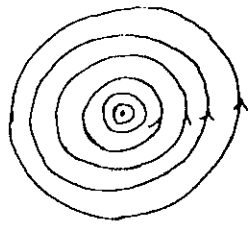
20



21



22

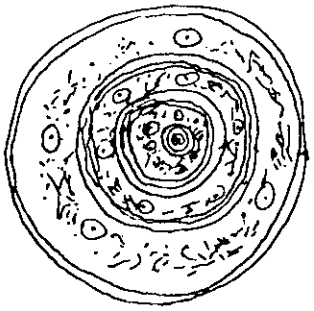


(1)

(2)

(3)

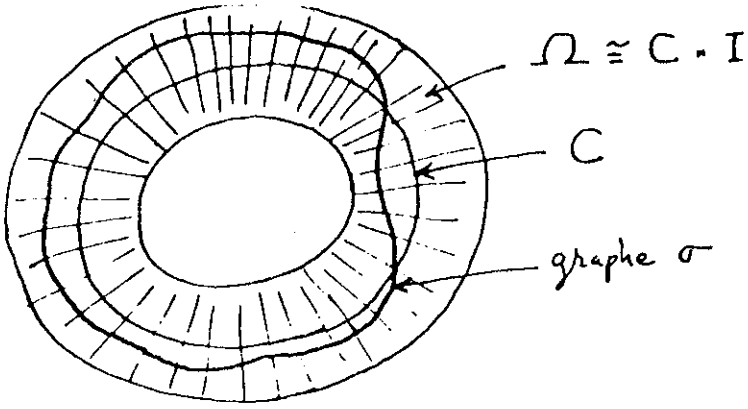
(4)



(5)

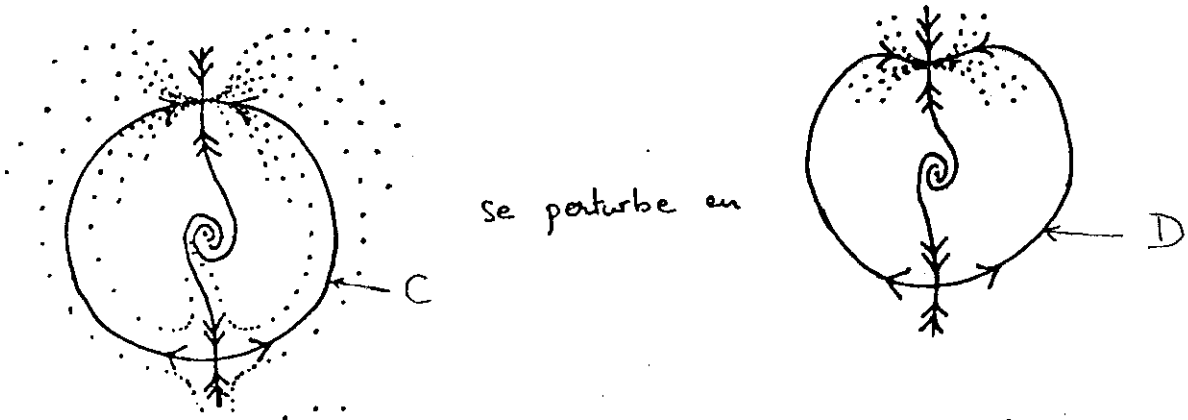
etc ... à l'infini

23


$\Omega \cong C \cdot I$
C
graphe σ

24

(i)


C
se perturbe en
D

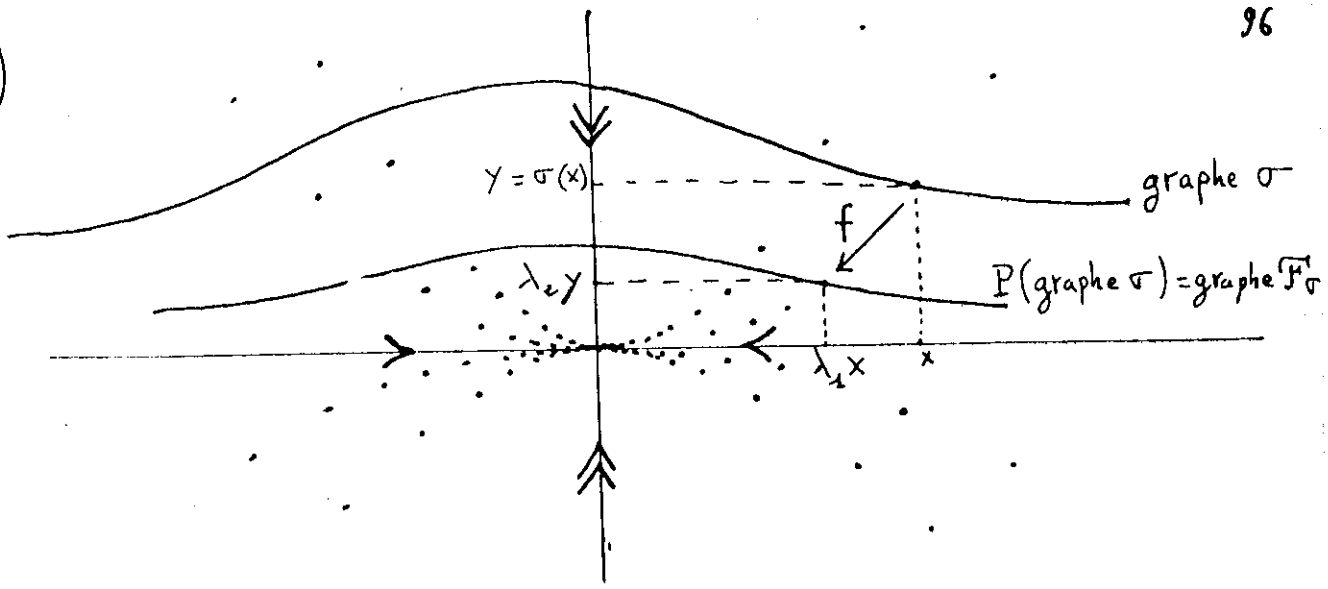
(ii)

se perturbe en

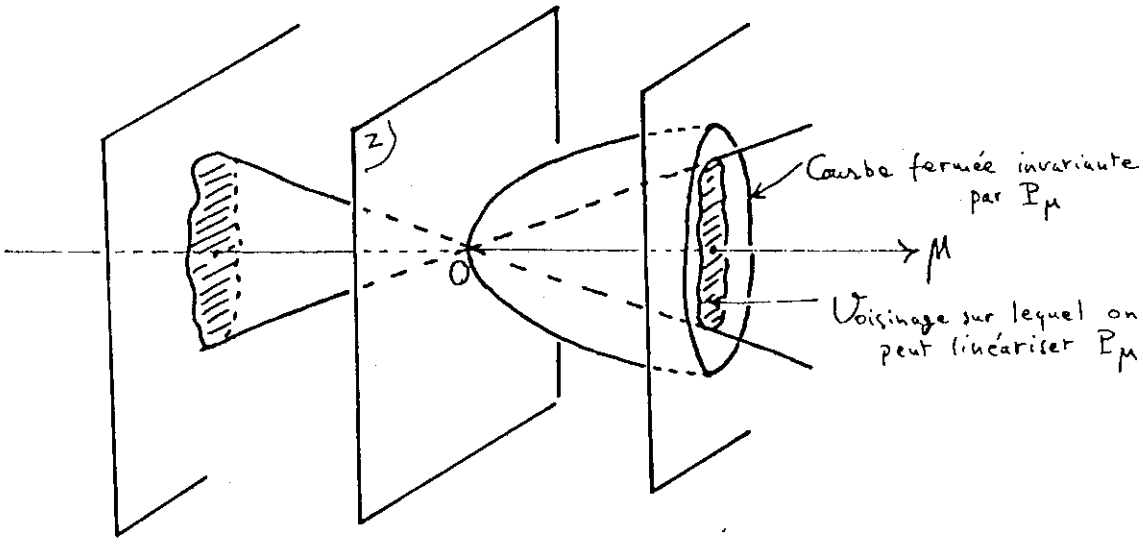
(iii)

se perturbe en

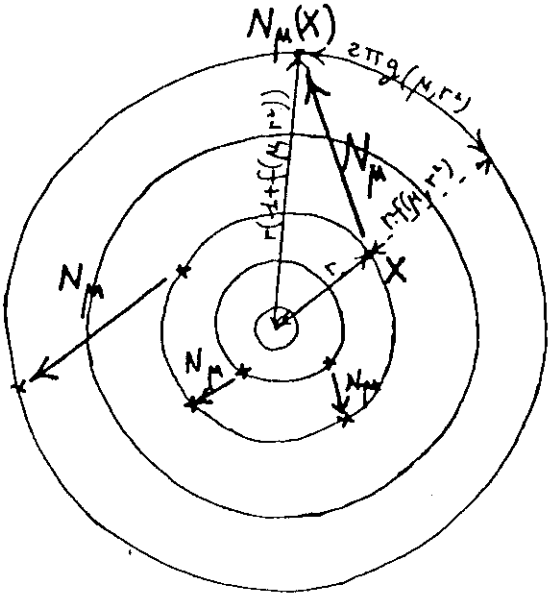
25


y = σ(x)
graphe σ
f
λ₂y
P(graphe σ) = graphe F'σ
λ₁x
x

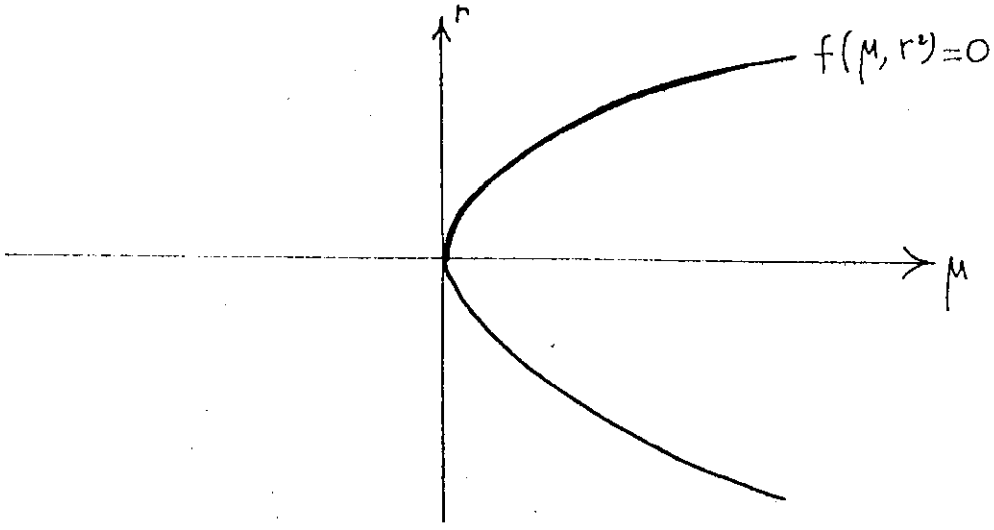
26

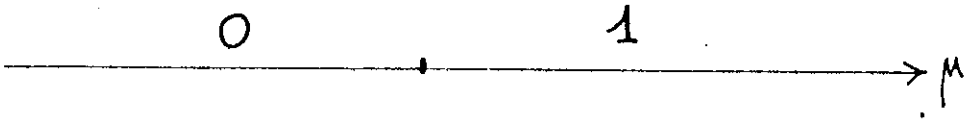

z)
O
μ
Courbe fermée invariante par Pμ
Voisinage sur lequel on peut linéariser Pμ

27

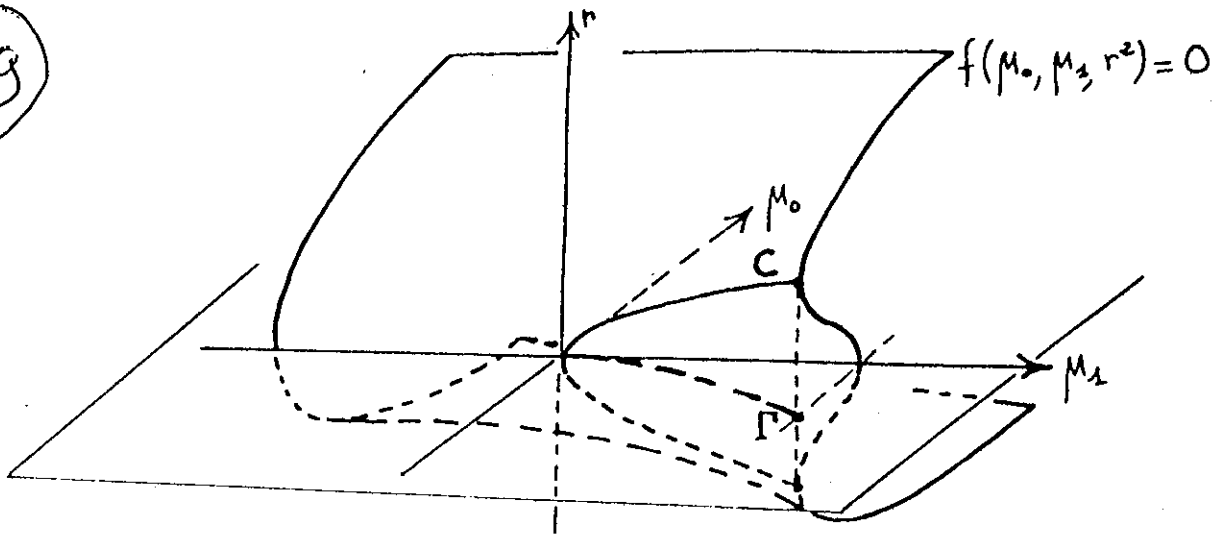

$N_\mu(X)$
$2\pi g(\mu, r^2)$
$r(1+f(\mu, r^2))$
N_μ
$r(1+f(\mu, r^2))$
r
X
N_μ
N_μ
N_μ

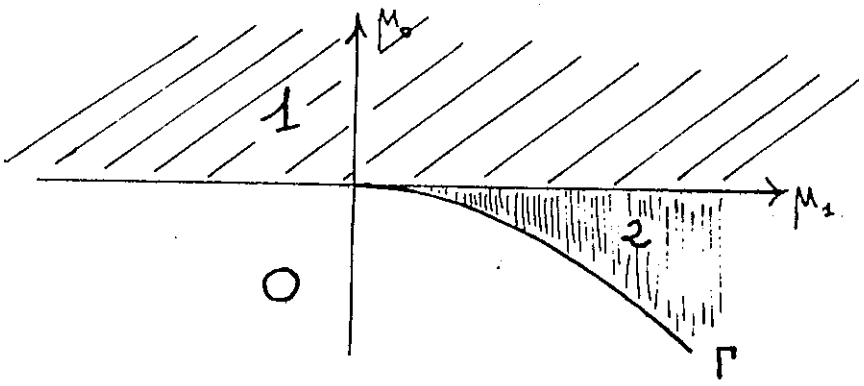
28


r
$f(\mu, r^2)=0$
μ

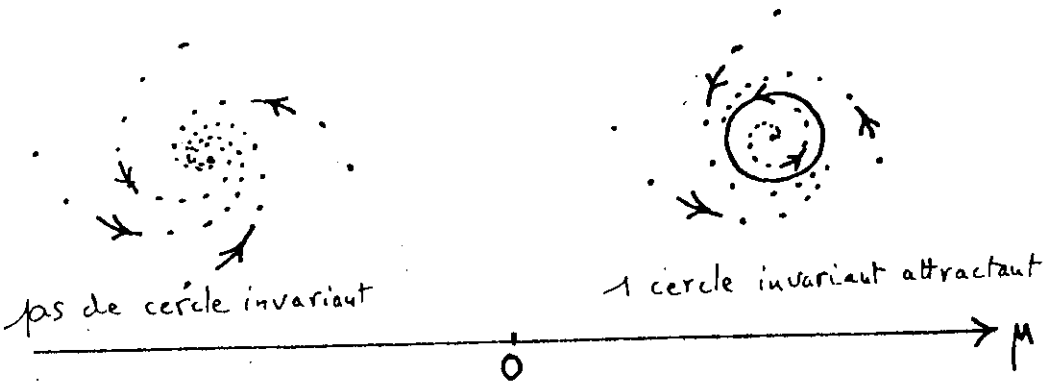

0
1
μ

29

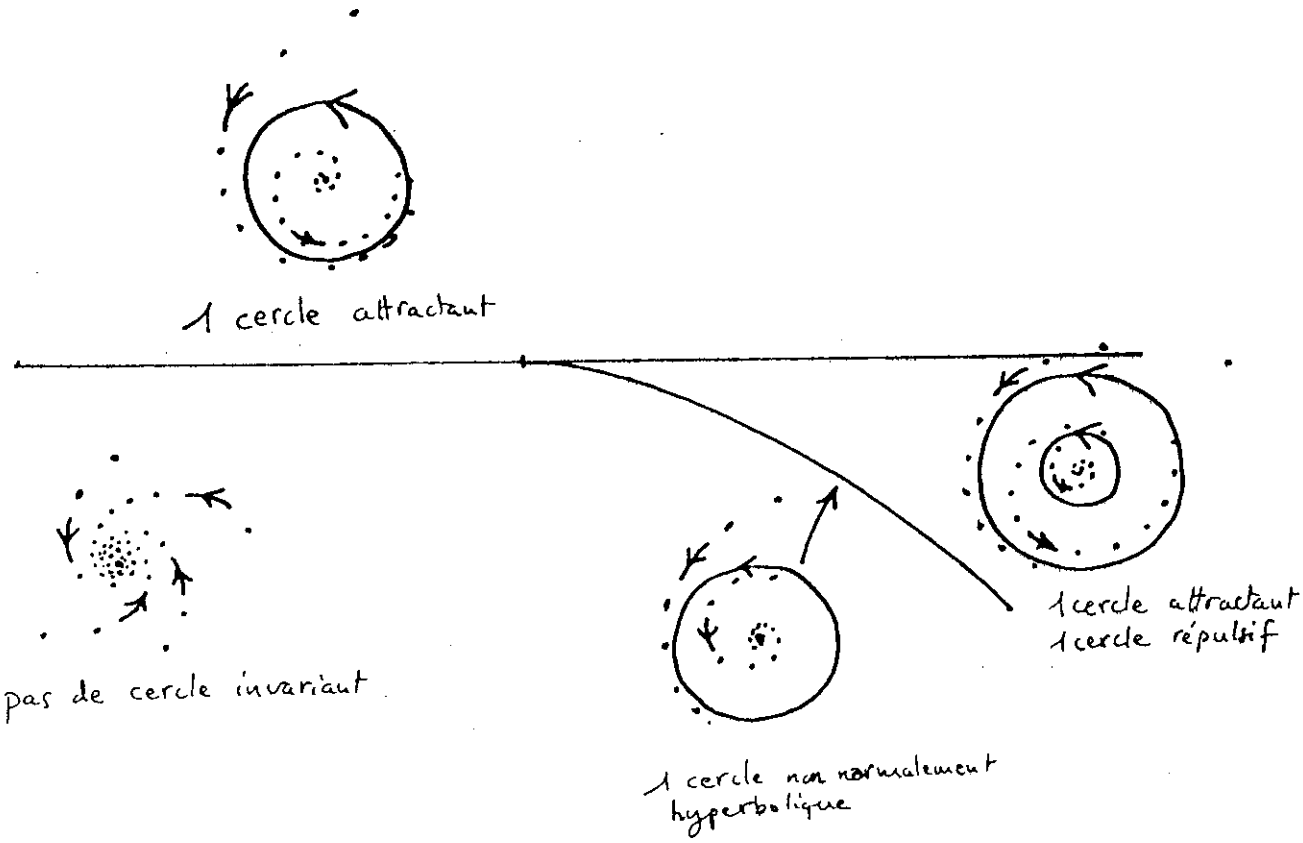

r
$f(\mu_0, \mu_1, r^2) = 0$
μ_0
C
μ_1
Γ


μ_0
1
μ_1
2
0
Γ

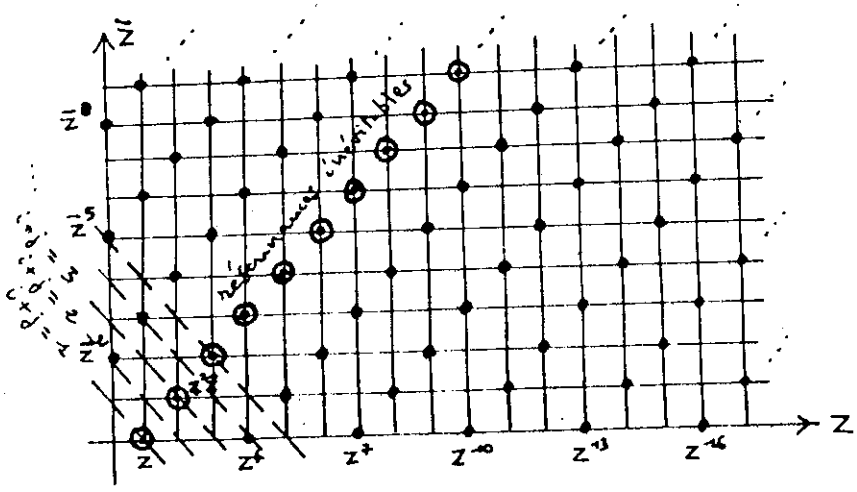
30


pas de cercle invariant
1 cercle invariant attractant
0
μ

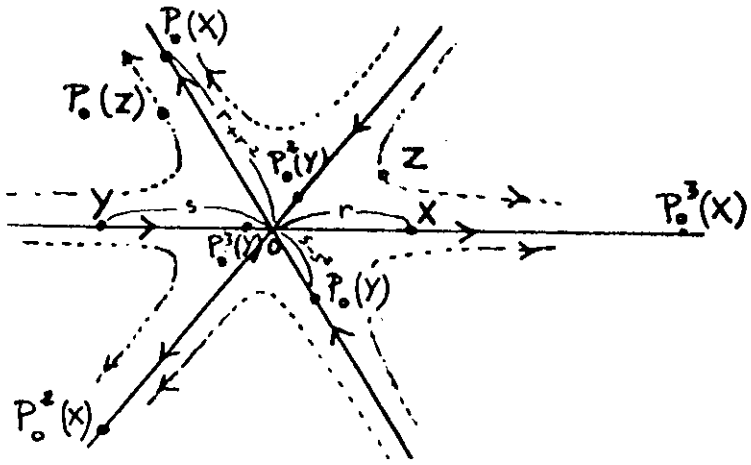
31

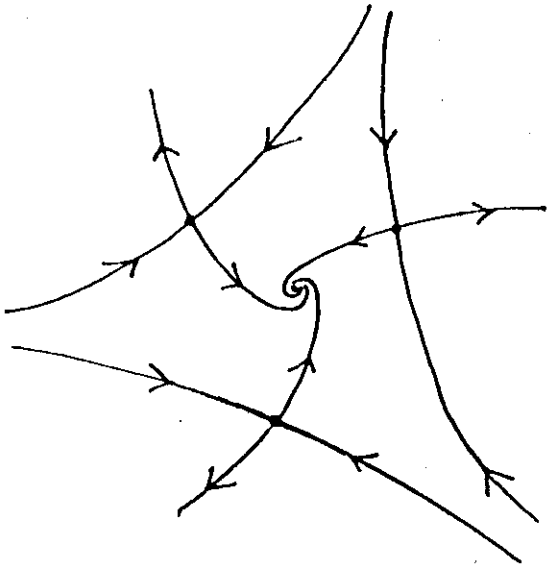

1 cercle attractant
pas de cercle invariant
1 cercle non normalement hyperbolique
1 cercle attractant
1 cercle répulsif

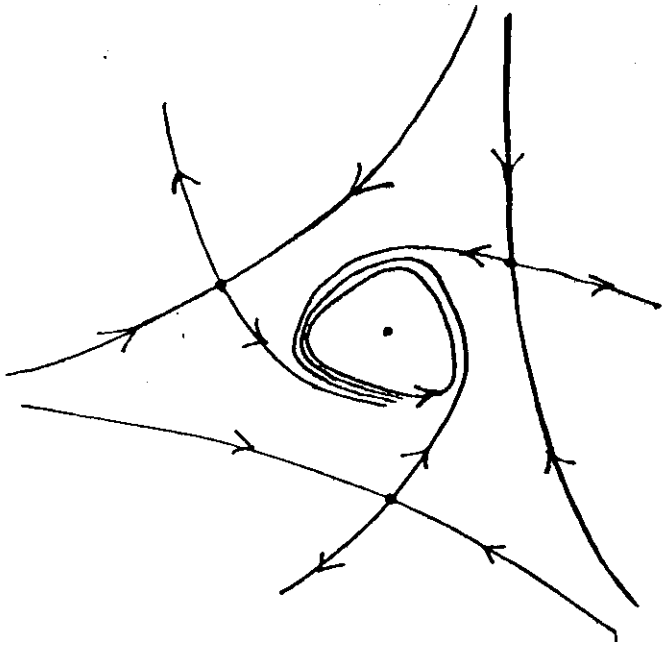
32


$\bar{z}$
$\bar{z}^8$
$\bar{z}^5$
$\bar{z}^2$
z
z^4
z^7
z^{10}
z^{13}
z^{16}
z

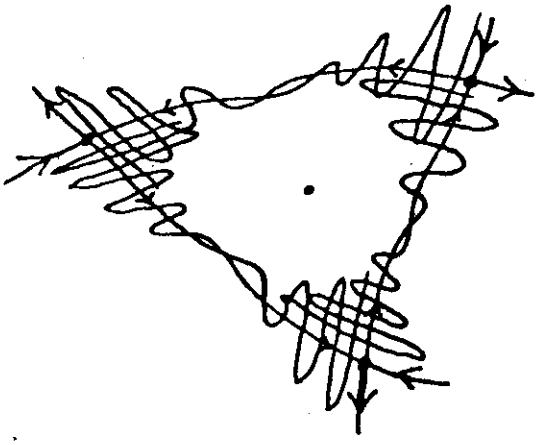
(33)



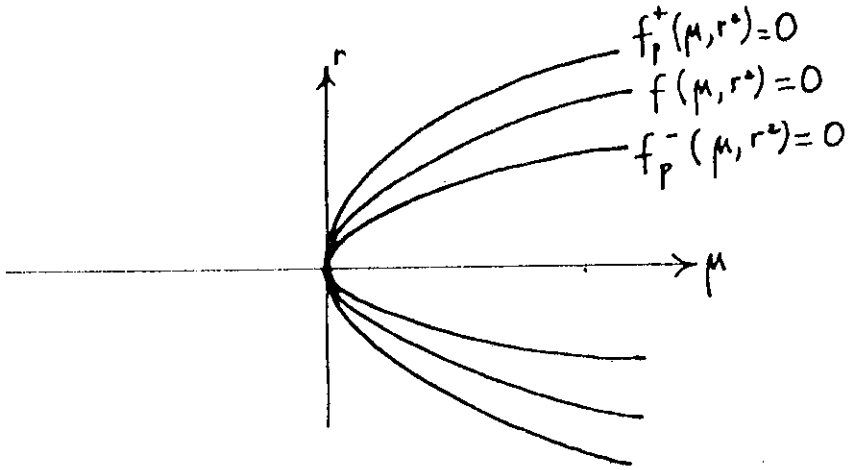




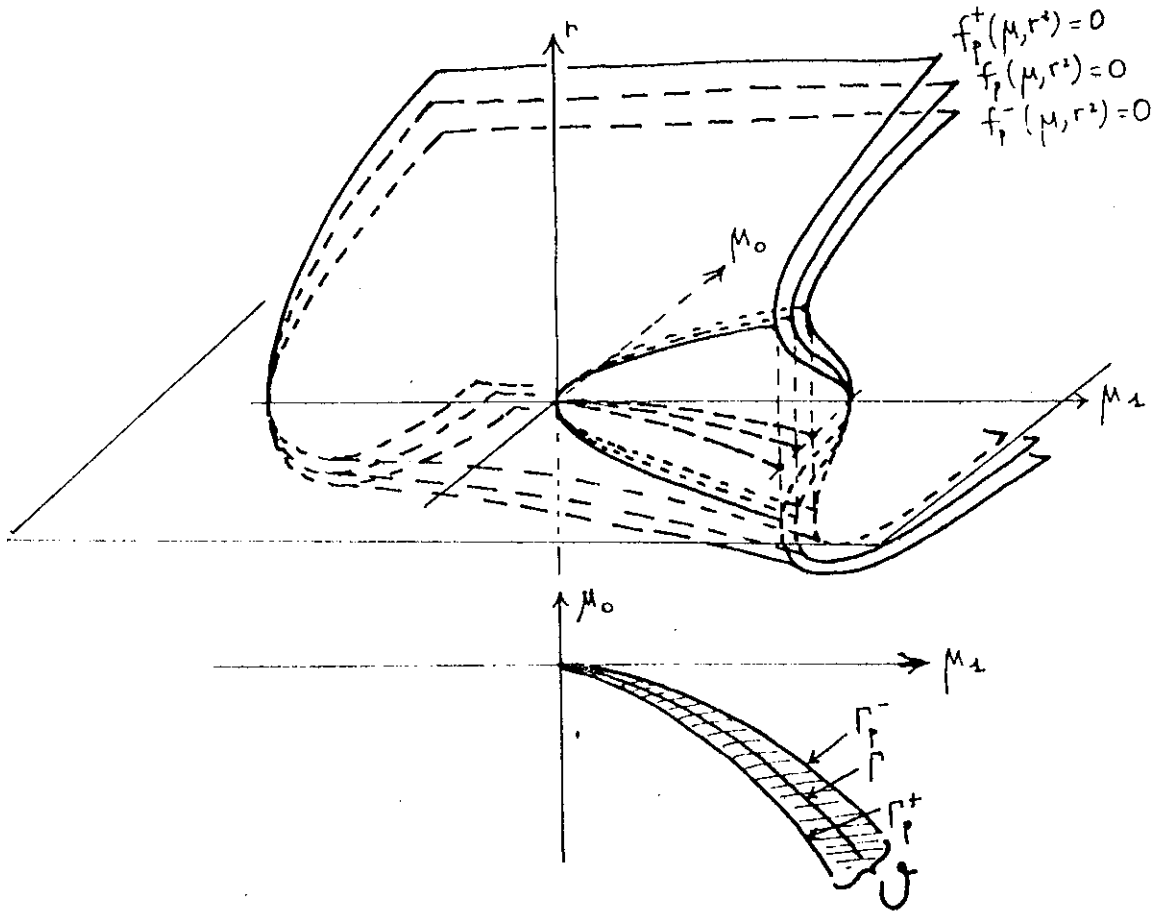
(35)



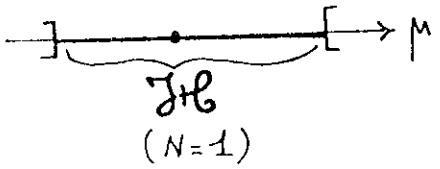
36

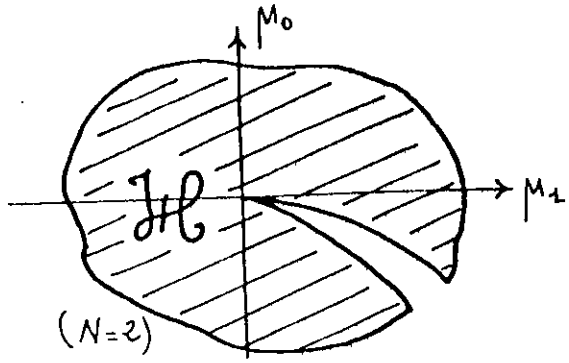

$f_p^+(\mu, r^2) = 0$
$f(\mu, r^2) = 0$
$f_p^-(\mu, r^2) = 0$
r
μ

37

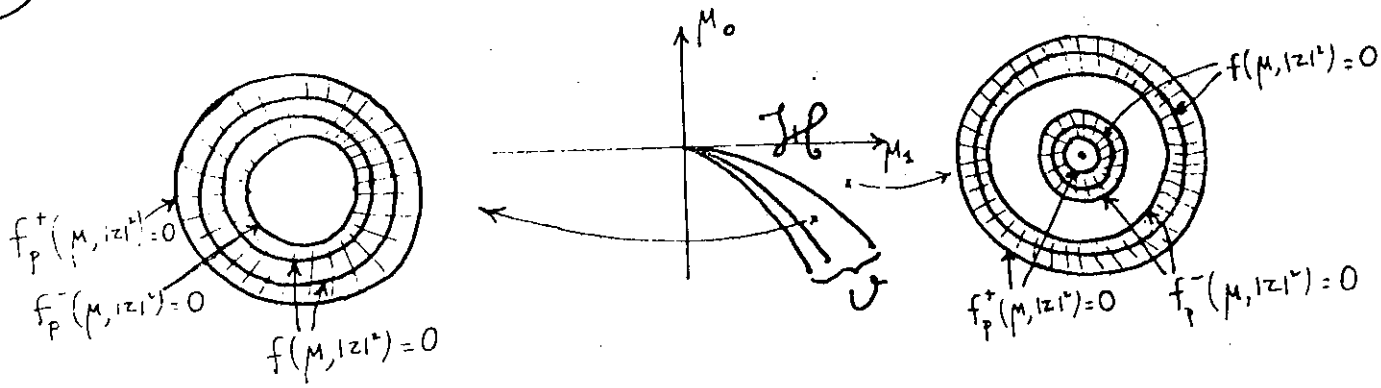

$f_p^+(\mu, r^2) = 0$
$f_p(\mu, r^2) = 0$
$f_p^-(\mu, r^2) = 0$
r
μ_0
μ_1
μ_0
μ_1
Γ_p^-
Γ
Γ_p^+

38

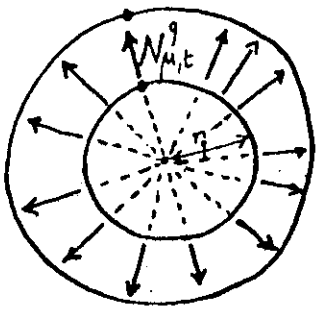

μ
$\mathcal{H}$
(N=1)


μ_0
μ_1
$\mathcal{H}$
(N=2)

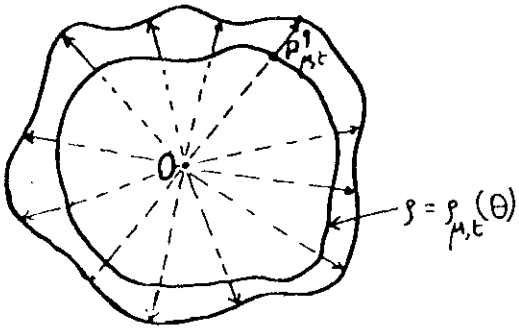
39


$f_p^+(\mu,|z|^2)=0$
$f_p^-(\mu,|z|^2)=0$
$f(\mu,|z|^2)=0$
μ_0
μ_1
$\mathcal{H}$
$\mathcal{V}$
$f(\mu,|z|^2)=0$
$f_p^+(\mu,|z|^2)=0$
$f_p^-(\mu,|z|^2)=0$

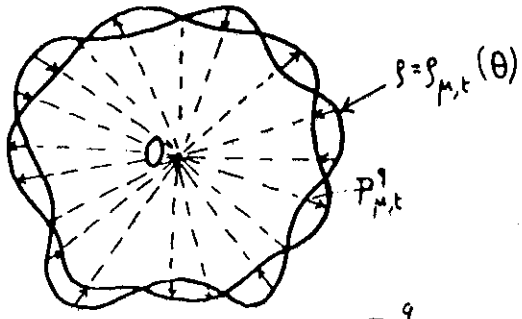
40


$W^q_{\mu,t}$
r_q

41

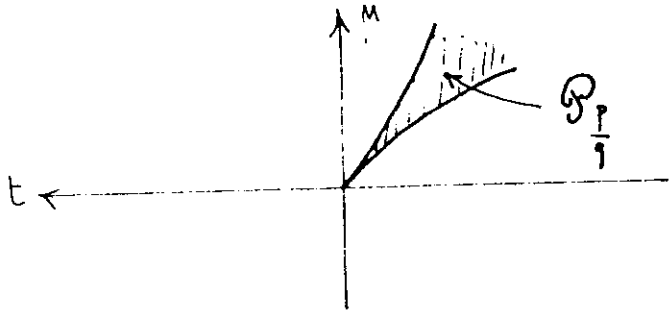


Cas sans point fixe de $P^q_{\mu,t}$



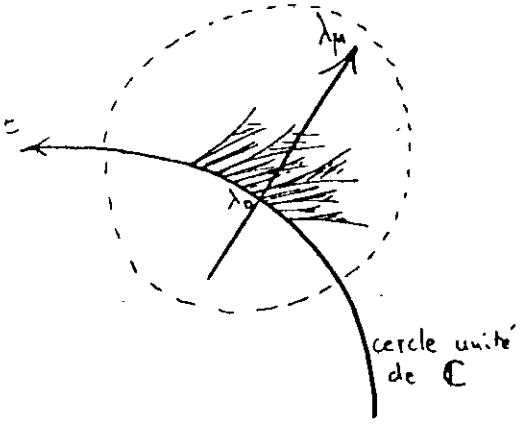
Cas avec points fixes de $P^q_{\mu,t}$

42

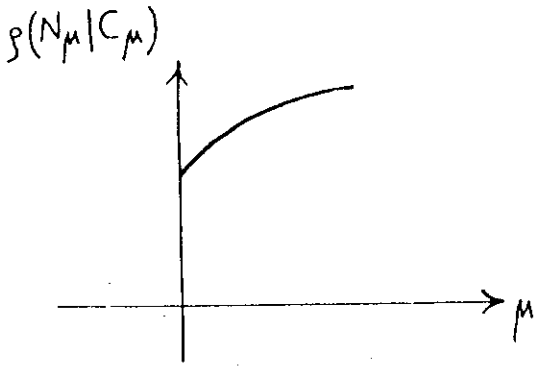


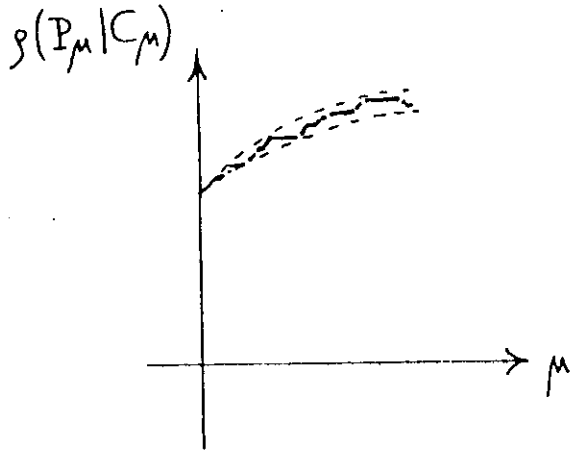
$(q \geq 5)$

43

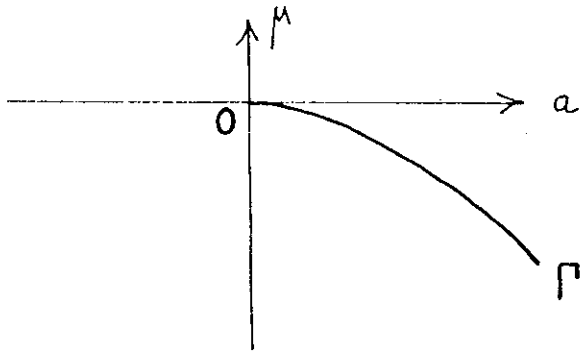


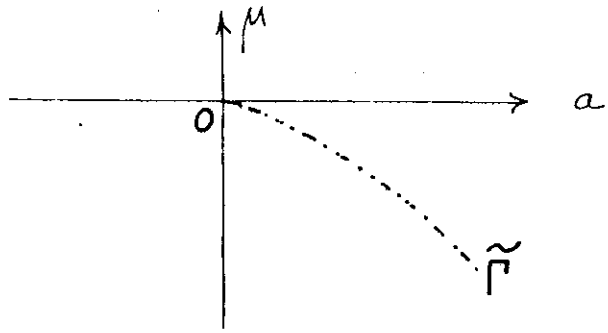
44


$\rho(N_\mu|C_\mu)$
μ

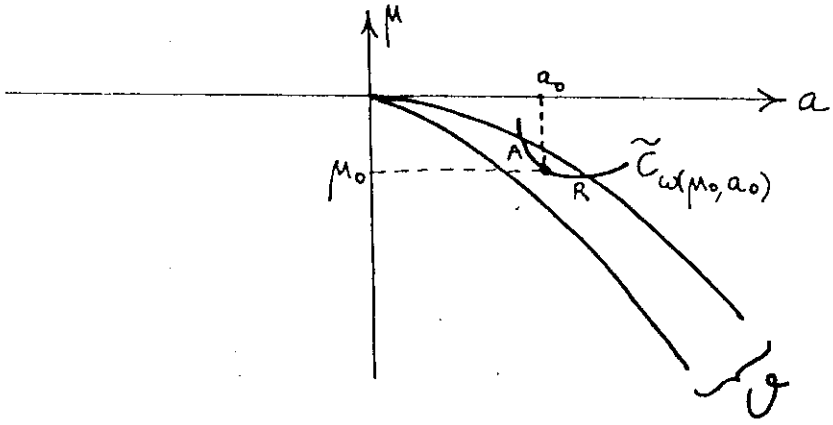

$\rho(P_\mu|C_\mu)$
μ

45

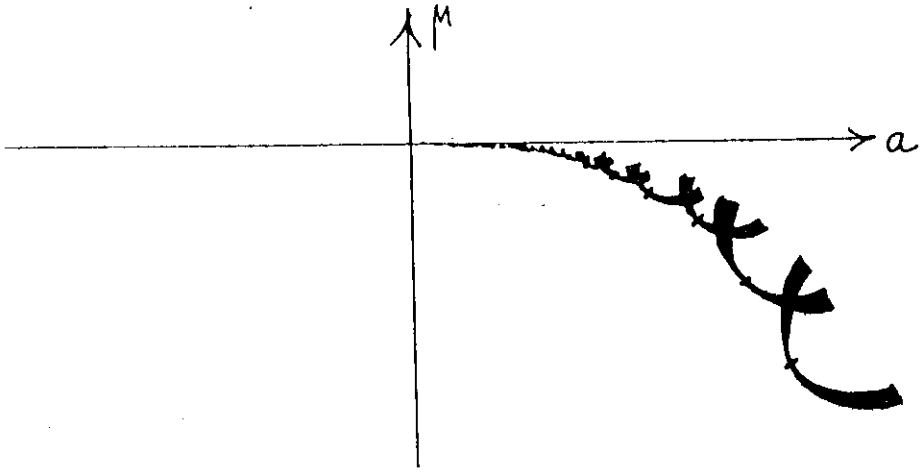

μ
0
a
Γ


μ
0
a
$\tilde{\Gamma}$

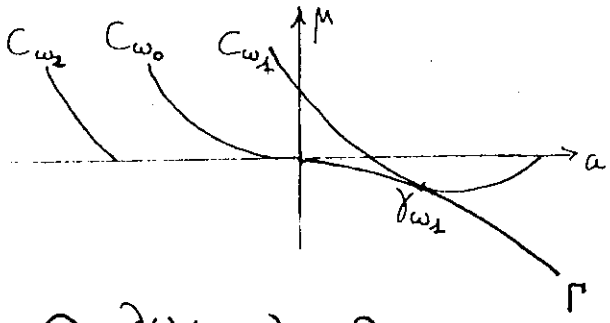
46


μ
a_0
a
μ_0
A
R
$\tilde{C}_{\omega(\mu_0, a_0)}$
ϑ

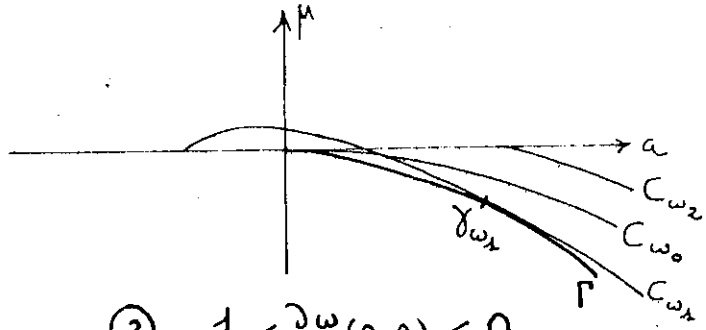
47



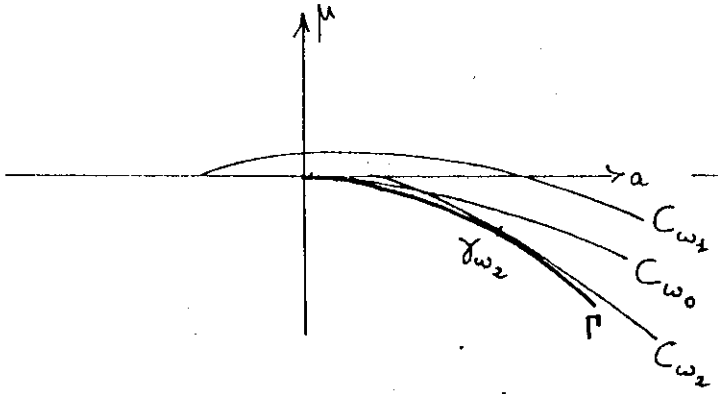
48



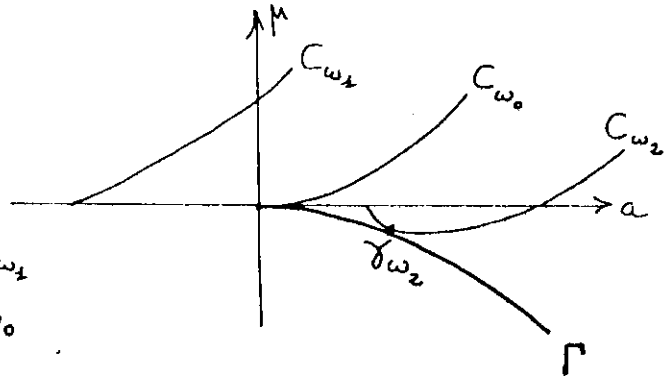
① $\frac{\partial \omega}{\partial a}(0,0) > 0$



② $-\frac{1}{2} < \frac{\partial \omega}{\partial a}(0,0) < 0$

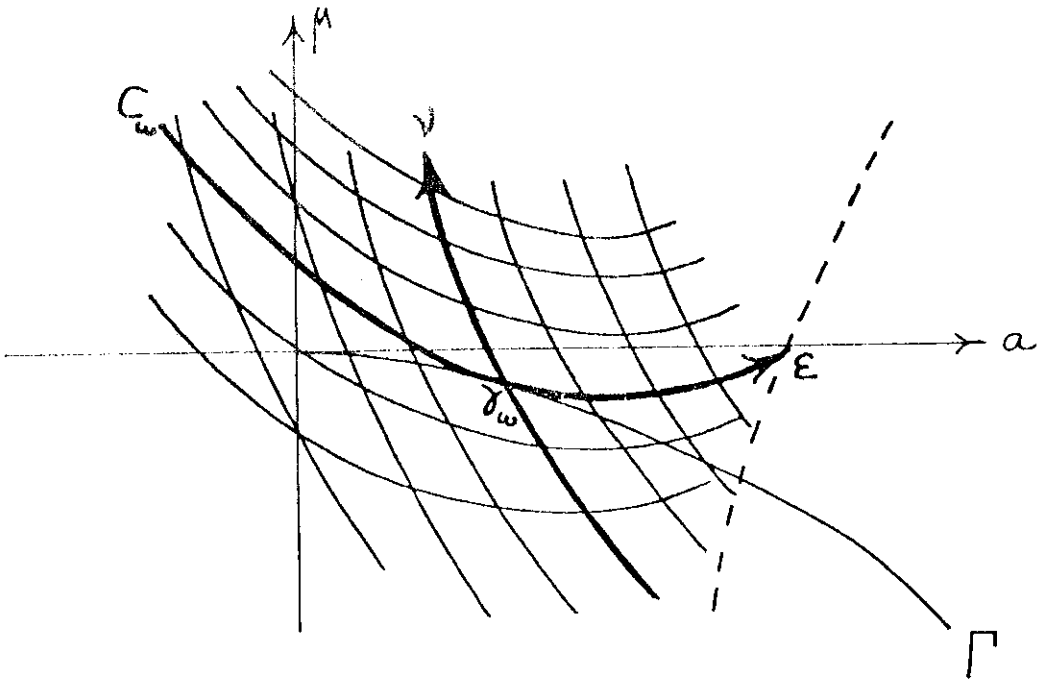


③ $-1 < \frac{\partial \omega}{\partial a}(0,0) < -\frac{1}{2}$

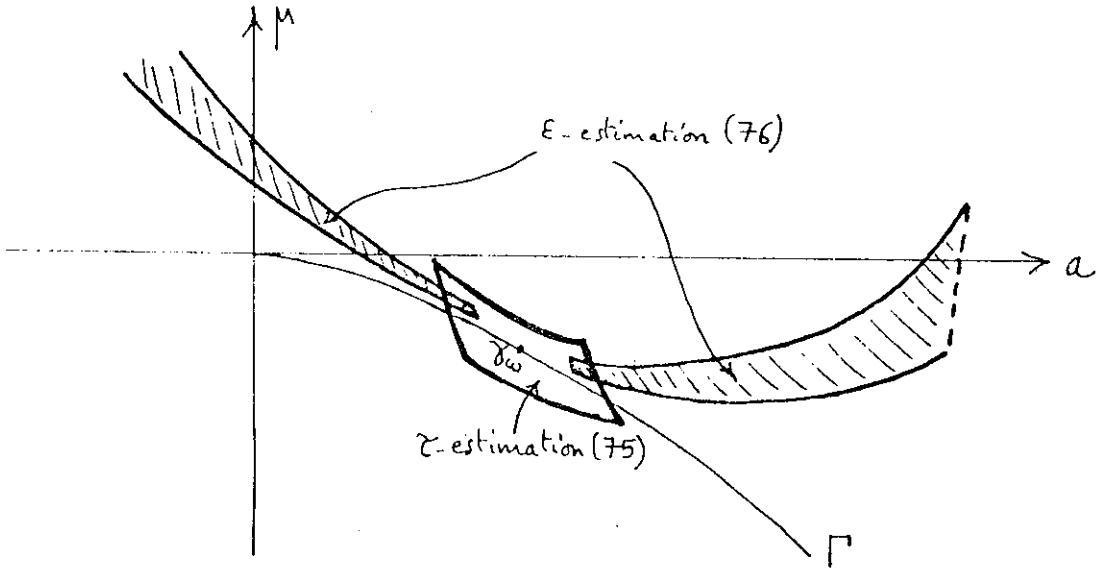


④ $\frac{\partial \omega}{\partial a}(0,0) < -1$

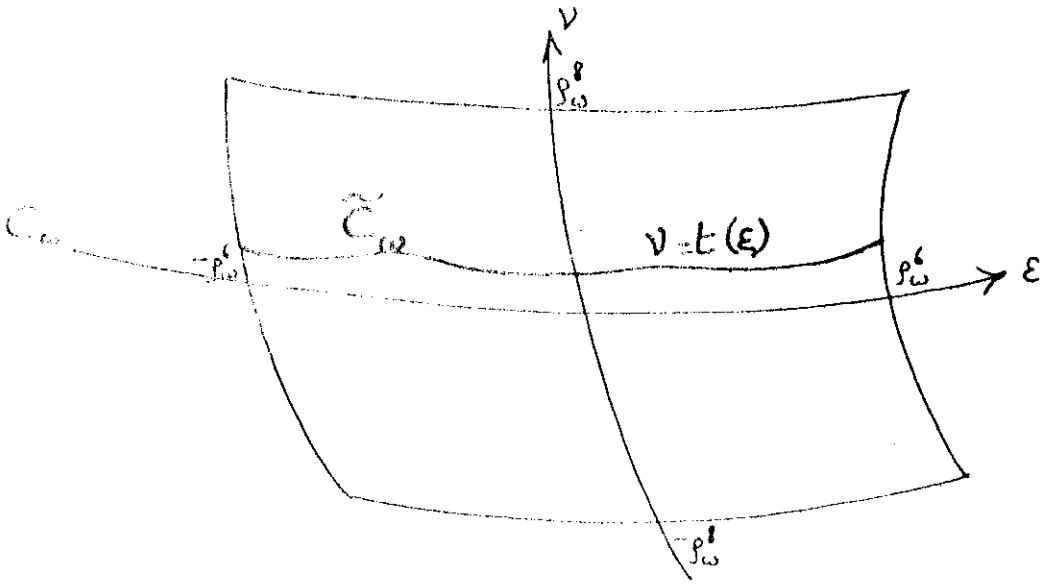
49


μ
C_ω
ν
a
ε
γ_ω
Γ

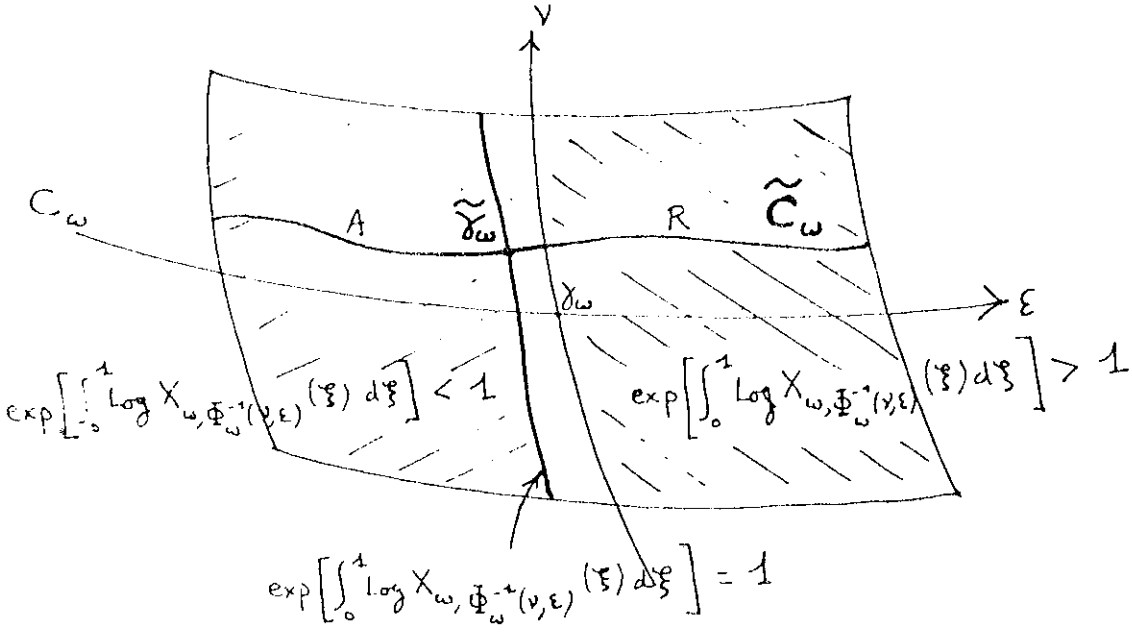
50


μ
ε-estimation (76)
a
γ_ω
τ-estimation (75)
Γ

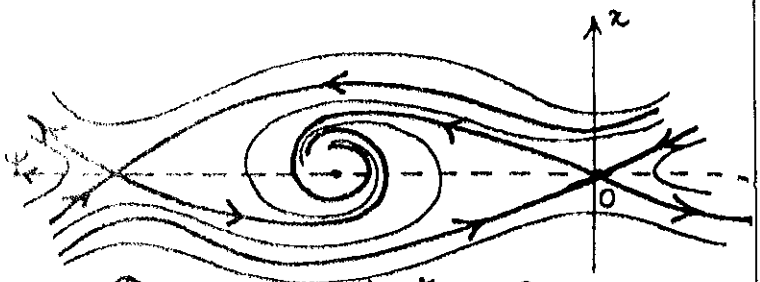
5 1


ν
ρ^{ℓ}_{ω}
C_{ω}
$\tilde{C}_{\omega}$
$\nu = t(\varepsilon)$
$-\rho^{\ell}_{\omega}$
ρ^{ℓ}_{ω}
ε
$-\rho^{\ell}_{\omega}$

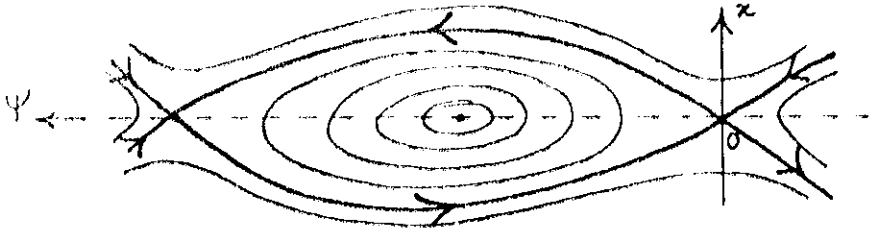
5 2


ν
C_{ω}
A
$\tilde{\gamma}_{\omega}$
R
$\tilde{C}_{\omega}$
γ_{ω}
ε
$\exp\left[\int_0^1 \operatorname{Log} X_{\omega,\Phi_{\omega}^{-1}(\nu,\varepsilon)}(\xi)\,d\xi\right] < 1$
$\exp\left[\int_0^1 \operatorname{Log} X_{\omega,\Phi_{\omega}^{-1}(\nu,\varepsilon)}(\xi)\,d\xi\right] > 1$
$\exp\left[\int_0^1 \operatorname{Log} X_{\omega,\Phi_{\omega}^{-1}(\nu,\varepsilon)}(\xi)\,d\xi\right] = 1$

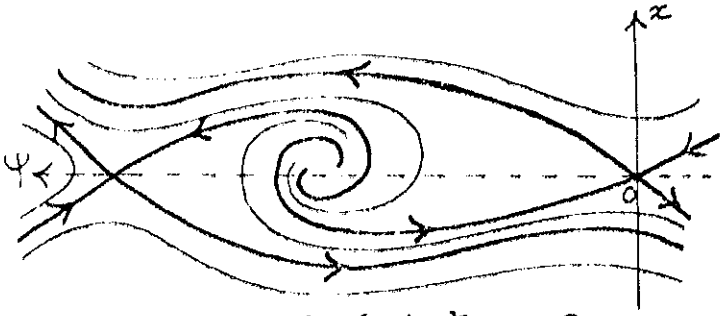
① $2\tilde{\alpha}_q(x_q^2)x_q^2 \ll 0$



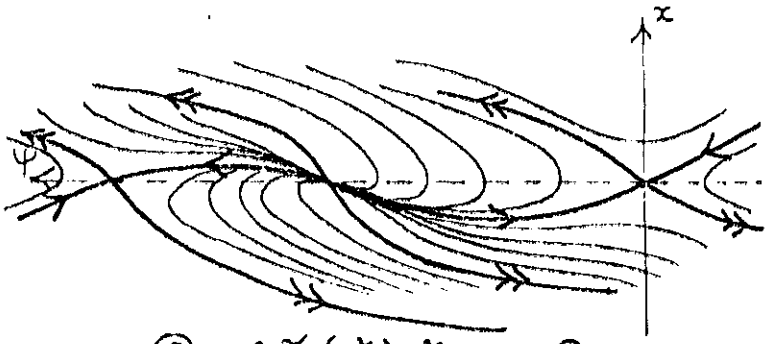
② $2\tilde{\alpha}_q(x_q^2)x_q^2 < 0$



③ $2\tilde{\alpha}_q(x_q^2)x_q^2 = 0$

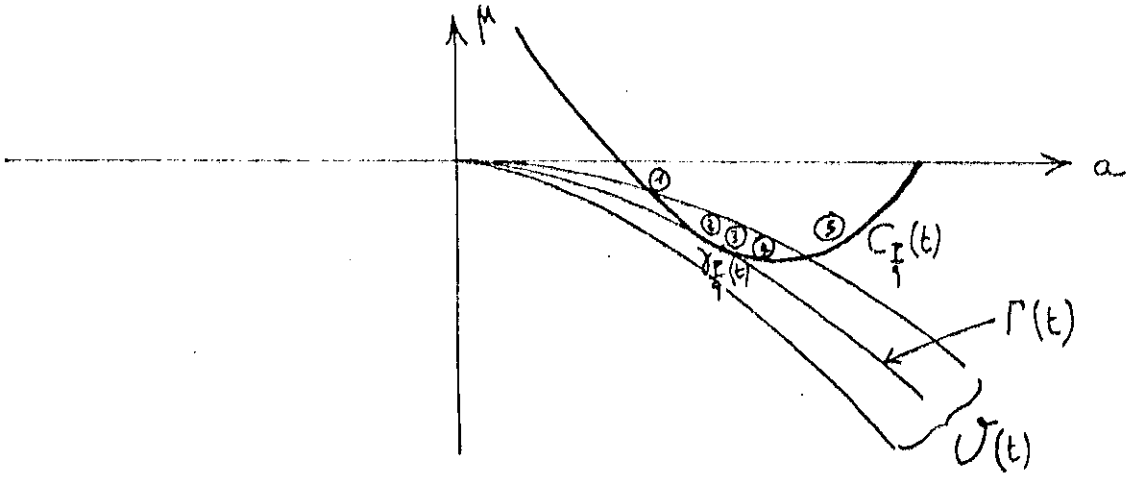


④ $2\tilde{\alpha}_q(x_q^2)x_q^2 > 0$

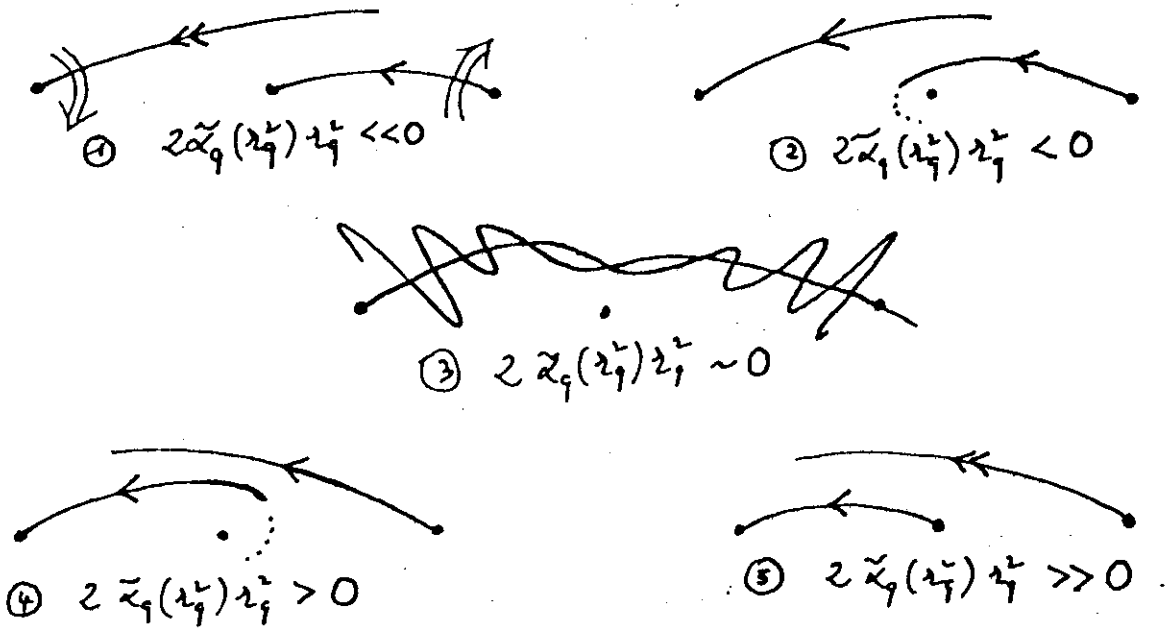


⑤ $2\tilde{\alpha}_q(x_q^2)x_q^2 \gg 0$

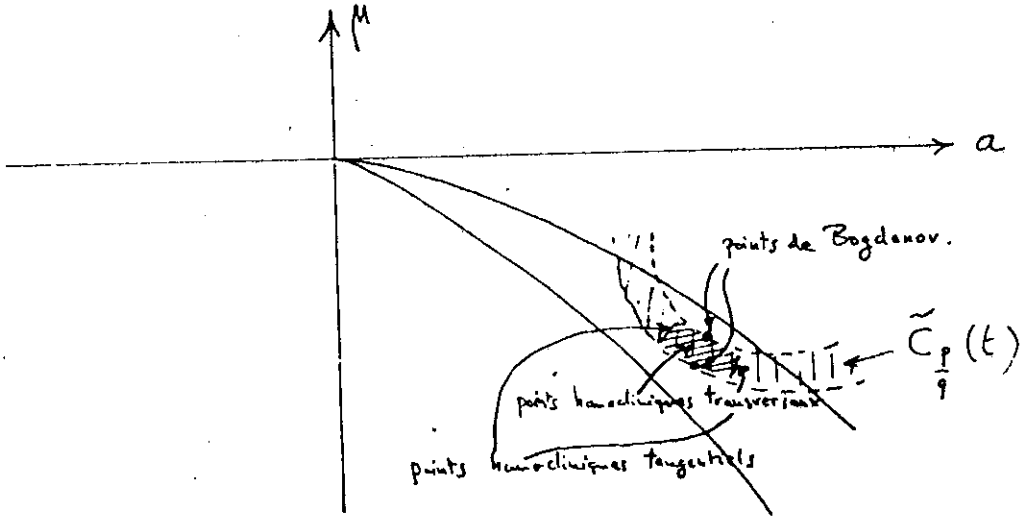
54



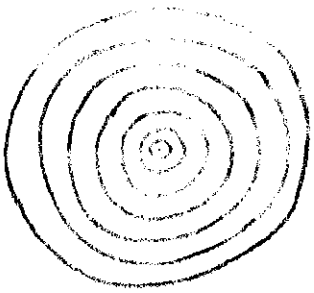
55


① $2\tilde{\alpha}_q(x_q^2)x_q^2 << 0$
② $2\tilde{\alpha}_q(x_q^2)x_q^2 < 0$
③ $2\tilde{\alpha}_q(x_q^2)x_q^2 \sim 0$
④ $2\tilde{\alpha}_q(x_q^2)x_q^2 > 0$
⑤ $2\tilde{\alpha}_q(x_q^2)x_q^2 >> 0$

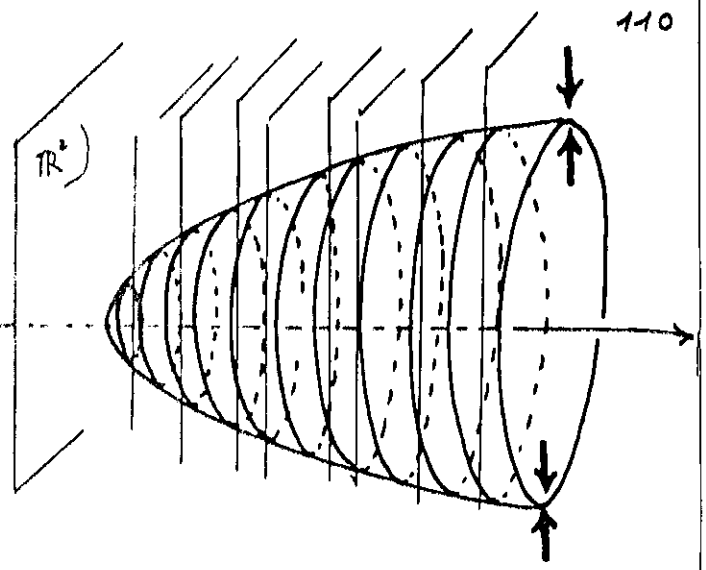
56


μ
a
points de Bogdanov.
$\tilde{C}_{\frac{p}{q}}(t)$
points homoclinques transversaux
points homoclinques tangentiels

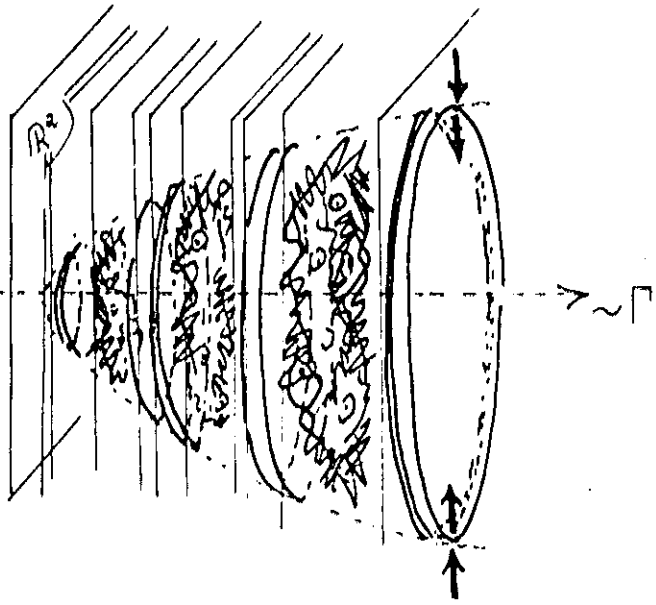
57



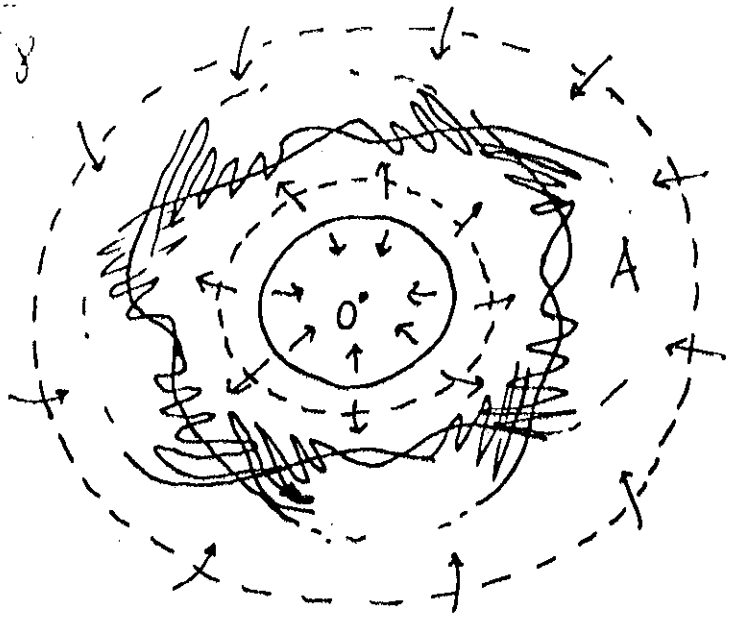
déployé en

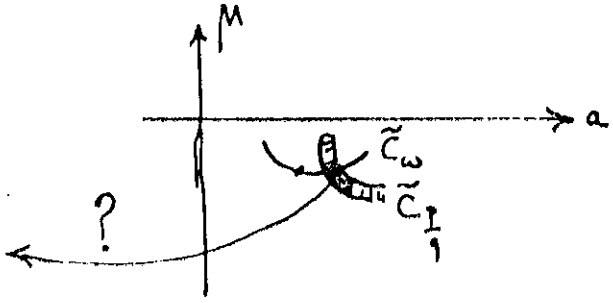
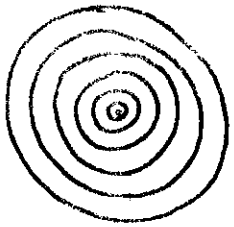
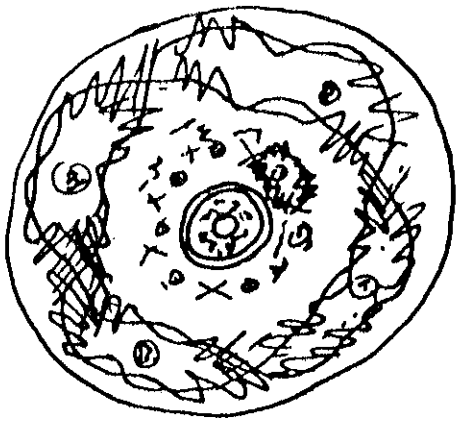
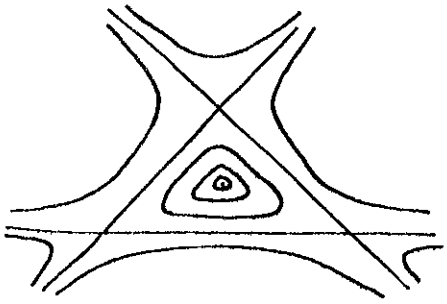
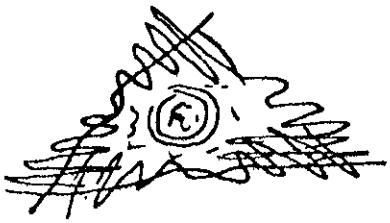
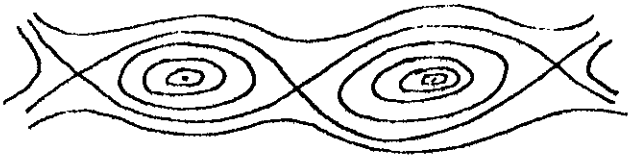
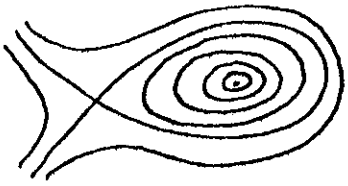
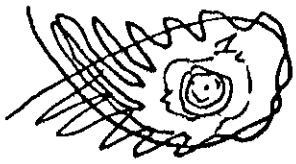


déployé en



58





(59)