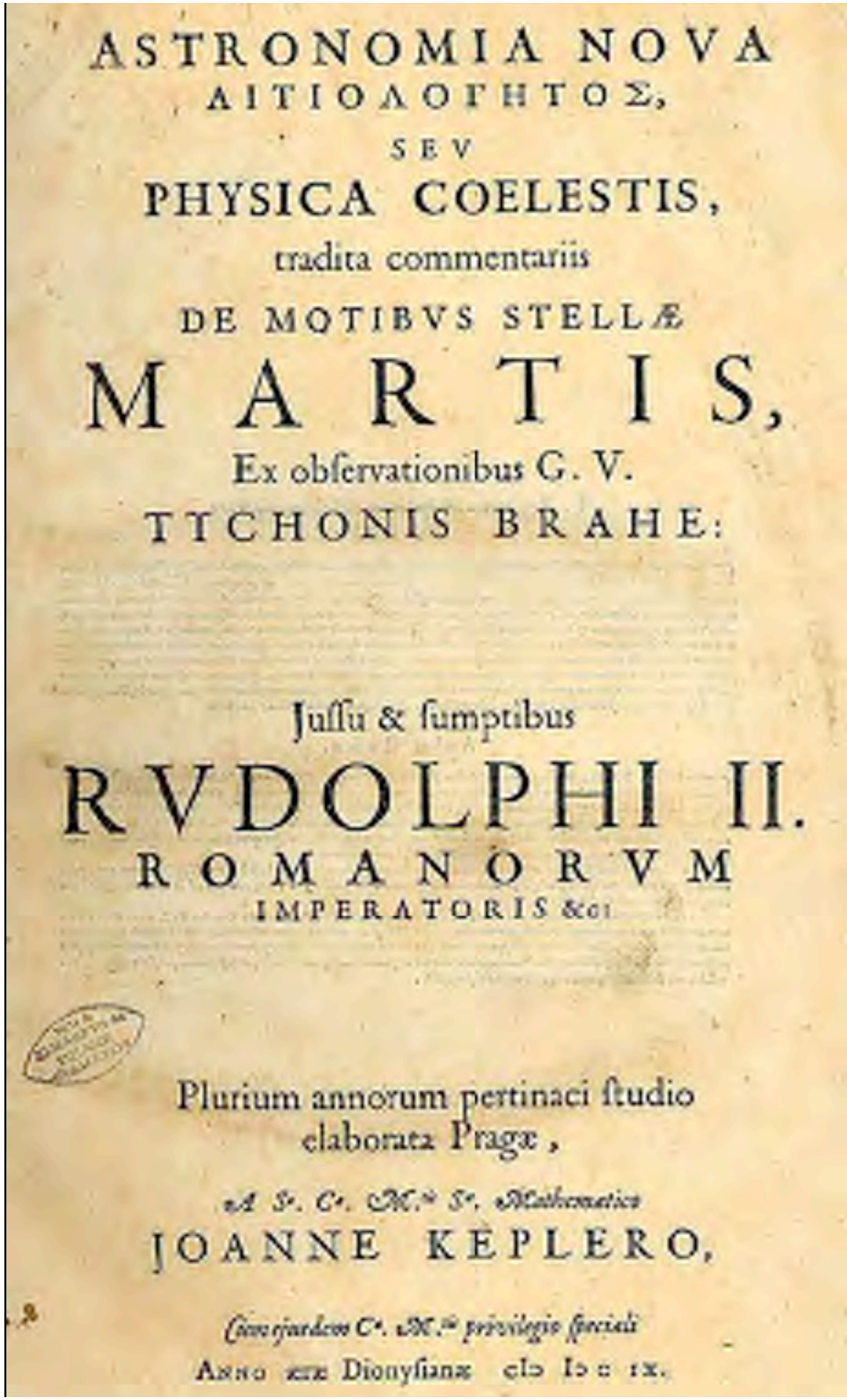
LE PROBLÈME DES TROIS CORPS

JOHANNES KEPLER (1571 - 1630)



ASTRONOMIA NOVA
ΑΙΤΙΟΛΟΓΗΤΟΣ,
SEV
PHYSICA COELESTIS,
tradita commentariis
DE MOTIBVS STELLÆ
MARTIS,
Ex obſervationibus G. V.
TYCHONIS BRAHE:

Juſſu & ſumptibus
RVDOLPHI II.
ROMANORVM
IMPERATORIS &c:

Plurium annorum pertinaci ſtudio
elaborata Pragæ,

A S. C. M.tis S. Mathematico
JOANNE KEPLERO,

Cum ejusdem C. M.tis privilegio ſpeciali
ANNO æræ Dionyſianæ clↃ IↃ c IX.

1609

TYCHO BRAHE (1546 - 1603)

TYCHONIS BRAHE

ASTRONOMIÆ
INSTAVRATÆ
MECHANICA

SVSPICIENDO DESPICIO

WANDESBVRGI

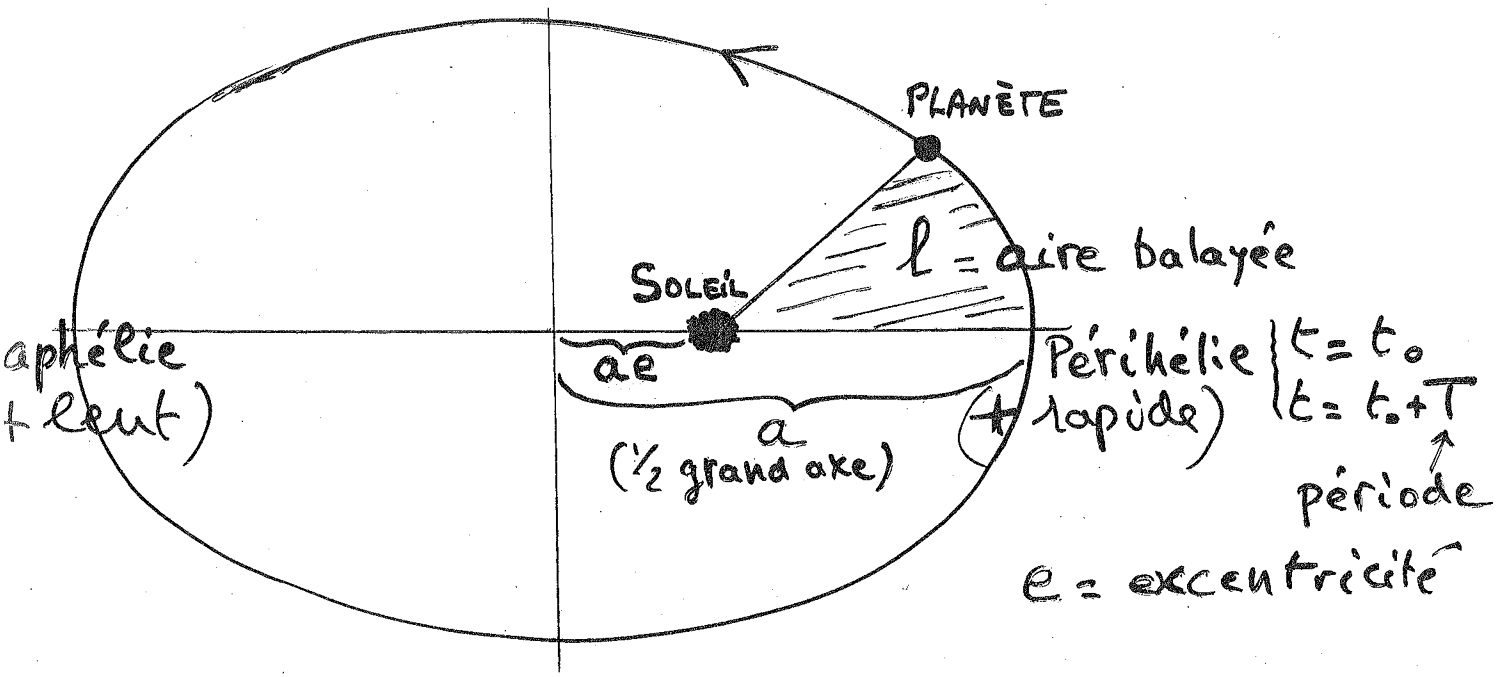
ANNO

CIϽ. IϽ. IIC

Cum Cæsaris & Regum quorundam Privilegiis.

1598

KEPLER



Loi 1 : ELLIPSES

Loi 2 : ℓ proportionnelle au temps t

} ASTRONOMIA NOVA 1609

Loi 3 : T^2 proportionnelle à a^3 } HARMONICE MUNDI 1619

Portrait de Galilée peint par Justus Sustermans en 1636.

GALILEO - GALILEI (1564 - 1642)

DISCORSI
E
DIMOSTRAZIONI
MATEMATICHE,
intorno à due nuoue scienze
Attenenti alla
MECANICA & I MOVIMENTI LOCALI,
del Signor
GALILEO GALILEI LINCEO,
Filosofo e Matematico primario del Serenissimo
Grand Duca di Toscana.
Con vna Appendice del centro di grauità d'alcuni Solidi.

IN LEIDA,
Appresso gli Elsevirii. M. D. C. XXXVIII.

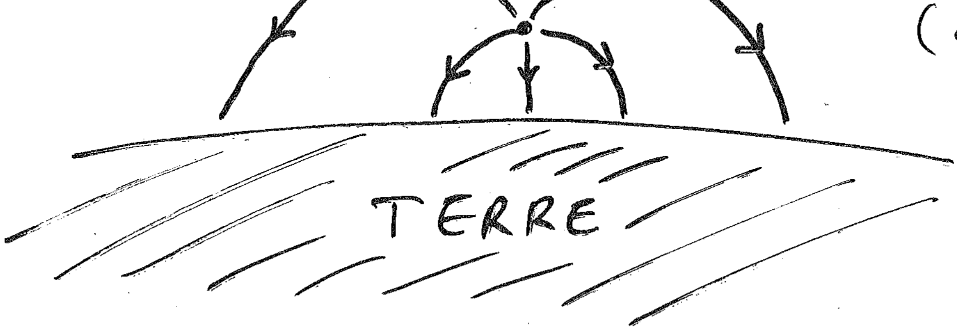
1638

GALILÉE

LAGRANGE : "La dynamique est la science des forces accélératrices ou retardatrices et des mouvemens variés qu'elles doivent produire. Cette science est due entièrement aux modernes, et Galilée est celui qui en a jeté les premiers fondemens" (in Mec. Anal. I, 221).

Chute des corps sur la terre

paraboles (accélération constante)

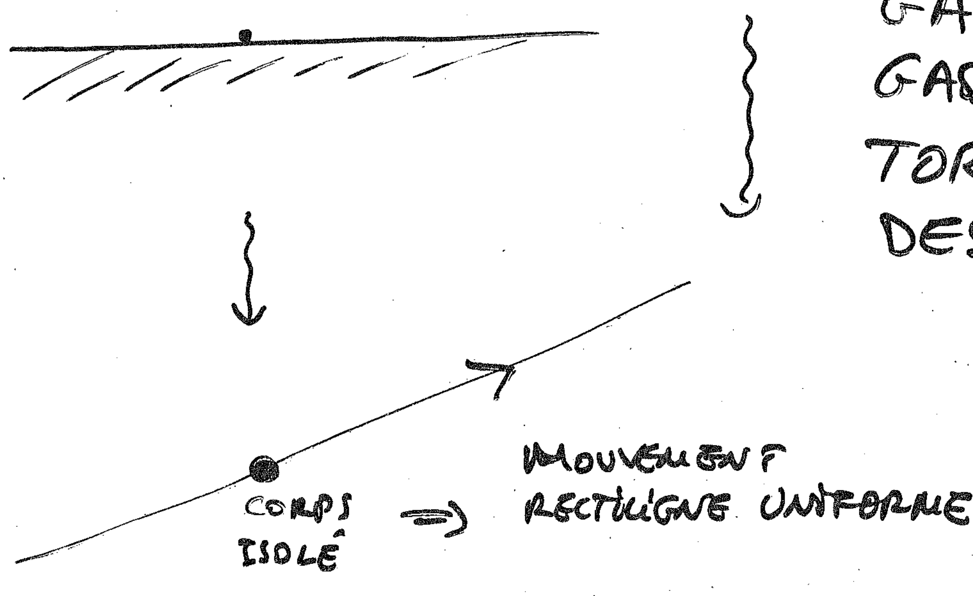


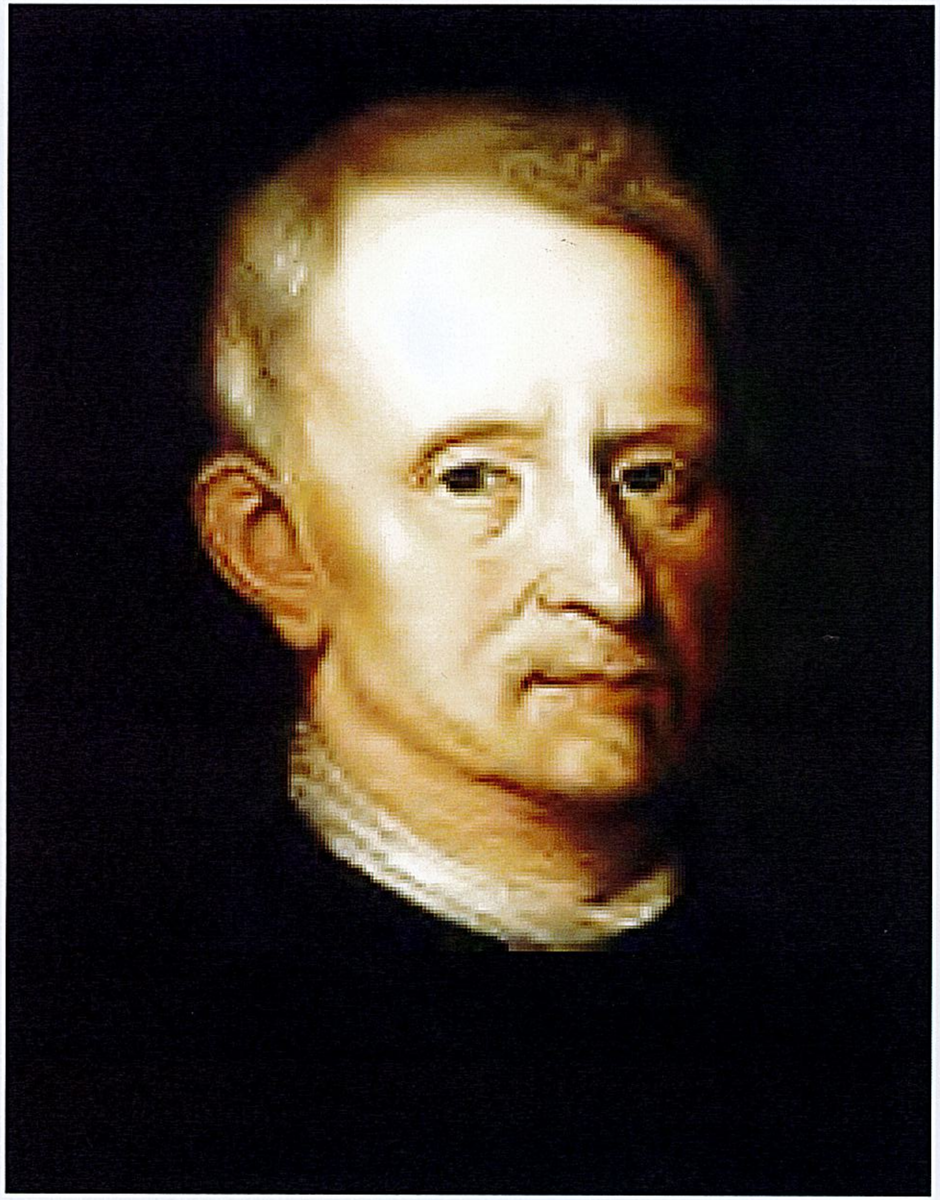
~~1638~~

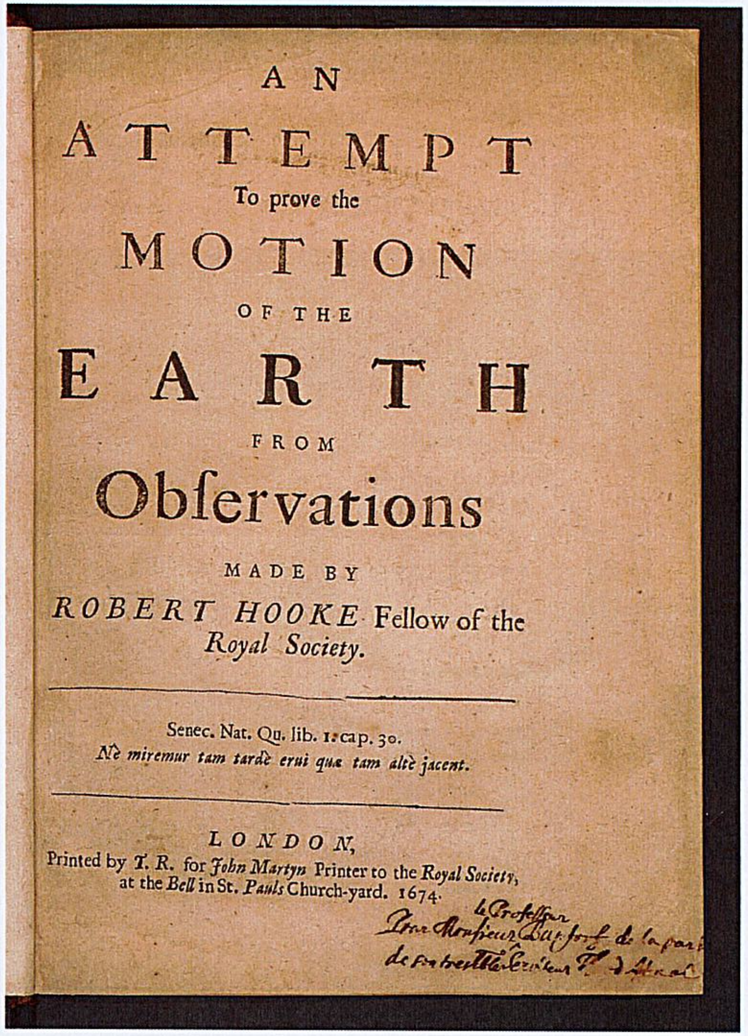
DISCORSI E DIMOSTRAZIONI MATEMATICHE INTORNO A DUE NUOVE SCIENZE

Principe d'inertie

GALILÉE 1638
GASSENDI 1640
TORRICELLI 1644
DESCARTES 1644







AN

ATTEMPT

To prove the

MOTION

OF THE

EARTH

FROM

Obſervations

MADE BY

ROBERT HOOKE Fellow of the *Royal Society.*

Senec. Nat. Qu. lib. 1. cap. 30.

Nè miremur tam tardè erui quæ tam altè jacent.

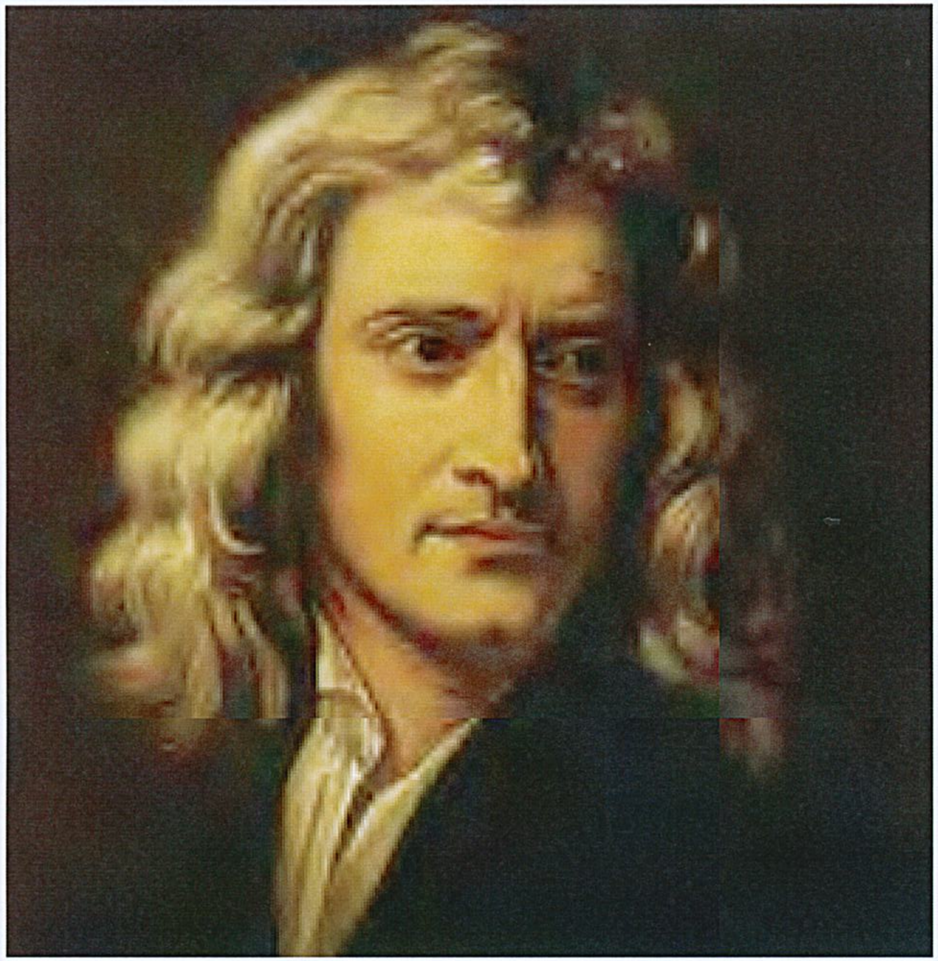
LONDON,

Printed by *T. R.* for *John Martyn* Printer to the *Royal Society*, at the *Bell* in St. *Pauls* Church-yard. 1674.

le Professeur
Pour Monsieur [illegible] de la part
de son tres humble serviteur [illegible]

Robert HOOKE (1635 . 1703)

Loi de la gravitation
1674



ISAAC NEWTON (1642 - 1727)

PHILOSOPHIÆ NATURALIS PRINCIPIA MATHEMATICA.

Autore *J S. NEWTON*, *Trin. Coll. Cantab. Soc.* Matheseos Professore *Lucasiano*, & Societatis Regalis Sodali.

IMPRIMATUR.

S. PEPYS, *Reg. Soc.* PRÆSES.

Julii 5. 1686.

LONDINI,

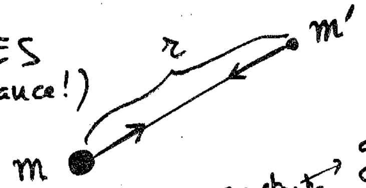
Jussu *Societatis Regiæ* ac Typis *Josephi Streater*. Prostat apud plures Bibliopolas. *Anno* MDCLXXXVII.

1687

NEWTON

Attraction universelle PRINCIPIA 1687

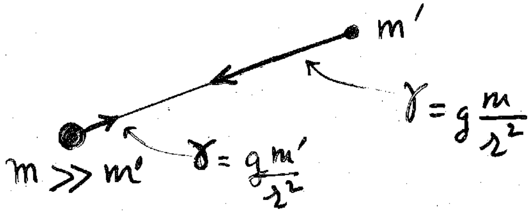
FORCES
(à distance !)



égales en grandeur
opposées en direction

constante → $g \dfrac{mm'}{r^2}$

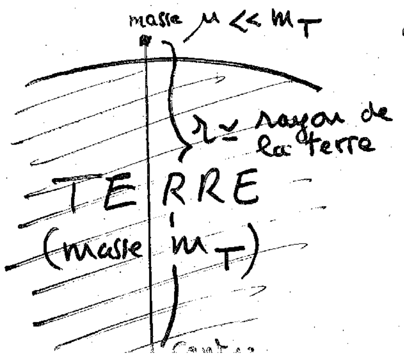
ACCÉLÉRATIONS $\vec{F} = m\vec{\gamma}$ (dans 1 repère Galiléen)



Isaac Newton *Philosophiæ naturalis Principia Mathematica* Liber tertius Propositio VIII Theorema VIII : *"Si la matière de deux globes qui gravitent l'un vers l'autre est homogène à égales distences de leurs centres : le poids de l'un de ces globes vers l'autre sera réciproquement comme le quarré de la distance qui est entre leurs centres"* (traduction de la Marquise du Chastellet).

⇓

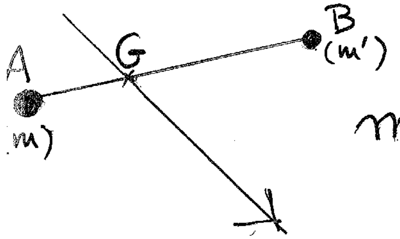
Loi de la chute des corps sur la terre



accélération $\dfrac{g m_T}{r^2} \simeq$ cste

LE PROBLÈME DES DEUX CORPS

Mouvement du centre de gravité :



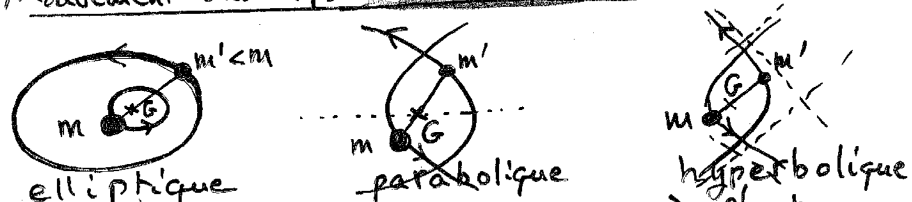
$$m\overrightarrow{GA} + m'\overrightarrow{GB} = \vec{O}$$

Aucune force ne s'exerce sur G

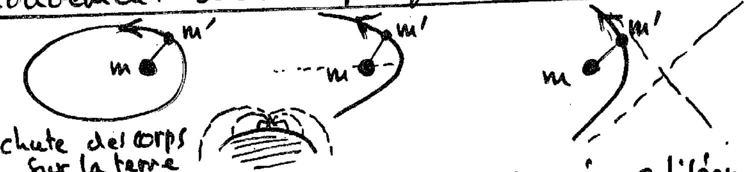
⇓

G a un mouvement rectiligne uniforme

- Mouvement des corps dans un repère (galiléen) fixant G

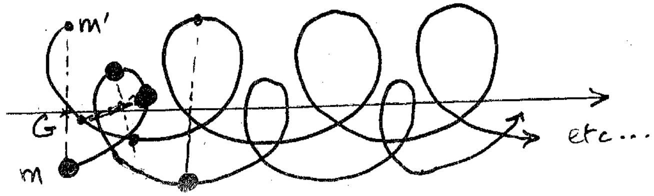


- Mouvement d'un corps par rapport à l'autre



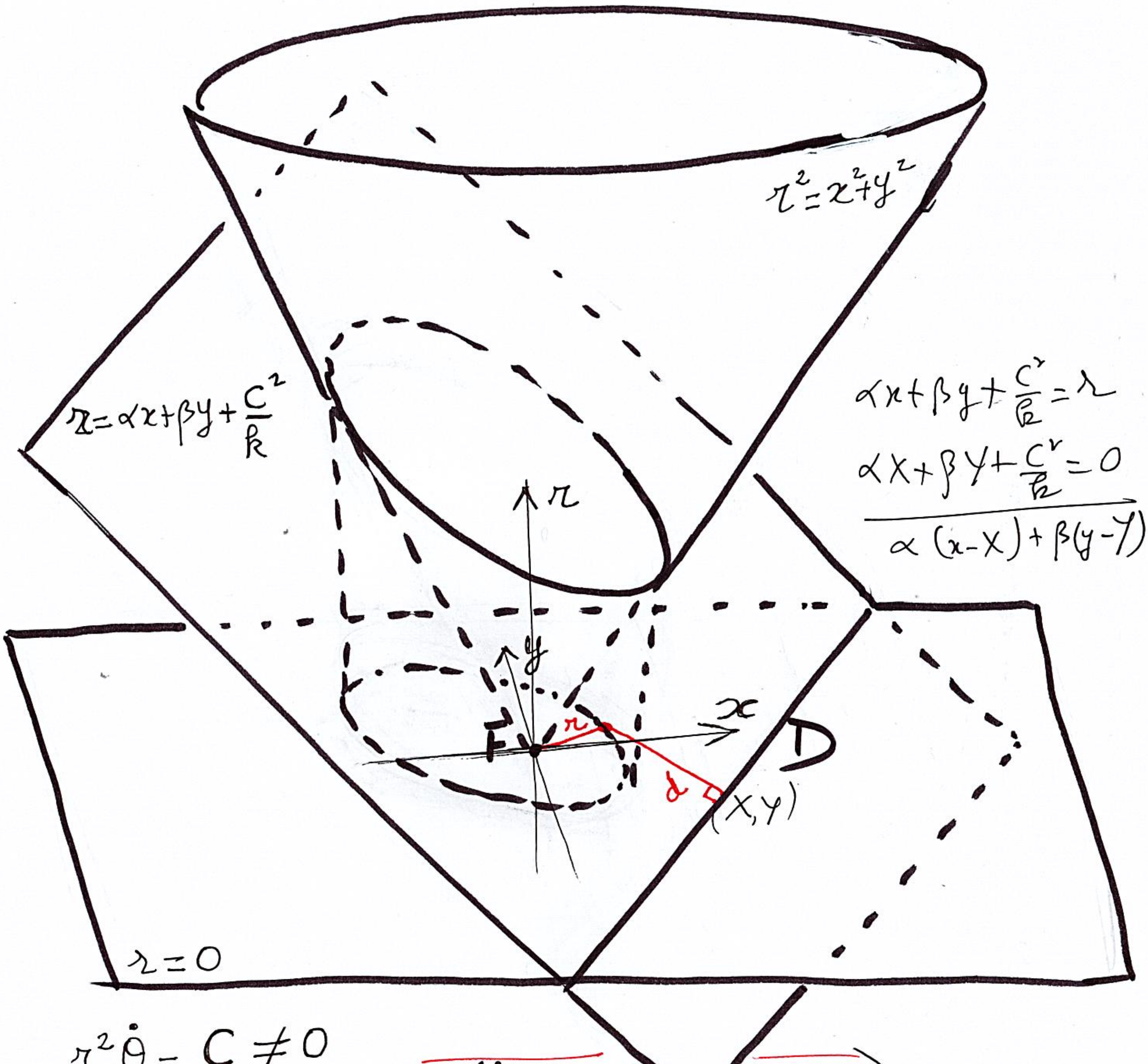
⇒ chute des corps sur la terre

- Mouvement des corps dans 1 repère galiléen quelconque



Preuve par LAGRANGE de la $1^{\text{ère}}$ loi de KEPLER

$$z = x + iy = re^{i\theta}, \quad \boxed{\ddot{z} = -k\frac{z}{r^3}}$$



$$\alpha x + \beta y + \frac{C^2}{k} = r$$

$$\alpha X + \beta Y + \frac{C^2}{k} = 0$$

$$\alpha(x - X) + \beta(y - Y) = r$$

$$r^2\dot{\theta} = C \neq 0$$

$$\ddot{r} = -\frac{k}{r^2} + \frac{C^2}{r^3} \Longleftrightarrow \boxed{\overset{\cdot\cdot}{\overline{r - \frac{C^2}{k}}} = -\frac{k}{r^3}\left(r - \frac{C^2}{k}\right)}$$

$$\boxed{\ddot{x} = -\frac{k}{r^3}x, \quad \ddot{y} = -\frac{k}{r^3}y}$$

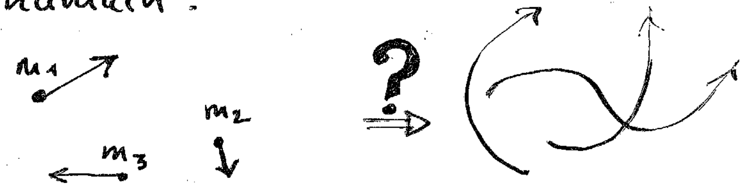
$$\Longrightarrow \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad r(t) - \frac{C^2}{k} = \alpha x(t) + \beta y(t)$$

$$\frac{r}{d} = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$$

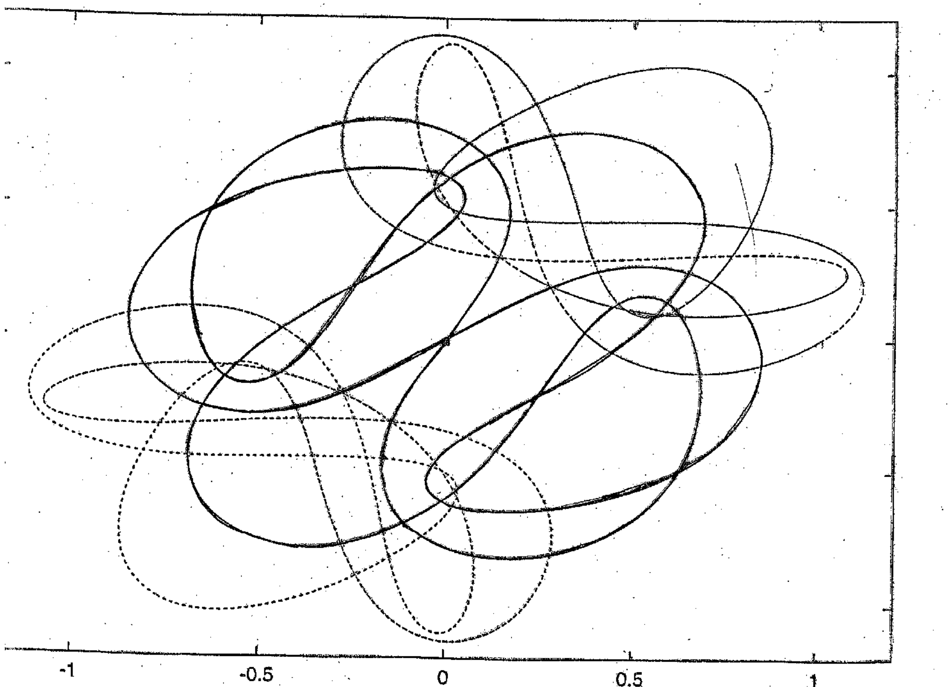
<u>eccentricité</u>

LE PROBLÈME DES TROIS CORPS

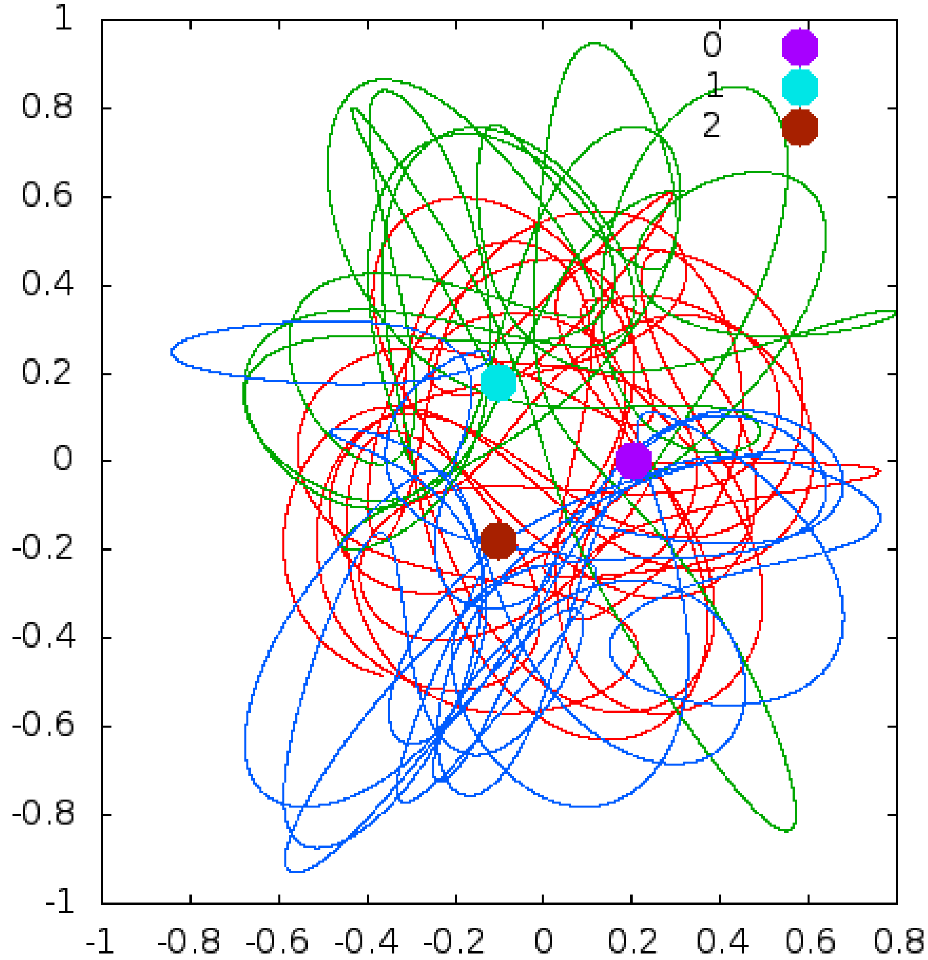
NEWTON : (une solution exacte du problème des 3 corps) "dépasse, si je ne me trompe, les forces de l'esprit humain".



UN EXEMPLE : Une solution "assez simple" du problème des 3 corps (3 masses égales)

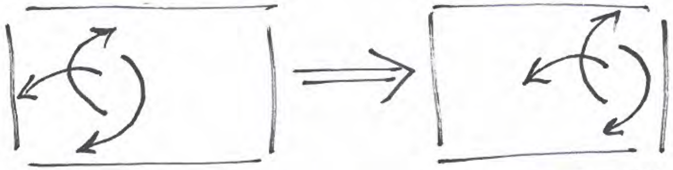


Calculée numériquement par C. Simó



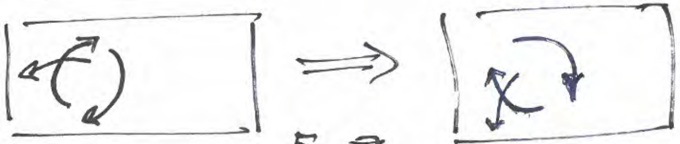
SYMÉTRIES ET INTÉGRALES PREMIÈRES

TRANSLATION
(en position, ou vitesse)



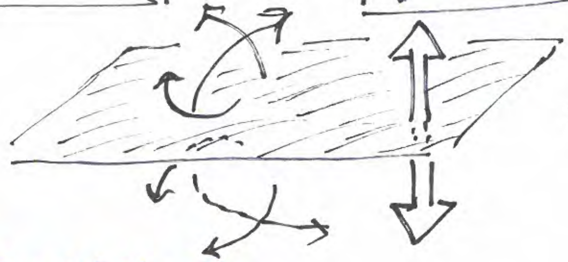
MOMENT LINÉAIRE
(mouvement galiléen du centre de gravité)

ROTATION



MOMENT CINÉTIQUE
(loi des aires)

SYMÉTRIE PLANE



⇒ MOUVEMENT DANS UN PLAN POUR 2 CORPS

TRANSLATION TEMPORELLE

ÉNERGIE

EMMY NOETHER (1918)

SYMÉTRIE SO(4) (seulement pour 2 corps)

VECTEUR DE HERMAN-LAPLACE
(direction du périhélie)

⇓

solutions toutes périodiques en énergie négative

EMMY NOETHER (1882 - 1935

13. Invariante Variationsprobleme

Nachr. v. d. Ges. d. Wiss. zu Göttingen 1918, S. 235–257

Vorgelegt von F. Klein in der Sitzung vom 26. Juli 1918[1]).

Es handelt sich um Variationsprobleme, die eine kontinuierliche Gruppe (im Lieschen Sinne) gestatten; die daraus sich ergebenden Folgerungen für die zugehörigen Differentialgleichungen finden ihren allgemeinsten Ausdruck in den in § 1 formulierten, in den folgenden Paragraphen bewiesenen Sätzen. Über diese aus Variationsproblemen entspringenden Differentialgleichungen lassen sich viel präzisere Aussagen machen als über beliebige, eine Gruppe gestattende Differentialgleichungen, die den Gegenstand der Lieschen Untersuchungen bilden. Das folgende beruht also auf einer Verbindung der Methoden der formalen Variationsrechnung mit denen der Lieschen Gruppentheorie. Für spezielle Gruppen und Variationsprobleme ist diese Verbindung der Methoden nicht neu; ich erwähne Hamel und Herglotz für spezielle endliche, Lorentz und seine Schüler (z. B. Fokker), Weyl und Klein für spezielle unendliche Gruppen[2]). Insbesondere sind die zweite Kleinsche Note und die vorliegenden Ausführungen gegenseitig durch einander beein-

---

1) Die endgiltige Fassung des Manuskriptes wurde erst Ende September eingereicht.

2) Hamel: Math. Ann. Bd. 59 und Zeitschrift f. Math. u. Phys. Bd. 50. Herglotz: Ann. d. Phys. (4) Bd. 36, bes. § 9, S. 511. Fokker, Verslag d. Amsterdamer Akad., 27./1. 1917. Für die weitere Litteratur vergl. die zweite Note von Klein: Göttinger Nachrichten 19. Juli 1918.

In einer eben erschienenen Arbeit von Kneser (Math. Zeitschrift Bd. 2) handelt es sich um Aufstellung von Invarianten nach ähnlicher Methode.

1918

COMBIEN DE PARAMÈTRES ?

2 CORPS DANS L'ESPACE 12 positions et vitesses

Réductions dues aux SYMÉTRIES
- −6 centre de gravité
- −3 moment cinétique
- −1 énergie
- −1 vecteur de Hermann-Laplace

= 1 L'orbite est déterminée

3 CORPS DANS L'ESPACE 18 positions et vitesses

LAGRANGE 1772

Réductions dues aux SYMÉTRIES
- −6 centre de gravité
- −3 moment cinétique
- −1 énergie
- −1 rotations

= 7 ! ! !

LE PROBLÈME DES TROIS CORPS EST "NON-INTÉGRABLE"

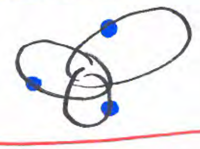
BRUNS 1887
POINCARÉ 1892

DIVERSES APPROCHES DU PROBLÈME

THÉORIE DES PERTURBATIONS
Existence et stabilité des systèmes planétaires et lunaires

Mécanique céleste classique

SOLUTIONS EXACTES



SOLUTIONS NON PERTURBATIVES
Méthodes topologiques
Dynamique symbolique
Calcul des variations
...

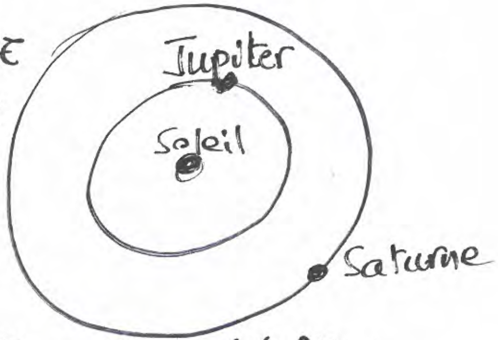
Méthodes Nouvelles

PHÉNOMÈNES LIÉS AUX COLLISIONS TRIPLES

. . . . . .

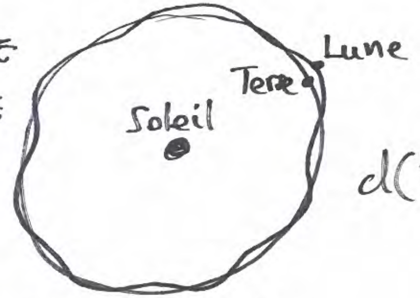
PERTURBATIONS

PROBLÈME PLANÉTAIRE



$m_J, m_{Sat} \ll m_S$

PROBLÈME LUNAIRE

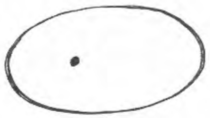
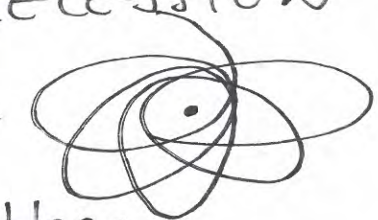


$d(T,L) \ll d(T,S)$

$m_L \ll m_T \ll m_S$

MÉCANIQUE CÉLESTE CLASSIQUE

Mouvements séculaires : PRÉCESSION

 remplacé par 

Nombreuses explications possibles :

PERTURBATIONS DUES À L'ATTRACTION EN $1/r^2$	Loi en $1/r^{2+\varepsilon}$ ou en $\frac{1}{r^2}+\frac{\varepsilon}{r^4}$ (Clairaut)	corrections relativistes (ex. Mercure)

1747-48 CRISE DE L'APOGÉE DE LA LUNE

NEWTON
EULER, CLAIRAUT, D'ALEMBERT
LAPLACE, LAGRANGE, POISSON
DELAUNAY, HILL,
POINCARÉ, BIRKHOFF ---- ARNOLD (K.A.M.)

CONSIDÉRATIONS SUR LE PROBLEME DES TROIS CORPS. (*)

PAR MR. L. EULER.

I.

Le probleme où il s'agit de déterminer le mouvement de trois corps qui s'attirent mutuellement, selon l'hypothese Newtonienne, est devenu depuis quelque tems si fameux par les soins que les plus grands Géometres y ont employés, qu'on a déjà commencé à disputer, à qui la gloire de l'avoir le premier résolu appartenoit. Mais cette dispute est fort prématurée, & il s'en faut bien encore qu'on soit parvenu à une solution parfaite du probleme. Tout ce qu'on y a fait jusqu'ici est restreint à un cas très particulier, où le mouvement de chacun des trois corps suit à peu près les regles établies par *Kepler*; & dans ce cas même on s'est borné à déterminer le mouvement par approximation. Dans tous les autres cas, on ne sauroit se vanter qu'on puisse assigner seulement à peu près le mouvement des trois corps, lequel demeure encore pour nous un aussi grand mystere, que si l'on n'avoit jamais pensé à ce probleme.

2. Pour prouver clairement combien on est encore éloigné d'une solution complette de ce probleme, on n'a qu'à le comparer avec le cas où il n'y a que deux corps qui s'attirent mutuellement, & même avec le cas le plus simple, où il s'agit de déterminer le mouvement d'un corps pesant projetté d'une maniere quelconque dans le vuide. Et on conviendra aisément qu'il auroit été impossible de trouver

(*) Lû le 4. Déc. 1765.

1765

Leonhard EULER (1707-1783)

ALEXIS - CLAUDE CLAIRAUT (1713 - 1765)

JEAN LE ROND D'ALEMBERT (1717 - 1783)

Crise de l'apogée de la lune et sa résolution

517

Mr Clairaut a lu l'Ecrit suivant.

Du Systeme du Monde, dans les principes de la Gravitation universelle.

Le fameux Livre des Principes mathématiques de la Philosophie naturelle a été l'Epoque d'une grande révolution dans la Physique. La méthode qu'a suivie Mr Newton son illustre auteur, pour remonter des faits aux causes, a repandu la Lumiere des Mathématiques sur une Science qui jusqu'alors avoit été dans les Ténébres des conjectures et des hypotheses.

Mais s'il est juste de reconnoitre tout ce qu'on doit à ce grand homme, on ne sçauroit aussi s'empêcher d'avoüer que la maniere dont il a exposé ses découvertes a dû retarder considérablement l'utilité qu'on en pourroit retirer. Je ne parle point ici de l'art avec lequel il avoit caché sa métode des fluxions, la clef de toutes ses sçavantes Recherches, parce que cette methode après lui, est devenüe si familiere, qu'on a oublié tout le tort qu'il avoit eu de ne la pas communiquer; mais n'est on pas en droit de lui reprocher un autre tort qui a sans doute frappé tous ceux qui ont étudié son Livre avec une véritable envie de l'entendre: c'est que dans la plûpart des endroits difficiles, il employe un trop petit nombre de paroles à expliquer ses principes, tandis qu'il paroit se livrer avec complaisance aux détails et aux vérités de calcul sur lesquelles, les Lecteurs ne se feroient aucun scrupule de s'en rapporter à lui, lors qu'ils possédent ce qu'il faut pour en trouver les demonstrations.

!!! Les difficultés qu'on trouve à suivre Mr Newton soit à l'entrée, soit dans tout le cours de son ouvrage, ont produit deux effets également nuisibles: Beaucoup de ses Lecteurs se sont rebutés au premier Examen, et ont cru pouvoir détruire son systeme sans suivre les calculs et les observations sur lesquelles il est fondé: ils ont cru pouvoir s'en éviter la peine en cherchant dans la Métaphysique des moyens de prouver l'impossibilité de l'attraction comme cause et comme propriété que la Matiére a par elle même; ils ne pensoient pas que quand même leur démonstration auroit été sans réplique, ils étoient refutés par un seul mot de Mr Newton qui avertit en propres termes qu'il n'employe le mot d'attraction qu'en attendant qu'on trouve sa cause: Et en effet il est aisé de juger par le Livre des Principes Mathématiques de la Philosophie Naturelle, qu'on y a seulement pour but de constater l'attraction comme fait.

D'autres Lecteurs, et c'est le plus grand nombre aujourd'hui, ayant suivi une partie des découvertes de Mr Newton, et ayant trouvé tout ce qu'ils comprenoient de son systeme, d'accord avec la Nature, se sont peu souciés d'entendre le reste de l'ouvrage, et ils l'ont adopté sans éxamen. Ils ont même été beaucoup plus loin que l'auteur dans leurs suppositions; Tout phénomène leur a paru expliqué, dès qu'il pouvoit être lié par quelque espece de calcul à l'attraction. Loin de chercher à affermir les fondements du systeme, on n'a pensé qu'à lui donner plus d'élévation, et à en étendre les Limites. Afin de justifier ce que j'avance ici, je vais exposer dans toute leur force les raisons qui déterminent communément en faveur du systeme de Mr Newton. Je rendrai compte ensuite des motifs qui m'ont engagé à chercher de nouvelles preuves de ce systeme, du travail que demandoit cette recherche, et de ce qui en a résulté. On doit au célébre Kepler les deux plus belles loix qui aient jamais été remarquées dans la marche des Planetes, et les plus propres à conduire aux causes de leurs mouvemens. L'une de ces loix nous apprend que pendant qu'une Planete

15 novembre 1747

DE L'ORBITE DE LA LUNE,

En ne négligeant pas les quarrés des quantités de même ordre que les forces perturbatrices.

Par M. CLAIRAUT.

Déposé à l'Acad. le 21 Janv. 1749, & lû le 15 Mai 1752.

JE supposerai ici, comme dans la solution que je donnai en 1747, que les deux orbites sont dans le même plan, que celle du Soleil est sans excentricité; & je n'aurai point d'égard aux termes qui seroient introduits dans les valeurs des forces Φ & Π, si l'on ne négligeoit pas le quarré du rapport des distances du Soleil & de la Lune à la Terre.

Ainsi les forces Φ & Π seront encore

$$-\frac{Nr}{t^3}\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\operatorname{cof.} 2T\right), \ \& \ -\frac{3N}{2t^3}\left(\operatorname{fin.} 2T\right):$$

N étant la masse du Soleil, M la somme des masses de la Terre & de la Lune, r le rayon vecteur quelconque de l'orbite de la Lune, t le rayon de l'orbite du Soleil, T l'élongation des deux astres.

L'avance moyenne de l'apogée n'est pas un petit effet : les $3°3'$ par révolution lunaire font environ 44° par an, c'est-à-dire un tour complet en moins de 9 ans (3233 jours) ! Or à l'époque de l'écriture de la *Théorie de la Lune de 1748*, Euler, Clairaut et d'Alembert s'accordent pour trouver que la théorie de l'attraction en l'inverse du carré de la distance ne fournit que la moitié de cette quantité et, le 15 novembre 1747, Clairaut soutient devant l'Académie des Sciences que la théorie de Newton doit être révisée par l'addition à l'attraction d'un terme en l'inverse du cube de la distance. Mais, coup de théâtre, s'apercevant que le calcul des perturbations au deuxième ordre fournit un terme de taille comparable à celui fourni par le premier ordre, Clairaut rétracte le 17 mai 1749 ses thèses et annonce les résultats d'un texte déposé sous pli cacheté en janvier de la même année qui réconcilie théorie newtonienne et observations (ce texte ne sera publié qu'en 1752 sous le titre *De l'orbite de la Lune en ne négligeant pas les quarrés des quantités de même ordre que les forces perturbatrices*).

17 mai 1749 (publié en 1752)

RECHERCHES

SUR

DIFFÉRENS POINTS IMPORTANS

DU

SYSTÊME DU MONDE,

TROISIÉME PARTIE.

Par M. D'ALEMBERT, de l'Académie Françoise; des Académies Royales des Sciences de France, d'Angleterre & de Prusse, de l'Académie Royale des belles Lettres de Suéde, & de l'Institut de Bologne.

C'est le lendemain de cette rétractation de Clairaut que d'Alembert confie, pour prendre date, son manuscrit au secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences Grandjean de Fouchy. Dans *Recherches sur différens points importans du systême du monde*, il donne le moyen de faire le calcul des perturbations aux ordres suivants sans faire apparaître d'"arcs de cercle" en suivant le dernier chapitre du manuscrit de 1748, que nous avons déjà évoqué. D'après l'éditeur du volume, cette méthode serait déjà contenue dans un pli cacheté déposé à la fin de 1747 et aujourd'hui perdu ; il n'aurait donc manqué à d'Alembert que d'appliquer numériquement sa méthode pour faire la même découverte que Clairaut. Il en retire une amertume qui s'exprimera dix ans plus tard dans le tome 9 de l'*Encyclopédie* (le volume paraît en 1765 mais l'article est rédigé en 1759) :

A PARIS,

Chez DAVID, Libraire, rue & vis-à-vis la grille des Mathurins.

M. DCC. LVI.

AVEC APPROBATION ET PRIVILEGE DU ROY.

ENCYCLOPÉDIE,

OU

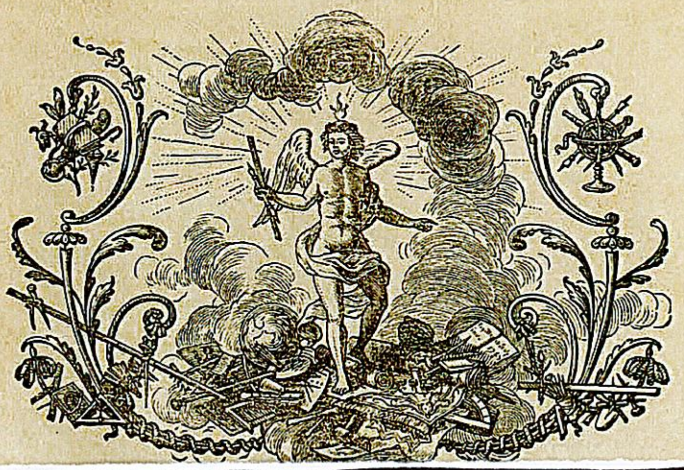
DICTIONNAIRE RAISONNÉ DES SCIENCES, DES ARTS ET DES MÉTIERS,

PAR UNE SOCIÉTÉ DE GENS DE LETTRES.

Mis en ordre & publié par M. *DIDEROT*, de l'Académie Royale des Sciences & des Belles-Lettres de Pruſſe ; & quant à la PARTIE MATHÉMATIQUE, par M. *D'ALEMBERT*, de l'Académie Royale des Sciences de Paris, de celle de Pruſſe, & de la Société Royale de Londres.

Tantùm ſeries juncturaque pollet,
Tantùm de medio ſumptis accedit honoris ! HORAT.

TOME PREMIER.



le tome 9 de l'*Encyclopédie* (le volume paraît en 1765 mais l'article est rédigé en 1759) : *"Je ne dois pas oublier d'ajouter 1°. que ma méthode pour déterminer le mouvement de l'apogée, est très-élégante & très-simple, n'ayant besoin d'aucune intégration, & ne demandant que la simple inspection des coefficients du second terme de l'équation différentielle ; 2°. que j'ai démontré le premier par une méthode rigoureuse, ce que personne n'avoit encore fait, & n'a même fait jusqu'ici, que l'équation de l'orbite lunaire ne devoit point contenir d'arcs de cercle ; si on ajoute à cela la maniere simple & facile dont je parviens à l'équation différentielle de l'orbite lunaire, sans avoir besoin pour cela, comme d'autres géometres, de transformations & d'intégrations multipliées ; & le détail que j'ai donné ci-dessus de mes travaux & de ceux des autres géometres, on conviendra, ce me semble, que j'ai eu plus de part à la théorie de la lune que certains mathématiciens n'avoient voulu le faire croire.*

PIERRE SIMON DE LAPLACE (1749 - 1827)

TRAITÉ

DE

MÉCANIQUE CÉLESTE,

PAR P. S. LAPLACE,

Membre de l'Institut national de France, et du Bureau des Longitudes.

TOME PREMIER.

DE L'IMPRIMERIE DE CRAPELET.

A PARIS,

Chez J. B. M. DUPRAT, Libraire pour les Mathématiques, quai des Augustins.

AN VII.

1798 - 1799

Joseph-Louis Lagrange (1736-1813)

MÉCHANIQUE

ANALITIQUE;

Par M. DE LA GRANGE, *de l'Académie des Sciences de Paris; de celles de Berlin, de Pétersbourg, de Turin, &c.*

A PARIS,

Chez LA VEUVE DESAINT, Libraire, rue du Foin S. Jacques.

M. DCC. LXXXVIII.

AVEC APPROBATION ET PRIVILEGE DU ROI.

1788

stantes, deviendra

$$\Delta\Omega = \frac{\partial\Omega}{\partial\alpha}\Delta\alpha + \frac{\partial\Omega}{\partial\beta}\Delta\beta + \frac{\partial\Omega}{\partial\gamma}\Delta\gamma + \ldots + \frac{\partial\Omega}{\partial\lambda}\Delta\lambda + \frac{\partial\Omega}{\partial\mu}\Delta\mu + \frac{\partial\Omega}{\partial\nu}\Delta\nu + \ldots.$$

En la substituant dans le premier membre de l'équation de l'article précédent et ordonnant les termes par rapport aux différences marquées par Δ, on aura

$$\left(\frac{\partial\Omega}{\partial\alpha}dt - \delta\lambda\right)\Delta\alpha + \left(\frac{\partial\Omega}{\partial\beta}dt - \delta\mu\right)\Delta\beta + \left(\frac{\partial\Omega}{\partial\gamma}dt - \delta\nu\right)\Delta\gamma + \ldots$$
$$+ \left(\frac{\partial\Omega}{\partial\lambda}dt + \delta\alpha\right)\Delta\lambda + \left(\frac{\partial\Omega}{\partial\mu}dt + \delta\beta\right)\Delta\mu + \left(\frac{\partial\Omega}{\partial\nu}dt + \delta\gamma\right)\Delta\nu + \ldots = 0.$$

Comme on peut donner aux différences $\Delta\alpha$, $\Delta\beta$, ... marquées par la caractéristique Δ une valeur quelconque, il faudra que l'équation soit vérifiée indépendamment de ces différences, ce qui donnera autant d'équations particulières, telles que

$$\frac{\partial\Omega}{\partial\alpha}dt = \delta\lambda, \quad \frac{\partial\Omega}{\partial\beta}dt = \delta\mu, \quad \frac{\partial\Omega}{\partial\gamma}dt = \delta\nu, \quad \ldots,$$
$$\frac{\partial\Omega}{\partial\lambda}dt = -\delta\alpha, \quad \frac{\partial\Omega}{\partial\mu}dt = -\delta\beta, \quad \frac{\partial\Omega}{\partial\nu}dt = -\delta\gamma, \quad \ldots.$$

14. Les différences marquées par la caractéristique δ sont proprement les différentielles des constantes arbitraires devenues variables (art. 10); ainsi, comme ces différentielles peuvent maintenant être rapportées également au temps t, il est permis et même convenable de changer les δ en d, et l'on aura, pour la détermination des nouvelles variables $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \lambda, \mu, \nu, \ldots$, les équations

$$\frac{d\alpha}{dt} = -\frac{\partial\Omega}{\partial\lambda}, \quad \frac{d\beta}{dt} = -\frac{\partial\Omega}{\partial\mu}, \quad \frac{d\gamma}{dt} = -\frac{\partial\Omega}{\partial\nu}, \quad \ldots,$$
$$\frac{d\lambda}{dt} = +\frac{\partial\Omega}{\partial\alpha}, \quad \frac{d\mu}{dt} = +\frac{\partial\Omega}{\partial\beta}, \quad \frac{d\nu}{dt} = +\frac{\partial\Omega}{\partial\gamma}, \quad \ldots,$$

1ère apparition des équations de Hamilton !!!...

qui sont, comme l'on voit, sous une forme très simple, et qui fournissent ainsi la solution la plus simple du problème de la variation des constantes arbitraires.

Hamilton n'était pas encore né...

Siméon-Denis Poisson (1781 - 1840)

JOURNAL
DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

MÉMOIRE

Sur les Inégalités séculaires des Moyens mouvemens des Planètes ;

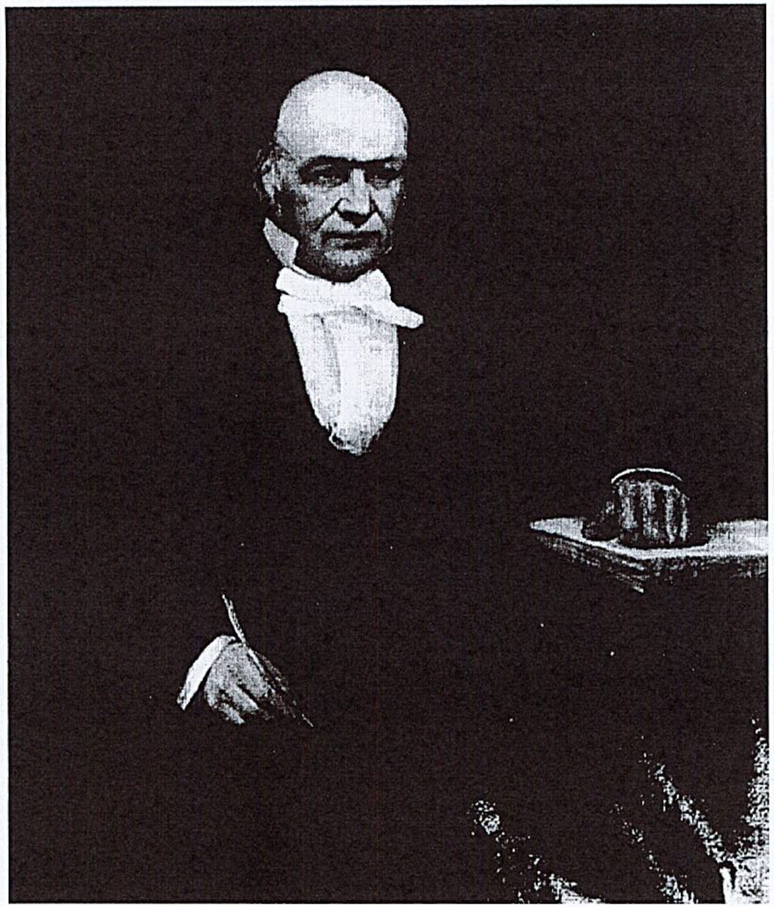
Lu à l'Institut, le 20 Juin 1808.

Par M. POISSON.

L'ACTION réciproque des planètes produit, dans leurs mouvemens, des inégalités que l'on distingue en deux espèces : les unes sont périodiques, et leurs périodes dépendent de la configuration des planètes entre elles ; de sorte qu'elles reprennent les mêmes valeurs toutes les fois que les planètes reviennent à la même position : les autres sont encore périodiques ; mais leurs périodes sont incomparablement plus longues que celles des premières, et elles sont indépendantes de la position relative des planètes. On nomme ces inégalités à longues périodes, *inégalités séculaires* ; et, vu la lenteur avec laquelle elles croissent, on peut les considérer pendant plusieurs siècles, comme proportionnelles

1808

The Hamilton - Jacobi equation

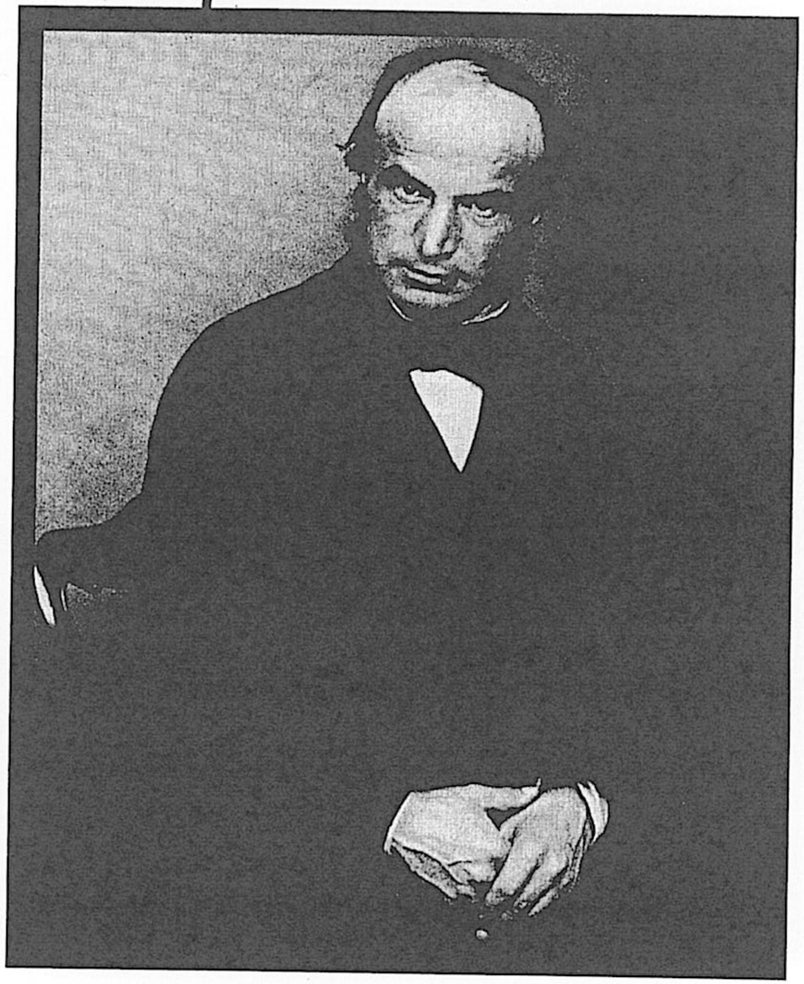


William Rowan HAMILTON
1805 - 1865

Carl - Gustav JACOBI
1804 - 1851

Découverte de Neptune (1846)

Urbain LE VERRIER
1811 - 1877



John Couch ADAMS
1819 - 1892

Charles-Eugène DELAUNAY (1816-1872)

(C) Photo MINES ParisTech

Une page de la théorie du mouvement de la Lune (1860)

Mémoires de l'Académie des Sciences de l'Institut impérial de France.

$$(383)^{*}\quad \left\{\begin{aligned}&-\frac{5}{8}e'+\frac{15}{8}\gamma^2e'+\frac{15}{4}e^2e'+\frac{25}{32}e'^3-\frac{45}{4}\gamma^2e^2e'-\frac{2955}{512}e^4e'\\ +m'^2\frac{a^3}{a'^3}\Bigg\{&-\left(\frac{45}{16}e'-\frac{675}{32}\gamma^2e'-\frac{1755}{128}e^2e'\right)\frac{n'}{n}+\left(\frac{15}{32}e'+\frac{165}{64}e^2e'\right)\frac{n'^2}{n^2}+\frac{855}{256}e'\frac{n'^3}{n^3}\\ &-\left(\frac{45}{32}e'-\frac{735}{64}e^2e'\right)\frac{n'^2}{n^2}-\frac{675}{256}e'\frac{n'^3}{n^3}-\frac{15}{64}e'\frac{n'^2}{n^2}-\frac{215}{512}e'\frac{n'^3}{n^3}-\frac{27}{64}e'\frac{n'^2}{n^2}+\frac{459}{512}e'\frac{n'^4}{n^4}\\ &+\frac{27}{128}e'\frac{n'^2}{n^2}+\frac{189}{512}e'\frac{n'^3}{n^3}+\frac{15}{128}e'\frac{n'^2}{n^2}+\frac{695}{512}e'\frac{n'^4}{n^4}+\frac{135}{64}e'\frac{n'^2}{n^2}-\frac{1485}{256}e'\frac{n'^3}{n^3}\\ &-\frac{45}{64}e'\frac{n'^2}{n^2}-\frac{405}{256}e'\frac{n'^3}{n^3}+\frac{45}{128}e'\frac{n'^2}{n^2}-\frac{261}{256}e'\frac{n'^3}{n^3}-\frac{45}{256}e'\frac{n'^4}{n^4}-\frac{117}{256}e'\frac{n'^3}{n^3}-\frac{135}{256}e^2e'\frac{n'}{n}\\ &+\frac{135}{256}e^2e'\frac{n'}{n}-\frac{675}{256}e'\frac{n'^2}{n^2}+\frac{1035}{256}e'\frac{n'^3}{n^3}+\frac{45}{32}\gamma^2e'\frac{n'}{n}-\frac{45}{32}\gamma^2e'\frac{n'}{n}+\frac{11025}{256}e'\frac{n'^5}{n^5}\Bigg\}\end{aligned}\right.$$

$$\times\cos(3h+3g+3l-3h'-3g'-2l')$$

$$(384)\quad \left\{\begin{aligned}&\frac{5}{64}e'^2-\frac{15}{64}\gamma^2e'^2-\frac{15}{32}e^2e'^2-\frac{135}{64}e'^2\frac{n'}{n}+\frac{405}{64}e'^2\frac{n'^2}{n^2}+\frac{45}{16}e'^2\frac{n'}{n}-\frac{15}{256}e'^2\frac{n'^2}{n^2}\\ +m'^2\frac{a^3}{a'^3}\Bigg\{&+\frac{45}{256}e'^2\frac{n'^2}{n^2}-\frac{165}{512}e'^2\frac{n'^3}{n^3}-\frac{297}{512}e'^2\frac{n'^2}{n^2}+\frac{27}{128}e'^2\frac{n'^3}{n^3}+\frac{15}{128}e'^2\frac{n'^2}{n^2}-\frac{135}{64}e'^2\frac{n'^4}{n^4}\\ &+\frac{45}{64}e'^2\frac{n'^2}{n^2}+\frac{405}{128}e'^2\frac{n'^3}{n^3}-\frac{135}{128}e'^2\frac{n'^2}{n^2}+\frac{495}{1024}e'^2\frac{n'^4}{n^4}-\frac{45}{256}e'^2\frac{n'^2}{n^2}+\frac{2025}{2048}e'^2\frac{n'^3}{n^3}\\ &+\frac{225}{64}e'^2\frac{n'^4}{n^4}\Bigg\}\end{aligned}\right.$$

$$\times\cos(3h+3g+3l-3h'-3g'-l')$$

$$(385)\quad \left\{\begin{aligned}&\frac{15}{16}e-\frac{45}{16}\gamma^2e-\frac{285}{64}e^3-\frac{45}{8}ee'^2-\frac{4275}{128}ee'^2\frac{n'}{n}-\frac{855}{128}ee'^2\frac{n'}{n}\\ +m'^2\frac{a^3}{a'^3}\Bigg\{&+\frac{255}{64}e\frac{n'^2}{n^2}-\frac{75}{64}e\frac{n'^2}{n^2}+\frac{93}{128}e\frac{n'^2}{n^2}+\frac{25}{64}e\frac{n'^2}{n^2}-\frac{81}{128}e\frac{n'^2}{n^2}-\frac{81}{64}e\frac{n'^3}{n^3}\Bigg\}\end{aligned}\right.$$

Cette portion du coefficient du terme (385) disparaît par suite de la 12e opération.

Ce coefficient du terme (385) se continue à la page suivante.

* On a dû pousser ici l'approximation jusqu'aux quantités du neuvième ordre, avant la 3e opération, mais seulement dans les parties qui contiennent e' ou e' en facteur, afin de pouvoir calculer complètement la portion du coefficient du terme (334) qui provient du terme (383) dans cette 3e opération.

Félix TISSERAND 1845-1896

TRAITÉ

DE

MÉCANIQUE CÉLESTE

PAR

F. TISSERAND,

MEMBRE DE L'INSTITUT ET DU BUREAU DES LONGITUDES,
PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES.

TOME I.

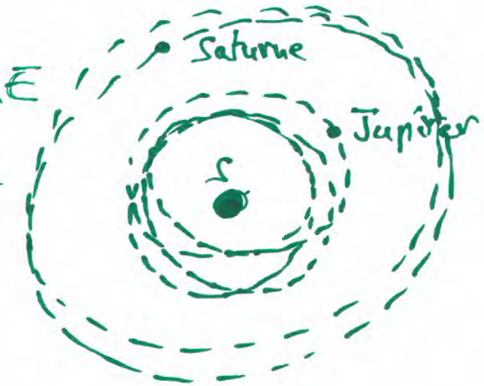
PERTURBATIONS DES PLANÈTES D'APRÈS LA MÉTHODE DE LA VARIATION DES CONSTANTES ARBITRAIRES.

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.
1889

Henrich BRUNS (1848 - 1919)

STABILITÉ OU INSTABILITÉ ?

Exemple typique : SYSTÈME SÉCULAIRE PLANÉTAIRE



au voisinage des mouvements circulaires coplanaires de 2 planètes autour du soleil.

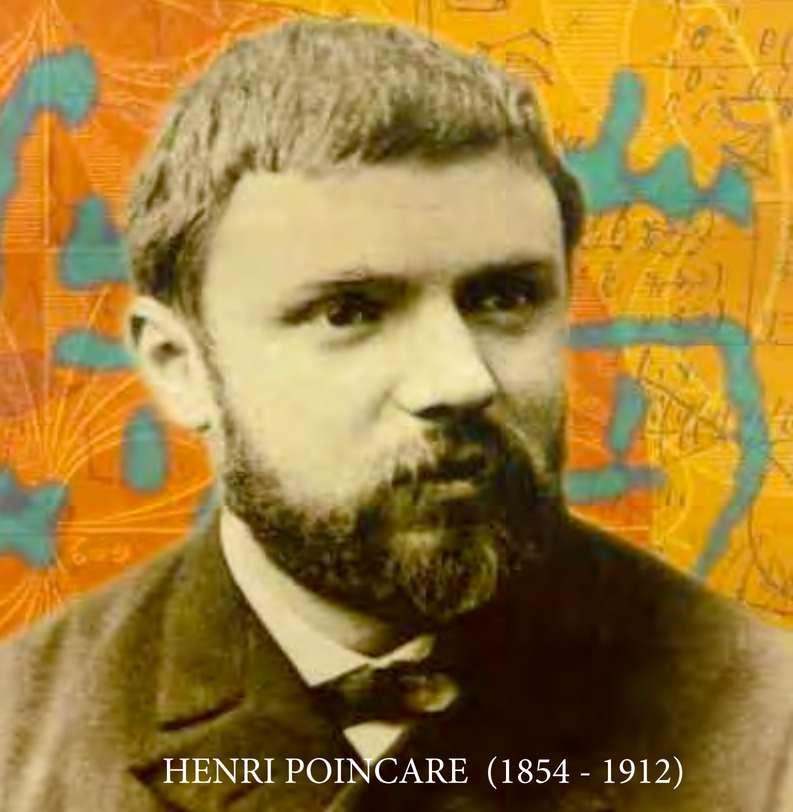
VARIABLES SÉCULAIRES (ou lentes)	VARIABLES DE POSITION (ou rapides)
position & forme des ellipses planétaires osculatrices	1/2 grands axes a_1, a_2 aires balayées l_1, l_2

NEWTON	LAPLACE/LAGRANGE	POINCARÉ	ARNOLD (KAM) HERMAN/FÉJOZ	LASKAR
Instable	Stable au 1er ordre	Stable formellement mais peut-être instable	Stable en mesure si masses planétaires microscopiques	Instable (numérique, tout le système solaire)

[Il est impossible de prédire comment sera orienté le périhélie de la Terre dans 100 millions d'années]

ORIGINE DE L'INSTABILITÉ : RÉSONANCES

TRADUCTION ANALYTIQUE : DIVERGENCE DES SÉRIES DE PERTURBATION



HENRI POINCARE (1854 - 1912)

LES MÉTHODES NOUVELLES

DE LA

MÉCANIQUE CÉLESTE

PAR

H. POINCARÉ,

MEMBRE DE L'INSTITUT,
PROFESSEUR À LA FACULTÉ DES SCIENCES.

TOME I.

Solutions périodiques. — Non-existence des intégrales uniformes.
Solutions asymptotiques.

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1892

(Tous droits réservés.)

1892

LES MÉTHODES NOUVELLES

DE LA

MÉCANIQUE CÉLESTE

PAR

H. POINCARÉ,

MEMBRE DE L'INSTITUT,
PROFESSEUR À LA FACULTÉ DES SCIENCES.

TOME II.

Méthodes de MM. Newcomb, Gyldén, Lindstedt et Bohlin.

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55

1893

(Tous droits réservés.)

1893

LES MÉTHODES NOUVELLES

DE LA

MÉCANIQUE CÉLESTE

PAR

H. POINCARÉ,

MEMBRE DE L'INSTITUT,
PROFESSEUR À LA FACULTÉ DES SCIENCES

TOME III.

Invariants intégraux. — Solutions périodiques du deuxième genre.
Solutions doublement asymptotiques.

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1899

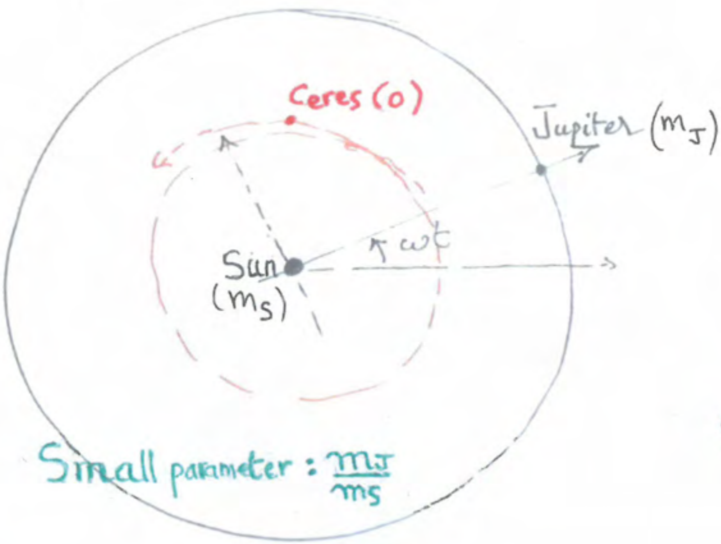
(Tous droits réservés.)

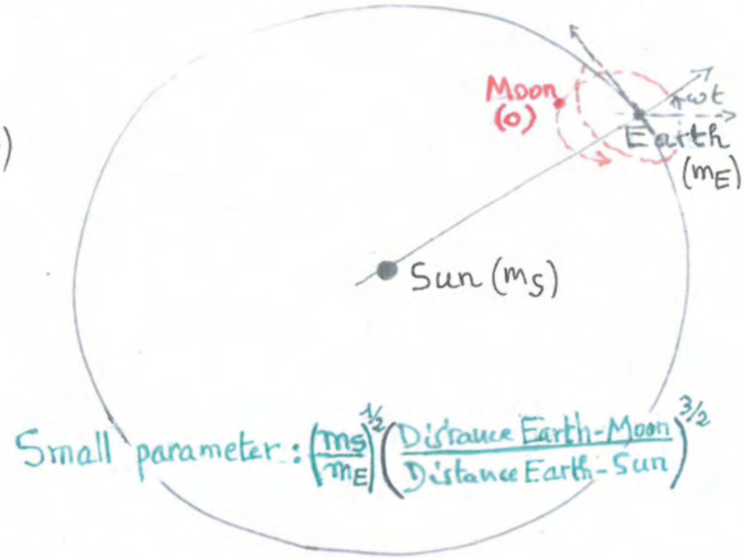
1899

HENRI POINCARÉ DANS SON CABINET DE TRAVAIL.

HENRI POINCARÉ DANS SON CABINET DE TRAVAIL. — PHOT. DORNAC.

LE PROBLÈME RESTREINT DES TROIS CORPS





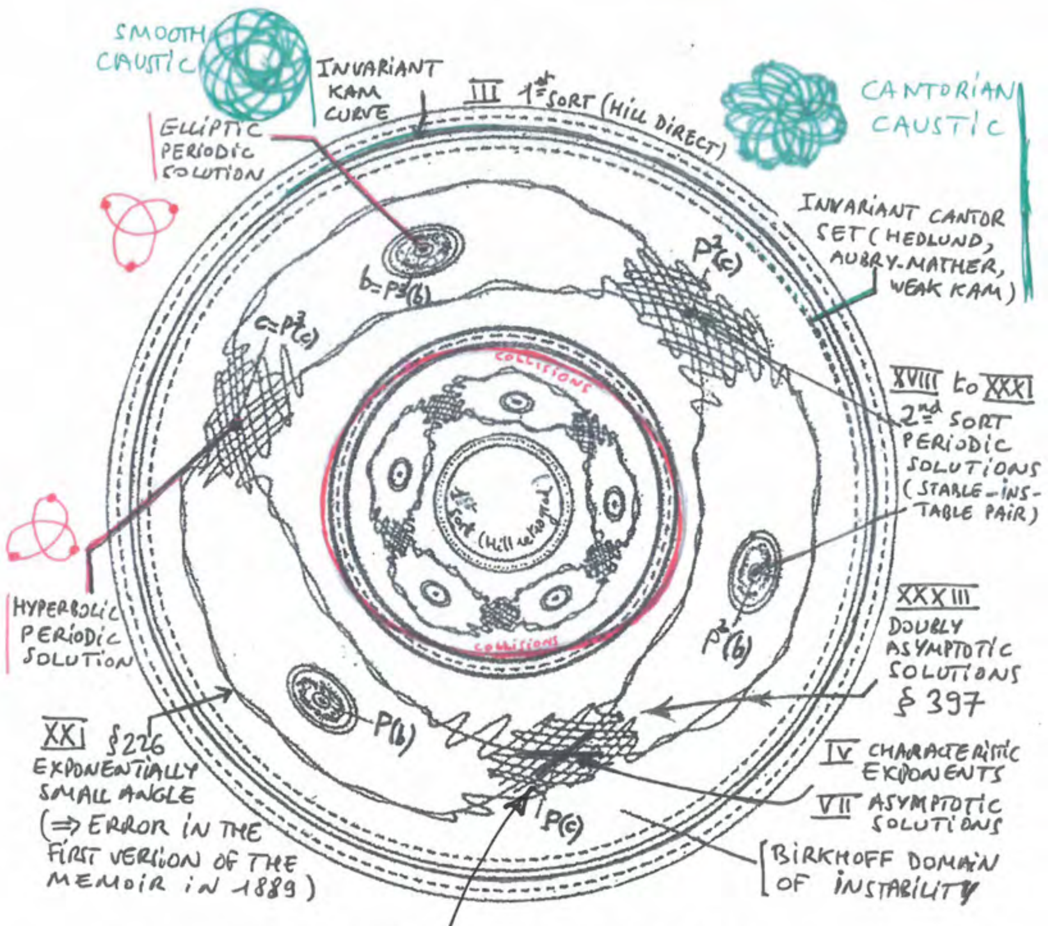
En ce qui concerne le problème des trois corps, je ne suis pas sorti du cas suivant : Je considère trois masses, la première très grande, la seconde petite mais finie, la troisième infiniment petite ; je suppose que les deux premières décrivent un cercle autour de leur centre de gravité commun et que la troisième se meut dans le plan de ces cercles. Tel serait le cas d'une petite planète troublée par Jupiter, si l'on négligeait l'eccentricité de Jupiter et l'inclinaison des orbites.[120]

TOME III

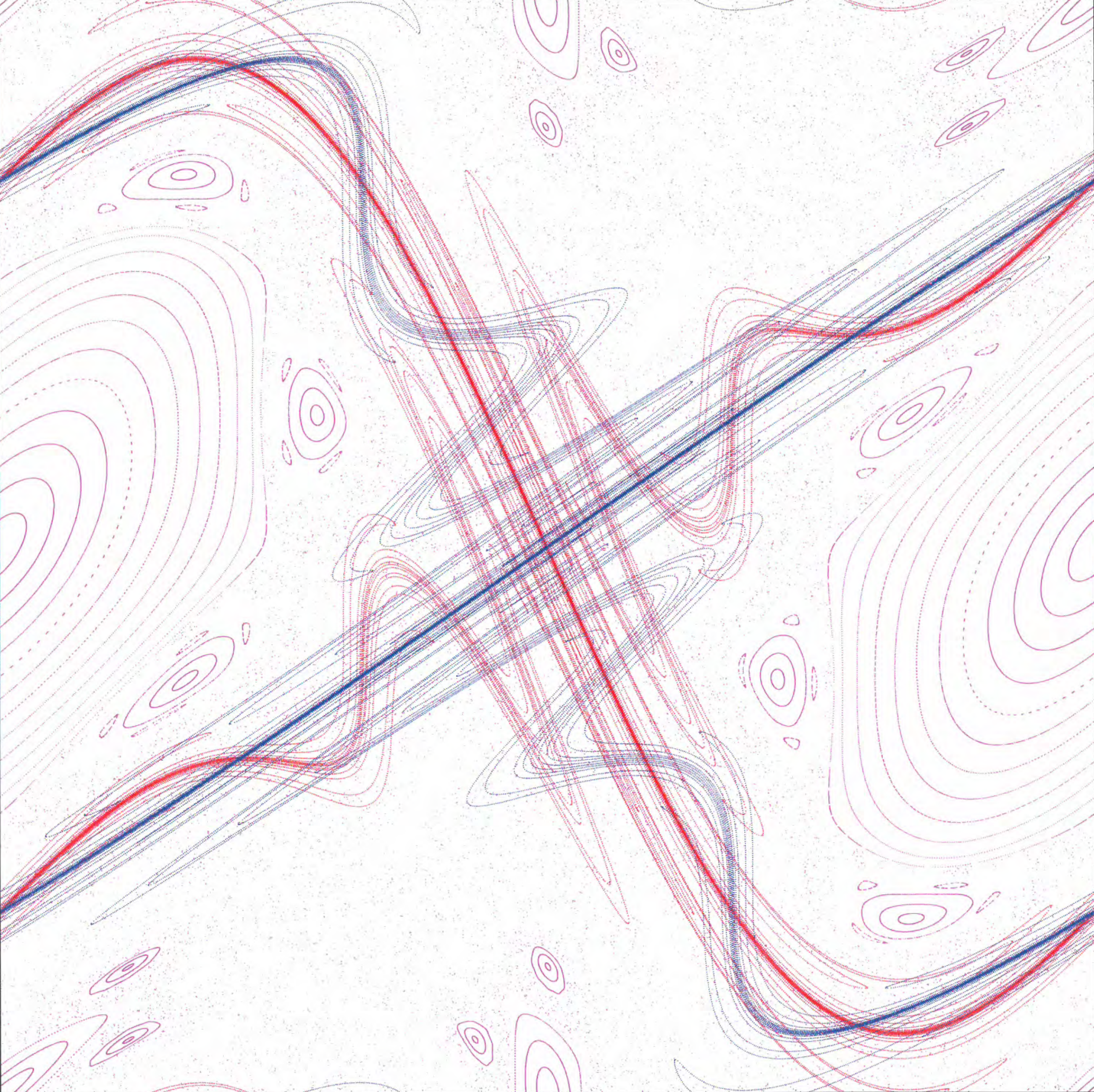
§397

397. Que l'on cherche à se représenter la figure formée par ces deux courbes et leurs intersections en nombre infini dont chacune correspond à une solution doublement asymptotique, ces intersections forment une sorte de treillis, de tissu, de réseau à mailles infiniment serrées; chacune des deux courbes ne doit jamais se recouper elle-même, mais elle doit se replier sur elle-même d'une manière très complexe pour venir recouper une infinité de fois toutes les mailles du réseau.

On sera frappé de la complexité de cette figure, que je ne cherche même pas à tracer. Rien n'est plus propre à nous donner une idée de la complication du problème des trois corps et en général de tous les problèmes de Dynamique où il n'y a pas d'intégrale uniforme et où les séries de Bohlin sont divergentes.

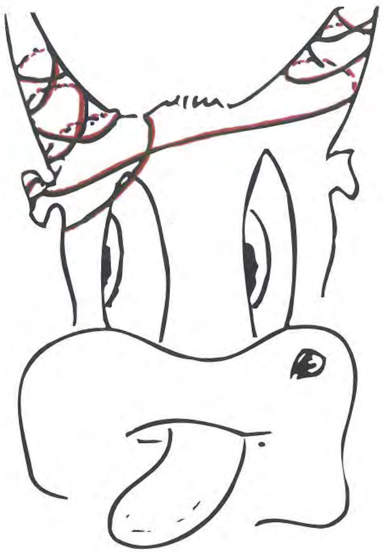


LES INTERSECTIONS HOMOCLINES
DE L'APPLICATION DE 1e RETOUR



Sensibilité aux conditions initiales

(Hadamard interprété par Pierre Duhem)



JACQUES HADAMARD (1865 - 1963)

George David Birkhoff, 1913

George David BIRKHOFF
1884. 1944

Reprinted from *Trans. Amer. Math. Soc.*, January, 1913, Vol. 14, pp. 14–22

PROOF OF POINCARE'S GEOMETRIC THEOREM

BY

GEORGE D. BIRKHOFF *

In a paper recently published in the Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo (vol. 33, 1912, pp. 375–407) and entitled *Sur un théorème de Géométrie*, POINCARÉ enunciated a theorem of great importance, in particular for the restricted problem of three bodies; but, having only succeeded in treating a variety of special cases after long-continued efforts, he gave out the theorem for the consideration of other mathematicians.

For some years I have been considering questions of a character similar to that presented by the theorem and it now turns out that methods which I have been using are here applicable. In the present paper I give the brief proof which I have obtained, but do not take up other results to which I have been led.†

1. Statement of the Theorem. Poincaré's theorem may be stated in a simple form as follows: Let us suppose that a continuous one-to-one transformation T takes the ring R, formed by concentric circles C_a and C_b of radii a and b respectively ($a > b > 0$), into itself in such a way as to advance the points of C_a in a positive sense, and the points of C_b in the negative sense, and at the same time to preserve areas. *Then there are at least two invariant points.*

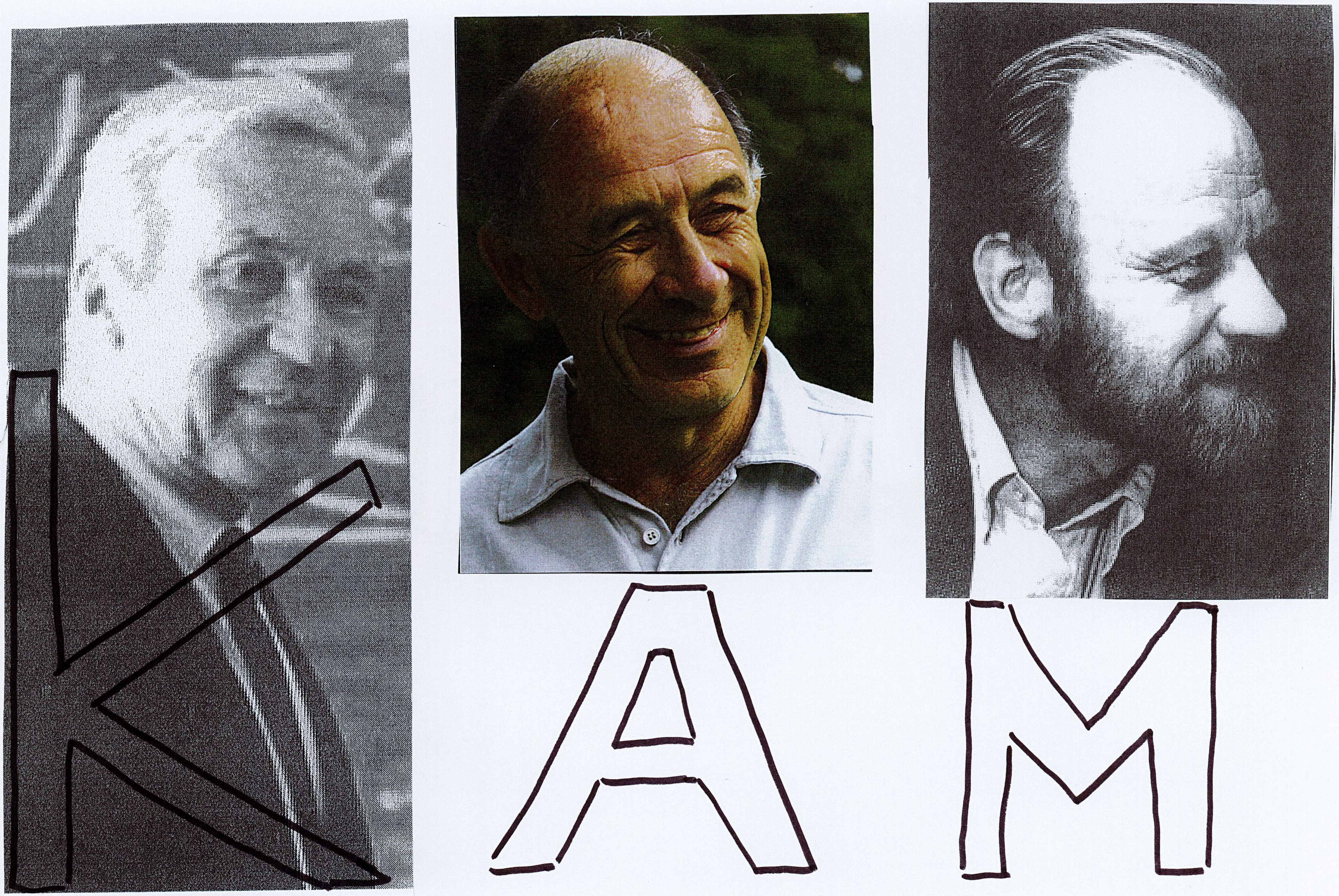
In the proof of this theorem we shall use modified polar coördinates $y = r^2$, $x = \theta$ where r is the distance of the point (x, y) from the center of the circles, and θ is the angle which a line from the center to (x, y) makes with a fixed line through the center. The transformation T may be written then

$$x' = \varphi(x, y), \qquad y' = \psi(x, y).$$

The function $\psi(x, y)$ is a continuous function of (x, y), uniquely determined at each point of R, and so is periodic in x of period 2π. The function $\varphi(x, y)$ admits of an infinite number of determinations which differ from each

* Presented to the Society, October 26, 1912.

† Some of my results are contained in a paper entitled *Quelques théorèmes sur les mouvements des systèmes dynamiques*, which is shortly to appear in the Bulletin de la Société Mathématique de France.


K A M

Andreï Nikolaïevitch KOLMOGOROV

1903 - 1987

52. ON THE PRESERVATION OF CONDITIONALLY PERIODIC MOTIONS UNDER SMALL VARIATIONS OF THE HAMILTON FUNCTION *

We consider in the $2s$-dimensional phase space of a dynamical system with s degrees of freedom a region G, represented as the product of an s-dimensional torus T by a region S in an s-dimensional Euclidean space. The points of the torus will be characterized by circular coordinates $q_1, \dots, q_s$ (the replacement of q_α by $q_\alpha + 2\pi$ does not change the position of the point q), and the coordinates of a point p belonging to S will be denoted by $p_1, \dots, p_s$. Assume that in the region G the equations of motion in the coordinates $(q_1, \dots, q_s, p_1, \dots, p_s)$ have the canonical form

$$\frac{dq_\alpha}{dt} = \frac{\partial}{\partial p_\alpha} H(q,p), \quad \frac{dp_\alpha}{dt} = -\frac{\partial}{\partial q_\alpha} H(q,p). \tag{1}$$

In what follows, the Hamilton function H is assumed to depend on a parameter θ, defined for all $(q,p) \in G$, $\theta \in (-c; +c)$, and to be independent of time. In essence, the consideration below is related to real functions, but imposes rather strong conditions on the smoothness of the function $H(q,p,\theta)$, stronger than the condition of infinite differentiability. For simplicity, in what follows we assume that *the function $H(p,q,\theta)$ is analytic in the variables (q,p,θ) jointly.*

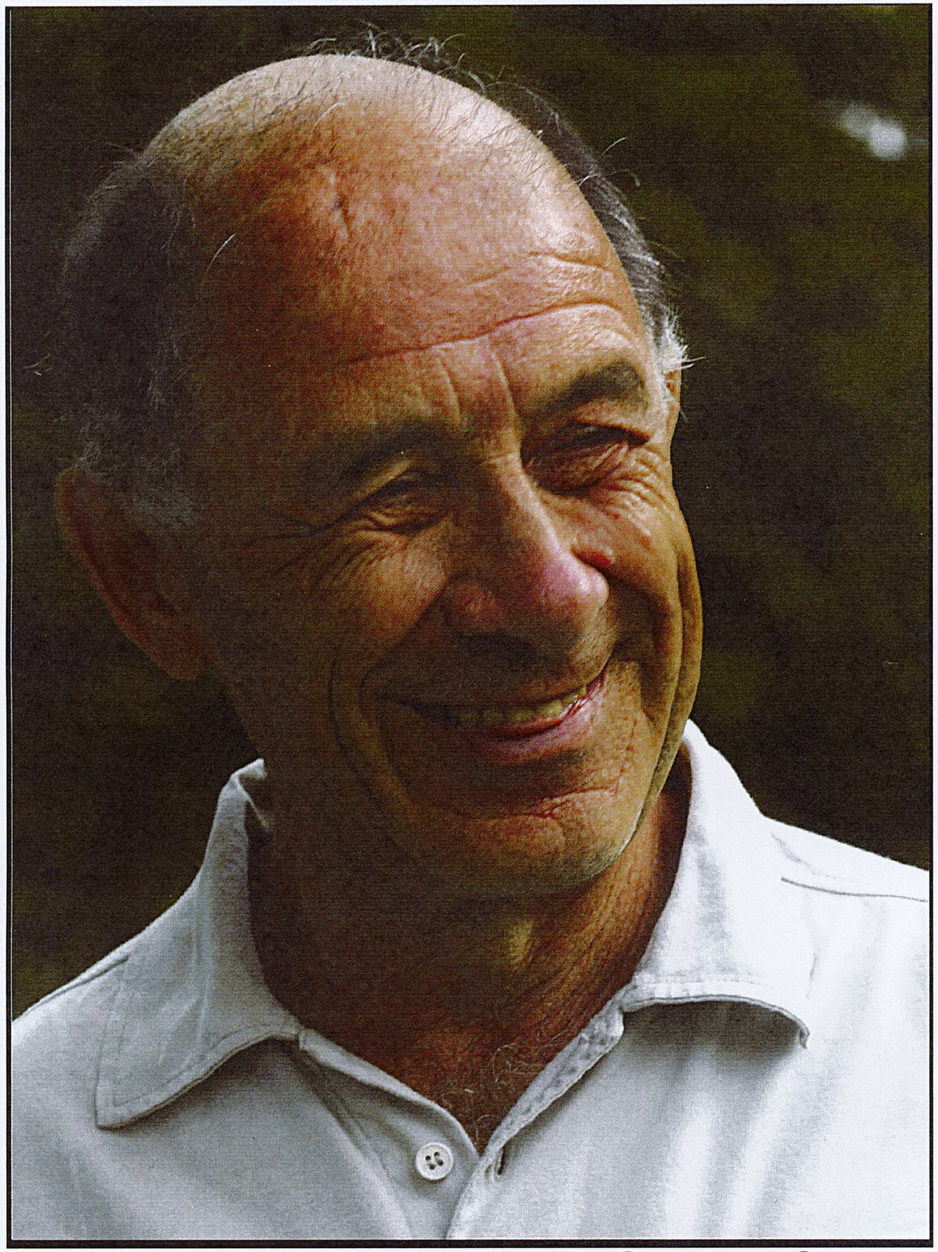
Below the summation over Greek subscripts extends from 1 to s. Ordinary vector notation is used: $(x,y) = \sum_\alpha x_\alpha y_\alpha$ and $|x| = +\sqrt{(x,x)}$. By an integral vector is meant a vector all components of which are integers. A set of points $(q,p) \in G$ with $p = c$ is denoted by T_c. In Theorem 1 it is assumed that S contains the point $p = 0$, that is, $T_0 \subseteq S$.

Theorem 1. *Let*

$$H(q,p,0) = m + \sum_\alpha \lambda_\alpha p_\alpha + \tfrac{1}{2} \sum_{\alpha\beta} \Phi_{\alpha\beta}(q) p_\alpha p_\beta + O(|p|^3), \tag{2}$$

where m and λ_α are constants, and let the inequality

1954 (original en russe)



Vladimir Igorevitch ARNOLD
1937- 2010

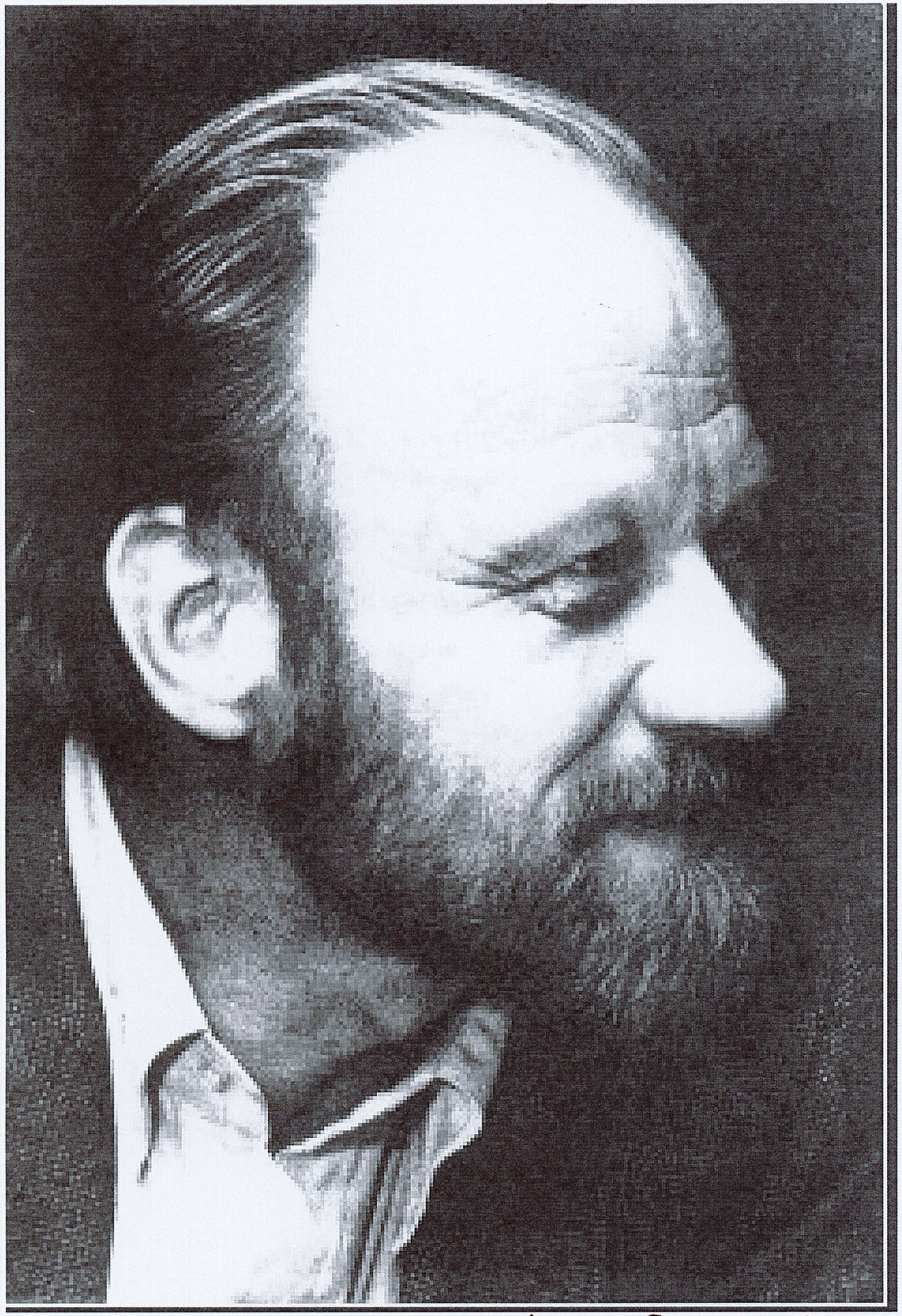
1963 г. ноябрь—декабрь т. XVIII, вып. 6 (114)
УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

МАЛЫЕ ЗНАМЕНАТЕЛИ И ПРОБЛЕМЫ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ В КЛАССИЧЕСКОЙ И НЕБЕСНОЙ МЕХАНИКЕ

В. И. Арнольд

СОДЕРЖАНИЕ

1963



Jurgen MOSER 1928-1999

On Invariant Curves of Area-Preserving Mappings of an Annulus

By *J. Moser*

Vorgelegt von Herrn C. L. Siegel in der Sitzung vom 16. Februar 1962

1. Introduction

a) In his studies of the restricted three body problem Poincaré [1] was led to investigate area-preserving mappings of an annulus onto itself. In fact, he stated a theorem concerning the existence of fixed points of such mappings which can be used to show the existence of infinitely many periodic solutions of the restricted three body problem. The penetrating proofs for this program were supplied later by G. D. Birkhoff in [2].

The study of annuli is of importance for wider classes of nonlinear differential equations; the restricted three body problem has to be considered as a model for nonlinear differential equations which exhibit the essential difficulties in a simple form. Area-preserving mappings arise from ordinary differential equations which describe frictionless motion.

In this paper we prove a theorem which guarantees the existence of closed invariant curves of such a mapping. Closed invariant curves correspond to almost periodic solutions of the differential equation which generates the mapping. They are of importance for the study of stability of periodic solutions. We describe the problem concerning mappings more precisely:

b) Let r, θ denote polar coordinates in the plane and consider the annulus

$$0 < a \leq r \leq b .$$

At first we consider the simple mapping

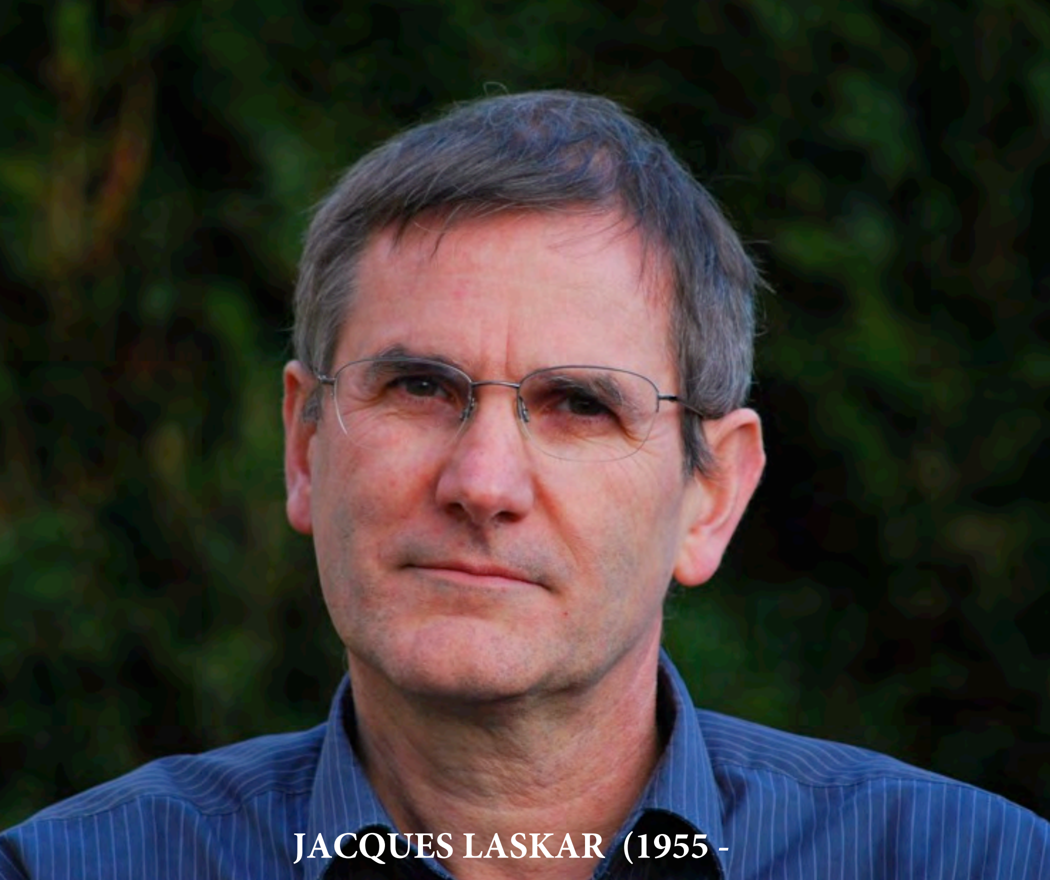
$$\begin{cases} \theta_1 = \theta + \alpha(r) \\ r_1 = r \end{cases} \tag{1.1}$$

where we assume that the rotation angle $\alpha(r)$ depends monotonically on r

$$\frac{d\alpha}{dr} > 0 .$$

This mapping preserves circles rotating them by an angle which increases with increasing radius. We refer to (1.1) as "twist mapping".

1962



JACQUES LASKAR (1955 -

ICARUS 88, 266–291 (1990)

The Chaotic Motion of the Solar System: A Numerical Estimate of the Size of the Chaotic Zones

J. LASKAR

SCMC du Bureau des Longitudes, UA 707 du CNRS, 77 Avenue Denfert-Rochereau, F75014 Paris, France

Received December 11, 1989; revised May 7, 1990

In a previous paper (J. Laskar, *Nature* 338, 237–238), the chaotic nature of the Solar System excluding Pluto was established by the numerical computation of the maximum Lyapunov exponent of its secular system over 200 myr. In the present paper an explanation is given for the exponential divergence of the orbits: it is due to the transition from libration to circulation of the critical argument of the secular resonance $2(g_4 - g_3) - (s_4 - s_3)$ related to the motions of perihelions and nodes of Earth and Mars. Another important secular resonance is identified: $(g_1 - g_5) - (s_1 - s_2)$. Its critical argument stays in libration over 200 myr with a period of about 10 myr and amplitudes from 85 to 135°. The main features of the solutions of the inner planets are now identified when taking these resonances into account. Estimates of the size of the chaotic regions are determined by a new numerical method using the evolution with time of the fundamental frequencies. The chaotic regions in the inner Solar System are large and correspond to variations of about 0.2 arcsec/year in the fundamental frequencies. The chaotic nature of the inner Solar System can thus be considered as robust against small variations in the initial conditions or in the model. The chaotic regions related to the outer planet frequencies are very thin except for those of g_6 which present variations sufficiently large to be significant over the age of the Solar System.

2.6 Possibilité de collisions entre Mercure, Mars, Vénus et la Terre

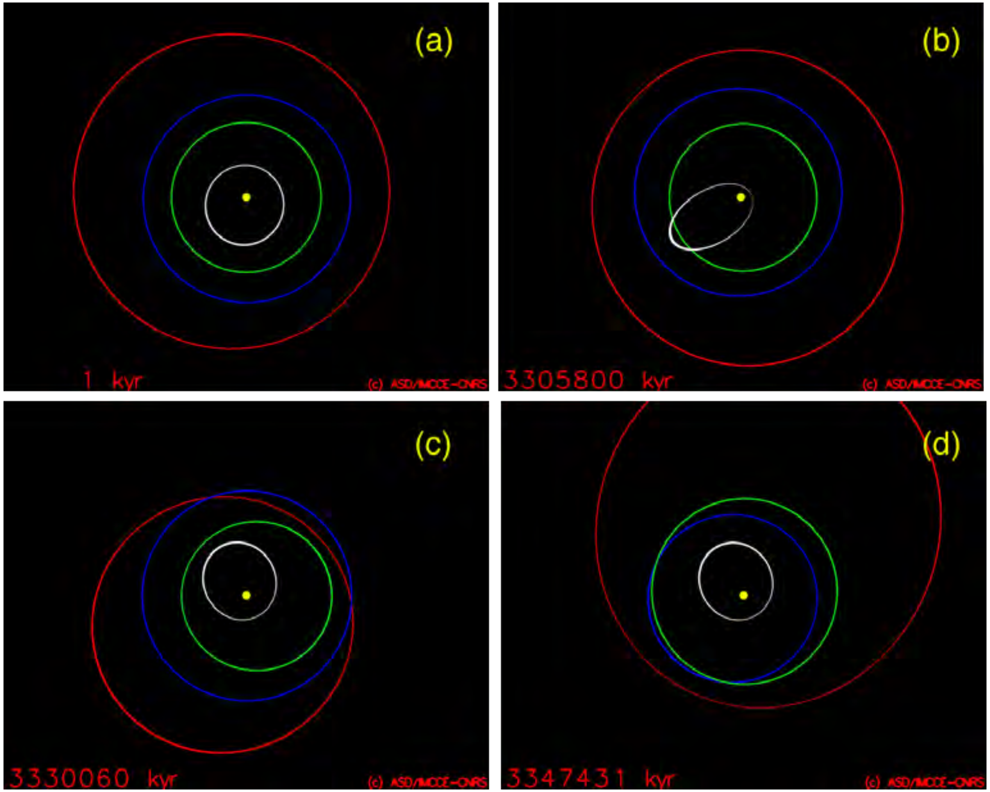
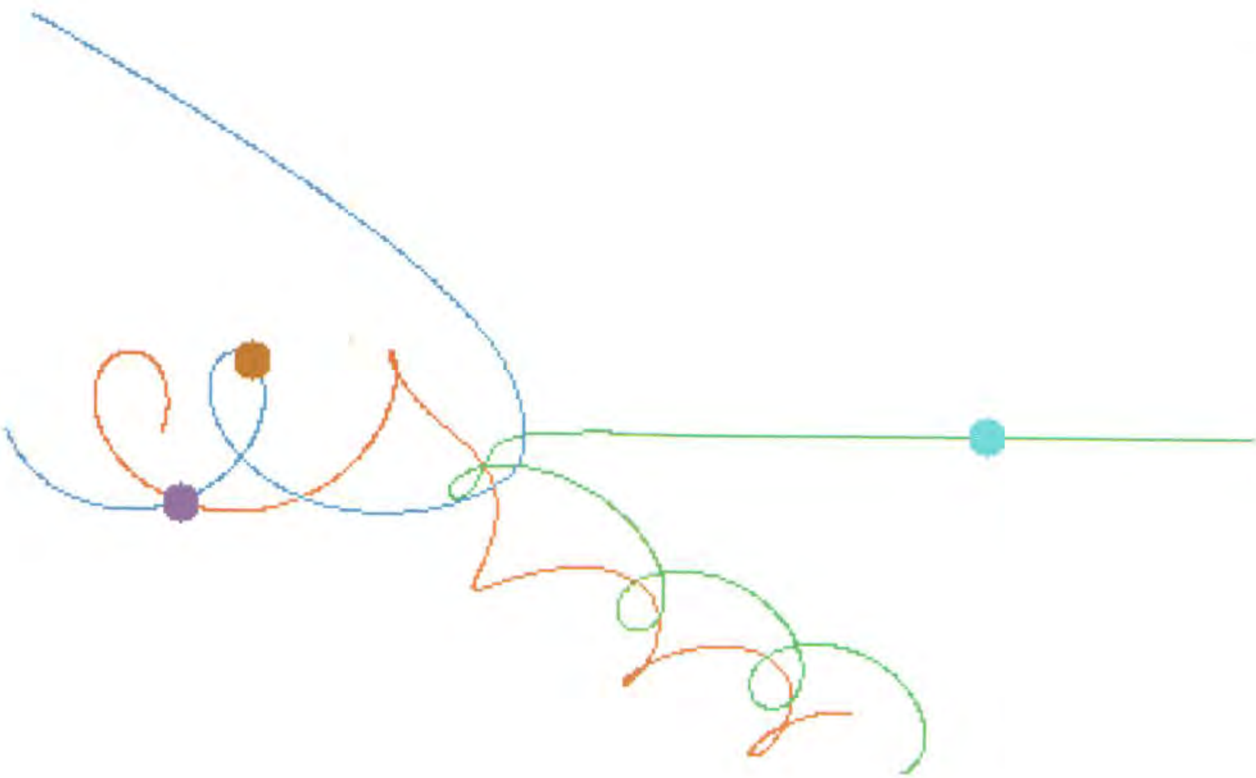


Fig. 6 – Exemple d'évolution à long terme des orbites des planètes telluriques : Mercure (blanc), Vénus (vert), Terre (bleu), Mars (rouge). Le temps est indiqué en milliers d'années (kyr). (a) Au voisinage de l'état actuel, les orbites se déforment sous l'influence des perturbations planétaires, mais sans permettre de rencontres proches ou de collisions. (b) Dans près de 1% des cas, l'orbite de Mercure peut se déformer suffisamment pour permettre une collision avec Vénus ou le Soleil en moins de 5 Ga. (c) Pour l'une des trajectoires, l'excentricité de Mars augmente suffisamment pour permettre une rencontre proche ou une collision avec la Terre. (d) Ceci entraîne une déstabilisation des planètes telluriques qui permet aussi une collision entre Vénus et la Terre (Figure issue des résultats des simulations numériques de Laskar et Gastineau, 2009).

L'allure finale du mouvement

J. Chazy
C.A. Sitnikov
V.M. Alexeev



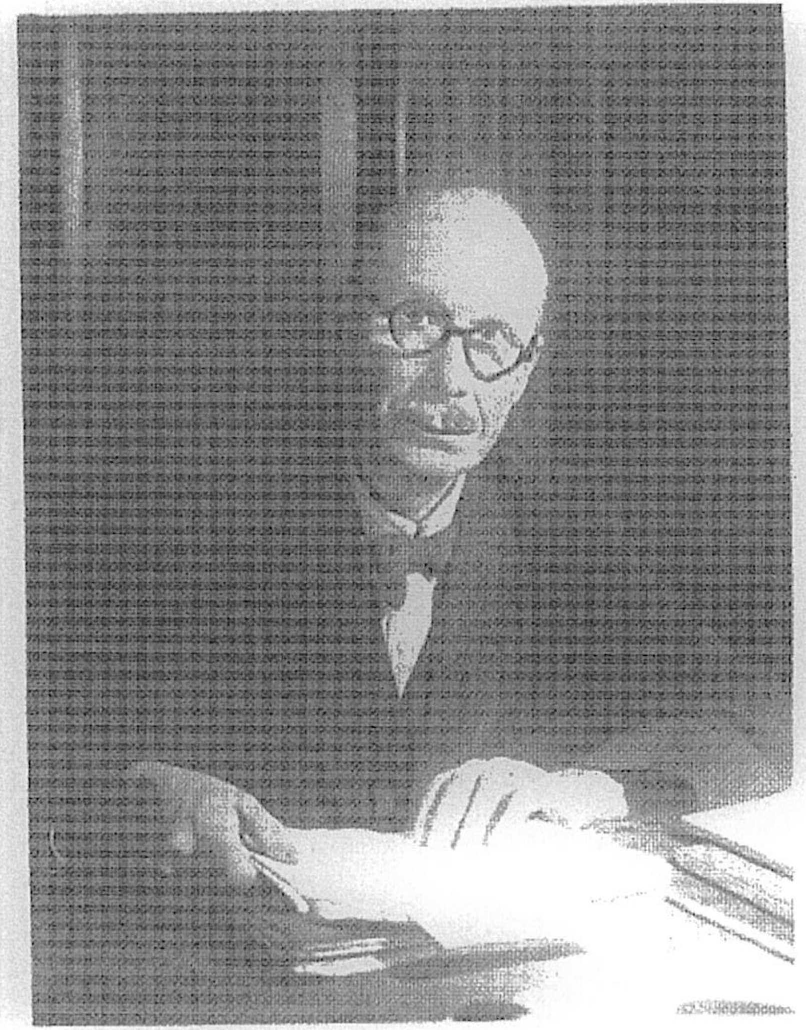


Photo Otto et Pirou

Jean CHAZY

1882-1955

Jean Chazy

Sur l'allure finale du mouvement dans le problème des trois corps;

PAR JEAN CHAZY.

1. Dans un Mémoire antérieur [1] j'ai classé les mouvements du problème des trois corps quand le temps croît indéfiniment en sept sortes. Je me propose ici de montrer comment sont réparties les quatre sortes de mouvements qui sont possibles quand *la constante des forces vives dans le mouvement par rapport au centre de gravité est négative.*

Ces quatre sortes de mouvement sont les suivantes. Ce sont d'abord les mouvements que j'ai appelés *hyperboliques-elliptiques*, où deux distances mutuelles, soit r_{13} et r_{23}, sont des infiniment grands d'ordre 1 par rapport au temps, et où la troisième r_{12} est bornée; en général les éléments osculateurs du mouvement de la masse m_3 par rapport au centre de gravité des deux masses m_1 et m_2 sont hyperboliques pour les valeurs assez grandes du temps, et tendent vers des limites, et les éléments osculateurs du mouvement relatif des deux masses m_1 et m_2 sont de même elliptiques et tendent vers des limites : on peut dire brièvement que, quand le temps croît indéfiniment, le problème des trois corps se décompose à la limite en deux problèmes des deux corps. Si dans la condition précédente les distances r_{13} et r_{23} sont d'ordre $\frac{2}{3}$ seulement par rapport au temps, les éléments du mouvement de la

[1] *Sur l'allure du mouvement dans le problème des trois corps quand le temps croît indéfiniment* (*Annales de l'École Normale*, 3e série, t. 39, 1922, p. 29-130).

Les exemples de Sitnikov

STABLE AND RANDOM MOTIONS IN DYNAMICAL SYSTEMS

With Special Emphasis on Celestial Mechanics

BY

JÜRGEN MOSER

Hermann Weyl Lectures
The Institute for Advanced Study

PRINCETON UNIVERSITY PRESS
AND
UNIVERSITY OF TOKYO PRESS

PRINCETON, NEW JERSEY
1973

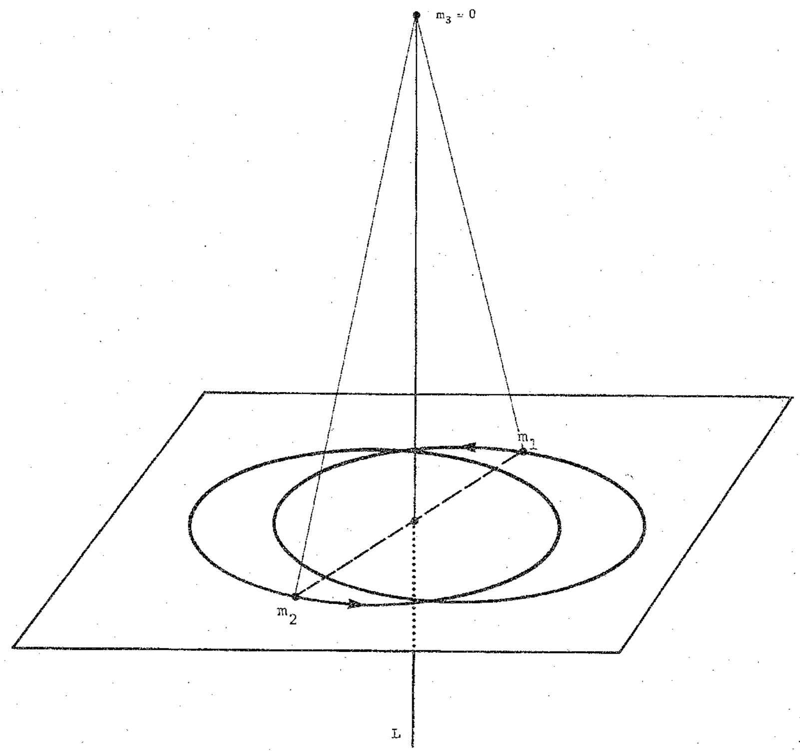


Fig. 7

Actes, Congrès intern. Math., 1970. Tome 2, p. 893 à 907.

D 12 - SYSTÈMES DYNAMIQUES ET ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ORDINAIRES

SUR L'ALLURE FINALE DU MOUVEMENT DANS LE PROBLÈME DES TROIS CORPS

par V. M. ALEXEYEV

Introduction.

Le "Problème des trois corps" est parmi les plus connus en mathématique, en mécanique et en astronomie. 1687 –l'année où parurent les "Principia" de Newton– doit être considérée comme la date de naissance de ce problème. Depuis lors, soit presque 300 ans, le problème des trois corps a servi de pierre de touche aux générations successives de mathématiciens, mettant à l'épreuve leurs nouvelles méthodes.

A. Wintner remarqua une fois que chaque génération pose à sa propre manière les "questions fondamentales du problème des trois corps", et cherche à les résoudre toujours de sa propre façon. Suivant ici G.D. Birkhoff [1], je crois que du point de vue mathématique la question fondamentale est aujourd'hui celle de la description topologique de la décomposition de l'espace des phases en trajectoires des divers types. La classification des variétés intégrales invariantes est un cas particulier de ce problème.

Le problème ainsi posé est, semble-t-il, encore loin de la solution définitive. C'est pourquoi nous nous limiterons à l'un de ses aspects plus particuliers et plus approximatif, à savoir l'étude de **l'allure finale du mouvement**, c'est-à-dire l'étude des solutions lorsque $t \to \infty$.

La recherche dans cette direction commence avec les Mémoires de J. Chazy [2]-[4]. C'est pour rendre hommage à cet éminent mathématicien et astronome français, dont les travaux ont stimulé en grande partie ce qui est exposé ci-dessous, et aussi pour souligner la continuité de l'effort des diverses générations de mathématiciens, que j'ai donné à cette conférence le titre même de deux de ses Mémoires.

Le Mémoire [2] contient la description de toutes les allures finales unilatérales (c'est-à-dire se rapportant seulement au cas $t \to +\infty$ ou seulement au cas $t \to -\infty$). Du point de vue cosmogonique, tout aussi bien que du point de vue mathématique, il serait particulièrement intéressant de décrire les divers types d'évolution du système, c'est-à-dire déterminer quelles allures finales (pour $t \to +\infty$ et $t \to -\infty$) peuvent appartenir à un même mouvement.

La première partie de la presente conférence est un exposé des résultats obtenus dans cette direction. Dans la deuxième partie je traite des méthodes à l'aide desquelles ces résultats ont été obtenus.

Je voudrais remarquer que c'est A.N. Kolmogorov, qui, en 1954, a attiré pour la première fois mon attention sur ces problèmes. Depuis, son interêt amical et ses précieux conseils m'ont aidé plus d'une fois dans mes recherches.

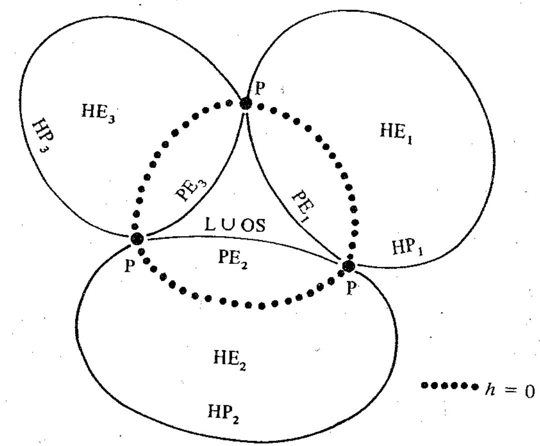


Fig. 1.

La classe OS fut introduite par Chazy à partir de considérations purement logiques, et longtemps l'existence de tels mouvements n'était pas établie. Enfin, en 1959, C.A. Sitnikov [11] a démontré, que $OS \neq \emptyset$. L'existence des autres types de mouvements était déjà connue. Dans ce qui va suivre nous nous limiterons aux types principaux : H, HE_i, L, OS, car les autres ont certainement une codimension positive. Pour différencier les types qui se rapportent à $t \to \pm\infty$ nous nous servirons des indices correspondants : H^+, L^- etc.

Il est bien connu qu'il n'existe pas dans M^{12} d'intégrales premières algébriques autres que les 4 classiques (Bruns) et même d'intégrales univoques analytiques, dépendant analytiquement des masses m_i (Poincaré).

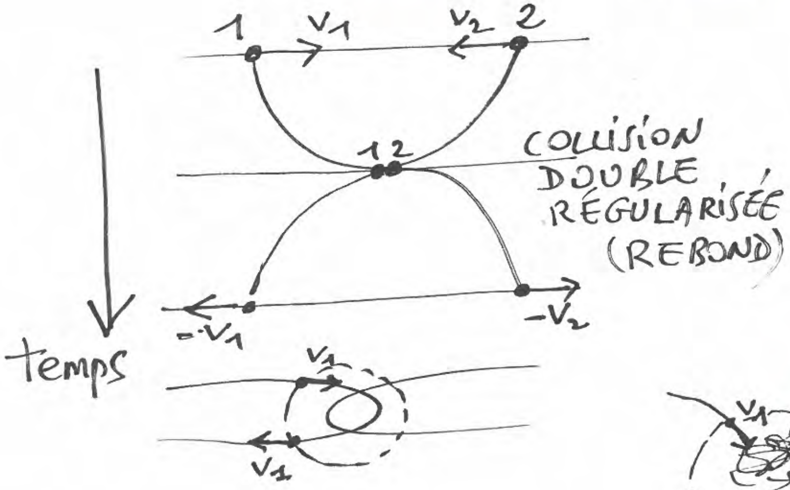
HYPOTHESE. – Dans la région $H \cup \bigcup_i HP_i \cup HE_i$ il existe une famille complète d'intégrales premières univoques analytiques.

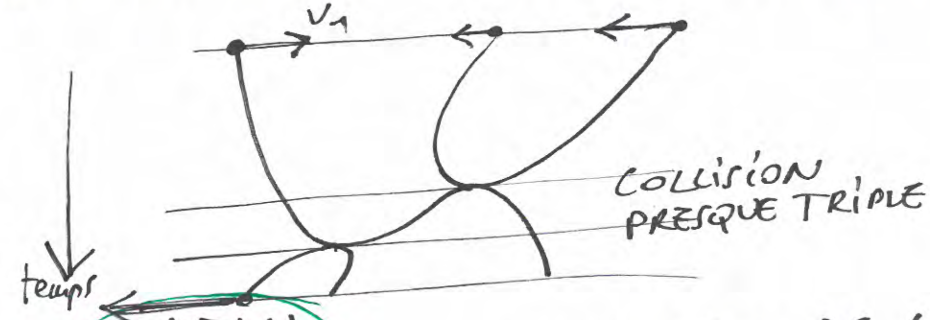
Les arguments tendant à confirmer cette hypothèse sont exposés dans [2] et [4].

3. Evolution du système ; la région $h > 0$ (table 1)

Les Mémoires [3] et [4] affirment que tout mouvement à les mêmes allures finales pour $t \to -\infty$ et $t \to +\infty$. Assez longtemps les mathématiciens et surtout les astronomes furent convaincus qu'une symétrie si remarquable avait effectivement lieu. Une certaine dissonance ne fut apportée que par les examples de L. Becker [5] qui appartenaient manifestement à $HE_1^- \cap HE_2^+$. Néanmoins Chazy les attribua à des erreurs d'intégration numérique et à l'impossibilité de fixer l'allure finale ($t \to \infty$) par intégration sur un intervalle fini du temps.

COLLISIONS TRIPLES





$|V_1'| \gg |V_1|$

EXPLICATION

CONSERVATION DE L'ÉNERGIE

$\Downarrow$

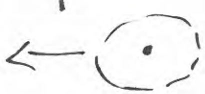
VITESSES ∞ À LA COLLISION

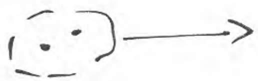
SUNDMAN, BIRKHOFF : PRESQUE COLLISION TRIPLE
$\Rightarrow$ 1 CORPS S'ÉCHAPPE

N>3 CORPS : À L'INFINI EN TEMPS FINI

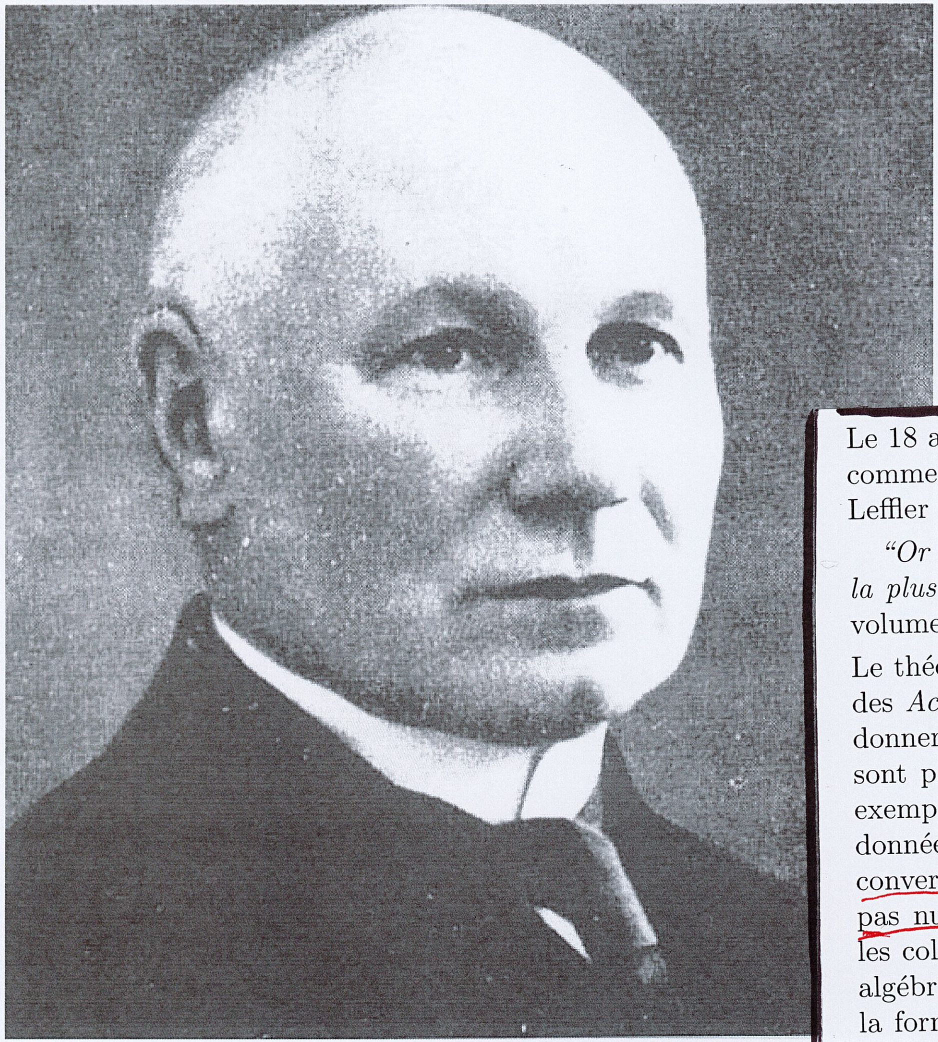
MATHER, MC GEHEE, 1975, GERVER 1992 XIA

(impossible pour 3 corps : PAINLEVÉ 1895





Des séries convergentes peu utilisables



KARL FRITHIOF SUNDMAN (1873 - 1949)

MÉMOIRE
sur
LE PROBLÈME DES TROIS CORPS
PAR
KARL F. SUNDMAN
à HELSINGFORS.

Le 18 avril 1883, faisant allusion aux développements en série convergents qu'il a obtenus comme solutions d'une équation différentielle algébrique, Poincaré écrit à Gösta Mittag-Leffler

"Or je ne crois pas que dans le cas de la Mécanique céleste celle que j'ai donné(e) soit la plus zweckmässig, je crois qu'il y a mieux à trouver" (lettre publiée en 1921 dans le volume 38 des *Acta Mathematica* et reprise dans le volume XI, pages 66-67 des *œuvres*).

Le théorème de Sundman (articles de 1907 et 1909 reproduits en 1912 dans le volume 36 des *Acta Mathematica*), que cite d'ailleurs en note en 1921 l'éditeur de la lettre de 1883, donnera effectivement des développements plus "adaptés" (=*zweckmässig*) en ce qu'ils ne sont pas arrêtés par les collisions doubles, mais il sera en même temps une illustration exemplaire de l'affirmation de 1908. Ce théorème, dont une généralisation à n corps sera donnée par Wang Qiu Dong en 1991, énonce la possibilité d'écrire des développements convergents pour les solutions du problème des trois corps dont le moment cinétique n'est pas nul. Sundman montre que cette hypothèse proscrit toute collision triple, puis que les collisions doubles se régularisent comme points de branchement. Une transformation algébrique et un changement de temps lui permettent alors de construire la solution sous la forme d'une série qui converge pour toutes les valeurs du nouveau temps. Mais d'un point de vue pratique ces séries n'apportent rien, d'abord parce qu'elles convergent très lentement, ensuite parce qu'aucun renseignement qualitatif sur la nature de la solution n'est lisible sur la série qui la représente*. Quant aux solutions voisines, elles sont tout simplement absentes de la représentation**.

Les seules singularités du problème des 3 corps sont les collisions

PAUL PAINLEVE (1863 _ 1933)

LEÇONS

SUR

LA THÉORIE ANALYTIQUE

DES

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

PROFESSÉES A STOCKHOLM

(Septembre, Octobre, Novembre 1895)

SUR L'INVITATION DE S. M. LE ROI DE SUÈDE ET DE NORWÈGE

PAR

M. P. PAINLEVÉ

PROFESSEUR ADJOINT A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS,
PROFESSEUR SUPPLÉANT AU COLLÈGE DE FRANCE.

PARIS,

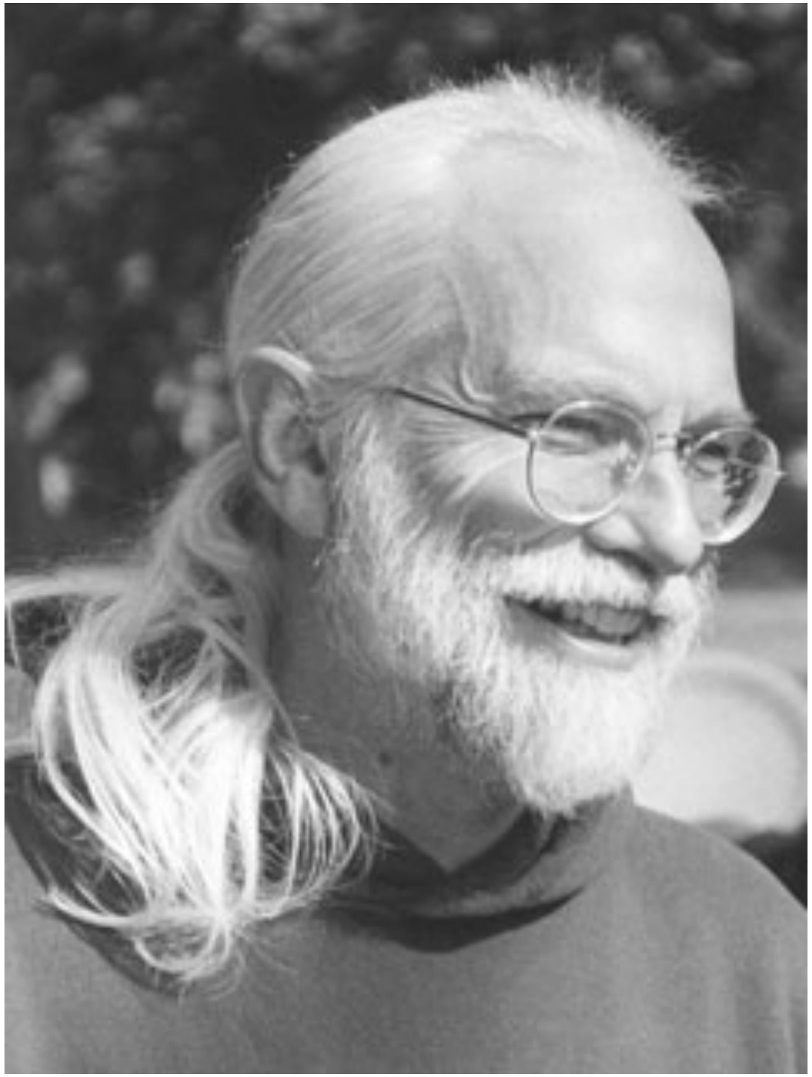
LIBRAIRIE SCIENTIFIQUE A. HERMANN

LIBRAIRE DE S. M. LE ROI DE SUÈDE ET DE NORWÈGE

8, Rue de la Sorbonne, 8

1897

1897



©2002 Donald Kahn

RICHARD PAUL MCGEHEE (1943 -

Inventiones math. 27, 191–227 (1974)

Triple Collision in the Collinear Three-Body Problem*

Richard McGehee (Minneapolis)

1. Introduction

Consider n point masses moving in k-dimensional space according to the laws of classical mechanics. If particle i has mass $m_i > 0$ and position $q_i \in R^k$, then the negative potential energy is given by

$$U = \sum_{i<j} \frac{m_i m_j}{\|q_i - q_j\|}, \tag{1.1}$$

where $\| \ \|$ denotes the Euclidean norm in R^k. The motion of the particles is described by the system of differential equations

$$m_i \ddot{q}_i = \nabla_{q_i} U, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{1.2}$$

where $\nabla_{q_i} U$ is the gradient of U with respect to q_i.

A position $(q_1, \ldots, q_n)$ of the particles will be called a collision if $q_i = q_j$ for some $i \neq j$. The above system of equations is defined everywhere except at collisions. Suppose we are given the position and momentum of the particles at time $t = 0$. If we do not start at a collision, then the standard theorems of differential equations assure the existence and uniqueness of a solution of Eqs. (1.2) on some maximal interval $[0, t^*)$. If $t^* < \infty$, then the solution is said to experience a singularity at t^*.

The behavior of a solution as it approaches a singularity is not fully understood, but some of the possibilities are known. If all of the particles approach a limiting position as $t \to t^*$, it is not difficult to show that the limiting position must be a collision [12, 17]. The singularity is then said to be due to collision and the solution is said to end in collision. If m of the particles coincide while the rest have distinct positions, then the collision is called an m-tuple collision. It is unknown whether there are singularities not due to collision.

* Supported by NSF Grant GP-38955.

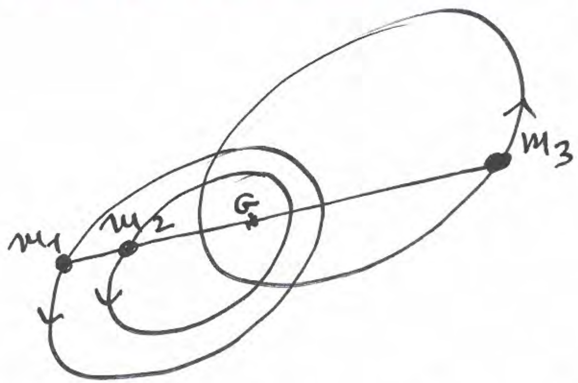
1974

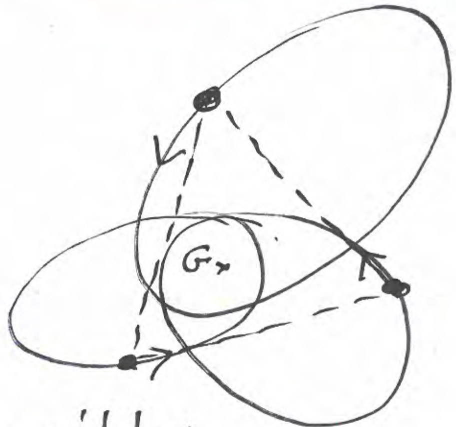
SOLUTIONS EXACTES

ORIGINE : SYMÉTRIES (translation, rotation)
+ HOMOGÉNÉITÉ du Potentiel

SOLUTIONS HOMOGRAPHIQUES : le triangle des 3 corps reste semblable à lui-même au cours du mouvement et chaque corps décrit une cônique Képlerienne semblable

EULER (1767) (cas collinéaire)
LAGRANGE (1772) (cas général) in "ESSAI SUR LE PROBLÈME DES 3 CORPS"





2 "formes" seulement sont possibles

ALIGNÉS
ÉQUILATÉRAL } Configurations centrales

DE MOTV RECTILINEO

TRIVM CORPORVM SE MVTVO ATTRAHENTIVM.

Auctore

L. EVLERO.

A B C

O

I.

Sint A, B, C massae trium corporum eorumque distantiae a puncto fixo O ad datum tempus t ponantur

$$OA = x, \quad OB = y \quad \text{et} \quad OC = z$$

vbiquidem sumitur $y > x$ et $z > y$. Hinc motus principia praebent has tres aequationes:

$$\text{I.} \quad \frac{ddx}{dt^2} = \frac{B}{(y-x)^2} + \frac{C}{(z-x)^2};$$

$$\text{II.} \quad \frac{ddy}{dt^2} = \frac{-A}{(y-x)^2} + \frac{C}{(z-y)^2}$$

$$\text{III.} \quad \frac{ddz}{dt^2} = \frac{-A}{(z-x)^2} - \frac{B}{(z-y)^2}$$

vnde facile deducuntur binae aequationes integrabiles:

prior $Adx + Bdy + Cdz = Edt$ et $Ax + By + Cz = Et + F$

posterior $\frac{Adx^2 + Bdy^2 + Cdz^2}{dt^2} = G + \frac{2AB}{y-x} + \frac{2AC}{z-x} + \frac{2BC}{z-y}$.

Hinc autem ob defectum tertiae aequationis integralis parum ad motus cognitionem concludere licet.

2. Sta-

EULER 1767

ESSAI

SUR

LE PROBLÈME DES TROIS CORPS.

Juvat integros accedere fontes.

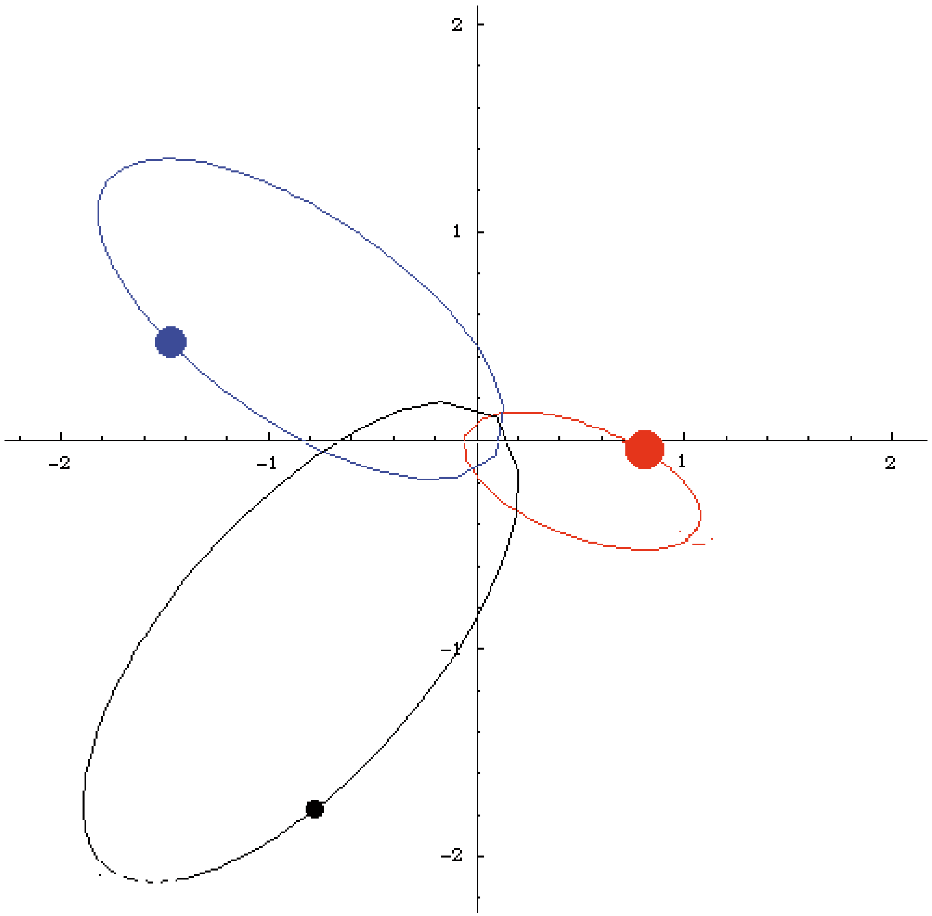
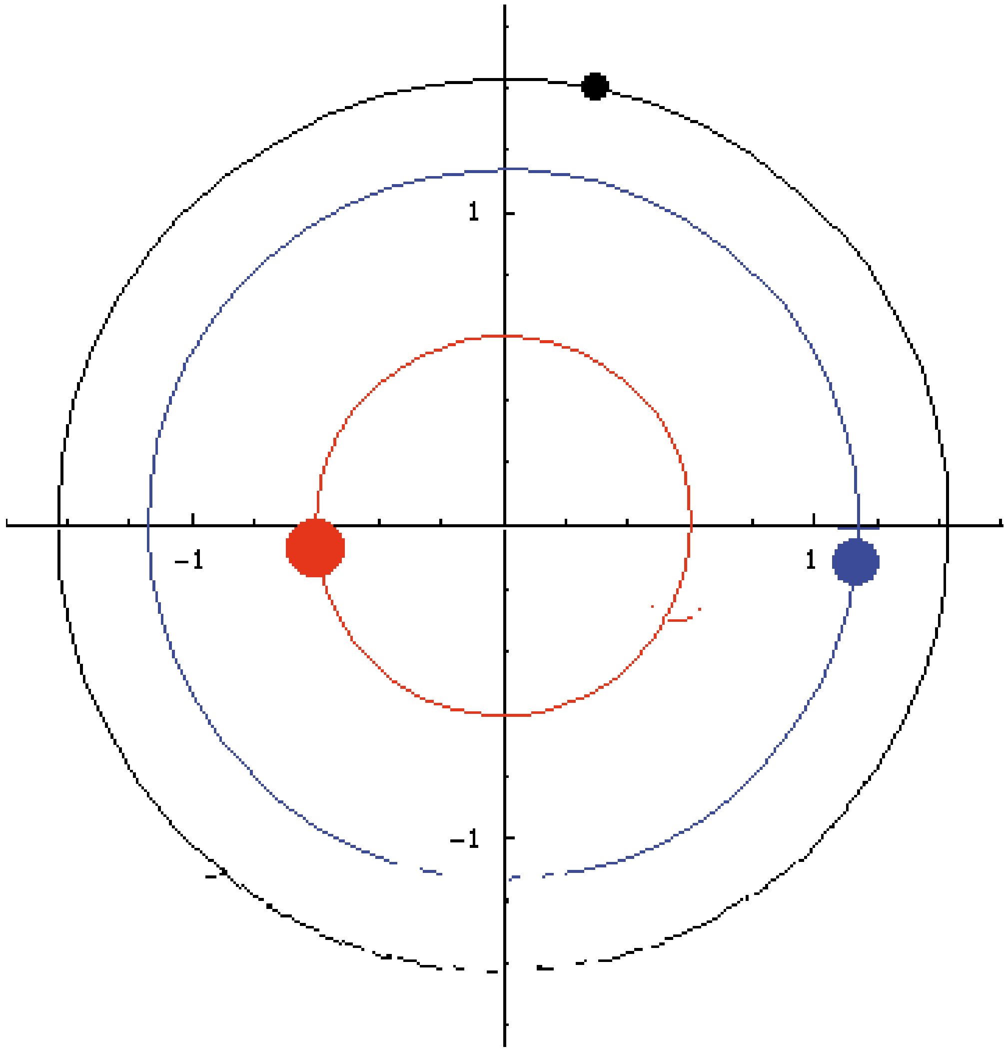
LUCR.

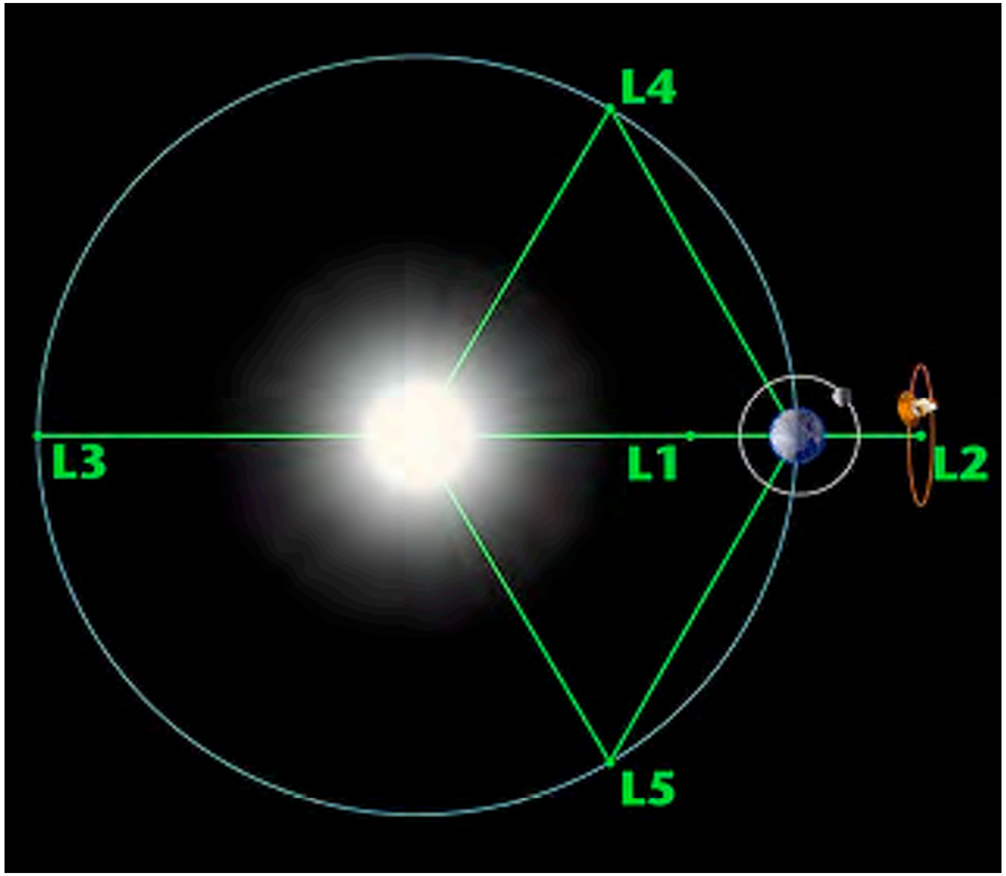
(Prix de l'Académie Royale des Sciences de Paris, tome IX, 1772.)

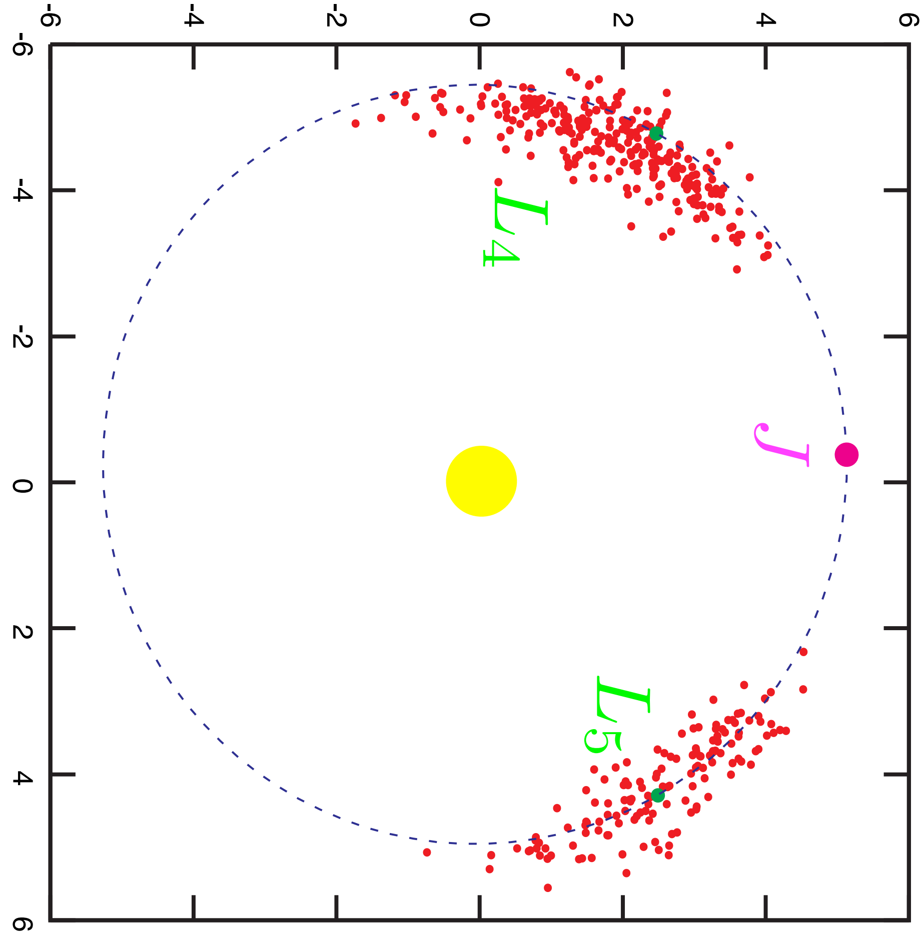
AVERTISSEMENT.

Ces Recherches renferment une Méthode pour résoudre le Problème des trois Corps, différente de toutes celles qui ont été données jusqu'à présent. Elle consiste à n'employer dans la détermination de l'orbite de chaque Corps d'autres éléments que les distances entre les trois Corps, c'est-à-dire, le triangle formé par ces Corps à chaque instant. Pour cela, il faut d'abord trouver les équations qui déterminent ces mêmes distances par le temps; ensuite, en supposant les distances connues, il faut en déduire le mouvement relatif des Corps par rapport à un plan fixe quelconque. On verra, dans le premier Chapitre, comment je m'y suis pris pour remplir ces deux objets, dont le second surtout demande une analyse délicate et assez compliquée. A la fin de ce Chapitre, je ras-

LAGRANGE 1772


2
1
-2
-1
1
2
-1
-2

1
-1
1
-1

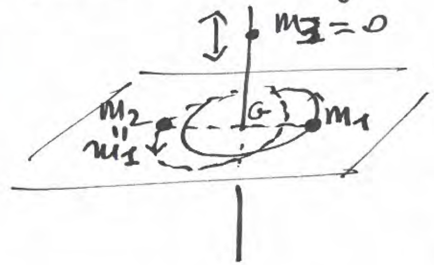

L4
L3
L1
L2
L5


-6
-4
-2
0
2
4
6
L_4
J
L_5

SOLUTIONS NON PERTURBATIVES

ex 1 : DYNAMIQUE SYMBOLIQUE (méthodes géométriques)

Solutions de SITNIKOV
(1960)



Les passages de part et d'autre du plan de m_3 sont régis par un jeu de pile ou face

ex 2 : CALCUL DES VARIATIONS (méthodes analytico-géométriques)

POINCARÉ (1896)

Minimiser l'action $S = \int_a^b \underbrace{(E_{cinétique} - E_{potentielle})}_{\text{Lagrangien}} \, dt$

le long d'une courbe fermée dans l'espace de configuration

$\Rightarrow$ solution périodique s'il n'y a pas de collision

(Poincaré remplace $\frac{1}{r^2}$ par $\frac{1}{r^3}$ (force forte) pour éliminer ce problème).

A. VENTURELLI (2000) On obtient ainsi les sol  de Lagrange

Appendice 2. La note aux C.R.A.S. de Poincaré (30 novembre 1896).

SUR LES SOLUTIONS PÉRIODIQUES
ET LE PRINCIPE DE MOINDRE ACTION

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 123, p. 915-918 (30 novembre 1896).

La théorie des solutions périodiques peut, dans certains cas, se rattacher au principe de moindre action.

Supposons trois corps se mouvant dans un plan et s'attirant en raison inverse du cube des distances ou d'une puissance plus élevée de ces distances; j'appelle a, b, c ces trois corps.

L'énergie cinétique T est essentiellement positive et il en est de même de la fonction des forces U, qui est égale à une somme de termes de la forme $\frac{kmm'}{r^n}$, où k est une constante positive, m et m' les masses de deux des trois corps, r leur distance et n un exposant au moins égal à 2.

L'action hamiltonienne

$$J = \int_{t_0}^{t_1} (T + U)\,dt$$

sera donc essentiellement positive.

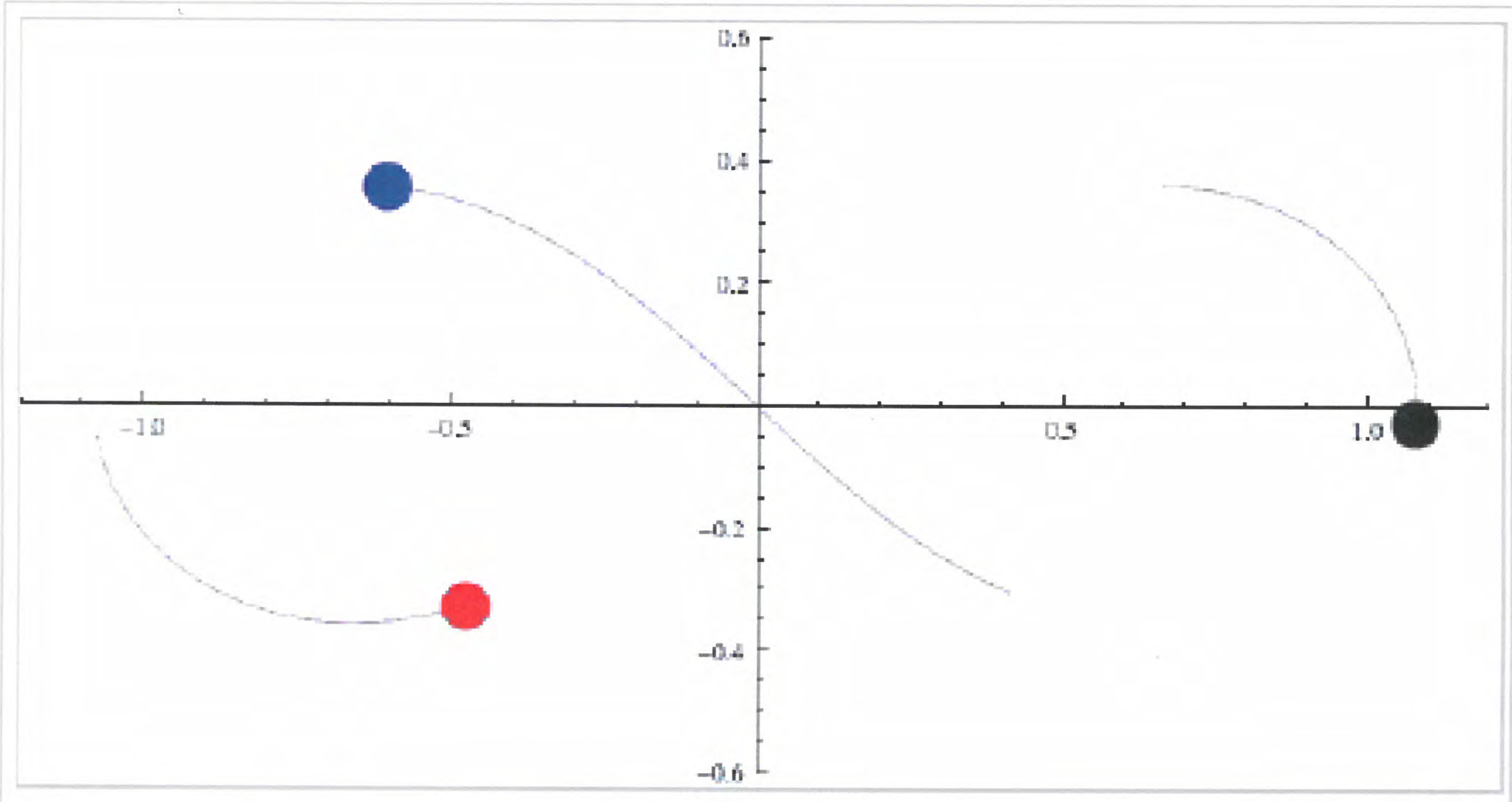
Considérons une classe de trajectoires de nos trois corps a, b, c; ce seront des trajectoires fictives, c'est-à-dire ne satisfaisant pas aux équations du mouvement; mais elles seront soumises aux conditions suivantes :

1° Au temps t_1 les distances des trois corps seront les mêmes qu'au temps t_0; les vitesses seront les mêmes en grandeur et feront les mêmes angles avec les côtés du triangle des trois corps; en d'autres termes, la figure formée par les trois corps et par les droites qui représentent leurs vitesses aura repris à l'époque t_1 la même forme qu'elle avait à l'époque t_0; ou bien encore les

=

CAS DE TROIS MASSES ÉGALES

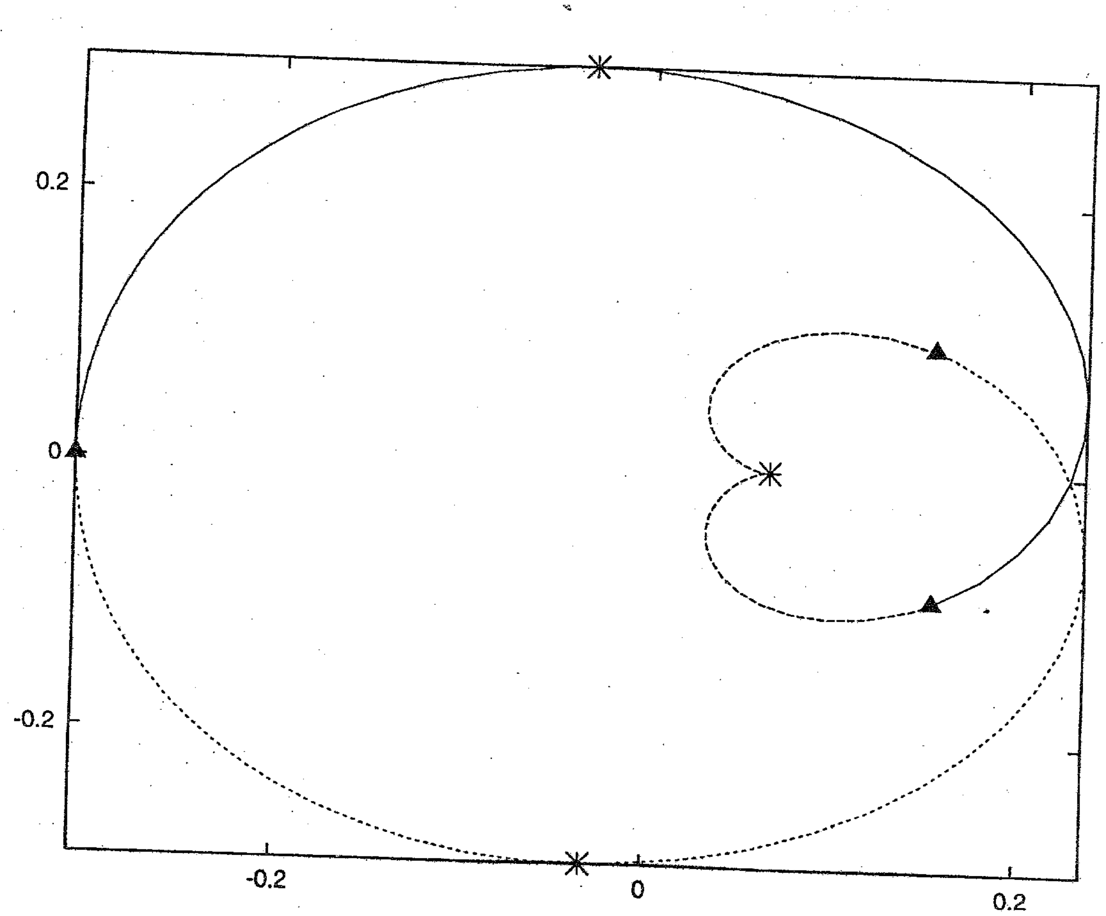
Minimisation sous contrainte de symétrie D6



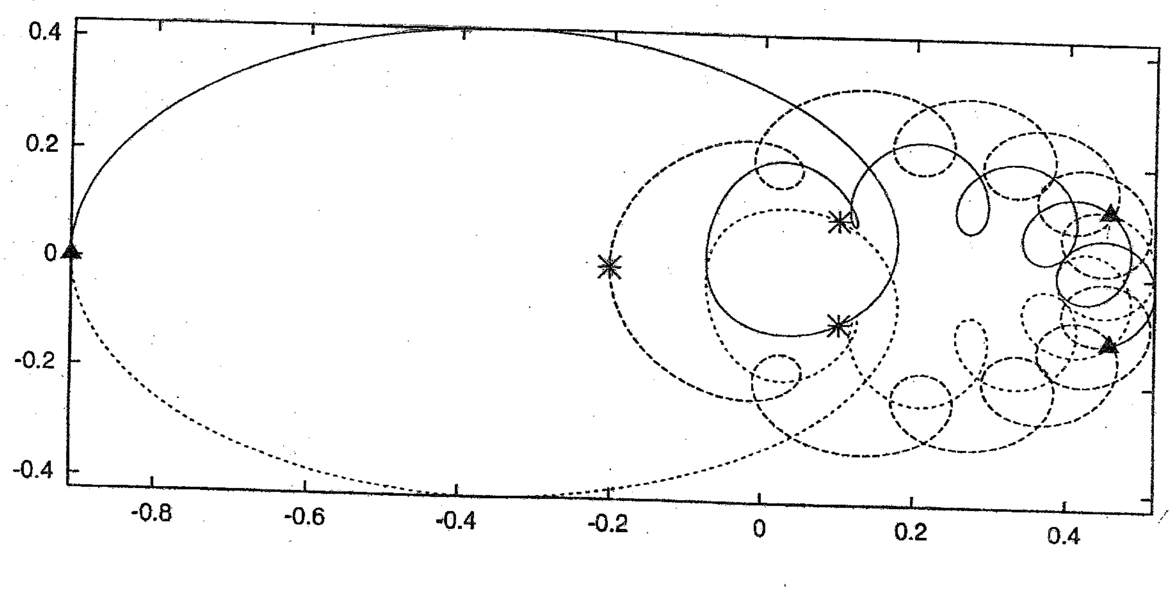
A. CHENCINER & R. MONTGOMERY (2000)


RICHARD MONTGOMERY


CARLES SIMO

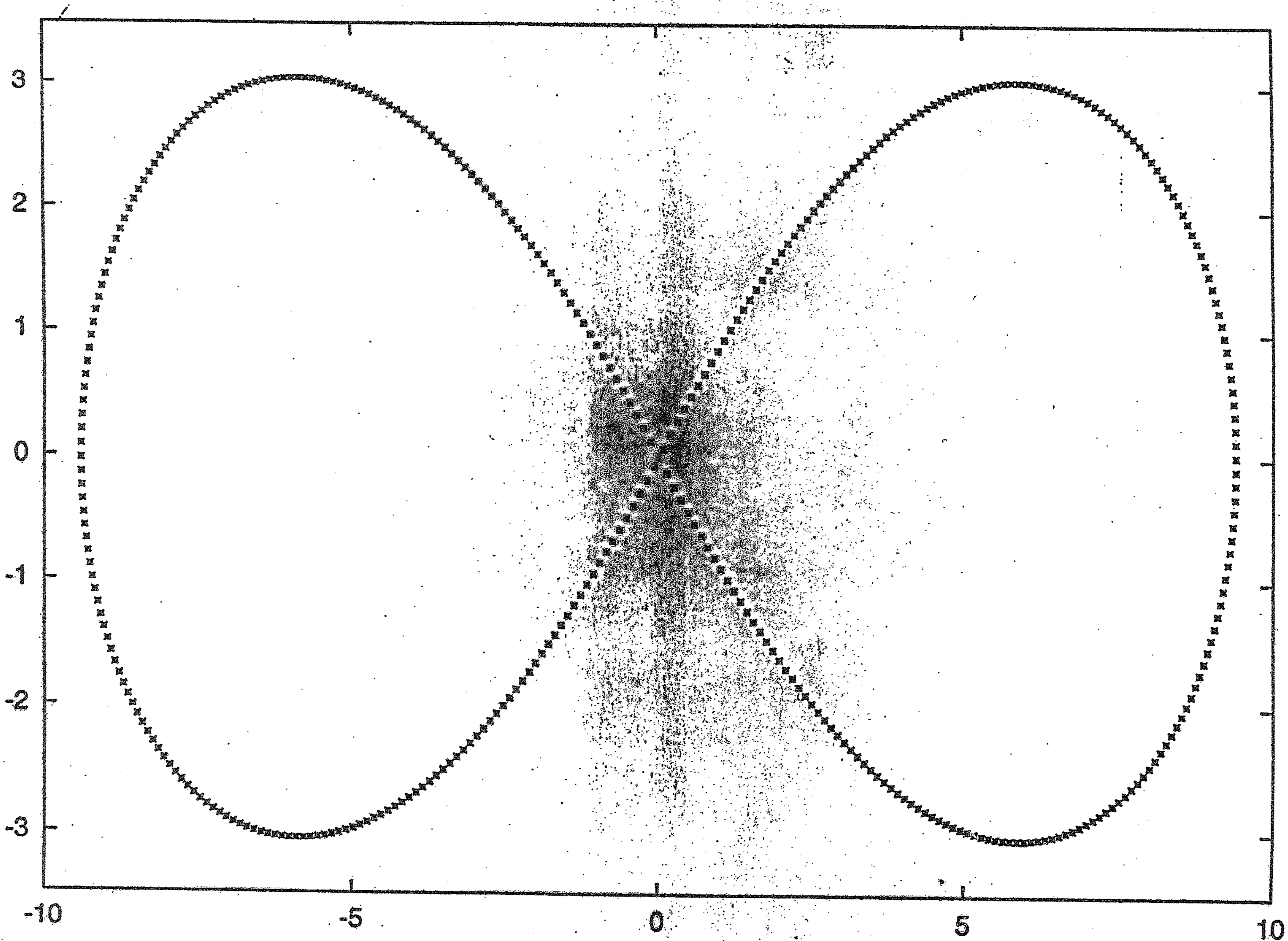


0.2
0
-0.2
-0.2
0
0.2



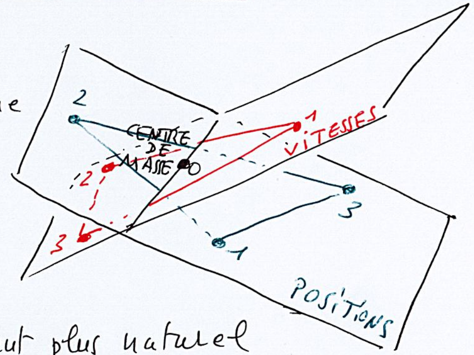
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.8
-0.6
-0.4
-0.2
0
0.2
0.4

399 cells run on 1101



UN SAUT DANS LA QUATRIÈME DIMENSION

① Le problème des 3 corps dans $\mathbb{R}^3$ est un problème contraint



$\Rightarrow$ Il est algébriquement plus naturel de l'étudier dans $\mathbb{R}^4$

ESSAI

SUR

LE PROBLÈME DES TROIS CORPS.

Juvat integros accedere fontes.
Lucr.

(Prix de l'Académie Royale des Sciences de Paris, tome IX, 1772.)

AVERTISSEMENT.

Ces Recherches renferment une Méthode pour résoudre le Problème des trois Corps, différente de toutes celles qui ont été données jusqu'à présent. Elle consiste à n'employer dans la détermination de l'orbite de chaque Corps d'autres éléments que les distances entre les trois Corps, c'est-à-dire, le triangle formé par ces Corps à chaque instant. Pour cela, il faut d'abord trouver les équations qui déterminent ces mêmes distances par le temps; ensuite, en supposant les distances connues, il faut en déduire le mouvement relatif des Corps par rapport à un plan fixe quelconque. On verra, dans le premier Chapitre, comment je m'y suis pris pour remplir ces deux objets, dont le second surtout demande une analyse délicate et assez compliquée. A la fin de ce Chapitre, je ras-

Implicite chez **LAGRANGE** en **1772**

Après réduction des symétries, il trouve 3 intégrales premières :

- L'énergie
- Le carré de la norme du moment cinétique
- et une troisième

dont l'égalité à 0 signifie que l'on est dans $\mathbb{R}^3$!

$$\text{(N)} \quad 16(pp'+pp''+p'p'')(\varpi\varpi'+\varpi\varpi''+\varpi'\varpi'') - 4(\Sigma\varpi+\Sigma'\varpi'+\Sigma''\varpi'') + \left(\frac{dp\,dp'+dp\,dp''+dp'\,dp''+d\varpi^2}{dt^2}\right)^2 = 0.$$

② Configurations équilibrées (Albouy-Chenciner)

Elles admettent des mouvements d'équilibre relatif dans $\mathbb{R}^4$

Ex : Si 3 masses égales les triangles isocèles admettent des mouvements d'équilibre relatif en général quasi-périodiques.

Central configurations

Richard Moeckel (2014), Scholarpedia, 9(4):10667. doi:10.4249/scholarpedia.10667 revision #142886 [link to/cite this article]

• **Richard Moeckel**, School of Mathematics, University of Minnesota, Minneapolis, MN

A **central configuration** is a special arrangement of point masses interacting by Newton's law of gravitation with the following property: the gravitational acceleration vector produced on each mass by all the others should point toward the center of mass and be proportional to the distance to the center of mass. Central configurations (or CC's) play an important role in the study of the Newtonian N-body problem. For example, they lead to the only explicit solutions of the equations of motion, they govern the behavior of solutions near collisions, and they influence the topology of the integral manifolds.

Contents

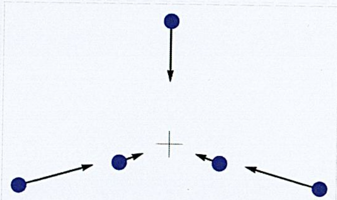
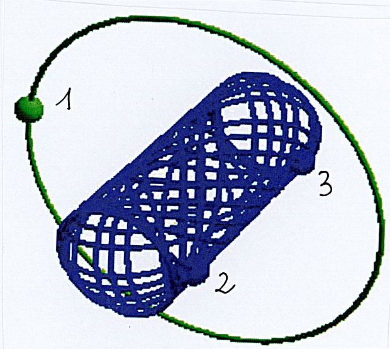


Figure 1: A central configuration of five equal masses with gravitational acceleration vectors.

Animations dans l'article de Scholarpedia :



... et pour finir,

une page de publicité

Three body problem

From Scholarpedia

Alain Chenciner (2007), Scholarpedia, 2(10):2111. doi:10.4249/scholarpedia.2111 revision #79311 [link to/cite this article]

Curator: Dr. Alain Chenciner, Math Dept Paris 7 University and IMCCE (Paris Observatory), France

The problem is to determine the possible motions of three point masses m_1, m_2, and m_3, which attract each other according to Newton's (http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Newton.html) law of inverse squares. It started with the perturbative studies of Newton himself on the *inequalities* of the lunar motion[1] (http://en.wikisource.org/wiki/Philosophiae_Naturalis_Principia_Mathematica/Preface) . In the 1740s it was constituted as the search for solutions (or at least approximate solutions) of a system of ordinary differential equations by the works of Euler (http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Euler.html) , Clairaut (http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Clairaut.html) and d'Alembert (http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/D'Alembert.html) (with in particular the explanation by Clairaut of the motion of the lunar apogee). Much developed by Lagrange (http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Lagrange.html) , Laplace (http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Laplace.html) and their followers, the mathematical theory entered a new era at the end of the 19th century with the works of Poincaré (http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Poincare.html) and since the 1950's with the development of computers. While the two-body problem is integrable and its solutions completely understood (see [2] (http://en.wikipedia.org/wiki/Two-body_problem) ,[AKN],[Al],[BP]), solutions of the **three-body problem** may be of an arbitrary complexity and are very far from being completely understood.

Contents

DIVERS ARTICLES & CONFÉRENCES :

https://perso.imcce.fr/alain-chenciner/

DIVERS ARTICLES & CONFÉRENCES :

https://perso.imcce.fr/alain-chenciner/