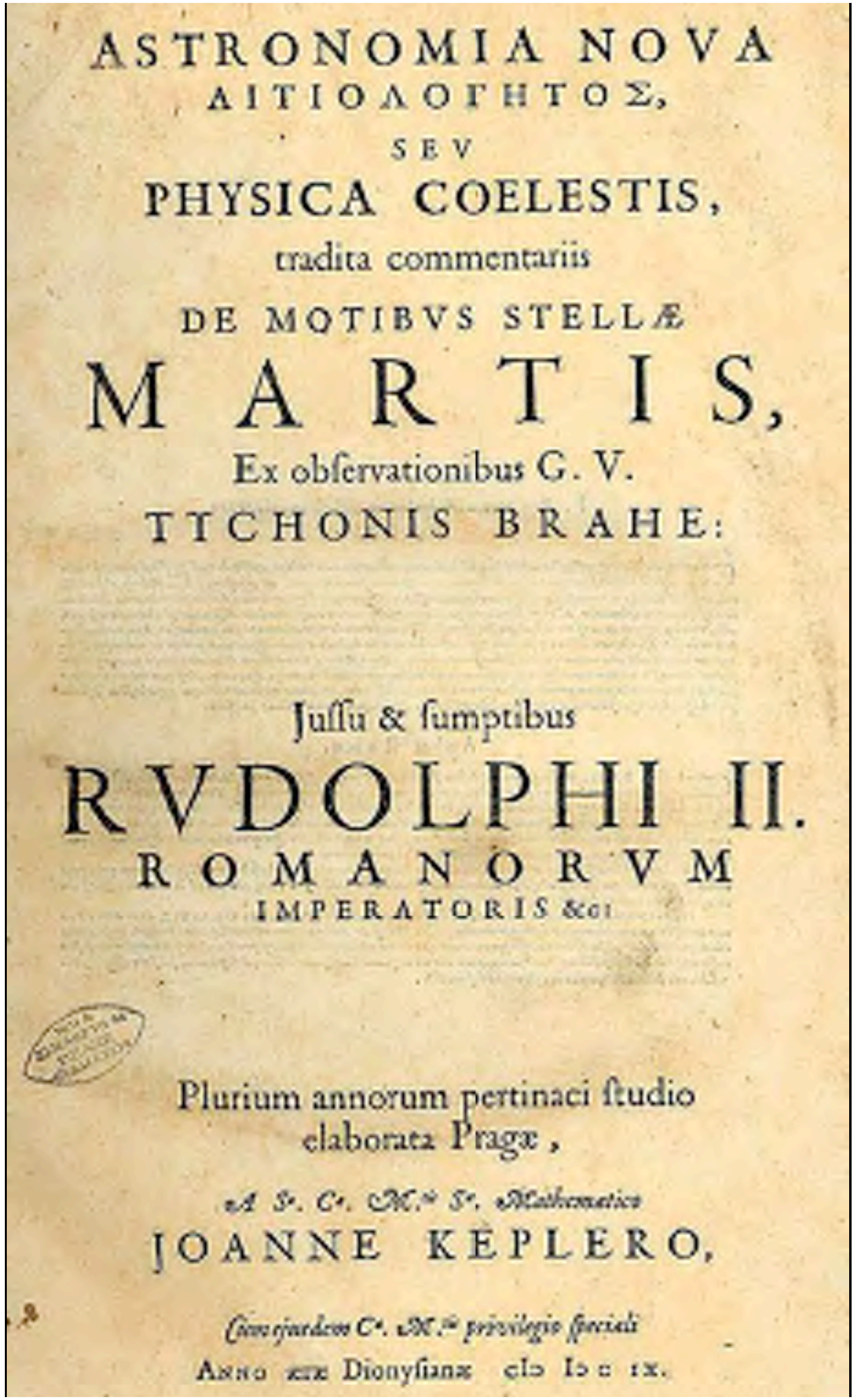
三体问题



ASTRONOMIA NOVA
ΑΙΤΙΟΛΟΓΗΤΟΣ,
SEV
PHYSICA COELESTIS,
tradita commentariis
DE MOTIBVS STELLÆ
MARTIS,
Ex obſervationibus G. V.
TYCHONIS BRAHE:

Juſſu & ſumptibus
RVDOLPHI II.
ROMANORVM
IMPERATORIS &c:

Plurium annorum pertinaci ſtudio
elaborata Pragæ,

A S^a. C^a. M.^{tis} S^o. Mathematico
JOANNE KEPLERO,

Cum ejuſdem C^a. M.^{tis} privilegio ſpeciali
ANNO æræ Dionyſianæ CIↃ IↃ C IX.

TYCHONIS BRAHE

ASTRONOMIÆ
INSTAURATÆ
MECHANICA

SUSPICIENDO DESPICIO

WANDESBURGI

ANNO

cIↃ. IↃ. IIC.

Cum Cæsaris & Regum quorundam Privilegiis.

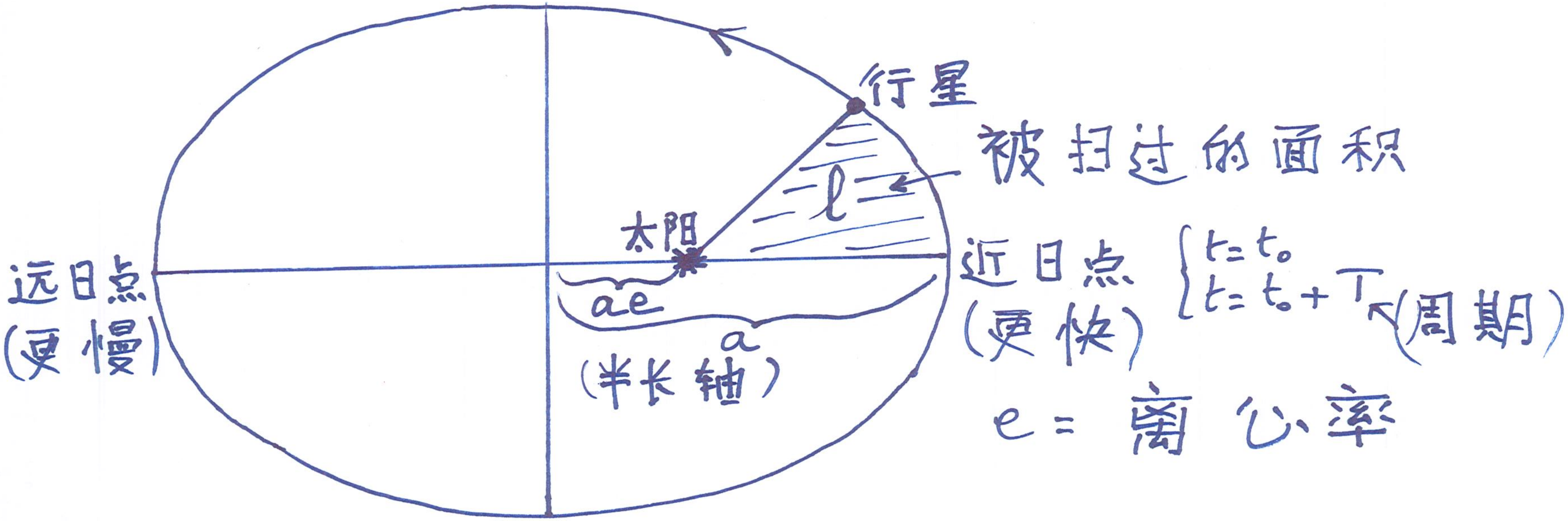
Ex Bibliotli. Princip: maurit.

Ex donatione

TYCHO BRAHE (1546-1601)

第谷·布拉赫

KEPLER（开普勒）1571-1630



第一定律：行星在太阳周围有椭圆轨道

第二定律：被扫过的面积与时间成比例

ASTRONOMIA NOVA 1609

第三定律：周期的平方与半长轴的立方成比例

HARMONICE MUNDI 1619

Portrait de Galilée peint par Justus Sustermans en 1636.

DISCORSI
E
DIMOSTRAZIONI
MATEMATICHE,
intorno à due nuoue scienze
Attenenti alla
MECANICA & I MOVIMENTI LOCALI,
del Signor
GALILEO GALILEI LINCEO,
Filosofo e Matematico primario del Serenissimo
Grand Duca di Toscana.

Con vna Appendice del centro di grauità d'alcuni Solidi.

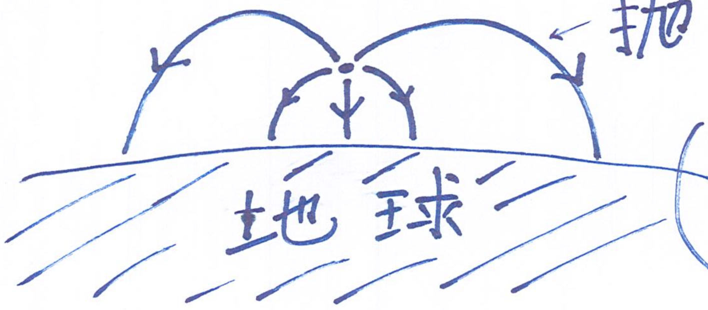
IN LEIDA,
Appresso gli Elsevirii. M. D. C. XXXVIII.

Dynamics is the science of accelerating or retarding forces, and the varied movements they must produce. This science is due exclusively to the moderns and it is Galileo who has laid the first foundations.

LAGRANGE, *Mécanique analytique*, I, 221.

GALILEO (伽利略) 1564 1642

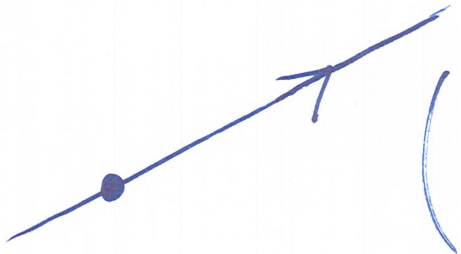
- 在地球上物体坠落的规律:



抛物线

加速度是
不变的

- 惯性原理:



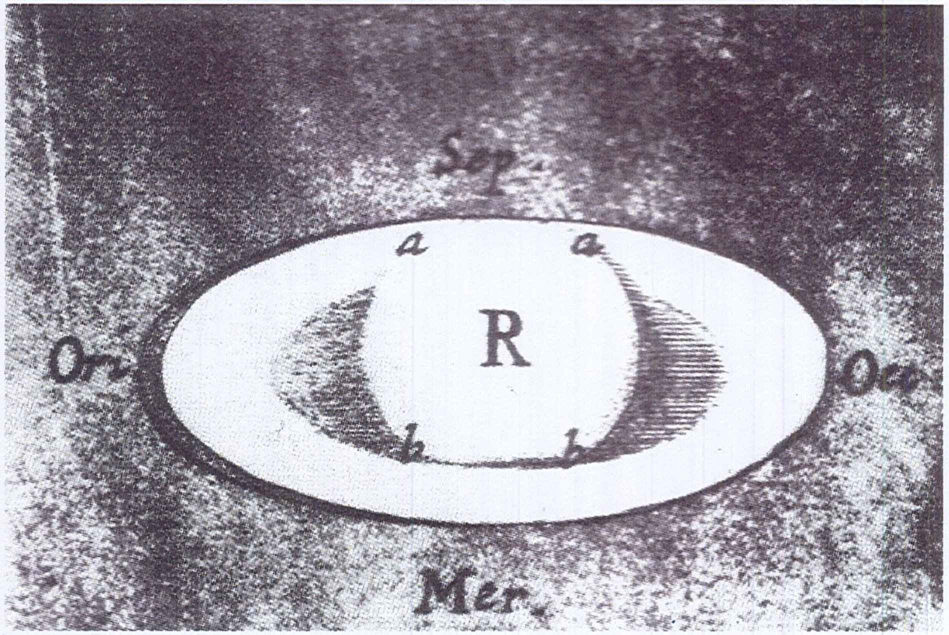
一个孤立的物体
以恒定的速度

1638
DISCORSI E
DIMOSTRAZIONI
MATEMATICHE
INTORNO A DUE
NUOVE SCIENZE

GALILEO 1638
GASSENDI 1640
TORRICELLI 1644
DESCARTES 1644

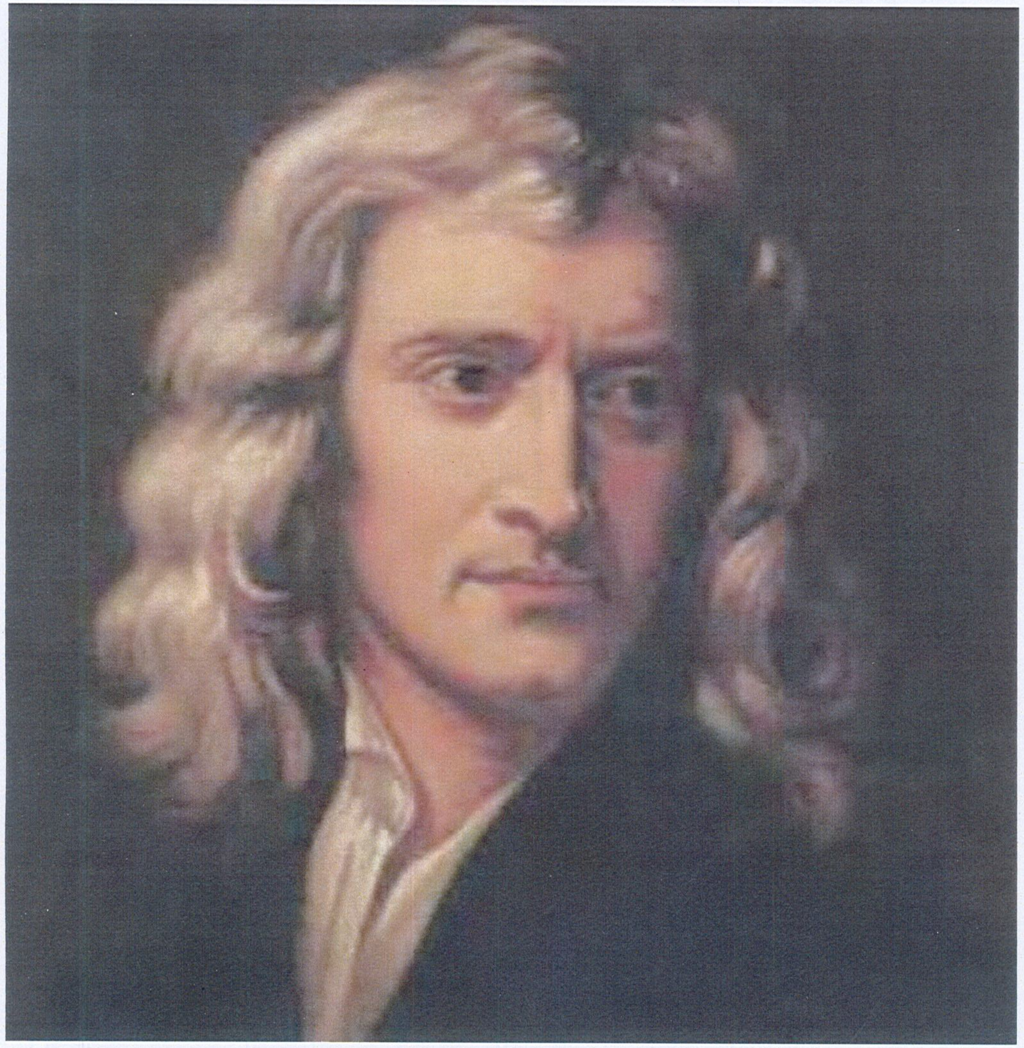
ROBERT HOOKE (1635-1703)

罗伯特·胡克



ROBERT HOOKE : Observation of Saturn rings, 1666

土星的观察



ISAAC NEWTON (1642-1727)

艾萨克·牛顿

PHILOSOPHIÆ NATURALIS PRINCIPIA MATHEMATICA.

Autore *J S. NEWTON*, *Trin. Coll. Cantab. Soc.* Matheseos Professore *Lucasiano*, & Societatis Regalis Sodali.

IMPRIMATUR.

S. PEPYS, *Reg. Soc.* PRÆSES.

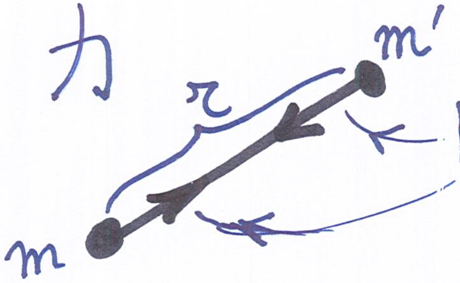
Julii 5. 1686.

LONDINI,

Jussu *Societatis Regiæ* ac Typis *Josephi Streater*. Prostat apud plures Bibliopolas. *Anno* MDCLXXXVII.

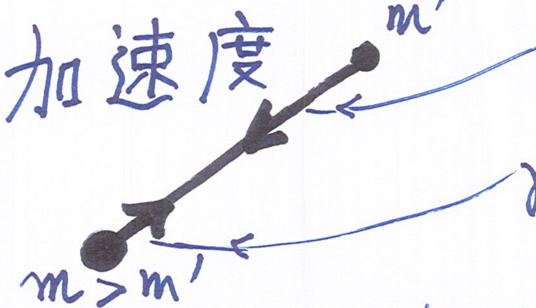
万有引力（牛顿 1687）

力



$F = g\dfrac{mm'}{r^2}$

加速度



$\gamma = g\dfrac{m}{r^2} = \dfrac{1}{m'}F$

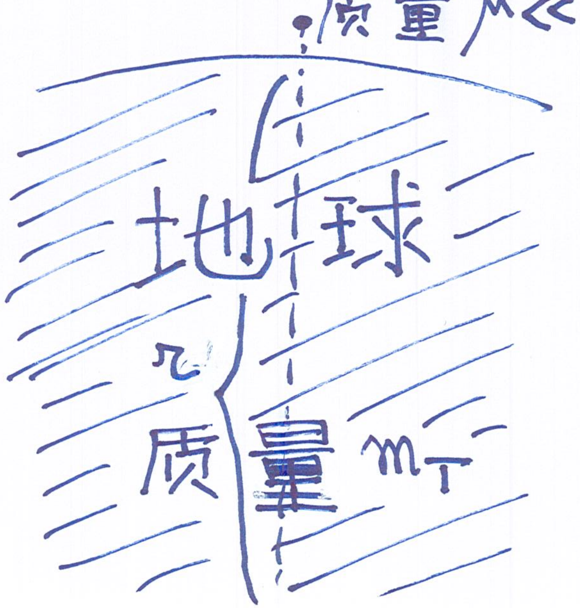
$\gamma = g\dfrac{m'}{r^2} = \dfrac{1}{m}F$

Philosophiae naturalis Principia Mathematica（自然哲学的数学原理）

[Liber tertius Propositio VIII Theorema VIII] If the matter of two globes which gravitate towards each other is homogeneous at equal distances from their centers: the weight of one of these globes towards the other will be reciprocally like the square of the distance between their centers.

$\Downarrow$

在地球上物体坠落的规律

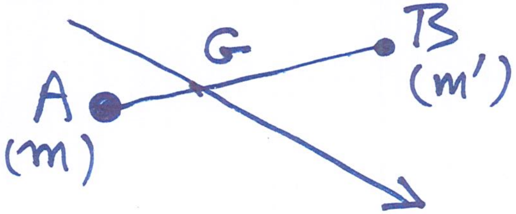


加速度

$g\dfrac{m_T}{r^2} \simeq$ 不变的

二体问题

质心的运动 $m\vec{GA}+m'\vec{GB}=\vec{0}$

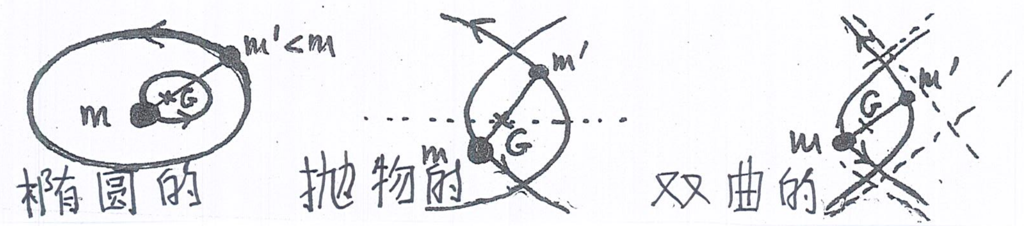


没有力施加在质心上

⇓

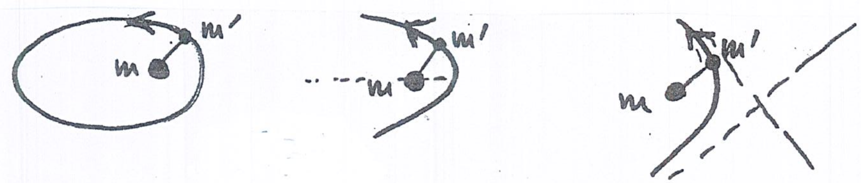
G的速度是恒定的

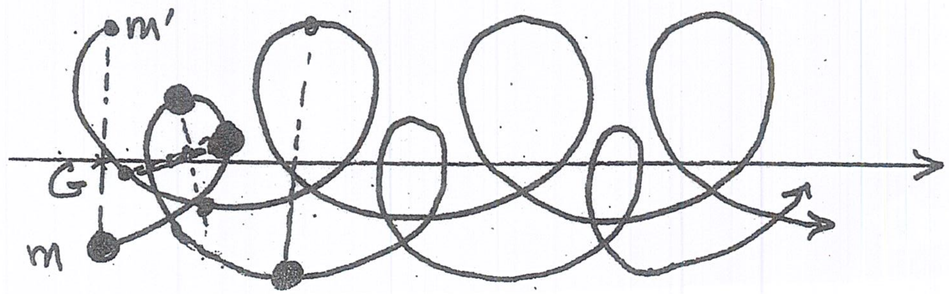
质心G固定的惯性参考系中的质点运动



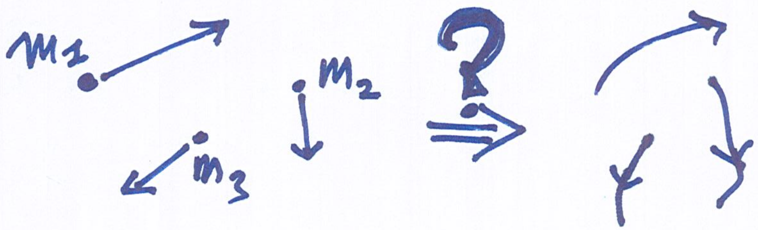
质点在任意惯性参考系中的运动

一个质点相对另一个质点的相对运动

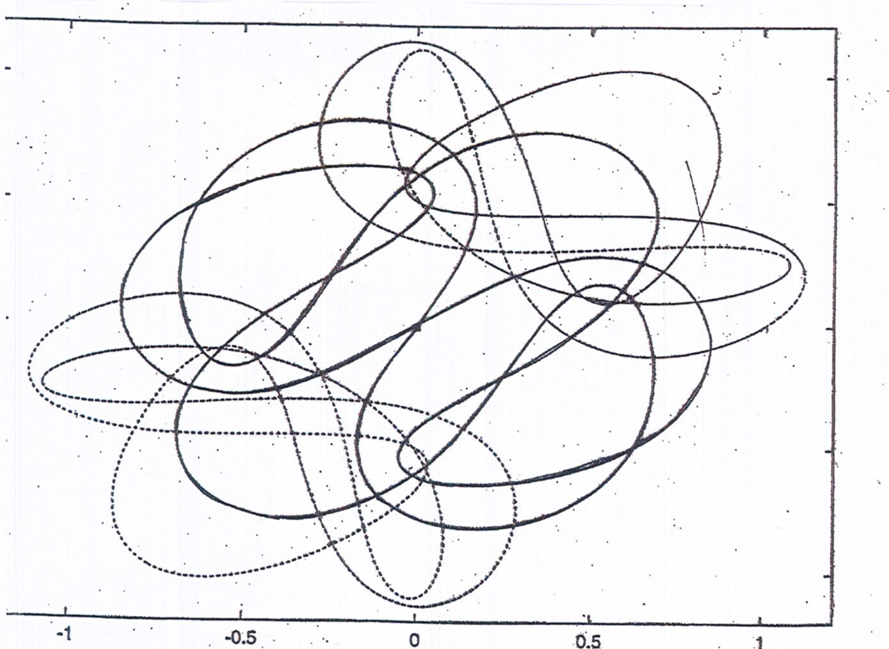




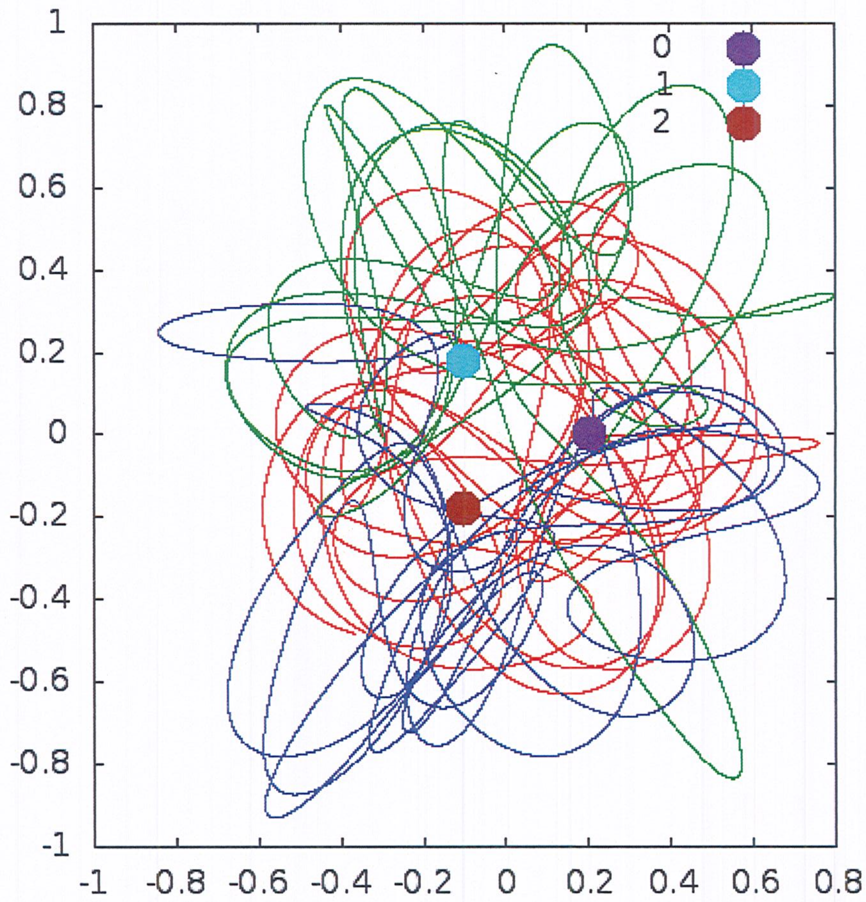
三体问题



两个简单的解



Calculée numériquement par C. Simó

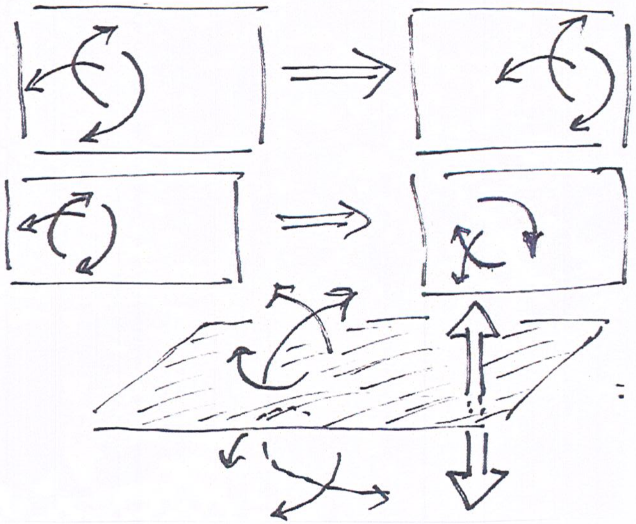


对称性 EMMY NOETHER (1918)  运动常数

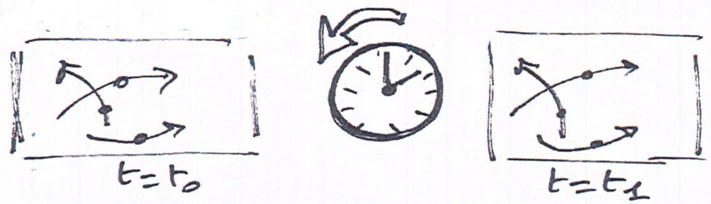
平移（位置或速度） | 线性动量（质心的运动）

旋转 | 角动量

（相对于平面的对称性） | 二体运动一定在一个平面上



时间平移 | 能量



SO(4) 对称性（二体） | HERMAN-LAPLACE 向量（近日点的方向）

⇓

所有负能量的解都是周期的

13. Invariante Variationsprobleme

Nachr. v. d. Ges. d. Wiss. zu Göttingen 1918, S. 235–257

Vorgelegt von F. Klein in der Sitzung vom 26. Juli 1918[1]).

Es handelt sich um Variationsprobleme, die eine kontinuierliche Gruppe (im Lieschen Sinne) gestatten; die daraus sich ergebenden Folgerungen für die zugehörigen Differentialgleichungen finden ihren allgemeinsten Ausdruck in den in § 1 formulierten, in den folgenden Paragraphen bewiesenen Sätzen. Über diese aus Variationsproblemen entspringenden Differentialgleichungen lassen sich viel präzisere Aussagen machen als über beliebige, eine Gruppe gestattende Differentialgleichungen, die den Gegenstand der Lieschen Untersuchungen bilden. Das folgende beruht also auf einer Verbindung der Methoden der formalen Variationsrechnung mit denen der Lieschen Gruppentheorie. Für spezielle Gruppen und Variationsprobleme ist diese Verbindung der Methoden nicht neu; ich erwähne Hamel und Herglotz für spezielle endliche, Lorentz und seine Schüler (z. B. Fokker), Weyl und Klein für spezielle unendliche Gruppen[2]). Insbesondere sind die zweite Kleinsche Note und die vorliegenden Ausführungen gegenseitig durch einander beein-

---

1) Die endgiltige Fassung des Manuskriptes wurde erst Ende September eingereicht.

2) Hamel: Math. Ann. Bd. 59 und Zeitschrift f. Math. u. Phys. Bd. 50. Herglotz: Ann. d. Phys. (4) Bd. 36, bes. § 9, S. 511. Fokker, Verslag d. Amsterdamer Akad., 27./1. 1917. Für die weitere Litteratur vergl. die zweite Note von Klein: Göttinger Nachrichten 19. Juli 1918.

In einer eben erschienenen Arbeit von Kneser (Math. Zeitschrift Bd. 2) handelt es sich um Aufstellung von Invarianten nach ähnlicher Methode.

多少参数？

太空中二体 12（位置6，速度6）

由对称性对参数数量的约减：

- −6（质心）
- −3（角动量）
- −1（能量）
- −1（Hermau-Laplace 向量）

= 1 ⇒ 轨道完全确定

太空中三体 18（位置6，速度6）

由对称性对参数数量的约减：

- −6（质心）
- −3（角动量）
- −1（能量）
- −1（围绕角动量向量的旋转）

= 7 !!!

$\boxed{\text{三体问题是不可积的}}$

（BRONS 1887
POINCARÉ（庞加莱）1892）

各种技术

摄动理论

行星系统的存在和稳定性

古典天体力学

非摄动解

拓扑方法

符号动力学

变分法

庞加莱的新方法

与三重碰撞有关的现象

精确解

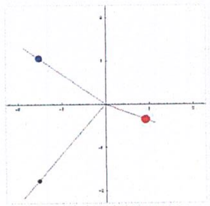


Figure 1: a homothetic solution ($e = 1$) (animation by R. Moeckel).

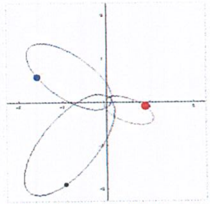


Figure 2: a homographic solution ($e = 0.9$) (animation by R. Moeckel).

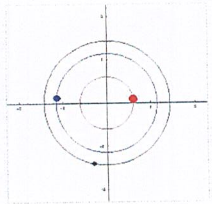
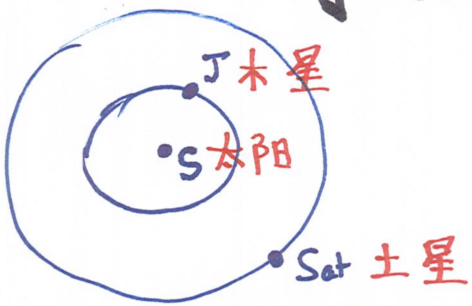


Figure 3: a relative equilibrium ($e = 0$) (animation by R. Moeckel).

类似二体问题的解（形状不改变）

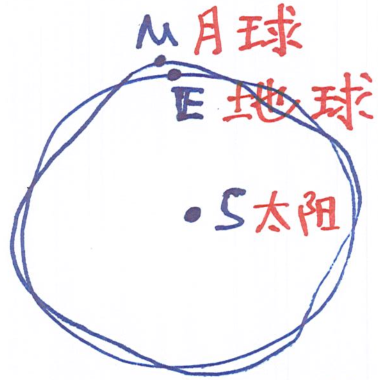
摄动

行星问题



$m_J, m_{Sat} \ll m_S$

月球问题

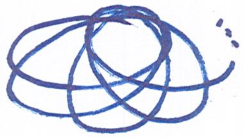


$m_M \ll m_E \ll m_S$

$d(E,M) \ll d(E,S)$

长期演化：岁差

(古典天体力学)

 被  取代

Z 许多可能的解释！

由于 $1/r^2$ 的吸引力引起的摄动 | $\frac{1}{r^{2+\varepsilon}}$ (或 $\frac{1}{r^2}+\frac{\varepsilon}{r^4}$) 定律 (clairaut) | 相对论修正 (水星)

⇑

月球远地点的危机

1747-48

NEWTON
EULER, CLAIRAUT, D'ALEMBERT
LAPLACE, LAGRANGE, POISSON
DELAUNAY, HILL,
POINCARÉ, BIRKHOFF ---- ARNOLD (K.A.M.)

EULER

CLAIRAUT

D'ALEMBERT

莱昂哈德·欧拉 (1707-1783)

亚历克西斯·克劳德·克莱罗
(1713-1765)

让·勒朗·达朗贝尔
(1717-1783)

CONSIDÉRATIONS
SUR LE
PROBLEME DES TROIS CORPS. (*)
PAR MR. L. EULER.

1.

Le probleme où il s'agit de déterminer le mouvement de trois corps qui s'attirent mutuellement, selon l'hypothese Newtonienne, est devenu depuis quelque tems si fameux par les soins que les plus grands Géometres y ont employés, qu'on a déjà commencé à disputer, à qui la gloire de l'avoir le premier résolu appartenoit. Mais cette dispute est fort prématurée, & il s'en faut bien encore qu'on soit parvenu à une solution parfaite du probleme. Tout ce qu'on y a fait jusqu'ici est restreint à un cas très particulier, où le mouvement de chacun des trois corps suit à peu près les regles établies par *Kepler*; & dans ce cas même on s'est borné à déterminer le mouvement par approximation. Dans tous les autres cas, on ne sauroit se vanter qu'on puisse assigner seulement à peu près le mouvement des trois corps, lequel demeure encore pour nous un aussi grand mystere, que si l'on n'avoit jamais pensé à ce probleme.

2. Pour prouver clairement combien on est encore éloigné d'une solution complette de ce probleme, on n'a qu'à le comparer avec le cas où il n'y a que deux corps qui s'attirent mutuellement, & même avec le cas le plus simple, où il s'agit de déterminer le mouvement d'un corps pesant projetté d'une maniere quelconque dans le vuide. Et on conviendra aisément qu'il auroit été impossible de trouver

(*) Lû le 4. Déc. 1765.

DE L'ORBITE DE LA LUNE,

En ne négligeant pas les quarrés des quantités de même ordre que les forces perturbatrices.

Par M. CLAIRAUT.

Je supposerai ici, comme dans la solution que je donnai en 1747, que les deux orbites sont dans le même plan, que celle du Soleil est sans excentricité; & je n'aurai point d'égard aux termes qui seroient introduits dans les valeurs des forces Φ & Π, si l'on ne négligeoit pas le quarré du rapport des distances du Soleil & de la Lune à la Terre. Déposé à l'Acad. le 21 Janv. 1749, & lû le 15 Mars 1752.

Ainsi les forces Φ & Π seront encore

$$-\frac{Nr}{l^3}\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\operatorname{cof.} 2\,T\right), \text{ \& } -\frac{3\,N}{2\,l^3}\,(\operatorname{fin.} 2\,T):$$

N étant la masse du Soleil, M la somme des masses de la Terre & de la Lune, r le rayon vecteur quelconque de l'orbite de la Lune, l le rayon de l'orbite du Soleil, T l'élongation des deux astres.

J'aurai toûjours, comme dans mon premier Mémoire, pour l'équation générale de l'orbite produite par les forces $\frac{M}{rr} + \Phi$ & Π;

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} - \frac{e}{p}\operatorname{cof.}v + \frac{1}{p}\operatorname{fin.}v \int \Omega \operatorname{cof.}v\, dv - \frac{1}{p}\operatorname{cof.}v \int \Omega \operatorname{fin.}v\, dv,$$

en supposant, 1.° que v soit l'angle compris entre le rayon vecteur quelconque r, & celui qui passoit par la Lune supposée apogée, au moment où les forces Φ & Π ont commencé à agir: 2.° que $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} - \frac{e}{p}\operatorname{cof.}v$, exprimeroit

QUATORZIÉME MÉMOIRE.

Réfléxions sur le Problême des trois Corps, avec de nouvelles Tables de la Lune, d'un usage très-simple & très-facile.

I.

J'AI publié dans mes *Recherches sur le Systême du Monde*, imprimées en 1754, des Tables de la Lune, telles que la théorie me les avoit données. J'avois cru devoir conserver dans ces Tables la forme de celles des *Institutions Astronomiques*, parce que les Astronomes me paroissoient accoutumés à cette forme, & parce que d'ailleurs cette forme me sembloit avoir quelques autres avantages, dont j'ai fait mention p. 249 & 250 de la premiere Partie des *Recherches* déja citées.

II.

Ayant fait réfléxion depuis, qu'il seroit très-commode & très-utile aux Astronomes d'avoir des Tables particulieres qui marquassent seulement la différence des miennes d'avec celles des *Institutions*, j'ai publié ces Tables

达朗贝尔 (Opuscules II)
(小册)
1761

ENCYCLOPÉDIE,
OU
DICTIONNAIRE RAISONNÉ DES SCIENCES, DES ARTS ET DES MÉTIERS,

PAR UNE SOCIETÉ DE GENS DE LETTRES.

Mis en ordre & publié par M. *DIDEROT*, de l'Académie Royale des Sciences & des Belles-Lettres de Prusse; & quant à la PARTIE MATHÉMATIQUE, par M. *D'ALEMBERT*, de l'Académie Royale des Sciences de Paris, de celle de Prusse, & de la Société Royale de Londres.

Tantùm series juncturaque pollet,
Tantùm de medio sumptis accedit honoris! HORAT.

le tome 9 de l'*Encyclopédie* (le volume paraît en 1765 mais l'article est rédigé en 1759) : "*Je ne dois pas oublier d'ajouter* 1°. *que ma méthode pour déterminer le mouvement de l'apogée, est très-élégante & très-simple, n'ayant besoin d'aucune intégration, & ne demandant que la simple inspection des coefficients du second terme de l'équation différentielle ;* 2°. *que j'ai démontré le premier par une méthode rigoureuse, ce que personne n'avoit encore fait, & n'a même fait jusqu'ici, que l'équation de l'orbite lunaire ne devoit point contenir d'arcs de cercle ; si on ajoute à cela la maniere simple & facile dont je parviens à l'équation différentielle de l'orbite lunaire, sans avoir besoin pour cela, comme d'autres géometres, de transformations & d'intégrations multipliées ; & le détail que j'ai donné ci-dessus de mes travaux & de ceux des autres géometres, on conviendra, ce me semble, que j'ai eu plus de part à la théorie de la lune que certains mathématiciens n'avoient voulu le faire croire.*

A PARIS,

Chez
BRIASSON, rue Saint Jacques, à la Science.
DAVID l'aîné, rue Saint Jacques, à la Plume d'or.
LE BRETON, Imprimeur ordinaire du Roy, rue de la Harpe.
DURAND, rue Saint Jacques, à Saint Landry, & au Griffon.

M. DCC. LI.

AVEC APPROBATION ET PRIVILEGE DU ROY.

百科全书，第9卷 (1765)
(文章是在1749被达朗贝尔写的)

le tome 9 de l'*Encyclopédie* (le volume paraît en 1765 mais l'article est rédigé en 1759) : *"Je ne dois pas oublier d'ajouter* 1°. *que ma méthode pour déterminer le mouvement de l'apogée, est très-élégante & très-simple, n'ayant besoin d'aucune intégration, & ne demandant que la simple inspection des coefficients du second terme de l'équation différentielle ;* 2°. *que j'ai démontré le premier par une méthode rigoureuse, ce que personne n'avoit encore fait, & n'a même fait jusqu'ici, que l'équation de l'orbite lunaire ne devoit point contenir d'arcs de cercle ; si on ajoute à cela la maniere simple & facile dont je parviens à l'équation différentielle de l'orbite lunaire, sans avoir besoin pour cela, comme d'autres géometres, de transformations & d'intégrations multipliées ; & le détail que j'ai donné ci-dessus de mes travaux & de ceux des autres géometres, on conviendra, ce me semble, que j'ai eu plus de part à la théorie de la lune que certains mathématiciens n'avoient voulu le faire croire.*

皮埃尔·西蒙·拉普拉斯 (1749-1827)

TRAITÉ

DE

MÉCANIQUE CÉLESTE,

PAR P. S. LAPLACE,

Membre de l'Institut national de France, et du Bureau des Longitudes.

TOME PREMIER.

DE L'IMPRIMERIE DE CRAPELET.

A PARIS,

Chez J. B. M. DUPRAT, Libraire pour les Mathématiques, quai des Augustins.

AN VII.

(1798-99)

Joseph-Louis Lagrange (1736-1813)

约瑟夫·拉格朗日

MÉCHANIQUE

ANALITIQUE;

Par M. DE LA GRANGE, *de l'Académie des Sciences de Paris; de celles de Berlin, de Pétersbourg, de Turin,* &c.

A PARIS,

Chez LA VEUVE DESAINT, Libraire, rue du Foin S. Jacques.

M. DCC. LXXXVIII.

AVEC APPROBATION ET PRIVILEGE DU ROI.

分析力学论文（1788）

stantes, deviendra

$$\Delta\Omega = \frac{\partial\Omega}{\partial\alpha}\Delta\alpha + \frac{\partial\Omega}{\partial\beta}\Delta\beta + \frac{\partial\Omega}{\partial\gamma}\Delta\gamma + \ldots + \frac{\partial\Omega}{\partial\lambda}\Delta\lambda + \frac{\partial\Omega}{\partial\mu}\Delta\mu + \frac{\partial\Omega}{\partial\nu}\Delta\nu + \ldots.$$

En la substituant dans le premier membre de l'équation de l'article précédent et ordonnant les termes par rapport aux différences marquées par Δ, on aura

$$\begin{aligned}&\left(\frac{\partial\Omega}{\partial\alpha}dt - \partial\lambda\right)\Delta\alpha + \left(\frac{\partial\Omega}{\partial\beta}dt - \partial\mu\right)\Delta\beta + \left(\frac{\partial\Omega}{\partial\gamma}dt - \partial\nu\right)\Delta\gamma + \ldots \\ &+ \left(\frac{\partial\Omega}{\partial\lambda}dt + \partial\alpha\right)\Delta\lambda + \left(\frac{\partial\Omega}{\partial\mu}dt + \partial\beta\right)\Delta\mu + \left(\frac{\partial\Omega}{\partial\nu}dt + \partial\gamma\right)\Delta\nu + \ldots = 0.\end{aligned}$$

Comme on peut donner aux différences $\Delta\alpha$, $\Delta\beta$, ... marquées par la caractéristique Δ une valeur quelconque, il faudra que l'équation soit vérifiée indépendamment de ces différences, ce qui donnera autant d'équations particulières, telles que

$$\begin{aligned}&\frac{\partial\Omega}{\partial\alpha}dt = \partial\lambda, \quad &&\frac{\partial\Omega}{\partial\beta}dt = \partial\mu, \quad &&\frac{\partial\Omega}{\partial\gamma}dt = \partial\nu, \quad &&\ldots, \\ &\frac{\partial\Omega}{\partial\lambda}dt = -\partial\alpha, \quad &&\frac{\partial\Omega}{\partial\mu}dt = -\partial\beta, \quad &&\frac{\partial\Omega}{\partial\nu}dt = -\partial\gamma, \quad &&\ldots\end{aligned}$$

在拉格朗日的书,已经有汉密尔顿方程!!!

14. Les différences marquées par la caractéristique δ sont proprement les différentielles des constantes arbitraires devenues variables (art. 10); ainsi, comme ces différentielles peuvent maintenant être rapportées également au temps t, il est permis et même convenable de changer les δ en d, et l'on aura, pour la détermination des nouvelles variables $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \lambda, \mu, \nu, \ldots$, les équations

$$\begin{aligned}&\frac{d\alpha}{dt} = -\frac{\partial\Omega}{\partial\lambda}, \quad &&\frac{d\beta}{dt} = -\frac{\partial\Omega}{\partial\mu}, \quad &&\frac{d\gamma}{dt} = -\frac{\partial\Omega}{\partial\nu}, \quad &&\ldots, \\ &\frac{d\lambda}{dt} = +\frac{\partial\Omega}{\partial\alpha}, \quad &&\frac{d\mu}{dt} = +\frac{\partial\Omega}{\partial\beta}, \quad &&\frac{d\nu}{dt} = +\frac{\partial\Omega}{\partial\gamma}, \quad &&\ldots,\end{aligned}$$

qui sont, comme l'on voit, sous une forme très simple, et qui fournissent ainsi la solution la plus simple du problème de la variation des constantes arbitraires.

Siméon-Denis Poisson (1781 - 1840)

西莫恩·德尼·泊松

JOURNAL DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

MÉMOIRE

Sur les Inégalités séculaires des Moyens mouvemens des Planètes ;

Lu à l'Institut, le 20 Juin 1808.

Par M. Poisson.

L'action réciproque des planètes produit, dans leurs mouvemens, des inégalités que l'on distingue en deux espèces : les unes sont périodiques, et leurs périodes dépendent de la configuration des planètes entre elles ; de sorte qu'elles reprennent les mêmes valeurs toutes les fois que les planètes reviennent à la même position : les autres sont encore périodiques ; mais leurs périodes sont incomparablement plus longues que celles des premières, et elles sont indépendantes de la position relative des planètes. On nomme ces inégalités à longues périodes, *inégalités séculaires* ; et, vu la lenteur avec laquelle elles croissent, on peut les considérer pendant plusieurs siècles, comme proportionnelles

Hamilton - Jacobi 方程

William Rowan HAMILTON (1805 - 1865)

威廉·哈密顿

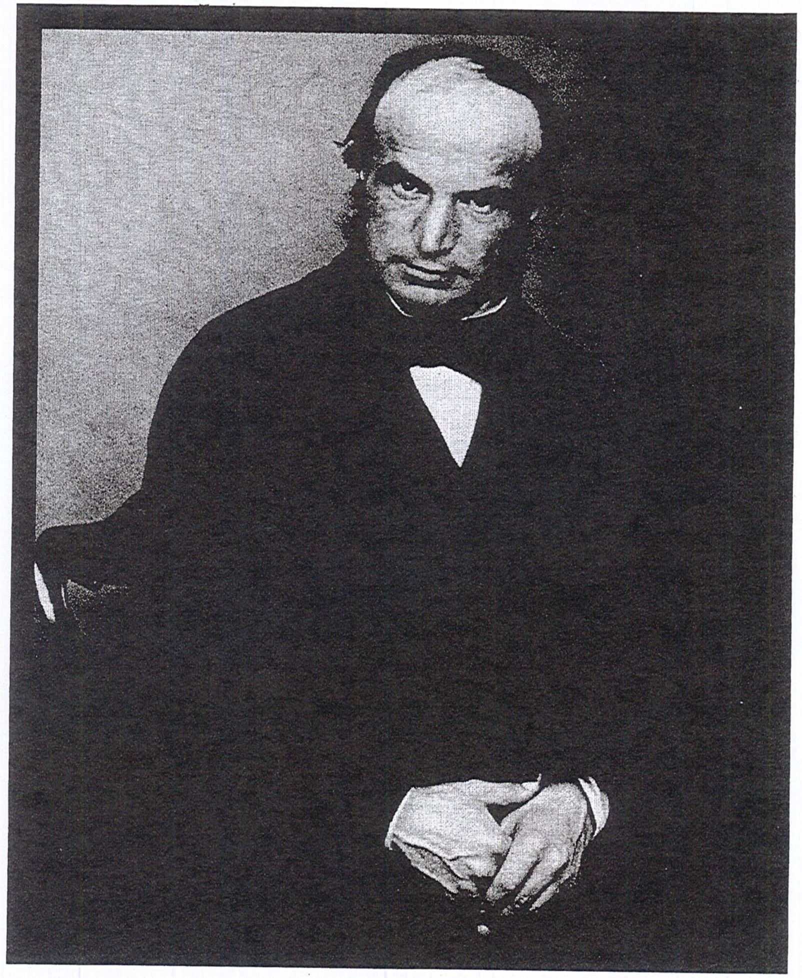
Carl-Gustav JACOBI (1804 - 1851)

卡尔·雅可比

海王星的发现

Urbain LE VERRIER (1811 - 1877)

奥本·勒维耶



John Couch ADAMS (1819 - 1892)

约翰·柯西·亚当斯

Charles-Eugène DELAUNAY (1816.1872)

(C) Photo MINES ParisTech

“月球运动理论”的一页！

Mémoires de l'Académie des Science de l'Institut impérial de France.

(383)*

$$
\left.\begin{array}{l}
-\frac{5}{8}e' + \frac{15}{8}\gamma^2 e' + \frac{15}{4}e^2 e' + \frac{25}{32}e'^3 - \frac{45}{4}\gamma^2 e^2 e' - \frac{2955}{512}e^4 e' \\
-\left(\frac{45}{16}e' - \frac{675}{32}\gamma^2 e' - \frac{1755}{128}e^2 e'\right)\frac{n'}{n} + \left(\frac{15}{32}e' + \frac{165}{64}e^2 e'\right)\frac{n'^2}{n^2} + \frac{855}{256}e'\frac{n'^3}{n^3} \\
-\left(\frac{45}{32}e' - \frac{735}{64}e^2 e'\right)\frac{n'^2}{n^2} - \frac{675}{256}e'\frac{n'^3}{n^3} - \frac{15}{64}e'\frac{n'^2}{n^2} - \frac{225}{512}e'\frac{n'^3}{n^3} - \frac{27}{64}e'\frac{n'^2}{n^2} + \frac{459}{512}e'\frac{n'^3}{n^3} \\
+\frac{27}{128}e'\frac{n'^2}{n^2} + \frac{189}{512}e'\frac{n'^3}{n^3} + \frac{15}{128}e'\frac{n'^2}{n^2} + \frac{695}{512}e'\frac{n'^3}{n^3} + \frac{135}{64}e'\frac{n'^2}{n^2} - \frac{1485}{256}e'\frac{n'^3}{n^3} \\
-\frac{45}{64}e'\frac{n'^2}{n^2} - \frac{495}{256}e'\frac{n'^3}{n^3} + \frac{45}{128}e'\frac{n'^2}{n^2} - \frac{261}{256}e'\frac{n'^3}{n^3} - \frac{45}{256}e'\frac{n'^3}{n^3} - \frac{117}{256}e'\frac{n'^3}{n^3} - \frac{135}{256}e^2 e'\frac{n'}{n} \\
+\frac{135}{256}e^2 e'\frac{n'}{n} - \frac{675}{256}e'\frac{n'^3}{n^3} + \frac{1035}{256}e'\frac{n'^3}{n^3} + \frac{45}{32}\gamma^2 e'\frac{n'}{n} - \frac{45}{32}\gamma^2 e'\frac{n'}{n} + \frac{11025}{256}e'\frac{n'^3}{n^3}
\end{array}\right\} + m'\frac{a^3}{a'^3}
$$

$$\times\cos(3h + 3g + 3l - 3h' - 3g' - 2l')$$

(384)

$$
+m'\frac{a^3}{a'^3}\left\{\begin{array}{l}
\frac{5}{64}e'^2 - \frac{15}{64}\gamma^2 e'^2 - \frac{15}{32}e^2 e'^2 - \frac{135}{64}e'^2\frac{n'}{n} + \frac{405}{64}e'^2\frac{n'^2}{n^2} + \frac{45}{16}e'^2\frac{n'}{n} - \frac{15}{256}e'^2\frac{n'^2}{n^2} \\
+\frac{45}{256}e'^2\frac{n'^2}{n^2} - \frac{165}{512}e'^2\frac{n'^2}{n^2} - \frac{297}{512}e'^2\frac{n'^2}{n^2} + \frac{27}{128}e'^2\frac{n'^2}{n^2} + \frac{15}{128}e'^2\frac{n'^2}{n^2} - \frac{135}{64}e'^2\frac{n'^2}{n^2} \\
+\frac{45}{64}e'^2\frac{n'^2}{n^2} + \frac{405}{128}e'^2\frac{n'^2}{n^2} - \frac{135}{128}e'^2\frac{n'^2}{n^2} + \frac{495}{1024}e'^2\frac{n'^2}{n^2} - \frac{45}{256}e'^2\frac{n'^2}{n^2} + \frac{2025}{2048}e'^2\frac{n'^2}{n^2} \\
+\frac{225}{64}e'^2\frac{n'^2}{n^2}
\end{array}\right\}
$$

$$\times\cos(3h + 3g + 3l - 3h' - 3g' - l')$$

(388)

$$
+m'\frac{a^3}{a'^3}\left\{\begin{array}{l}
\frac{15}{16}e - \frac{45}{16}\gamma^2 e - \frac{285}{64}e^3 - \frac{45}{8}ee'^2 - \frac{4275}{128}ee'^2\frac{n'}{n} - \frac{855}{128}ee'^2\frac{n'}{n} \\
+\frac{255}{64}e\frac{n'^2}{n^2} - \frac{75}{64}e\frac{n'^2}{n^2} + \frac{93}{128}e\frac{n'^2}{n^2} + \frac{25}{64}e\frac{n'^3}{n^3} - \frac{81}{128}e\frac{n'^2}{n^2} - \frac{81}{64}e\frac{n'^3}{n^3}
\end{array}\right.
$$

Cette portion du coefficient du terme (385) a disparu par suite de la 17ᵉ opération.

Ce coefficient du terme (385) se continue à la page suivante.

* On a dû pousser ici l'approximation jusqu'aux quantités du neuvième ordre, avant la 3ᵉ opération, mais seulement dans les parties qui contiennent e'^3 ou e'^4 en facteur, afin de pouvoir calculer complètement la portion du coefficient du terme (334) qui provient du terme (383) dans cette 3ᵉ opération.

Félix TISSERAND (1845 - 1896)

TRAITÉ
DE
MÉCANIQUE CÉLESTE

PAR

F. TISSERAND,

MEMBRE DE L'INSTITUT ET DU BUREAU DES LONGITUDES,
PROFESSEUR À LA FACULTÉ DES SCIENCES.

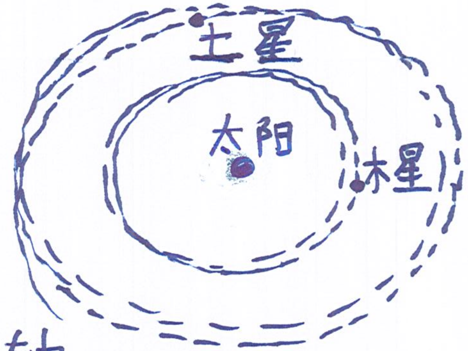
TOME I.

PERTURBATIONS DES PLANÈTES D'APRÈS LA MÉTHODE DE LA VARIATION DES CONSTANTES ARBITRAIRES.

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.
1889

天体力学论文 (1889-1896)

稳定性还是不稳定性？



典型的例子：行星的长期系统

(在围绕太阳的两个行星的共面圆周运动的附近)

长期变量(慢的)：行星的密切椭圆(位置，形式)

位置变量(快的)：半长轴 a_1, a_2 扫过面积 ℓ_1, ℓ_2

NEWTON 不稳定性

LAPLACE/LAGRANGE 一阶稳定性

POINCARÉ 形式稳定性(有可能不稳定性)

ARNOLD(KAM) 测度意义下的稳定性

LASKAR 数值不稳性

我们无法预测一亿年后地球近日点的方向会是什么

不稳定性的起源：共振

分析翻译：摄动级数发散

Jules, Henri
POINCARÉ
(儒勒·昂利·
庞加莱)
1854–1912

LES MÉTHODES NOUVELLES

DE LA

MÉCANIQUE CÉLESTE

PAR

H. POINCARÉ,
MEMBRE DE L'INSTITUT,
PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES.

TOME I.

Solutions périodiques. — Non-existence des intégrales uniformes. Solutions asymptotiques.

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.
1892

LES MÉTHODES NOUVELLES

DE LA

MÉCANIQUE CÉLESTE

PAR

H. POINCARÉ,
MEMBRE DE L'INSTITUT,
PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES.

TOME II.

Méthodes de MM. Newcomb, Gyldén, Lindstedt et Bohlin.

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.
1893

天体力学
的新方法

1892 - 1893

1899

LES MÉTHODES NOUVELLES

DE LA

MÉCANIQUE CÉLESTE

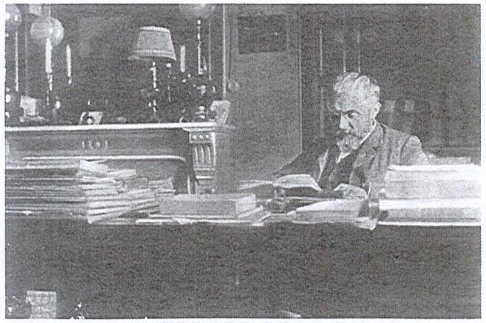
PAR

H. POINCARÉ,
MEMBRE DE L'INSTITUT,
PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES.

TOME III.

Invariants intégraux. — Solutions périodiques du deuxième genre. Solutions doublement asymptotiques.

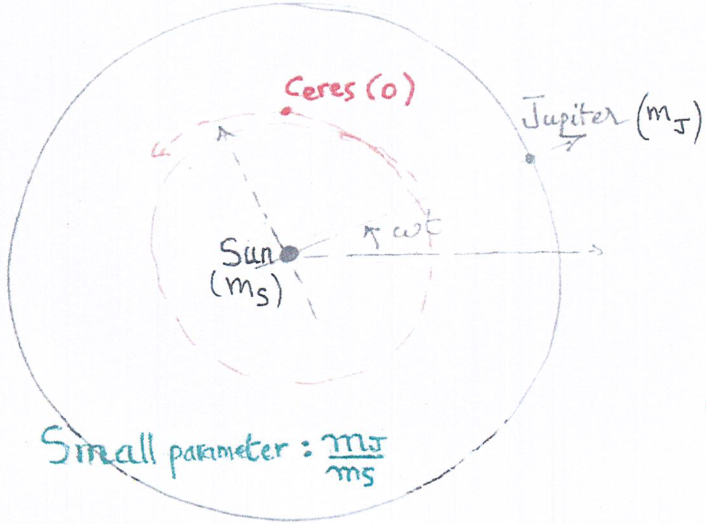
PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.
1899

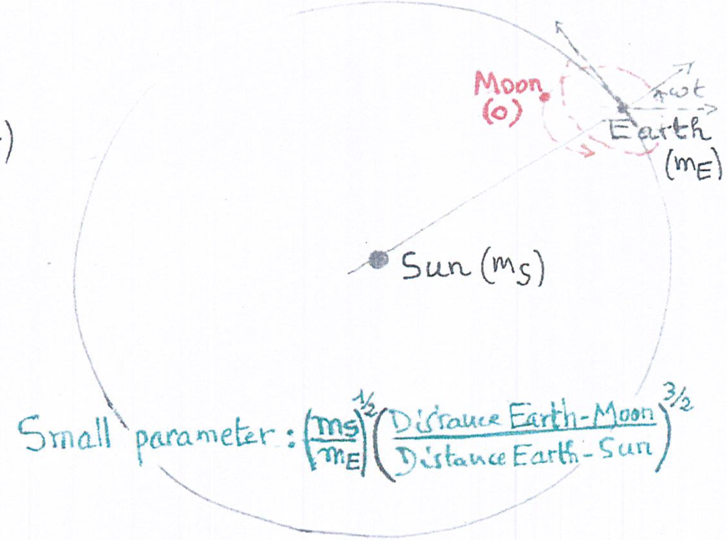


HENRI POINCARÉ DANS SON CABINET DE TRAVAIL.

HENRI POINCARÉ DANS SON CABINET DE TRAVAIL. — PHOT. DORNAC.

限制性三体问题





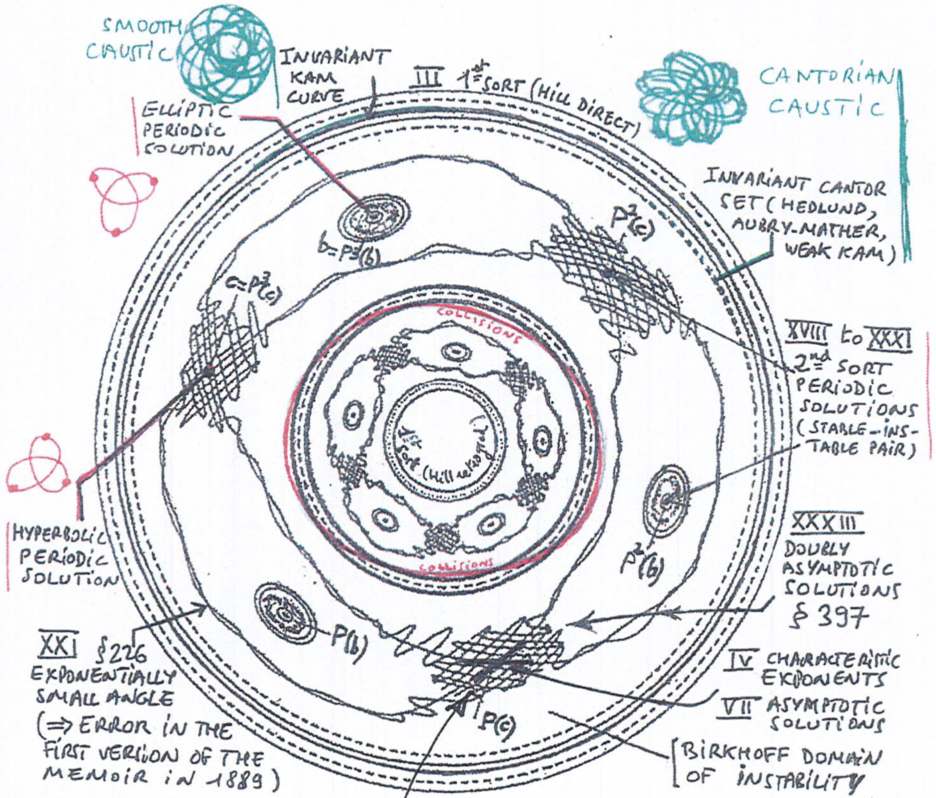
En ce qui concerne le problème des trois corps, je ne suis pas sorti du cas suivant : Je considère trois masses, la première très grande, la seconde petite mais finie, la troisième infiniment petite ; je suppose que les deux premières décrivent un cercle autour de leur centre de gravité commun et que la troisième se meut dans le plan de ces cercles. Tel serait le cas d'une petite planète troublée par Jupiter, si l'on négligeait l'eccentricité de Jupiter et l'inclinaison des orbites.[120]

TOME III

§397

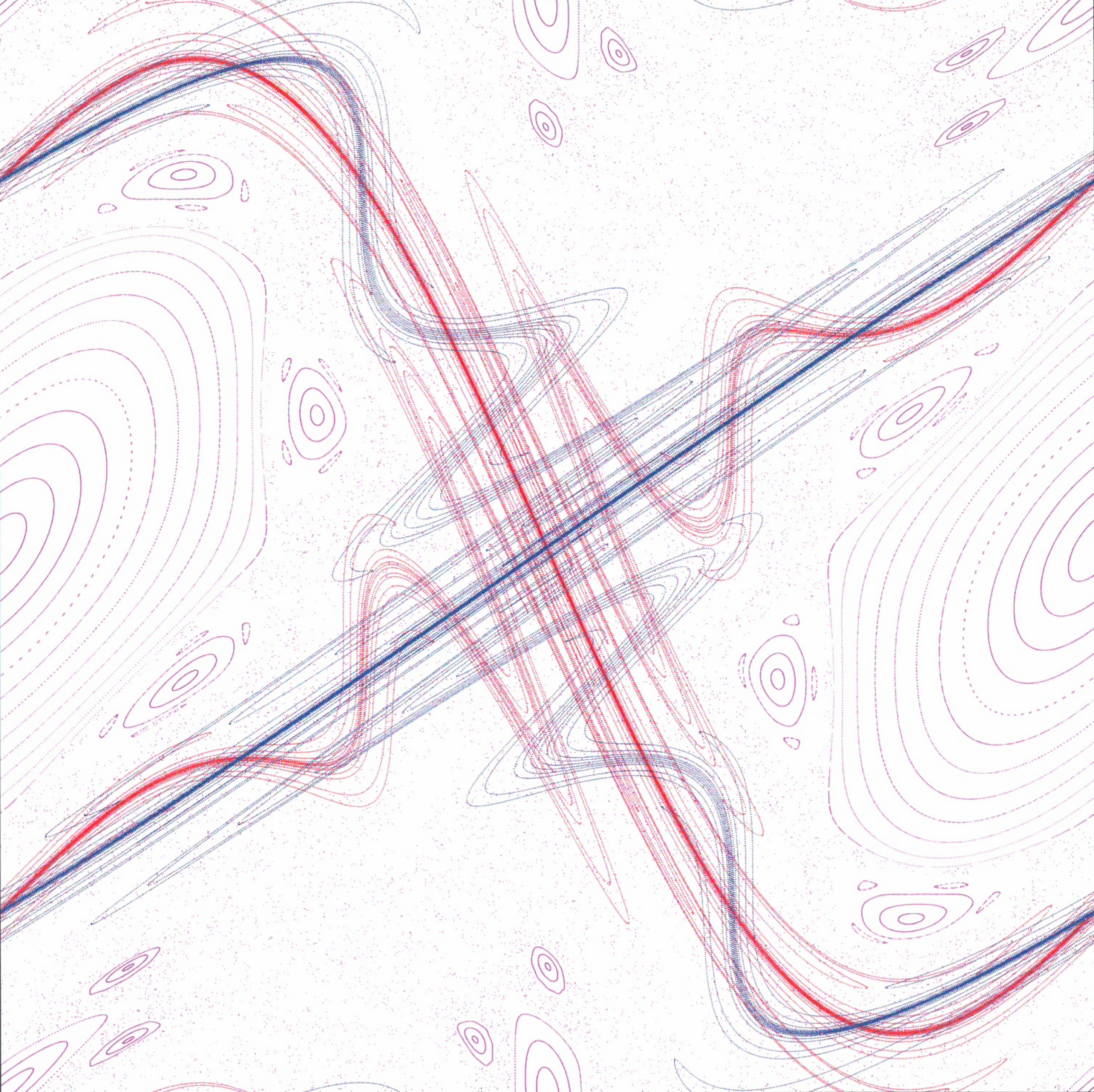
397. Que l'on cherche à se représenter la figure formée par ces deux courbes et leurs intersections en nombre infini dont chacune correspond à une solution doublement asymptotique, ces intersections forment une sorte de treillis, de tissu, de réseau à mailles infiniment serrées; chacune des deux courbes ne doit jamais se recouper elle-même, mais elle doit se replier sur elle-même d'une manière très complexe pour venir recouper une infinité de fois toutes les mailles du réseau.

On sera frappé de la complexité de cette figure, que je ne cherche même pas à tracer. Rien n'est plus propre à nous donner une idée de la complication du problème des trois corps et en général de tous les problèmes de Dynamique où il n'y a pas d'intégrale uniforme et où les séries de Bohlin sont divergentes.



LES INTERSECTIONS HOMOCLINES
DE L'APPLICATION DE 1er RETOUR

该图说明庞加莱的书"天体力学的新方法"中关于限制性三体问题的几个章节

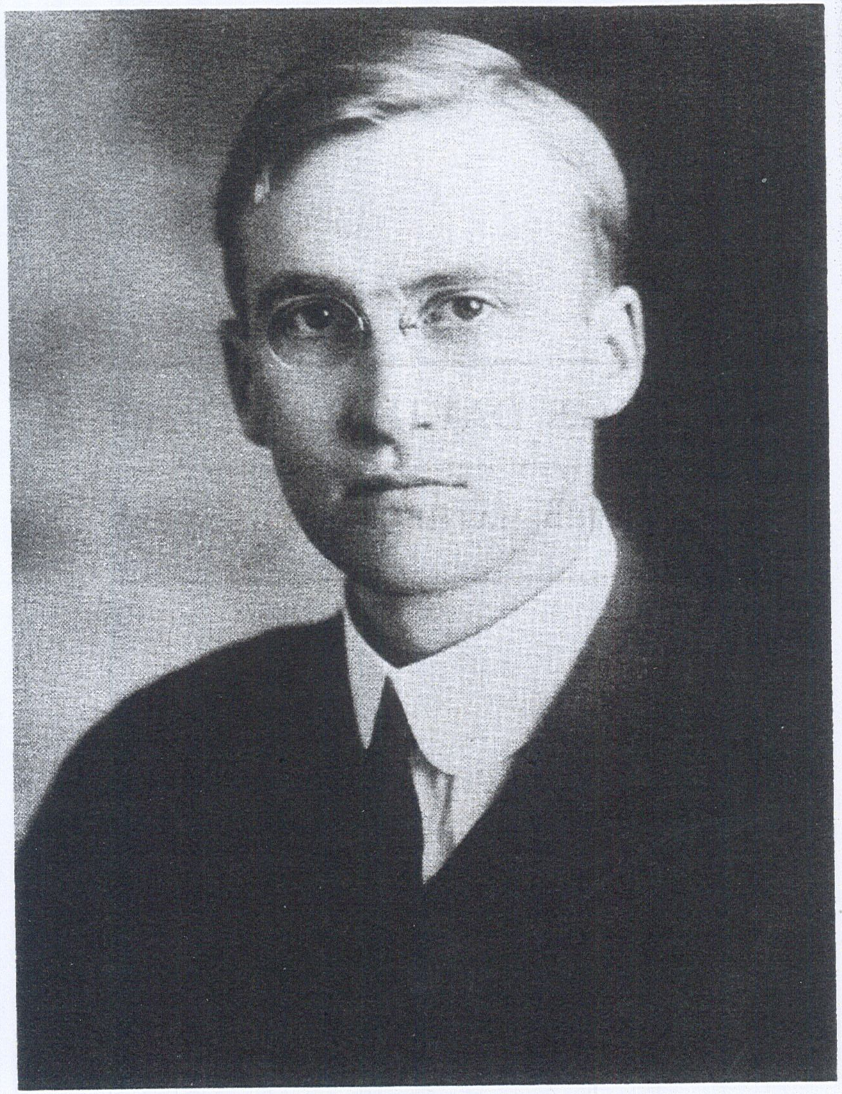


对初值的敏感性

皮埃尔·杜赫姆(Pierre Duhem)的普及：
公牛角上的测地线

J. Hadamard

JACQUES HADAMARD
雅克·阿达马
1865 - 1963



George David Birkhoff, 1913

(1884 - 1944)

乔治·戴维·伯克霍夫

Reprinted from *Trans. Amer. Math. Soc.*, January, 1913, Vol. 14, pp. 14–22

PROOF OF POINCARE'S GEOMETRIC THEOREM

BY

GEORGE D. BIRKHOFF*

In a paper recently published in the Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo (vol. 33, 1912, pp. 375–407) and entitled *Sur un théorème de Géométrie*, POINCARÉ enunciated a theorem of great importance, in particular for the restricted problem of three bodies; but, having only succeeded in treating a variety of special cases after long-continued efforts, he gave out the theorem for the consideration of other mathematicians.

For some years I have been considering questions of a character similar to that presented by the theorem and it now turns out that methods which I have been using are here applicable. In the present paper I give the brief proof which I have obtained, but do not take up other results to which I have been led.†

1. Statement of the Theorem. Poincaré's theorem may be stated in a simple form as follows: Let us suppose that a continuous one-to-one transformation T takes the ring R, formed by concentric circles C_a and C_b of radii a and b respectively $(a > b > 0)$, into itself in such a way as to advance the points of C_a in a positive sense, and the points of C_b in the negative sense, and at the same time to preserve areas. *Then there are at least two invariant points.*

In the proof of this theorem we shall use modified polar coördinates $y = r^2$, $x = \theta$ where r is the distance of the point (x, y) from the center of the circles, and θ is the angle which a line from the center to (x, y) makes with a fixed line through the center. The transformation T may be written then

$$x' = \varphi(x, y), \qquad y' = \psi(x, y).$$

The function $\psi(x, y)$ is a continuous function of (x, y), uniquely determined at each point of R, and so is periodic in x of period 2π. The function $\varphi(x, y)$ admits of an infinite number of determinations which differ from each

* Presented to the Society, October 26, 1912.

† Some of my results are contained in a paper entitled *Quelques théorèmes sur les mouvements des systèmes dynamiques*, which is shortly to appear in the Bulletin de la Société Mathématique de France.

АНДРЕЙ НИКОЛАЕВИЧ
КОЛМОГОРОВ

ВЛАДИМИР ИГОРЕВИЧ
АРНОЛЬД

ANDREÏ NICOLAEVICH
KOLMOGOROV

VLADIMIR IGOREVICH
ARNOLD

JURGEN KURT
MOSER

安德雷·尼古拉耶维奇·
柯尔莫哥洛夫

1903 - 1987

弗拉基米尔·伊戈列维奇·
阿诺尔德

1937 - 2010

于尔根·库尔特·
莫泽

1928 - 1999

52. ON THE PRESERVATION OF CONDITIONALLY PERIODIC MOTIONS UNDER SMALL VARIATIONS OF THE HAMILTON FUNCTION *

We consider in the $2s$-dimensional phase space of a dynamical system with s degrees of freedom a region G, represented as the product of an s-dimensional torus T by a region S in an s-dimensional Euclidean space. The points of the torus will be characterized by circular coordinates $q_1, \ldots, q_s$ (the replacement of q_α by $q_\alpha + 2\pi$ does not change the position of the point q), and the coordinates of a point p belonging to S will be denoted by $p_1, \ldots, p_s$. Assume that in the region G the equations of motion in the coordinates $(q_1, \ldots, q_s, p_1, \ldots, p_s)$ have the canonical form

$$\frac{dq_\alpha}{dt} = \frac{\partial}{\partial p_\alpha} H(q,p), \quad \frac{dp_\alpha}{dt} = -\frac{\partial}{\partial q_\alpha} H(q,p). \tag{1}$$

In what follows, the Hamilton function H is assumed to depend on a parameter θ, defined for all $(q,p) \in G$, $\theta \in (-c;+c)$, and to be independent of time. In essence, the consideration below is related to real functions, but imposes rather strong conditions on the smoothness of the function $H(q,p,\theta)$, stronger than the condition of infinite differentiability. For simplicity, in what follows we assume that *the function $H(p,q,\theta)$ is analytic in the variables (q,p,θ) jointly.*

Below the summation over Greek subscripts extends from 1 to s. Ordinary vector notation is used: $(x,y) = \sum_\alpha x_\alpha y_\alpha$ and $|x| = +\sqrt{(x,x)}$. By an integral vector is meant a vector all components of which are integers. A set of points $(q,p) \in G$ with $p = c$ is denoted by T_c. In Theorem 1 it is assumed that S contains the point $p = 0$, that is, $T_0 \subseteq S$.

Theorem 1. *Let*

$$H(q,p,0) = m + \sum_\alpha \lambda_\alpha p_\alpha + \tfrac{1}{2} \sum_{\alpha\beta} \Phi_{\alpha\beta}(q) p_\alpha p_\beta + O(|p|^3), \tag{2}$$

where m and λ_α are constants, and let the inequality

1963 г. ноябрь—декабрь *т. XVIII, вып. 6 (114)*

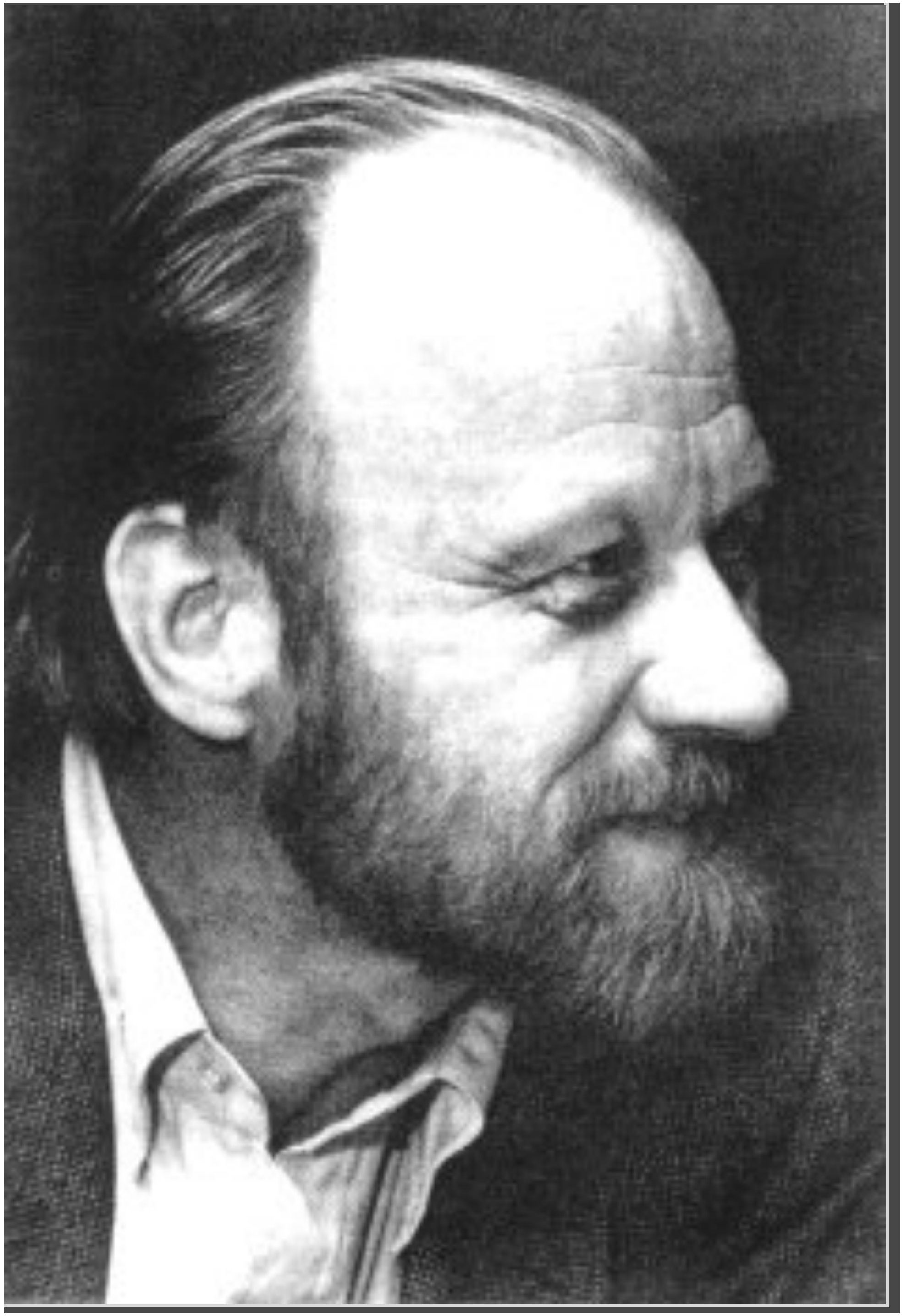
УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

МАЛЫЕ ЗНАМЕНАТЕЛИ И ПРОБЛЕМЫ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ В КЛАССИЧЕСКОЙ И НЕБЕСНОЙ МЕХАНИКЕ

В. И. Арнольд

СОДЕРЖАНИЕ

Введение 92
§ 1. Результаты 92
§ 2. Предварительные сведения из механики 93
§ 3. Предварительные сведения из математики 94
§ 4. Простейшая проблема устойчивости 97
§ 5. Содержание работы 100
Глава I. Теория возмущений 100
§ 1. Интегрируемые и неинтегрируемые проблемы динамики 101
§ 2. Классическая теория возмущений 102
§ 3. Малые знаменатели 103
§ 4. Метод Ньютона 104
§ 5. Собственное вырождение 106
§ 6. Замечание 1 108
§ 7. Замечание 2 110
§ 8. Применение к задаче о собственном вырождении 112
§ 9. Предельное вырождение. Преобразование Биркгофа 113
§ 10. Устойчивость положений равновесия гамильтоновых систем 115
Глава II. Адиабатические инварианты 117
§ 1. Понятие адиабатического инварианта 117
§ 2. Вечная адиабатическая инвариантность действия при медленном периодическом изменении функции Гамильтона 119
§ 3. Адиабатические инварианты консервативных систем 123
§ 4. Магнитные ловушки 126
§ 5. Многомерный случай 129
Глава III. Об устойчивости планетных движений 130
§ 1. Картина движения 130
§ 2. Переменные Якоби, Делоне и Пуанкаре 134
§ 3. Преобразование Биркгофа 136
§ 4. Вычисление асимптотики коэффициентов разложения $\overline{\overline{F}}_1$ 138
§ 5. Задача многих тел 143
Глава IV. Основная теорема 146
§ 1. Основная теорема 147
§ 2. Индуктивная теорема 148
§ 3. Индуктивная лемма 149



COMMUNICATIONS ON PURE AND APPLIED MATHEMATICS, VOL. XI, 81–114 (1958)

New Aspects in the Theory of Stability of Hamiltonian Systems*

JÜRGEN MOSER

1. Introduction

The recent development of accelerators has led to many new questions concerning the stability of orbits governed by ordinary differential equations; a mathematical theory had to be developed to account for, and to predict, the observed behavior of particle beams in the magnetic fields of these various synchrotrons. Without discussing the physical motivation we shall attempt in this paper the mathematical analysis of the pertinent questions in such a theory and point out some open problems.

The important feature of this theory is the fact that the differential equations considered are derived from a variational principle and therefore can be written in the Hamiltonian form. In physical terms this means that the influence of friction is being neglected. Thus an algebraic situation arises which makes the conventional stability theory—as developed mainly by Liapounoff—inapplicable and necessitates a new approach.

In the following introduction we shall state the problems and discuss the results whose proofs will be furnished in the later sections.

A) Linear Systems

a) Linear Problem in General. Consider a system of differential equations of the form

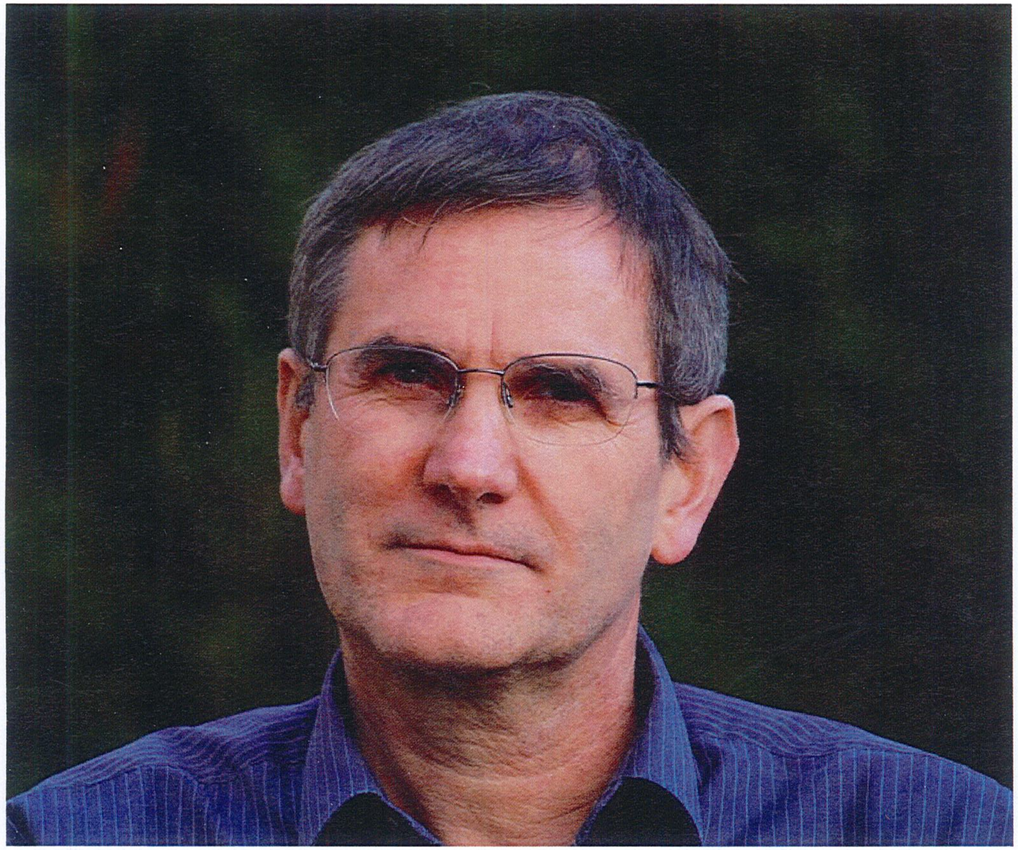
$$\frac{dx}{dt} = A(t)x, \qquad A(t+2\pi) = A(t) \tag{1.1}$$

where x denotes a real m-vector and $A(t)$ a real m by m matrix. The elements of $A(t)$ are assumed to be continuous functions of t and periodic with the same period which we normalize to 2π. The well-known Floquet theory describes the general nature of the solutions of such a system.

The definition of stability of a linear system should be adapted to the kind of application considered. Here we will call the linear system (1.1)

---

*This paper represents results obtained at the Institute of Mathematical Sciences, New York University, under the sponsorship of the Office of Naval Research, Contract N6Ori-201, T.O. 1.



JACQUES LASKAR

2.6 **Possibilité de collisions entre Mercure, Mars, Vénus et la Terre**

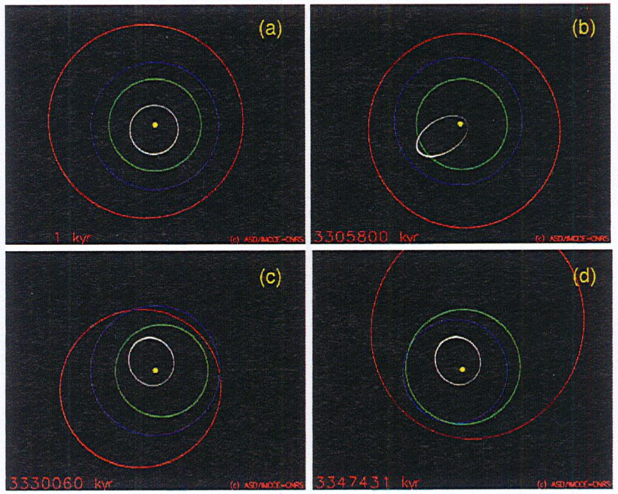


Fig. 6 – Exemple d'évolution à long terme des orbites des planètes telluriques : Mercure (blanc), Vénus (vert), Terre (bleu), Mars (rouge). Le temps est indiqué en milliers d'années (kyr). (a) Au voisinage de l'état actuel, les orbites se déforment sous l'influence des perturbations planétaires, mais sans permettre de rencontres proches ou de collisions. (b) Dans près de 1% des cas, l'orbite de Mercure peut se déformer suffisamment pour permettre une collision avec Vénus ou le Soleil en moins de 5 Ga. (c) Pour l'une des trajectoires, l'excentricité de Mars augmente suffisamment pour permettre une rencontre proche ou une collision avec la Terre. (d) Ceci entraîne une déstabilisation des planètes telluriques qui permet aussi une collision entre Vénus et la Terre (Figure issue des résultats des simulations numériques de Laskar et Gastineau, 2009).

水星，火星，金星和地球
之间碰撞的可能性

最终运动类型

Jean CHAZY

Кирил Александрович
СИТНИКОВ
(K.A. Sitnikov)

Владимир Михайлович
АЛЕКСЕЕВ
(V.A. Alexeev)

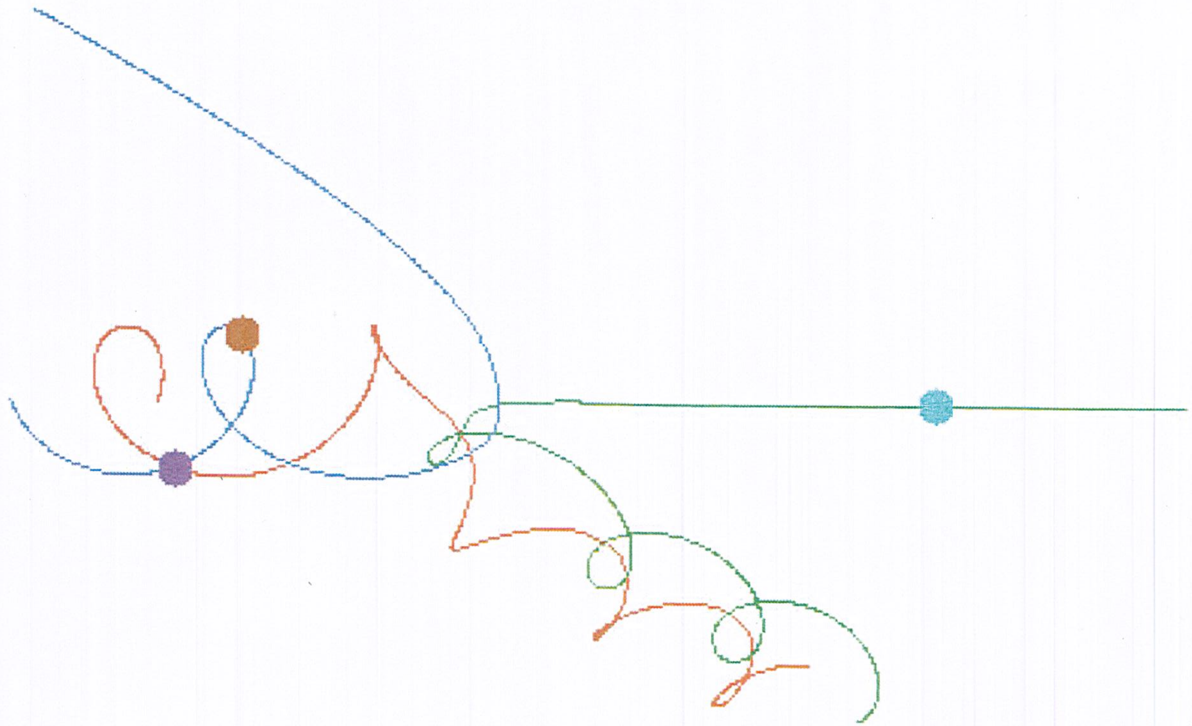


Photo Otto et Pirou

Jean CHAZY
1882-1955

Jean Chazy

Sur l'allure finale du mouvement dans le problème des trois corps;

PAR JEAN CHAZY.

---

1. Dans un Mémoire antérieur [1] j'ai classé les mouvements du problème des trois corps quand le temps croît indéfiniment en sept sortes. Je me propose ici de montrer comment sont réparties les quatre sortes de mouvements qui sont possibles quand *la constante des forces vives dans le mouvement par rapport au centre de gravité est négative*.

Ces quatre sortes de mouvement sont les suivantes. Ce sont d'abord les mouvements que j'ai appelés *hyperboliques-elliptiques*, où deux distances mutuelles, soit r_{13} et r_{23}, sont des infiniment grands d'ordre 1 par rapport au temps, et où la troisième r_{12} est bornée; en général les éléments osculateurs du mouvement de la masse m_3 par rapport au centre de gravité des deux masses m_1 et m_2 sont hyperboliques pour les valeurs assez grandes du temps, et tendent vers des limites, et les éléments osculateurs du mouvement relatif des deux masses m_1 et m_2 sont de même elliptiques et tendent vers des limites : on peut dire brièvement que, quand le temps croît indéfiniment, le problème des trois corps se décompose à la limite en deux problèmes des deux corps. Si dans la condition précédente les distances r_{13} et r_{23} sont d'ordre $\frac{2}{3}$ seulement par rapport au temps, les éléments du mouvement de la

---

[1] *Sur l'allure du mouvement dans le problème des trois corps quand le temps croît indéfiniment* (*Annales de l'École Normale*, 3^e série, t. 39, 1922, p. 29-130).

SiTNiKOV 的例子

STABLE AND RANDOM MOTIONS IN DYNAMICAL SYSTEMS

With Special Emphasis on Celestial Mechanics

BY

JÜRGEN MOSER

Hermann Weyl Lectures
The Institute for Advanced Study

PRINCETON UNIVERSITY PRESS
AND
UNIVERSITY OF TOKYO PRESS

PRINCETON, NEW JERSEY
1973

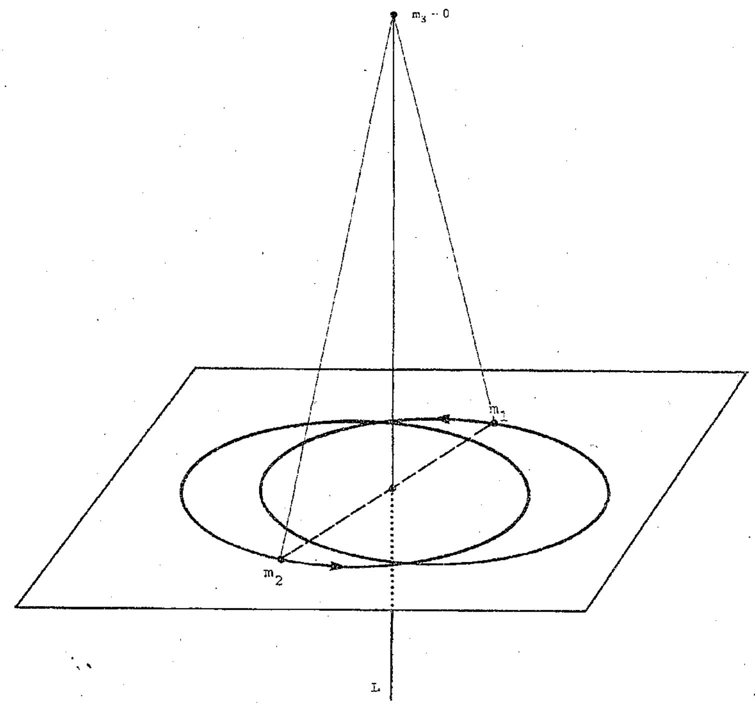


Fig. 7

Actes, Congrès intern. Math., 1970. Tome 2, p. 893 à 907.

D 12 - SYSTÈMES DYNAMIQUES ET ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ORDINAIRES

SUR L'ALLURE FINALE DU MOUVEMENT DANS LE PROBLÈME DES TROIS CORPS

par V. M. ALEXEYEV

Introduction.

Le "Problème des trois corps" est parmi les plus connus en mathématique, en mécanique et en astronomie. 1687 –l'année où parurent les "Principia" de Newton– doit être considérée comme la date de naissance de ce problème. Depuis lors, soit presque 300 ans, le problème des trois corps a servi de pierre de touche aux générations successives de mathématiciens, mettant à l'épreuve leurs nouvelles méthodes.

A. Wintner remarqua une fois que chaque génération pose à sa propre manière les "questions fondamentales du problème des trois corps", et cherche à les résoudre toujours de sa propre façon. Suivant ici G.D. Birkhoff [1], je crois que du point de vue mathématique la question fondamentale est aujourd'hui celle de la description topologique de la décomposition de l'espace des phases en trajectoires des divers types. La classification des variétés intégrales invariantes est un cas particulier de ce problème.

Le problème ainsi posé est, semble-t-il, encore loin de la solution définitive. C'est pourquoi nous nous limiterons à l'un de ses aspects plus particuliers et plus approximatif, à savoir l'étude de **l'allure finale du mouvement**, c'est-à-dire l'étude des solutions lorsque $t \to \infty$.

La recherche dans cette direction commence avec les Mémoires de J. Chazy [2]-[4]. C'est pour rendre hommage à cet éminent mathématicien et astronome français, dont les travaux ont stimulé en grande partie ce qui est exposé ci-dessous, et aussi pour souligner la continuité de l'effort des diverses générations de mathématiciens, que j'ai donné à cette conférence le titre même de deux de ses Mémoires.

Le Mémoire [2] contient la description de toutes les allures finales unilatérales (c'est-à-dire se rapportant seulement au cas $t \to +\infty$ ou seulement au cas $t \to -\infty$). Du point de vue cosmogonique, tout aussi bien que du point de vue mathématique, il serait particulièrement intéressant de décrire les divers types d'évolution du système, c'est-à-dire déterminer quelles allures finales (pour $t \to +\infty$ et $t \to -\infty$) peuvent appartenir à un même mouvement.

La première partie de la presente conférence est un exposé des résultats obtenus dans cette direction. Dans la deuxième partie je traite des méthodes à l'aide desquelles ces résultats ont été obtenus.

Je voudrais remarquer que c'est A.N. Kolmogorov, qui, en 1954, a attiré pour la première fois mon attention sur ces problèmes. Depuis, son interêt amical et ses précieux conseils m'ont aidé plus d'une fois dans mes recherches.

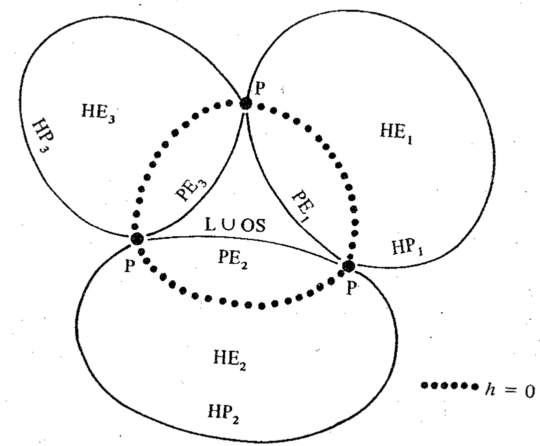


Fig. 1.

La classe OS fut introduite par Chazy à partir de considérations purement logiques, et longtemps l'existence de tels mouvements n'était pas établie. Enfin, en 1959, C.A. Sitnikov [11] a démontré, que $OS \neq \emptyset$. L'existence des autres types de mouvements était déjà connue. Dans ce qui va suivre nous nous limiterons aux types principaux : H, HE_i, L, OS, car les autres ont certainement une codimension positive. Pour différencier les types qui se rapportent à $t \to \pm\infty$ nous nous servirons des indices correspondants : H^+, L^- etc.

Il est bien connu qu'il n'existe pas dans M^{12} d'intégrales premières algébriques autres que les 4 classiques (Bruns) et même d'intégrales univoques analytiques, dépendant analytiquement des masses m_i (Poincaré).

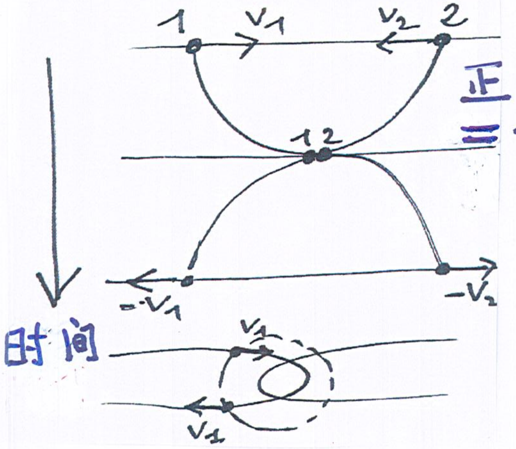
HYPOTHESE. – Dans la région $H \cup \bigcup_i HP_i \cup HE_i$ il existe une famille complète d'intégrales premières univoques analytiques.

Les arguments tendant à confirmer cette hypothèse sont exposés dans [2] et [4].

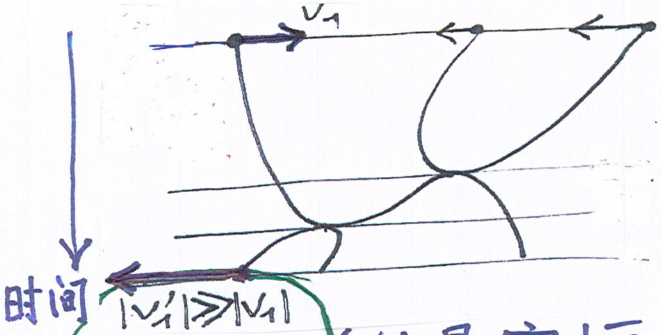
3. Evolution du système ; la région $h > 0$ (table 1)

Les Mémoires [3] et [4] affirment que tout mouvement à les mêmes allures finales pour $t \to -\infty$ et $t \to +\infty$. Assez longtemps les mathématiciens et surtout les astronomes furent convaincus qu'une symétrie si remarquable avait effectivement lieu. Une certaine dissonance ne fut apportée que par les examples de L. Becker [5] qui appartenaient manifestement à $HE_1^- \cap HE_2^+$. Néanmoins Chazy les attribua à des erreurs d'intégration numérique et à l'impossibilité de fixer l'allure finale ($t \to \infty$) par intégration sur un intervalle fini du temps.

三体碰撞



正规化的
三体碰撞
(反弹)



几乎三体碰撞

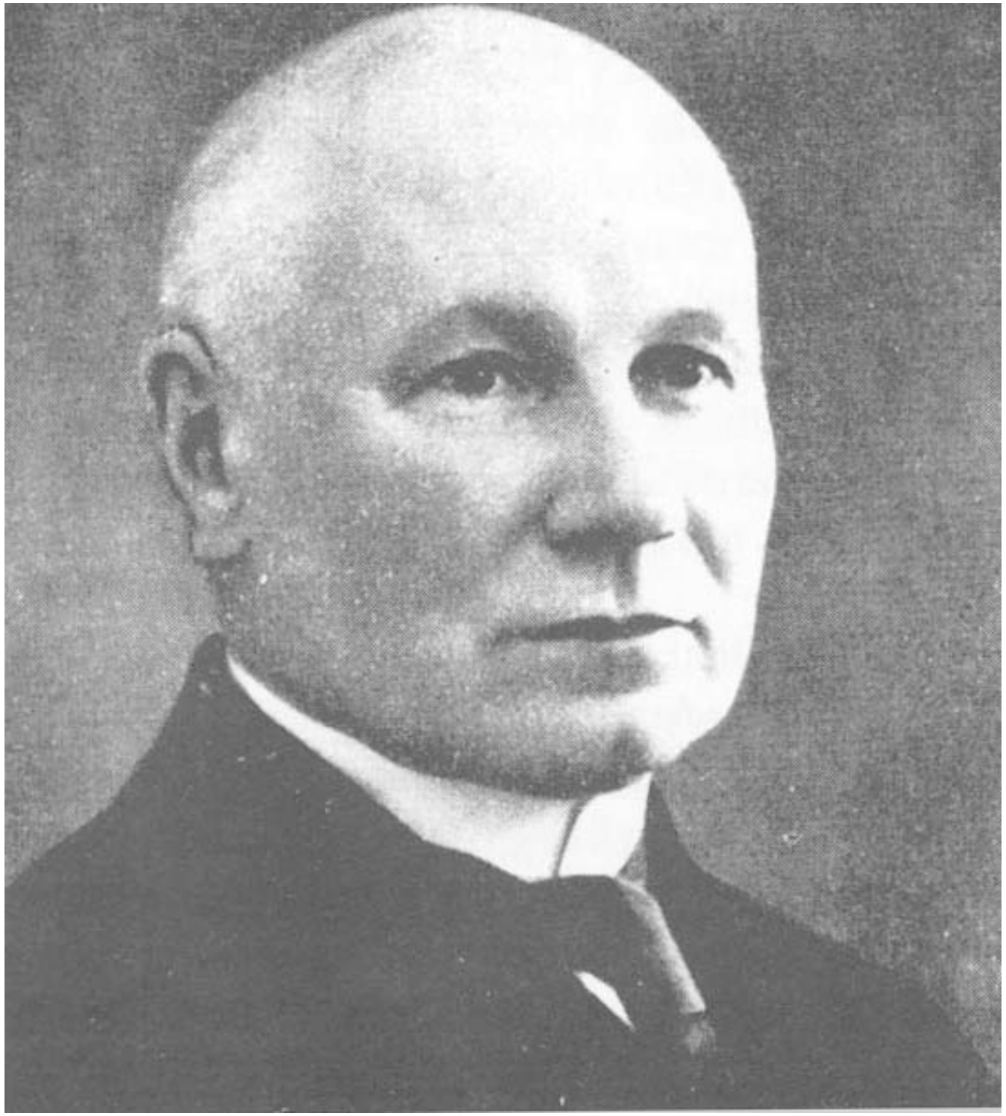
解释：{能量守恒 → 在碰撞中速度是无限的

SUNDMAN, BIRKHOFF：几乎三体碰撞 → 一个质点逃脱

N>3体：在有限的时间内可以达到无穷远

MATHER-McGEHEE 1975, GERVER, XIA 1992

如果只有三体，不可能 (PAINLEVÉ 1895)



MÉMOIRE

sur

LE PROBLÈME DES TROIS CORPS

PAR

KARL F. SUNDMAN

à HELSINGFORS.

L'objet du présent Mémoire, rédigé sur l'invitation de M. MITTAG-LEFFLER, est de présenter une exposition d'ensemble et un résumé des recherches sur le problème des trois corps que j'ai publiées dans les *Acta Societatis Scientiarum Fennicae.*[1]

Les coordonnées et les composantes des vitesses des corps, que nous choisissons en première ligne comme inconnues du problème, satisfont à un système bien connu d'équations différentielles qui les définissent comme fonctions du temps t. Nous nous bornons à étudier un mouvement réel, c'est à dire un mouvement où les coordonnées des corps sont réelles pour les valeurs réelles de t.

Ayant défini un tel mouvement en fixant les valeurs des inconnues à l'instant initial, soit $t = 0$, si l'on fait varier t en passant par des valeurs réelles, on trouve que les inconnues restent fonctions holomorphes de t tant que les trois distances entre les corps sont plus grandes que zéro. Quand une des inconnues cesse d'être régulière, on dit aussi que le mouvement cesse d'être régulier. Si cela se produit quand t converge vers une valeur finie t_1, alors, comme l'a montré d'abord M. PAINLEVÉ,[2] ou les trois distances convergent vers zéro, ou bien l'une des distances converge vers zéro tandis que les deux autres convergent vers une

[1] *Recherches sur le problème des trois corps,* l. c. tome 34, et *Nouvelles recherches sur le problème des trois corps,* l. c. tome 35.

[2] P. PAINLEVÉ, *Leçons etc.*, professées à Stockholm, Paris 1897.

MÉMOIRES ET OBSERVATIONS.

MÉMOIRE SUR LES INTÉGRALES PREMIÈRES DU PROBLÈME DES n CORPS;

PAR M. PAUL PAINLEVÉ.

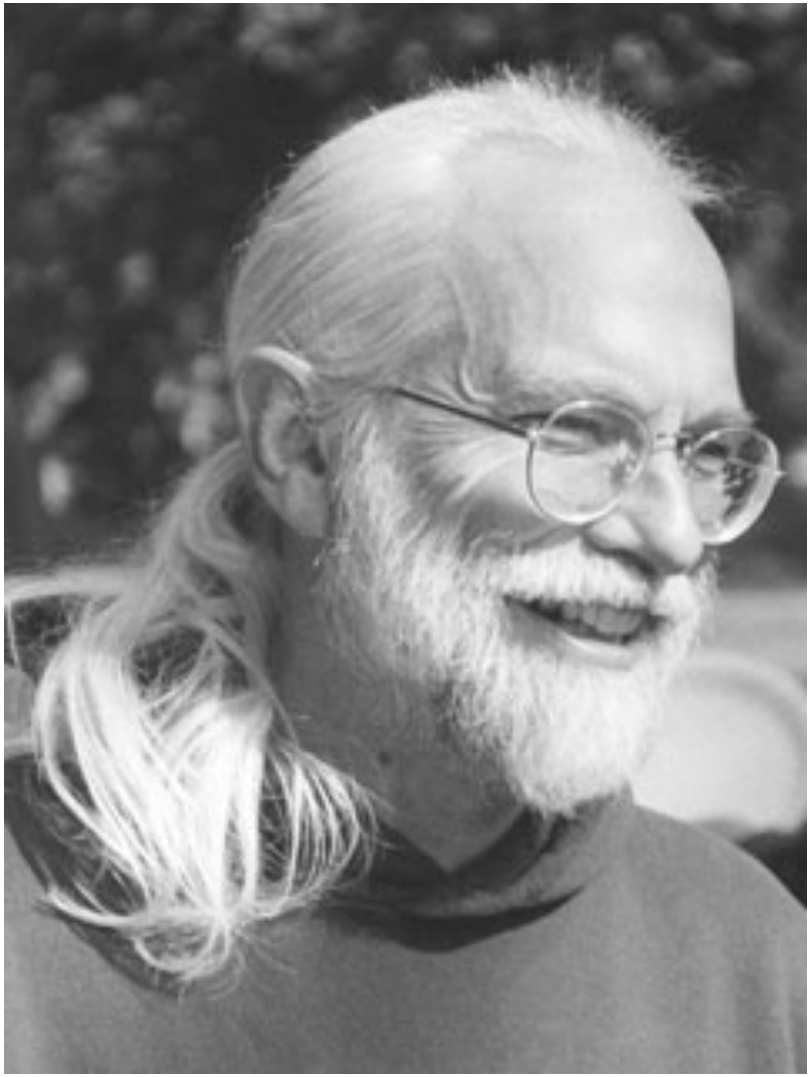
1. M. Bruns a démontré (*Acta mathematica*, t. XI, p. 25-97) que le problème des trois corps (ou des n corps) ne saurait comporter, en dehors des intégrales classiques, d'*intégrales premières, algébriques à la fois par rapport aux coordonnées cartésiennes des n corps et à leurs vitesses*. Mais, au lieu de ces intégrales, il est naturel de considérer la classe beaucoup plus étendue des intégrales premières *algébriques par rapport aux vitesses et renfermant les coordonnées d'une façon entièrement quelconque*. Cette classe est évidemment *invariante* quand on substitue aux $3n$ coordonnées (x_i, y_i, z_i) n'importe quels paramètres $q_1, \ldots, q_{3n}$; autrement dit, toute intégrale première

$$F(x'_1, y'_1, \ldots, z'_n, x_1, y_1, \ldots, z_n)$$

algébrique en $x'_1, y'_1, \ldots, z'_n$ se transforme en une intégrale $F_1(q_1, q_2, \ldots, q_{3n}, q'_1, q'_2, \ldots, q'_{3n})$ algébrique en $q'_1, q'_2, \ldots, q'_{3n}$, et réciproquement.

Dans un Mémoire encore inédit (¹) que l'Académie des Sciences a bien voulu couronner (prix Bordin, décembre 1894), j'ai développé certaines propriétés générales des intégrales premières des équations de la Dynamique et j'en ai déduit une méthode de recherche des *intégrales algébriques par rapport aux vitesses*. Cette méthode peut être employée pour un système quelconque, par exemple pour le corps pesant fixé par un point. Appliquée au problème des n corps, elle permet d'établir qu'*il n'existe* (*en dehors des intégrales classiques*) *aucune intégrale première algébrique par rapport aux vitesses*. C'est ce résultat dont je voudrais indiquer ici la démonstration sous sa forme la plus rapide et la plus simple.

(¹) Ce Mémoire paraîtra prochainement dans les *Acta mathematica*.



Inventiones math. 27, 191–227 (1974)

Triple Collision in the Collinear Three-Body Problem*

Richard McGehee (Minneapolis)

1. Introduction

Consider n point masses moving in k-dimensional space according to the laws of classical mechanics. If particle i has mass $m_i > 0$ and position $q_i \in R^k$, then the negative potential energy is given by

$$U = \sum_{i<j} \frac{m_i m_j}{\|q_i - q_j\|}, \tag{1.1}$$

where $\| \ \|$ denotes the Euclidean norm in R^k. The motion of the particles is described by the system of differential equations

$$m_i \ddot{q}_i = \nabla_{q_i} U, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{1.2}$$

where $\nabla_{q_i} U$ is the gradient of U with respect to q_i.

A position $(q_1, \ldots, q_n)$ of the particles will be called a collision if $q_i = q_j$ for some $i \neq j$. The above system of equations is defined everywhere except at collisions. Suppose we are given the position and momentum of the particles at time $t=0$. If we do not start at a collision, then the standard theorems of differential equations assure the existence and uniqueness of a solution of Eqs. (1.2) on some maximal interval $[0, t^*)$. If $t^* < \infty$, then the solution is said to experience a singularity at t^*.

The behavior of a solution as it approaches a singularity is not fully understood, but some of the possibilities are known. If all of the particles approach a limiting position as $t \to t^*$, it is not difficult to show that the limiting position must be a collision [12, 17]. The singularity is then said to be due to collision and the solution is said to end in collision. If m of the particles coincide while the rest have distinct positions, then the collision is called an m-tuple collision. It is unknown whether there are singularities not due to collision.

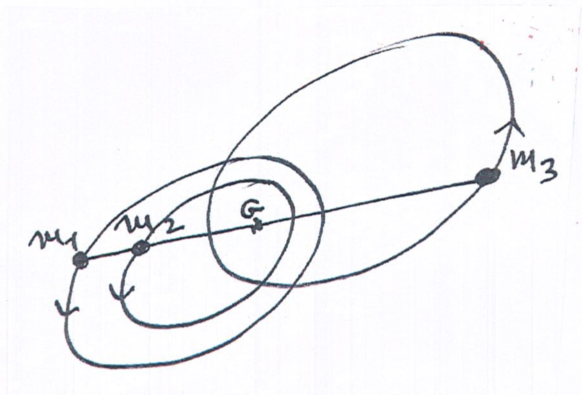
* Supported by NSF Grant GP-38955.

精确解

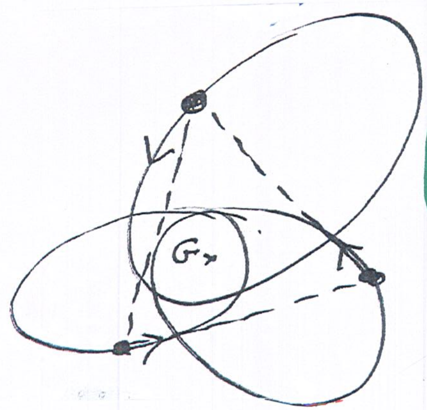
缘起 { 对称（平移，旋转）
势能的齐次性

相似解：在运动过程中三体的三角形保持相似，每个质点都描述一个类似的开普勒 { 椭圆 / 抛物线 / 双曲线

EULER 1767（共线情况）　　LAGRANGE 1772（一般情况）



共线的



等边的

Lagrange : "Essai sur le problème des trois corps

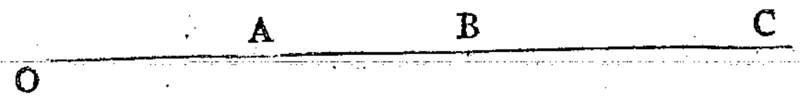
只有两种形状是有可能的

（中心构型）

DE MOTV RECTILINEO TRIVM CORPORVM SE MVTVO ATTRAHENTIVM.

Auctore

L. EVLERO.



I.

Sint A, B, C maſſae trium corporum eorumque diſtantiae a puncto fixo O ad datum tempus t ponantur

$$OA = x, \quad OB = y \quad \text{et} \quad OC = z$$

vbiquidem ſumitur $y > x$ et $z > y$. Hinc motus principia praebent has tres aequationes:

$$\text{I.} \quad \frac{ddx}{dt^2} = \frac{B}{(y-x)^2} + \frac{C}{(z-x)^2};$$

$$\text{II.} \quad \frac{ddy}{dt^2} = \frac{-A}{(y-x)^2} + \frac{C}{(z-y)^2}$$

$$\text{III.} \quad \frac{ddz}{dt^2} = \frac{-A}{(z-x)^2} - \frac{B}{(z-y)^2}$$

vnde facile deducuntur binae aequationes integrabiles:

prior $\quad A\,dx + B\,dy + C\,dz = E\,dt$ et $Ax + By + Cz = Et + F$

poſterior $\quad \frac{A\,dx^2 + B\,dy^2 + C\,dz^2}{dt^2} = G + \frac{2AB}{y-x} + \frac{2AC}{z-x} + \frac{2BC}{z-y}$

Hinc autem ob defectum tertiae aequationis integralis parum ad motus cognitionem concludere licet.

2. Sta-

ESSAI

SUR

LE PROBLÈME DES TROIS CORPS.

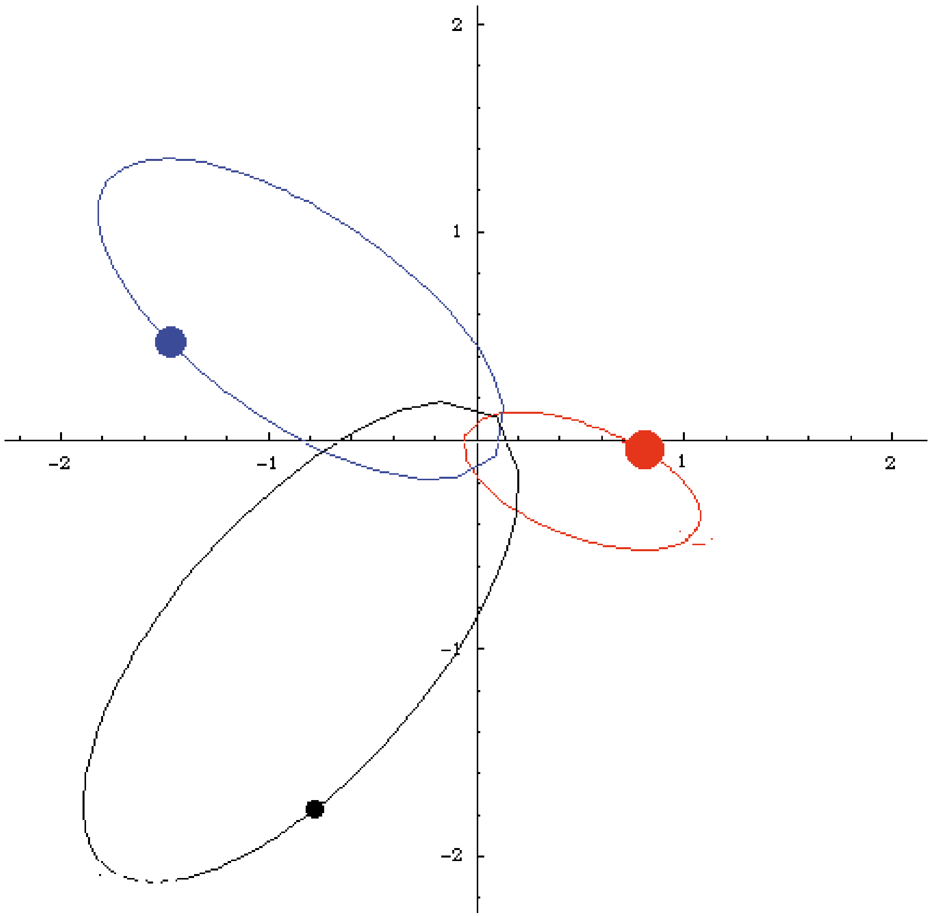
Juvat integros accedere fontes.

LUCR.

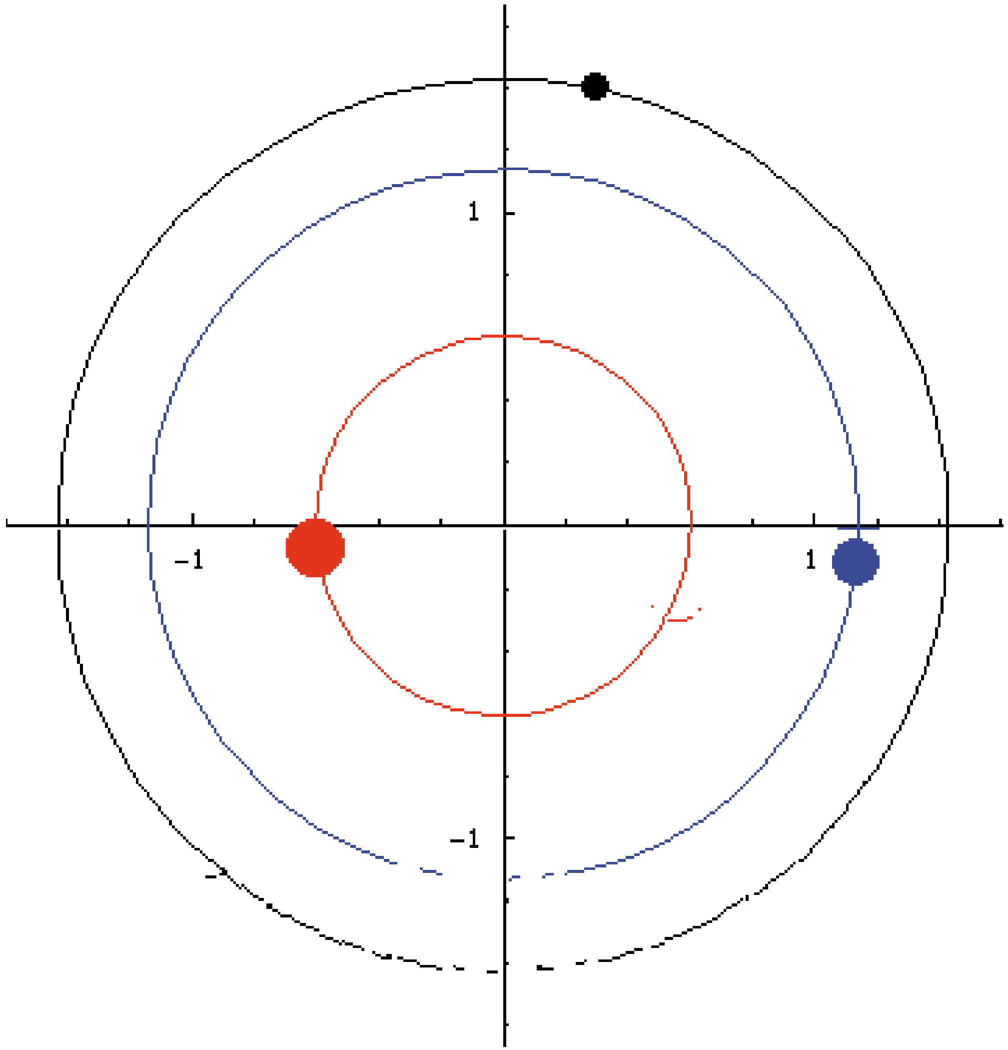
(Prix de l'Académie Royale des Sciences de Paris, tome IX, 1772.)

AVERTISSEMENT.

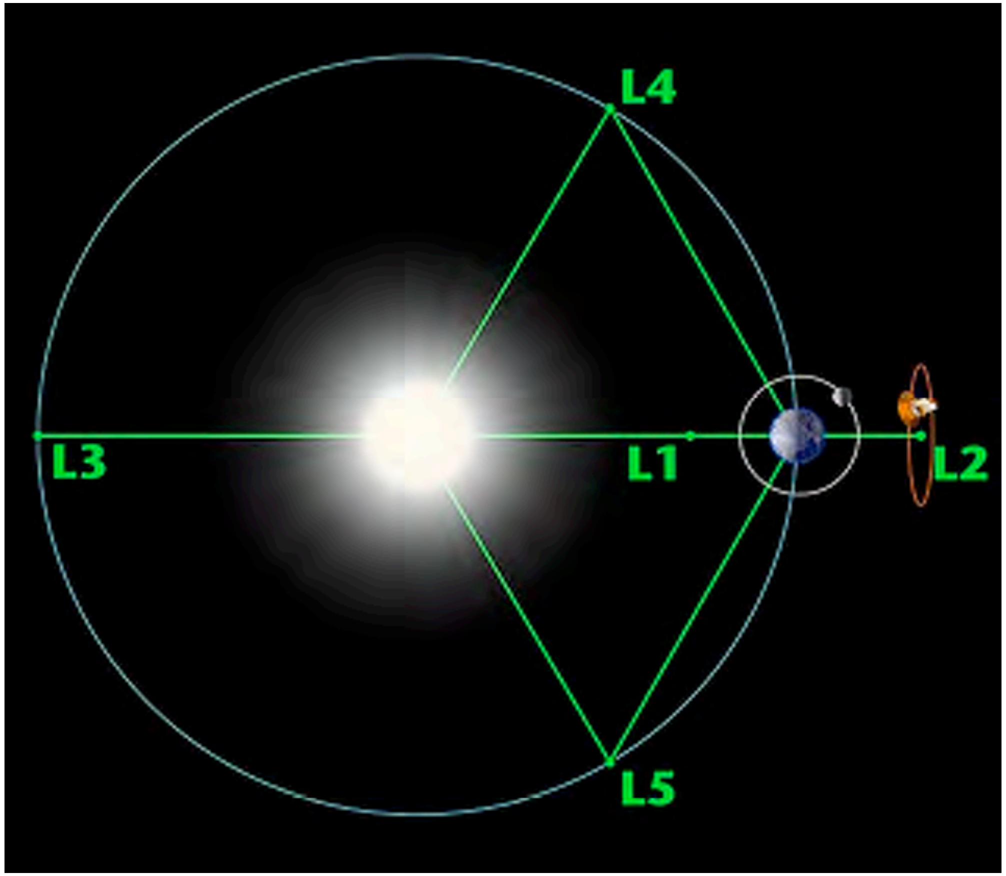
Ces Recherches renferment une Méthode pour résoudre le Problème des trois Corps, différente de toutes celles qui ont été données jusqu'à présent. Elle consiste à n'employer dans la détermination de l'orbite de chaque Corps d'autres éléments que les distances entre les trois Corps, c'est-à-dire, le triangle formé par ces Corps à chaque instant. Pour cela, il faut d'abord trouver les équations qui déterminent ces mêmes distances par le temps; ensuite, en supposant les distances connues, il faut en déduire le mouvement relatif des Corps par rapport à un plan fixe quelconque. On verra, dans le premier Chapitre, comment je m'y suis pris pour remplir ces deux objets, dont le second surtout demande une analyse délicate et assez compliquée. A la fin de ce Chapitre, je ras-

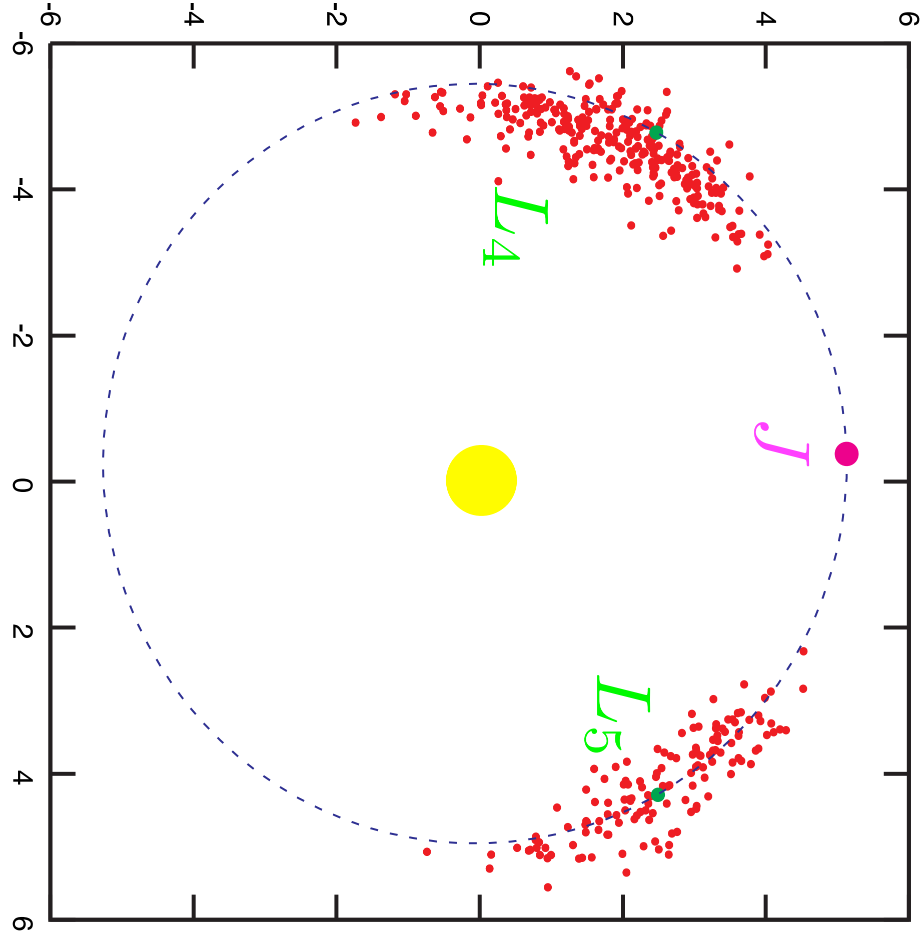


2
1
-2
-1
1
2
-1
-2



1
-1
1
-1

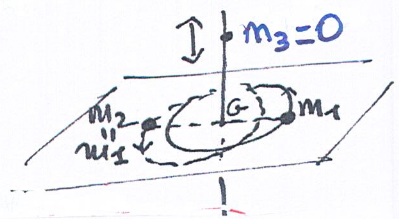

L4
L3
L1
L2
L5


-6
-4
-2
0
2
4
6
L_4
L_5
J

非摄动解

例1：符号动力学（几何方法）

SITNIKOV 解
（1960）



与平面的接替交点
就像是掷硬币

例2：变分法（分析/几何方法）

POINCARÉ
（1896）

最小化作用量
沿着一条在构型
空间中的闭合曲线

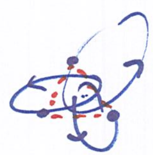
动能 势能

$$S=\int_a^b \underbrace{(E_c - E_p)}_{\text{拉格朗日量}}\,dt$$

$\Longrightarrow$ 周期解如果没有碰撞的话

（为了避开这个问题，庞加莱被迫选择 $\frac{1}{23}$ 替 $\frac{1}{22}$）

A. VENTURELLI（2000）：
以这种方法得到了拉格朗日等边三角形解



Appendice 2. La note aux C.R.A.S. de Poincaré (30 novembre 1896).

SUR LES SOLUTIONS PÉRIODIQUES
ET LE PRINCIPE DE MOINDRE ACTION

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 123, p. 915-918 (30 novembre 1896).

La théorie des solutions périodiques peut, dans certains cas, se rattacher au principe de moindre action.

Supposons trois corps se mouvant dans un plan et s'attirant en raison inverse du cube des distances ou d'une puissance plus élevée de ces distances; j'appelle a, b, c ces trois corps.

L'énergie cinétique T est essentiellement positive et il en est de même de la fonction des forces U, qui est égale à une somme de termes de la forme $\frac{kmm'}{r^n}$, où k est une constante positive, m et m' les masses de deux des trois corps, r leur distance et n un exposant au moins égal à 2.

L'action hamiltonienne

$$J = \int_{t_0}^{t_1} (T + U)\, dt$$

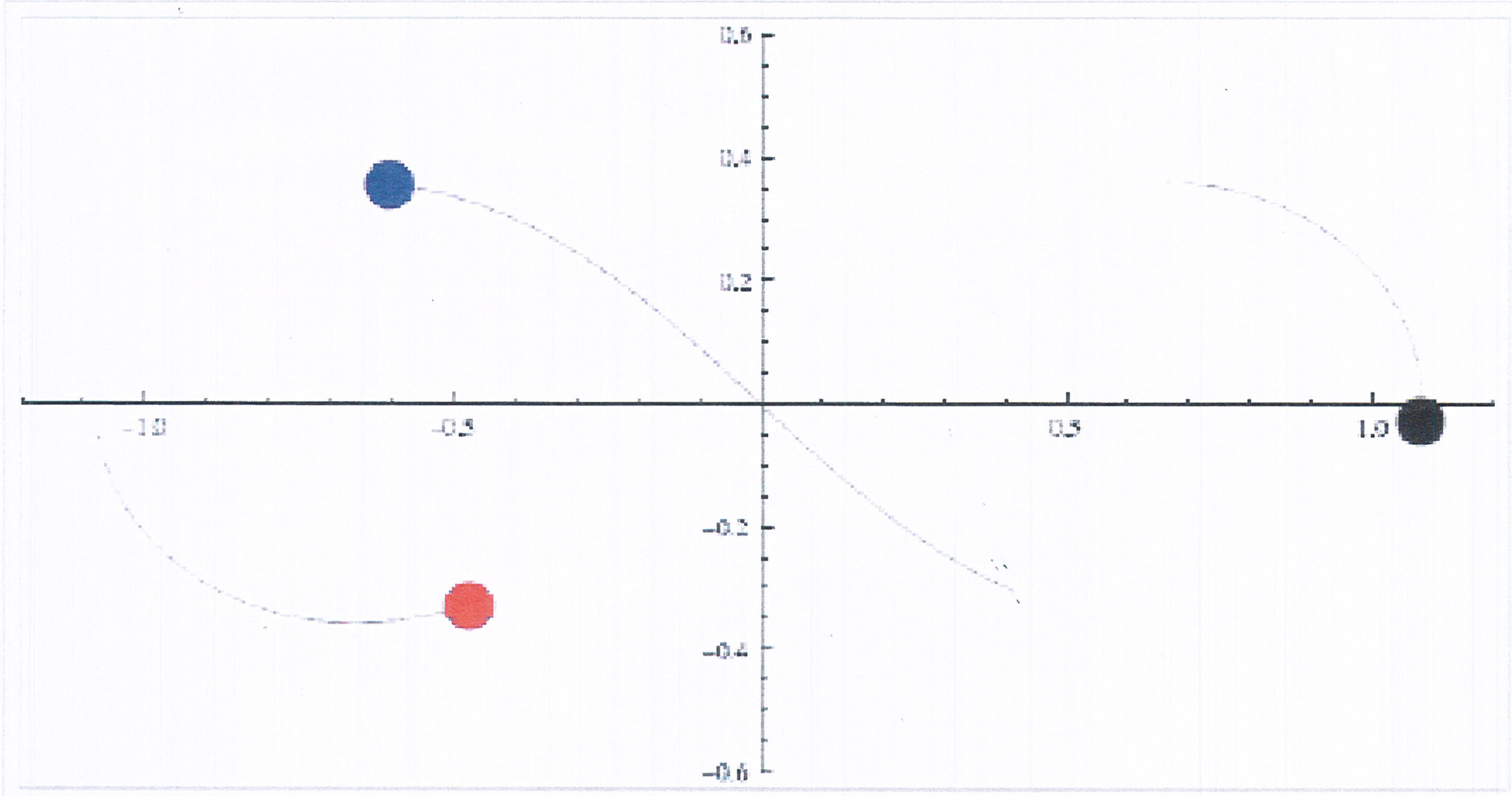
sera donc essentiellement positive.

Considérons une classe de trajectoires de nos trois corps a, b, c; ce seront des trajectoires fictives, c'est-à-dire ne satisfaisant pas aux équations du mouvement; mais elles seront soumises aux conditions suivantes :

1° Au temps t_1 les distances des trois corps seront les mêmes qu'au temps t_0; les vitesses seront les mêmes en grandeur et feront les mêmes angles avec les côtés du triangle des trois corps; en d'autres termes, la figure formée par les trois corps et par les droites qui représentent leurs vitesses aura repris à l'époque t_1 la même forme qu'elle avait à l'époque t_0; ou bien encore les

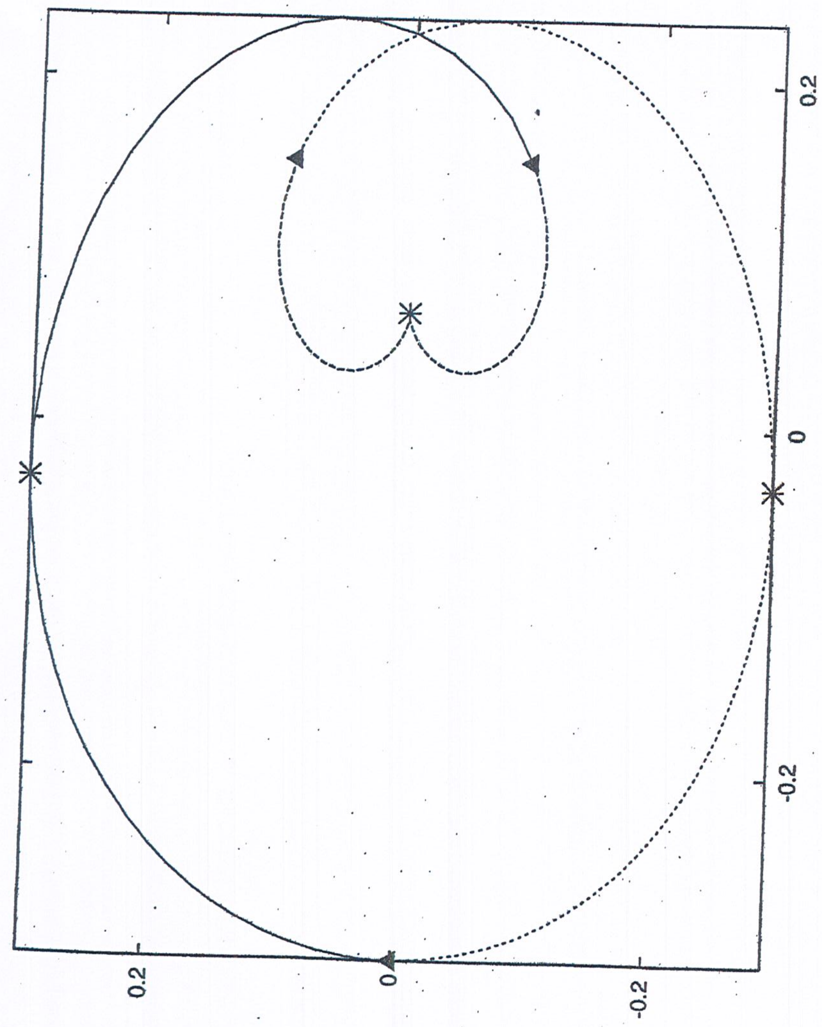
三个质量相等的情况

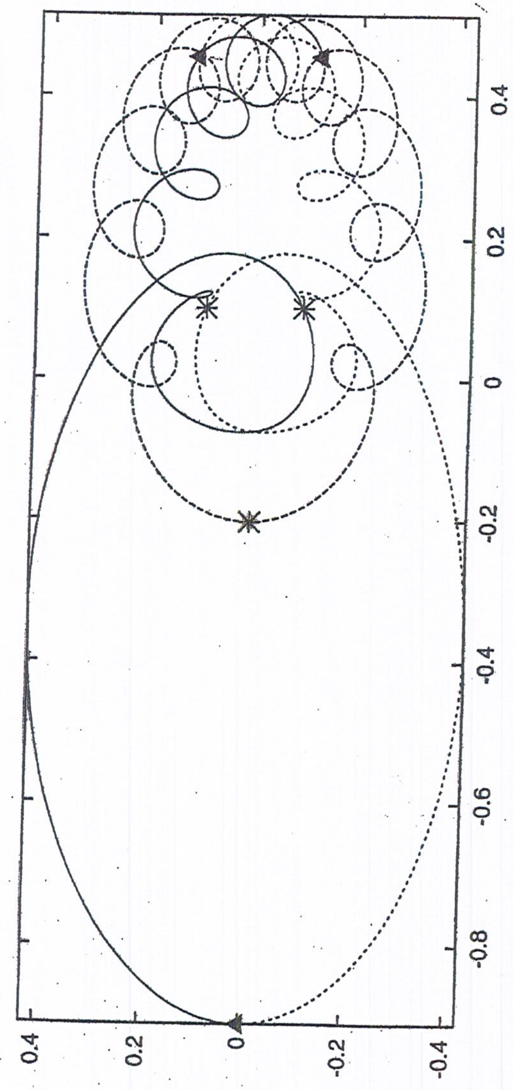
D6对称约束下的最小化



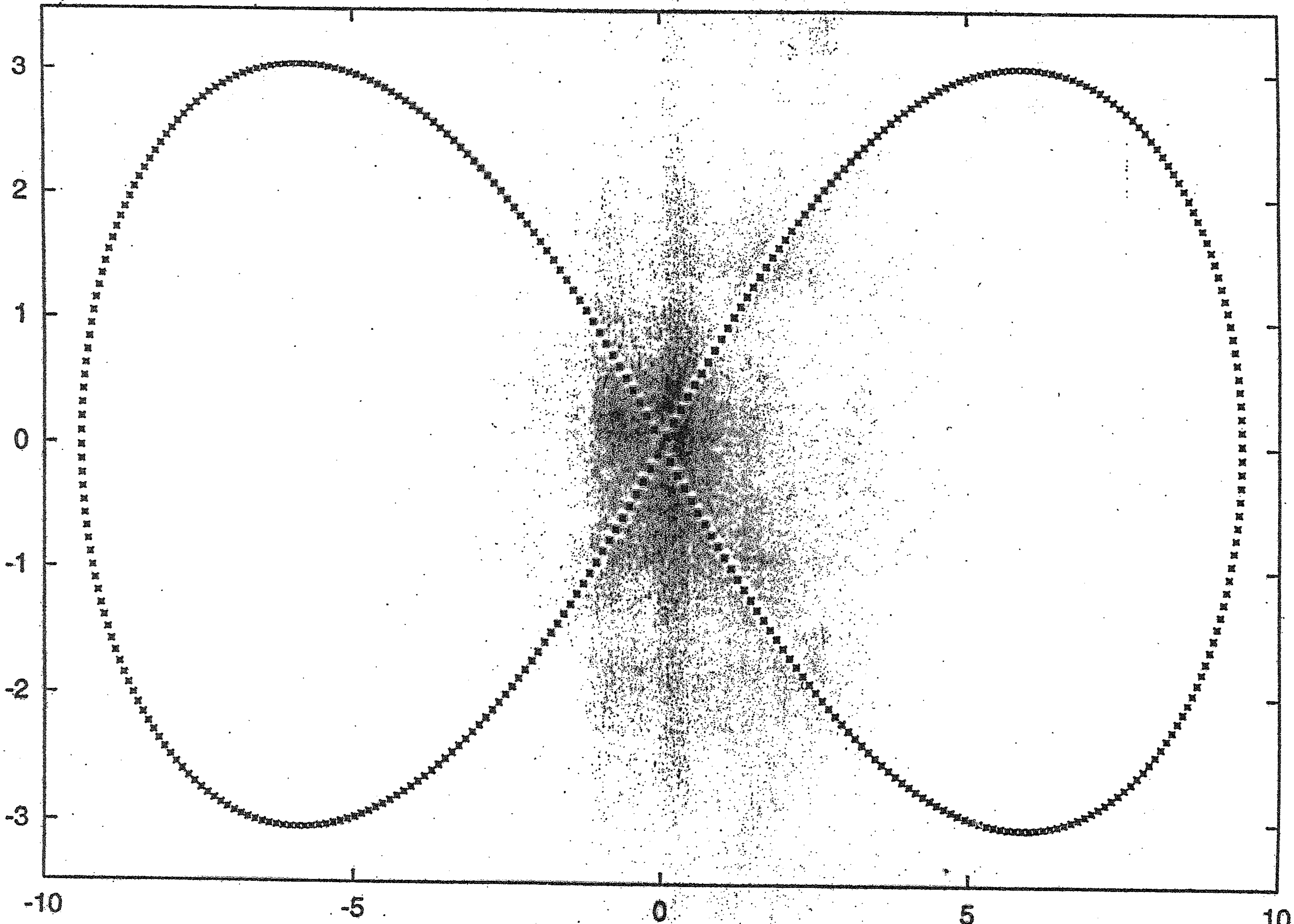
A. CHENCINER & R. MONTGOMERY (2000)

Carles Simó 发现的几个编舞（三体）





399 caps [illegible]



中国梦
Chinese Dream
三体问题
www.scholarpedia.org/article/Three_body_problem

https://perso.imcce.fr/alain-chenciner

https://perso.imcce.fr/alain-chenciner