



STABILITÉ STRUCTURELLE ET ERGODICITÉ (OU CATÉGORIE ET MESURE)

A. Chenciner

► To cite this version:

A. Chenciner. STABILITÉ STRUCTURELLE ET ERGODICITÉ (OU CATÉGORIE ET MESURE). Journal de Physique Colloques, 1978, 39 (C5), pp.C5-69-C5-77. 10.1051/jphyscol:1978520 . jpa-00217487

HAL Id: jpa-00217487

<https://hal.archives-ouvertes.fr/jpa-00217487>

Submitted on 1 Jan 1978

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

STABILITÉ STRUCTURELLE ET ERGODICITÉ (OU CATÉGORIE ET MESURE) (*)

A. CHENCINER

I.M.S.P., Parc Valrose 06034 Nice, France

Résumé. — La notion de famille *générique* d'équations différentielles soulève des problèmes profonds qui sont abordés ici sur des exemples : on illustre en particulier l'antagonisme entre les notions topologiques et les notions métriques.

Abstract. — We illustrate by examples some deep problems arising from the notion of a *generic* family of differential equations : the antagonism between metric and topological points of view is discussed.

L'étude systématique de la propriété de *stabilité structurelle* en dynamique qualitative remonte à Andronov et Pontryagin [1] ; il semble en première analyse que toute équation décrivant un processus physique observable de façon répétée doive posséder cette propriété.

Après avoir donné la définition et indiqué des exemples (en particulier ceux de la théorie des catastrophes de R. Thom), on rappelle les difficultés soulevées par cette notion dans le cas des équations différentielles autonomes (c'est-à-dire les difficultés du modèle métabolique de la théorie des catastrophes) ; on indique en particulier les implications de théorèmes profonds récemment démontrés par M. Herman : si l'état asymptotique d'un système dépendant d'un paramètre est décrit par les attracteurs d'un champ de vecteurs sans singularité sur un tore de dimension deux, le physicien observera-t-il plus souvent un mouvement périodique ou un mouvement quasi périodique lorsque le paramètre varie ? sans doute, en fait, ne saura-t-il pas distinguer entre les deux !

1. Stabilité structurelle. — Soit E un espace topologique, \sim une relation d'équivalence sur E . Si $x, y \in E$ et si $x \sim y$, on dira que x et y ont *même structure*.

Si l'ensemble des $y \in E$ ayant même structure que x est un voisinage de x (i.e. contient un ouvert contenant

x), on dira que x est structurellement stable⁽¹⁾ : en d'autres mots, x est structurellement stable si tout y assez voisin de x dans E a même structure que x .

Il résulte de la définition que l'ensemble des $x \in E$ qui sont structurellement stables forme un ouvert (éventuellement vide) de E .

EXEMPLES. — 1.1 ACTION D'UN GROUPE DE LIE DE DIMENSION FINIE SUR UNE VARIÉTÉ DIFFÉRENTIABLE DE DIMENSION FINIE. — E = variété de classe C^∞ de dimension finie.

G = groupe de Lie de classe C^∞ de dimension finie agissant sur E de manière C^∞ (i.e. on se donne une application $(g, x) \rightarrow g.x$ de $G \times E$ dans E de classe C^∞ telle que $g_1.(g_2.x) = (g_1 g_2).x$).

$x \sim y$ signifie qu'il existe $g \in G$ tel que $y = g.x$.

La simplicité (relative) de ce cas vient de ce que, par le théorème du rang constant, chaque classe d'équivalence (orbite) est l'image d'une variété par une immersion injective (resp. est une sous-variété si l'action est propre).

Remarque 1. — On travaille en pratique avec la définition suivante : $x \in E$ est structurellement stable si pour tout voisinage \mathcal{U} de l'élément neutre dans G il existe un voisinage \mathcal{W} de x dans E tel que pour tout $y \in \mathcal{W}$, il existe $g \in \mathcal{U}$ tel que $y = g.x$.

(*) Pour reprendre le titre d'un très beau livre d'Oxtoby.

(¹) Cette définition n'est pas exactement la définition utilisée par les mathématiciens ; voir les remarques faites lors des exemples.

Cette définition est *a priori* plus restrictive, mais plus maniable techniquement (caractère plus local). Dans certains cas, elle coïncide avec la première définition.

Exemple 1.1.1 (très simple). — $E = \mathbb{R}$, $G = \text{GL}(\mathbb{R})$ (groupe multiplicatif des homothéties de \mathbb{R} de rapport non nul).

Il y a deux classes d'équivalence : 0 et $\mathbb{R} - 0$; l'ensemble des x structurellement stables coïncide avec $\mathbb{R} - 0$ et est donc ouvert et dense (i.e. aussi près que l'on veut de tout $y \in \mathbb{R}$ (éventuellement 0), il existe un x structurellement stable).

Exemple 1.1.2 (simple). — $E = L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ espace vectoriel des applications linéaires de \mathbb{R}^m dans \mathbb{R}^n (qu'on peut identifier à l'espace vectoriel des matrices réelles $n \times m$, ou encore à \mathbb{R}^{nm} ce qui lui donne une topologie naturelle).

$G = \text{GL}(\mathbb{R}^m) \times \text{GL}(\mathbb{R}^n)$ groupe des couples de changements de base à la source et au but (couples de matrices carrées $m \times m$ et $n \times n$).

L'action de G sur E est définie par

$$(g, h).x = h x g^{-1} \text{ (produit des matrices).}$$

Il y a $\inf (m, n)$ classes d'équivalence : chaque classe est déterminée par son rang ρ et est formée des matrices équivalentes à

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ \vdots & & & & \\ 1 & & & & \\ 0 & & & & \\ 0 & & & & \end{pmatrix} \quad (\rho \text{ termes } \neq 0).$$

Les matrices structurellement stables sont celles de rang maximum : elles forment un ouvert dense dans E (toute perturbation assez petite d'une matrice de rang maximum est encore de rang maximum, et toute matrice peut être rendue de rang maximum par une perturbation aussi petite que l'on veut).

Si $m = n = 1$ on retrouve l'exemple précédent à cause de la commutativité du produit des matrices dans ce cas.

Si $m = n = 2$, $E = \mathbb{R}^4$ et les éléments structurellement stables sont ceux qui n'appartiennent pas au cône quadratique d'équation $x_1 x_4 - x_2 x_3 = 0$ (déterminant !).

Exemple 1.1.2'. — $E = \{ \text{formes quadratiques sur } \mathbb{R}^n \}$ (qu'on peut identifier aux matrices réelles symétriques).

$G = \text{GL}(\mathbb{R}^n)$ agissant par $g.x = g x^T g^{-1}$ (g = transposée).

Les classes d'équivalence sont caractérisées par leur indice (nombre de + moins nombre de - dans une diagonalisation) et leur rang.

Si $n = 2$, on peut faire un dessin car $E = \mathbb{R}^3$!

Exemple 1.1.3 (moins simple). — $E = L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. $G = \text{GL}(\mathbb{R}^n)$ agissant par $g.x = g x g^{-1}$ (changement de base pour un endomorphisme de \mathbb{R}^n).

Un phénomène nouveau se produit, l'apparition d'invariants de l'orbite pouvant varier continûment (ici les valeurs propres de x). Aucun élément de E n'est donc structurellement stable pour cette relation d'équivalence trop fine ; c'est en particulier ce phénomène qui dictera le choix de la notion de stabilité structurelle pour les équations différentielles autonomes (voir plus loin).

Un cas particulier trivial de cet exemple est obtenu lorsque $n = 1$: chaque point de $E = \mathbb{R}$ est alors une orbite.

1.2 FONCTIONS ET GERMES DE FONCTIONS. — Il s'agit maintenant de l'action d'un groupe de Lie de dimension infinie sur une variété de dimension infinie. La difficulté technique vient de ce que les variétés en question sont modelées sur des espaces vectoriels métriques complets (mais pas des espaces de Banach) dans lesquels on ne dispose pas du théorème élémentaire des fonctions implicites.

On peut répéter la remarque faite à la suite de 1.1.

Exemple 1.2.1. — M variété compacte (pour simplifier).

$E = \{ f : M \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ indéfiniment dérivable} \}$ muni de la topologie de la convergence uniforme de f et de toutes ses dérivées partielles dans chaque carte de M (« topologie C^∞ »).

G = groupe des difféomorphismes indéfiniment dérivable de M (changements de coordonnées globaux) agissant par $g.f = f \circ g^{-1}$.

Définition. — 1) Un point *critique* de $f \in E$ est un point de M où toutes les dérivées partielles de M s'annulent.

2) Un point critique p de $f \in E$ est dit *non dégénéré* s'il existe un système de coordonnées dans M au voisinage de p dans lequel $f - f(p)$ s'écrit comme une forme quadratique non dégénérée (i.e. de rang égal à la dimension de M).

3) $f \in E$ est appelée une *fonction de Morse excellente* si tous ses points critiques sont non dégénérés et si les valeurs de f en ses points critiques sont toutes différentes.

Le théorème suivant remonte essentiellement à M. Morse (voir par exemple [9]).

Théorème. — 1) Les $f \in E$ structurellement stables sont exactement les fonctions de Morse excellentes.

2) Les $f \in E$ structurellement stables forment un ouvert dense dans E .

Cet exemple (ou sa forme localisée) est à la base du modèle statique de la théorie des catastrophes [24]. L'exemple qui suit est à la base du modèle métabolique de la même théorie.

1.3 CHAMPS DE VECTEURS (= équations différentielles autonomes [6] et [15]). — Ici, plus d'action de groupe.

Exemple 1.3.1. — Soit M une variété compacte.

E est l'ensemble, muni de la topologie C^∞ , des champs de vecteurs de classe C^∞ sur M . On peut encore identifier E à l'ensemble des groupes à un paramètre de difféomorphismes de M (actions de \mathbb{R} sur M , de classe C^∞), le champ X étant associé au groupe à un paramètre φ_t , défini par

$$d\varphi_t(x)/dt = X(\varphi_t(x)),$$

voir figure 1.

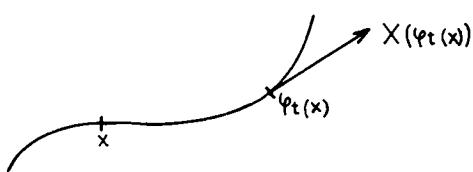


FIG. 1.

On dira que $X \sim Y$ s'il existe un *homéomorphisme* de M transportant les courbes intégrales ⁽²⁾ orientées de X sur celles de Y (on ne s'intéresse pas au paramétrage mais seulement à la géométrie de l'ensemble des courbes intégrales orientées).

Remarque 1. — L'étude au voisinage d'un point où le champ X s'annule montre immédiatement (*via* l'exemple 1.1.3) que l'on obtient une relation d'équivalence beaucoup trop fine en faisant agir sur E le groupe des difféomorphismes indéfiniment dérivables de M (voir aussi [7], remarque 16.2).

Remarque 2. — Dans la définition originale de [1], donnée pour M de dimension deux, on demandait à l'homéomorphisme ci-dessus d'être *assez petit* (comparer aux remarques faites en 1.1 et 1.2). En fait, si $\dim M = 2$, les deux notions de stabilité structurelle coïncident (ce n'est pas évident *a priori* ! [19]).

En dimension un, il est très facile de caractériser les champs de vecteurs structurellement stables ($M =$ le cercle T^1) : il y a un nombre fini (éventuellement nul) de points singuliers (points où le champ s'annule) et ces points sont non-dégénérés (i.e. l'équation différentielle s'écrit localement $dx/dt = Ax + O(x^2)$, $A \neq 0$, si x est une coordonnée locale sur T^1). Si $A > 0$ (< 0) on parle d'un point singulier répulsif (attractif) (Fig. 2).



FIG. 2.

En dimension deux, les points singuliers non-dégénérés peuvent être de trois types suivant les valeurs propres de A (qui est maintenant une matrice réelle 2×2 dont on suppose les valeurs propres λ_1, λ_2 de partie réelle non nulle) (Fig. 3).

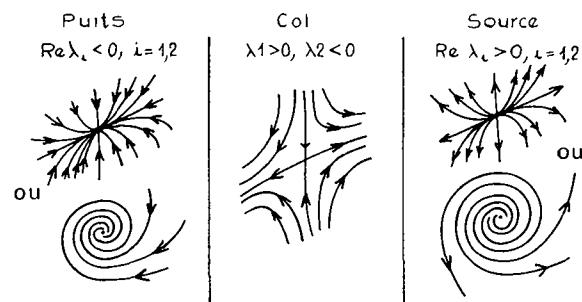


FIG. 3.

Il peut également se présenter des *orbites périodiques*.

On dira qu'une orbite périodique est non dégénérée si le difféomorphisme local P de \mathbb{R} au voisinage de 0 obtenu en considérant l'application de premier retour de Poincaré (voir Fig. 4) a une dérivée en 0 de module différent de 1.

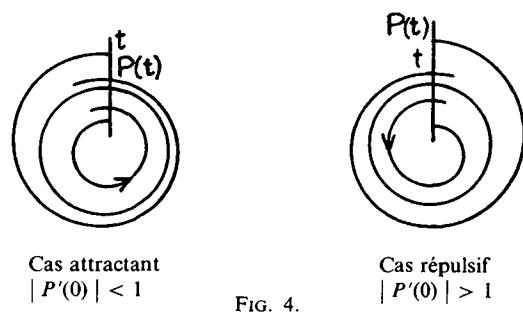


FIG. 4.

Définissons enfin la notion d'ensemble-limite d'une orbite [22] : il est commode pour cela d'utiliser la notation *groupe à un paramètre* φ_t .

L'ensemble ω -(resp. α -) limite de l'orbite $\{\varphi_t(x_0), t \in \mathbb{R}\}$ est l'ensemble des points $q \in M$ pour lesquels il existe une suite $t_i \rightarrow +\infty$ (resp. $-\infty$) telle que $\lim \varphi_{t_i}(x_0) = q$.

⁽²⁾ On dira aussi *orbites*.

Exemple. — Un puits ou une orbite périodique attractante non dégénérée sont ensembles ω -limite des orbites proches (Fig. 5).

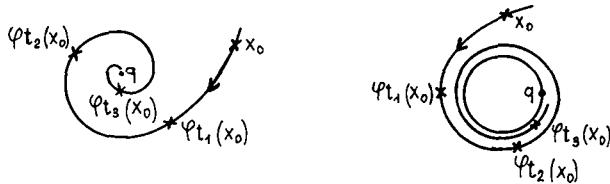


FIG. 5.

Nous pouvons énoncer maintenant le

Théorème de Peixoto [19], [22] (M de dimension deux). — 1) $x \in E$ est structurellement stable si et seulement si

- (i) x n'a qu'un nombre fini de points singuliers, tous non dégénérés ;
- (ii) x n'a qu'un nombre fini d'orbites périodiques, toutes non dégénérées ;
- (iii) l'ensemble ω -limite (resp. α -limite) d'une orbite est un point singulier ou une orbite périodique ;
- (iv) aucune trajectoire ne connecte deux cols.

2) L'ensemble des x structurellement stables est un ouvert dense de E .

En particulier, tout élément de E peut être déformé (par une petite déformation) en un élément structurellement stable qu'on sait bien décrire. Nous verrons plus loin des exemples importants de champs de vecteurs non structurellement stables sur le tore T^2 de dimension deux (les champs ergodiques pour la mesure de Lebesgue).

Malheureusement, la simplicité de ce théorème ne subsiste pas en dimension plus grande : les champs de vecteurs structurellement stables ne sont pas denses si $\dim M \geq 3$ [21].

Pour d'autres notions de stabilité structurelle, voir la belle mise au point de Smale dans [22] et les travaux subséquents de son école.

Une notion importante est celle de stabilité structurelle des attracteurs d'un champ de vecteurs : en gros, un sous-ensemble Ω de M est appelé un attracteur de $x \in E$ s'il existe un voisinage U de Ω dans M que l'équation différentielle envoie sur Ω lorsque le temps t tend vers $+\infty$; contrairement aux espoirs de certains, les deux propriétés suivantes ne sont pas vérifiées par un sous-ensemble dense de E (i.e. étant donné un champ de vecteurs sur M de dimension ≥ 3 , on ne peut pas toujours lui donner ces propriétés par une petite déformation) :

- 1) avoir un nombre fini d'attracteurs ;
- 2) avoir des attracteurs structurellement stables (i.e. des attracteurs dont le type topologique ne change pas par une petite perturbation du champ de vecteurs).

D'autre part, alors qu'en dimension ≤ 2 , les théorèmes de Poincaré-Bendixson, Denjoy et A. J. Schwartz [11] assurent la simplicité topologique de tout attracteur (stable ou pas) d'un champ de vecteurs sur une variété de dimension ≤ 2 , les attracteurs en dimension ≥ 3 , même structurellement stables, ont en général une structure topologique très compliquée (attracteurs étranges).

L'existence d'un sous-espace de E gros au sens de la catégorie de Baire (i.e. intersection dénombrable d'ouverts denses) qui soit formé d'équations *faciles à décrire géométriquement* est donc, dès que dimension $M \geq 3$, une utopie. Ceci pose en fait le problème fondamental suivant : quelles équations différentielles doivent être appelées exceptionnelles, quelles équations différentielles doivent être appelées générales (typiques) ?

En mécanique hamiltonienne, la notion de stabilité structurelle perd son intérêt (un système conservatif ne peut *a priori* avoir d'attracteurs que restreint à une surface d'énergie constante), et les notions de typique et d'exceptionnel semblent plus naturellement liées à la notion de mesure qu'à celle de catégorie [16].

Nous reviendrons sur ce point de vue dans la deuxième partie, mais auparavant, nous développons plus avant la notion de stabilité structurelle afin d'en mieux montrer plus tard les difficultés.

2. Un générateur de stabilité structurelle : la transversalité. — La notion de transversalité (la vieille idée de *position générale* de la géométrie algébrique italienne) a été systématiquement dégagée par R. Thom qui en a fait un outil puissant dans les problèmes de stabilité structurelle. Nous n'envisagerons cette notion que sous son aspect le plus naïf qui consiste à généraliser la figure 6.



FIG. 6.

Plus précisément, si $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une application de classe C^1 (avec par exemple $m < n$) et si P est une sous-variété de dimension p de \mathbb{R}^n , on dit que f est transverse en $x \in \mathbb{R}^m$ à la sous-variété P si, ou bien $y = f(x) \notin P$, ou bien $y = f(x) \in P$ et l'image par la dérivée $df(x)$ de \mathbb{R}^m (espace tangent en y à l'image $f(\mathbb{R}^m)$ si $df(x)$ est de rang maximum) engendre avec le plan tangent en y à P l'espace \mathbb{R}^n tout entier (voir Fig. 7, $m = p' = 2$, $n = 3$).

Une condition nécessaire est en particulier (si $m < n$) que

$$m + p \geq n.$$

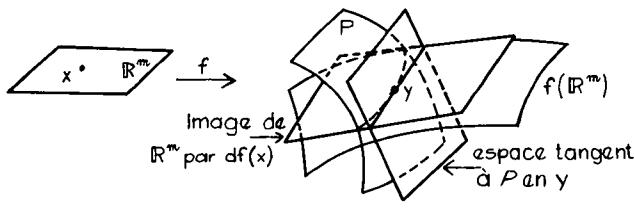


FIG. 7.

Cette condition n'est bien sûr pas suffisante (cas où les deux surfaces de la figure ci-dessus sont tangentées en y).

L'exemple suivant explique le titre du paragraphe.

Soit P une surface dans \mathbb{R}^3 (un tore T^2 pour fixer les idées).

Soit $E = \{ \text{applications affines de rang 2 de } \mathbb{R}^2 \text{ dans } \mathbb{R}^3 \}$.

Définissons la relation d'équivalence \sim sur E par $x \sim y$ s'il existe un difféomorphisme de $x^{-1}(P)$ sur $y^{-1}(P)$.

On déduit des théorèmes généraux sur la transversalité le

Théorème. — Si $x \in E$ est transverse à P en tout point de \mathbb{R}^2 , x est structurellement stable dans E pour la relation \sim .

Démonstration. — Regarder la figure 8 qui indique les images réciproques $x_i^{-1}(P)$ pour un chemin $t \rightarrow x_i$ dans E tel que tous les plans $x_i(\mathbb{R}^2)$ soient parallèles :

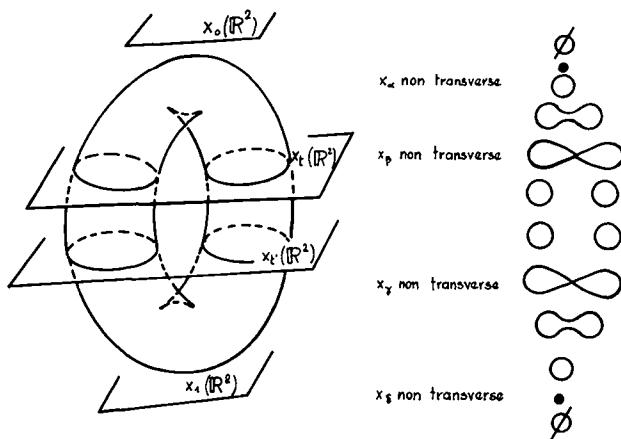


FIG. 8.

Corollaire. — Les x structurellement stables forment pour cet exemple un ouvert dense de E .

3. Bifurcations structurellement stables. — Une bonne référence pour ce paragraphe est l'article de revue d'Arnold [4].

On considère maintenant des familles à k paramètres continues (resp. différentiables si ça a un sens) d'éléments de E , c'est-à-dire des applications continues (resp. diff) $c : A \rightarrow E$, où A peut être \mathbb{R}^k , $[0, 1]^k$,

ou plus généralement un voisinage de 0 dans \mathbb{R}^k . Si $t \in A$, on notera $x_t = c(t) \in E$.

En supposant toujours qu'est définie sur E une relation d'équivalence (et donc une notion de stabilité structurelle) on donne la définition suivante :

Définition. — L'ensemble de bifurcation de la famille est

$\text{Bif}(c) =$

$= \{ t \in A \mid x_t \text{ n'est pas structurellement stable} \}$.

Si les classes d'équivalence dans E sont des sous-variétés (ou se décomposent naturellement en unions disjointes de sous-variétés), on peut définir la transversalité de c à l'ensemble des classes d'équivalence ; pour une famille c transverse, l'ensemble de bifurcation n'est pas qualitativement modifié par une petite déformation de c ; d'autre part, toute famille c telle que $c(A)$ soit contenu dans un ouvert de E ne rencontrant qu'un nombre fini de classes d'équivalence peut être déformée en une famille transverse par une petite déformation.

EXEMPLE 3.1. — Dans l'exemple du paragraphe précédent, $A = [0, 1]$, et l'ensemble de bifurcation de la famille $t \rightarrow x_t$ est formé des quatre points $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ (Fig. 9 ci-dessous).

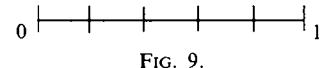


FIG. 9.

Si on choisit, toujours dans cet exemple, la famille $t \rightarrow x_t$ de façon que le plan $x_t(\mathbb{R}^2)$ soit toujours tangent à P , l'ensemble de bifurcation coïncide avec $[0, 1]$: c'est un cas tout à fait non transverse, et une petite déformation de cette famille transforme l'ensemble de bifurcation en un nombre fini de points.

EXEMPLE 3.2. — On reprend les notations de l'exemple 1.1.2' dans le cas $n = 2$:

$E = \mathbb{R}^3$ et les x structurellement stables sont ceux qui n'appartiennent pas au cône quadratique d'équation $ad - b^2 = 0$ (si l'élément général $\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$ de E est représenté par les coordonnées a, b, d).

Une famille transverse à 1 ou 2 paramètres ne rencontre jamais l'élément $x = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (Fig. 10).

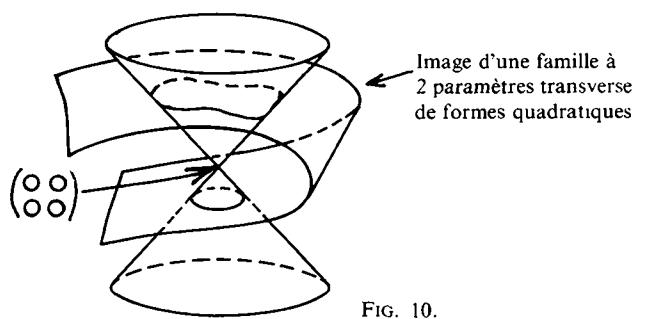


FIG. 10.

Dans les exemples qui précèdent, toute famille à k paramètres peut être déformée par une déformation arbitrairement petite en une famille transverse.

Il n'en est pas de même en général : cela n'est pas étonnant pour les champs de vecteurs puisque le phénomène se produit dès que $k = 0$ (voir la fin du paragraphe 1).

On cherche alors à définir une notion de famille *générique*, c'est-à-dire d'un type qualitatif inévitable par petite déformation : techniquement, on demande que ces familles forment une intersection dénombrable d'ouverts denses dans l'espace de toutes les familles (k fixé) ; ceci est le cas si on exige un nombre dénombrable de conditions de transversalité (voir [22]).

EXEMPLE 3.3 (Fonctions). — On reprend les notations de l'exemple 1.2.

Les ensembles de bifurcation qu'on peut obtenir pour des familles transverses à k paramètres constituent, suivant l'expression de R. Thom, un langage multidimensionnel de formes topologiques dont chaque mot est l'ensemble de bifurcation d'une famille *locale* à $l \leq k$ paramètres transverse à une classe d'équivalence donnée (c'est la notion de déploiement versel qu'on trouvera dans [24] et [4], voir aussi la figure 11).

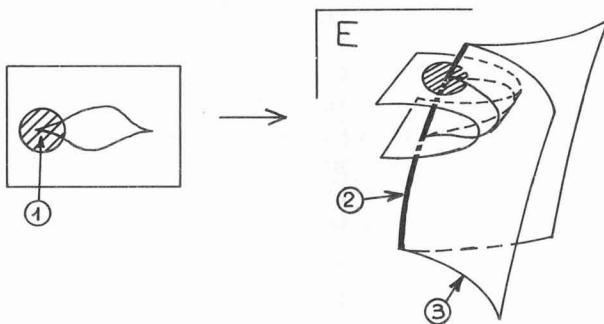


FIG. 11.

- 1 Mot correspondant à une classe d'équivalence de codimension 2.
- 2 Classe d'équivalence de codimension 2 (fonctions ayant un point critique du type $\sum_{i=1}^{n-1} (\pm X_i^2) + X_n^4$).
- 3 Classe d'équivalence de codimension 1 (fonctions ayant un point critique du type $\sum_{i=1}^{n-1} (\pm X_i^2) + X_n^3$).

Un des résultats essentiels pour la théorie des catastrophes élémentaires est la finitude du nombre de mots élémentaires intervenant dans les familles transverses de fonctions à moins de 6 paramètres (c'est-à-dire la finitude du nombre de classes d'équivalence rencontrées par une telle famille) [24], [18].

Pour des familles à plus de paramètres, le nombre de mots est infini (c'est ce phénomène des *modules* ou familles continues de classes d'équivalence qui

empêche les familles transverses d'être génériques si k est grand).

Avant de donner des exemples de familles à un paramètre génériques de champs de vecteurs, il nous faut étudier un peu la notion d'ergodicité.

4. Ergodicité d'un champ de vecteurs [7]. — Soit M une variété différentiable compacte, X un champ de vecteurs différentiable sur M , $(\varphi_t)_{t \in \mathbb{R}}$ le groupe à un paramètre de difféomorphismes de M engendré par X .

Un sous-ensemble I de M est dit invariant par X si $\varphi_t(I) \subset I$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Si μ est une mesure sur M , on dit que X laisse μ invariante si $\mu(A) = \mu(\varphi_t(A))$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et tout sous-ensemble μ -mesurable A de M .

Si X laisse invariante ⁽³⁾ une mesure μ sur M , définie dans chaque carte par une densité positive et continue, de masse totale 1, et si tout sous-ensemble de M invariant par X est de μ -mesure 0 ou 1, on dit que X est ergodique (par rapport à μ).

Il résulte d'une définition équivalente ([7], Chap. 2) que toute intégrale première μ -intégrable d'un champ de vecteurs μ -ergodique est constante hors d'un sous-ensemble de M de μ -mesure nulle (comparer à l'inexistence d'intégrales premières régulières non constantes pour les champs de vecteurs structurellement stables décrits par Peixoto).

On peut encore définir l'ergodicité de la manière suivante ([7], appendice 12) : X est μ -ergodique si et seulement si pour μ presque tout x dans M , la durée

$$\tau_{A,x}(T) = \text{mesure de Lebesgue de } \{ t \mid 0 \leq t \leq T \mid \varphi_t(x) \in A \}$$

de séjour de la trajectoire $\{ \varphi_t(x) \mid 0 \leq t \leq T \}$ dans un sous-ensemble μ -mesurable A de M est asymptotiquement proportionnelle à $\mu(A)$:

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{\tau_{A,x}(T)}{T} = \mu(A).$$

En particulier, pour μ — presque tout x dans M , la trajectoire de x (et même la semi-trajectoire positive ou négative) est dense dans M .

EXEMPLES. — **4.1 CHAMPS DE VECTEURS SUR LE TORE DE DIMENSION DEUX.** — L'identification du tore T^2 au quotient $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ du plan réel par le réseau des points à coordonnées entières permet de représenter un champ de vecteurs sur T^2 par un champ

⁽³⁾ Cette hypothèse est en fait trop forte pour la définition de l'ergodicité : il suffit de supposer que φ_t envoie ensembles de mesure nulle sur ensembles de mesure nulle.

de vecteurs \mathbb{Z}^2 -périodique sur \mathbb{R}^2 , c'est-à-dire une équation différentielle de la forme

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = b(x, y) \end{cases}$$

avec

$$\begin{aligned} a(x+1, y) &= a(x, y+1) = a(x, y) \\ b(x+1, y) &= b(x, y+1) = b(x, y). \end{aligned}$$

Les exemples les plus simples sont les champs de vecteurs *linéaires* qui correspondent au cas où $a(x, y)$ et $b(x, y)$ sont des fonctions constantes

$$a(x, y) \equiv a, \quad b(x, y) \equiv b.$$

Il n'est pas difficile de montrer que le champ linéaire défini par (a, b) est ergodique si et seulement si toutes ses trajectoires sont denses, ce qui équivaut à $a/b \notin \mathbb{Q}$ ([7] appendice 11); dans le cas où $a/b \in \mathbb{Q}$, toutes les trajectoires sont périodiques, ce qui est très instable (c'est un exemple simple d'un champ qui n'est ni ergodique ni structurellement stable).

Plus généralement, Kolmogorov a caractérisé dans [17] les champs de vecteurs ergodiques sans singularité sur T^2 , et Bloh a caractérisé dans [8] les champs de vecteurs ergodiques sur T^2 ayant un nombre fini de points singuliers : ces derniers ne peuvent être que de la forme telle que dans la figure 12 (on a dessiné le comportement local des trajectoires).

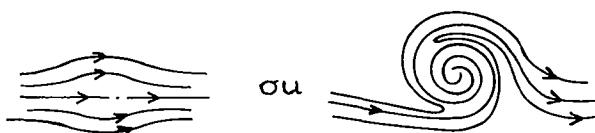


FIG. 12.

4.2 CHAMPS DE VECTEURS SUR LES SURFACES AUTRES QUE LE TORE. — Les champs ergodiques ayant un nombre fini de singularités ont été étudiés par Bloh [8]. De tels champs sur toutes les surfaces à l'exception de la sphère, du plan projectif et de la bouteille de Klein (il est facile de voir que le théorème de Poincaré-Bendixson interdit l'existence d'un champ ergodique sur la sphère et le plan projectif). Bien entendu, si la caractéristique d'Euler est non nulle, certains des points singuliers sont des cols.

4.3 CHAMPS DE VECTEURS SUR LES VARIÉTÉS DE DIMENSION ≥ 3 . — Anosov et Katok ont montré dans [3] que sur chaque variété compacte de dimension ≥ 3 , on peut construire un champ de vecteurs ergodique.

Il découle immédiatement du théorème de Peixoto que les notions de champ de vecteur structurellement stable et de champ de vecteurs ergodiques s'excluent mutuellement sur une variété de dimension 2.

Il est surprenant de constater qu'il n'en est plus de même en dimension supérieure : à la suite des travaux de Smale, Anosov, Sinaï, on sait qu'il existe des champs de vecteurs sur M de dimension ≥ 3 à la fois structurellement stables et ergodiques. Par exemple [2] le flot géodésique sur le fibré unitaire tangent d'une variété riemannienne compacte à courbure négative a ces deux propriétés (voir [7], th. 16.5 et 17.9).

5. Stabilité structurelle versus ergodicité sur le tore de dimension 2. — Dans ce paragraphe, nous étudions certaines familles à un paramètre génériques d'équations différentielles sur le tore T^2 de dimension deux. Le théorème de Peixoto nous assure de la simplicité des attracteurs des équations différentielles structurellement stables et du fait que ces dernières forment un ouvert dense ; nous allons voir cependant que l'ensemble de bifurcation d'une famille à un paramètre générique⁽⁴⁾ peut être très compliqué (comparer aux exemples 3.2 et 3.3).

Plus précisément, pour tout $0 < \varepsilon \leq 1$, il existe une famille générique $c : [0, 1] \rightarrow E = \{ \text{champs de vecteurs sur } T^2 \}$, notée $c(t) = X_t$, ayant la propriété suivante :

- 1) $S = \{ t \in [0, 1] ; X_t \text{ structurellement stable} \}$ est un ouvert dense de $[0, 1]$.
- 2) $\mathcal{E} = \{ t \in [0, 1] ; X_t \text{ ergodique pour la mesure de Lebesgue} \}$ est de mesure de Lebesgue supérieure à $1 - \varepsilon$.

Rappelons que le théorème de Peixoto implique $S \cap \mathcal{E} = \emptyset$. C'est bien l'alternative dont nous parlions dans l'introduction entre un mouvement asymptotique sur une trajectoire périodique (cas $t \in S$) et un mouvement quasi-périodique dont les orbites sont denses dans T^2 (cas $t \in \mathcal{E}$) ; il est cependant honnête de remarquer que rien ne ressemble plus à une orbite dense qu'une orbite périodique de très longue période !

Nous ne considérerons que des champs de vecteurs sans singularité sur T^2 . De tels champs se rencontrent naturellement dans les généralisations de la bifurcation de Hopf qui interviennent dans certaines théories mathématiques de la turbulence hydrodynamique [20], [10]. Après un éventuel changement de coordonnées de classe C^∞ , on peut supposer que les champs considérés ont tous la propriété suivante : leurs orbites coupent transversalement le cercle $x = 0$; ceci permet de définir une application de Poincaré f (voir Fig. 13) qui est un difféomorphisme de classe C^∞ du cercle T^1 conservant l'orientation. La donnée de f (à conjugaison près dans le groupe des difféomorphismes du cercle)

(4) Pour la définition de la générnicité et l'étude générale des familles généréniques à un paramètre de champs de vecteurs sur une variété de dimension deux, voir [22bis].

détermine à un difféomorphisme près la géométrie de l'ensemble des orbites de l'équation différentielle (mais bien entendu pas le paramétrage de ces orbites).

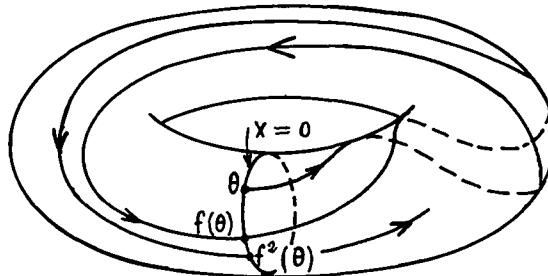


FIG. 13.

Un premier problème se pose : déterminer sur f si l'équation différentielle considérée est structurellement stable (ce qui implique en particulier qu'elle ait des orbites périodiques d'après le (iii) du théorème de Peixoto, c'est-à-dire que f ait des points périodiques).

L'outil pour répondre à ce problème a été introduit par Poincaré en 1885 ; c'est le *nombre de rotation* $\rho(f)$ d'un homéomorphisme f du cercle conservant l'orientation : on peut toujours relever f en un homéomorphisme \tilde{f} de \mathbb{R} de la forme $\tilde{f}(\theta) = \theta + \varphi(\theta)$, où φ est une fonction 2π périodique de $\theta \in \mathbb{R}$, tel que

$$f(\theta \bmod 2\pi) = \tilde{f}(\theta) \bmod 2\pi.$$

On définit alors $\rho(\tilde{f})$ comme la limite (uniforme et indépendante de θ !!!)

$$\rho(\tilde{f}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\tilde{f}^n(\theta) - \theta}{n} \in \mathbb{R}.$$

On se convainc facilement de ce que la classe $\rho(f)$ de $\rho(\tilde{f})$ modulo 2π est indépendante du choix de \tilde{f} , et représente une *rotation moyenne* de f (prendre l'exemple où f est la rotation R_α d'angle α ; on peut choisir pour \tilde{f} la translation $\tilde{f}(\theta) = \theta + \alpha$).

Les propriétés de ρ sont les suivantes [12], [13] :

1) ρ ne dépend que de la classe de conjugaison de f dans le groupe des homéomorphismes de T^1 .

2) ρ dépend continûment de f (uniformité de la limite).

3) $\rho(f) \in 2\pi\mathbb{Q}/2\pi\mathbb{Z}$ (i.e. $\rho(f)/2\pi$ est rationnel modulo 1) si et seulement si f a un point périodique. Si $\rho(f) = 2\pi p/q$ modulo 2π avec p et q premiers entre eux, tous les points périodiques de f ont pour période q .

4) *Théorème de Denjoy* (difficile !). Si f est un difféomorphisme de classe C^k , $k \geq 2$,

$$\rho(f) \notin 2\pi\mathbb{Q}/2\pi\mathbb{Z}$$

si et seulement si $f = h^{-1} R_{\rho(f)} h$, avec h homéomorphisme et $R_{\rho(f)}$ la rotation d'angle $\rho(f)$ irrationnel.

5) *Théorème d'Herman* (difficile !). Il existe un sous-ensemble A de \mathbb{R} dont le complémentaire a une mesure de Lebesgue égale à 0 tel que, si f est de classe C^∞ , et si $\rho(f) \in 2\pi A/2\pi\mathbb{Z}$, alors $f = h^{-1} R_{\rho(f)} h$ avec h difféomorphisme de classe C^∞ .

Considérons maintenant une famille à un paramètre générique $c : [0, 1] \rightarrow E$, $c(t) = X_t$, correspondant à une famille à un paramètre f_t de difféomorphismes de classe C^∞ de T^1 . On a la situation étonnante suivante (qui montre en particulier que $t \rightarrow \rho(f_t)$ n'est pas une fonction régulière !) :

$S = \{t \in [0, 1] ; f_t \text{ correspond à une équation structurellement stable}\}$ est un ouvert dense dans $[0, 1]$ mais l'image de S dans le cercle $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} = T^1$ par l'application $t \rightarrow \rho(f_t)$ est de mesure nulle : c'est en effet $2\pi\mathbb{Q}/2\pi\mathbb{Z}$!

Remarquons que S est forcément de mesure non nulle ; l'exemple qui suit montre que S peut être de mesure très petite !

Exemple d'Arnold [5], [12] et [14]. — f_t est défini à partir de \tilde{f}_t :

$$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\tilde{f}_t(\theta) = \theta + \varepsilon \sin \theta + 2\pi t.$$

Si $|\varepsilon| < 1$, f_t est un difféomorphisme de classe C^∞ (même analytique). La figure 14 montre le nombre de rotation de f_t en fonction de ε et t .

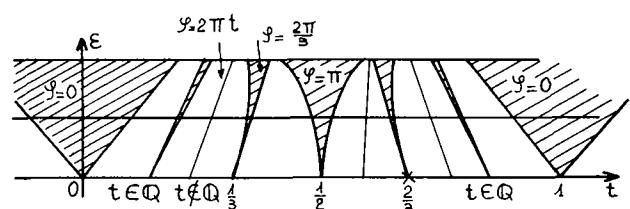


FIG. 14.

Si $\alpha \in \mathbb{Q}$ et si $0 < \varepsilon < 1$ est fixé, l'ensemble des $t \in [0, 1]$ tels que $\rho(f_t) = 2\pi\alpha$ modulo 2π est un intervalle non réduit à un point.

L'ensemble S est, pour $\varepsilon \neq 0$, la réunion des intérieurs de ces intervalles : c'est un ouvert dense.

Si $\alpha \notin \mathbb{Q}$, l'ensemble des $t \in [0, 1]$ tels que $\rho(f_t) = 2\pi\alpha$ modulo 2π est un point.

Le complémentaire de S est, pour $\varepsilon \neq 0$, un ensemble de Cantor dont la mesure de Lebesgue tend vers 1 lorsque ε tend vers 0.

En utilisant le théorème d'Herman (propriété 5) du nombre de rotation) et un théorème de Kolmogorov [17] et [23], on peut montrer que $[0, 1] - S$ contient un sous-ensemble \mathcal{L} , dont la mesure tend

vers 1 lorsque ε tend vers 0, tel que si $t \in \mathbb{L}$, l'équation différentielle sur T^2 associée à f , soit, à un difféomorphisme C^∞ près, une équation linéaire ergodique (mouvement quasi-périodique à deux périodes ration-

nellement indépendantes). Cet ensemble est donc contenu dans ε .

Le caractère générique de cet exemple découle d'un théorème profond de M. Herman [14].

Bibliographie

- [1] ANDRONOV, PONTRYAGIN, Systèmes grossiers. *Dokl. acad. sci. URSS*, 1937, Vol. XIV, n° 5.
- [2] ANOSOV. Ergodic properties of geodesic flows on closed riemannian manifolds of negative curvature. *Sov. Math. Dokl.*, Vol. 4, № 4 (1963) 1153-1156.
Roughness of geodesic flows on compact riemannian manifolds of negative curvature. *Sov. Math. Dokl.*, Vol. 3, № 4 (1962) 1069-1069.
- [3] ANOSOV. KATOK.
- [4] ARNOLD, V., Leçons sur les bifurcations et les familles verselles (en russe). *Ousp. mat. naouk* XXVII, 5 (167) 1972, 119-184.
- [5] ARNOLD, V., Small denominators I : mappings of the circumference onto itself. *Izvestia acad. nauk. serie math.* 25, 1 (1961), 21-86 (*Trans. Am. Math. Soc.*, Vol. 46, 213-284).
- [6] ARNOLD, V., Equations différentielles ordinaires. Editions de Moscou.
- [7] ARNOLD, V., AVEZ, A., *Problèmes ergodiques de la mécanique classique* (Gauthier-Villars) 1967.
- [8] BLOHIN, A., Smooth ergodic flows on surfaces. *Trudy Moscow. Mat. Obs.* Tome 27 (1972) (3 Translation).
- [9] CHENCINER, A., Introduction à la théorie des singularités des applications différentiables. Cours rédigé par Hoang Huu Duong, Hanoi 1974.
- [10] CHENCINER, A., IOSS, G., *Bifurcations de tores invariants* (à paraître)
- [11] HARTMAN, P., *Ordinary differential equations* (Wiley) 1964.
- [12] HERMAN, M., Thèse Orsay (1976).
- [13] HERMAN, M., *Conjugaison C^∞ des difféomorphismes du cercle à des rotations pour presque tout nombre de rotation* *C.R. Acad. Sci.* 283 (1976) 579-582.
- [14] HERMAN, M., *Mesure de Lebesgue et nombre de rotation* (preprint 1976).
- [15] HIRSH, M., SMALE, S., *Differential equations and linear algebra* (Academic Press).
- [16] KOLMOGOROV, A., *The general theory of dynamical systems and classical mechanics*. Adresse au congrès international des mathématiciens en 1954.
Traduit en anglais dans le livre de R. Abraham et J. Marsden : *Foundations of mechanics* (Benjamin) 1967.
- [17] KOLMOGOROV, A., On dynamical systems with an integral invariant on the torus. *Dokl. Akad. Nauk URSS* 93 (1953) 763-766 (en Russe).
- [18] MATHER, J., Right equivalence (Liverpool) (1971).
- [19] PEIXOTO, M., *Structural stability on two-dimensional manifolds*. *Topology* Vol. 1 (1962) 101-120
- [20] RUELLE, TAKENS, *On the nature of turbulence*. *Commun. Math. Phys.* 20 (1971) 167-192.
- [21] SMALE, S., *Amer. J. Math.* 88 (1966) 491-496.
- [22] SMALE, S., *Differentiable dynamical systems*. *Bulletin Am. Math. Soc.* 1967.
- [22bis] SOTOMAYOR, *Generic one-parameter families of vector-fields on two-dimensional manifolds*. *Public. IHES* n° 43 (1974).
- [23] STERNBERG, S., *Celestial mechanics* Vol. 2 (Benjamin) 1969
- [24] THOM, R., *Modèles mathématiques de la morphogenèse* (U.G.E. 10/18).