à Gilles Châtelet

De la Mécanique céleste à la théorie des systèmes dynamiques, aller et retour : Poincaré et la géométrisation de l'espace des phases

Alain Chenciner

Astronomie et Systèmes Dynamiques, IMCCE, UMR 8028 du CNRS,
77, avenue Denfert-Rochereau, 75014 Paris, France
et
Département de Mathématiques, Université Paris VII-Denis Diderot
16, rue Clisson, 75013 Paris, France

1.1 Intégrer... ?

"Prenons, par exemple, le problème des trois corps : ne peut-on pas se demander si l'un des corps restera toujours dans une certaine région du ciel ou bien s'il pourra s'éloigner indéfiniment ; si la distance de deux corps augmentera, ou diminuera à l'infini, ou bien si elle restera comprise entre certaines limites ? Ne peut-on pas se poser mille questions de ce genre, qui seront toutes résolues quand on saura construire qualitativement les trajectoires des trois corps ? Et, si l'on considère un nombre plus grand de corps, qu'est-ce que la question de l'invariabilité des éléments des planètes, sinon une véritable question de géométrie qualitative, puisque, faire voir que le grand axe n'a pas de variations séculaires, c'est montrer qu'il oscille constamment entre certaines limites.

Tel est le vaste champ de découvertes qui s'ouvre devant les géomètres..."

Ainsi Henri Poincaré introduit-il en 1881 – il a 27 ans et a soutenu sa thèse deux ans auparavant – son *Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle* (tome I des œuvres, la publication, en quatre parties, s'étalant de 1881 à 1886). Voici donc le moment où, vingt ans avant que, sous l'influence de Bertrand Russell, le mot "épistémologie" ne passe en français, Poincaré, et plus tard Jacques Hadamard et Pierre Duhem, se rendent compte de ce que la connaissance analytique explicite d'une solution d'une équation différentielle peut n'apporter que très peu d'information effective sur le comportement du système qu'elle décrit. Que de chemin depuis cette introduction jusqu'au

"Mais alors il n'y a plus des problèmes résolus et d'autres qui ne le sont pas; il y a seulement des problèmes plus ou moins résolus,..."

de *Science et Méthode* en 1908, par lequel Poincaré conclut le passage où il se moque de la prétention de Newton écrivant sous forme d'anagramme à Leibniz

"Je sais intégrer toutes les équations différentielles" (traduction donnée par Poincaré)*.

---

* Data æquatione quotcunque fluentes quantitæ involvente fluxiones invenire et vice versa, que Vladimir Igorevich Arnold traduit librement (mais est-ce plus correct ?) par "il est utile de résoudre des équations différentielles" (avant-propos des *Chapitres supplémentaires de la théorie des équations différentielles ordinaires*, traduction française, éditions Mir, 1980).

Le 18 avril 1883, faisant allusion aux développements en série convergents qu'il a obtenus comme solutions d'une équation différentielle algébrique, Poincaré écrit à Gösta Mittag-Leffler

"Or je ne crois pas que dans le cas de la Mécanique céleste celle que j'ai donné(e) soit la plus zweckmässig, je crois qu'il y a mieux à trouver" (lettre publiée en 1921 dans le volume 38 des *Acta Mathematica* et reprise dans le volume XI, pages 66-67 des *œuvres*).

Le théorème de Sundman (articles de 1907 et 1909 reproduits en 1912 dans le volume 36 des *Acta Mathematica*), que cite d'ailleurs en note en 1921 l'éditeur de la lettre de 1883, donnera effectivement des développements plus "adaptés" (=*zweckmässig*) en ce qu'ils ne sont pas arrêtés par les collisions doubles, mais il sera en même temps une illustration exemplaire de l'affirmation de 1908. Ce théorème, dont une généralisation à n corps sera donnée par Wang Qiu Dong en 1991, énonce la possibilité d'écrire des développements convergents pour les solutions du problème des trois corps dont le moment cinétique n'est pas nul. Sundman montre que cette hypothèse proscrit toute collision triple, puis que les collisions doubles se régularisent comme points de branchement. Une transformation algébrique et un changement de temps lui permettent alors de construire la solution sous la forme d'une série qui converge pour toutes les valeurs du nouveau temps. Mais d'un point de vue pratique ces séries n'apportent rien, d'abord parce qu'elles convergent très lentement, ensuite parce qu'aucun renseignement qualitatif sur la nature de la solution n'est lisible sur la série qui la représente*. Quant aux solutions voisines, elles sont tout simplement absentes de la représentation**.

1.2 Des équations aux variations à l'espace des phases

Or ce sont justement ces solutions voisines qui sont importantes, et ce fait est pleinement compris par Poincaré. Dès 1884, dans la conclusion d'un article au *Bulletin astronomique* intitulé *Sur certaines solutions particulières du problème des trois corps* qui détaille une note aux *C.R.A.S.* de l'année précédente (la première qu'il écrit sur le problème des trois corps), il explique l'utilité des solutions périodiques – dont il vient de montrer l'existence par des méthodes topologiques – par leur rôle d'"orbites intermédiaires" dont une solution restera proche assez longtemps si elle correspond à des données initiales assez voisines. L'affirmation sera plus forte en 1892 dans le tome I des *Méthodes nouvelles de la mécanique céleste*, sous la forme de la célèbre conclusion du paragraphe 36 :

* On trouvera une discussion de cette question dans l'article de Florin Diacu *The Solution of the n-body Problem* paru dans *The Mathematical Intelligencer vol. 18, no 3, 1996, p. 66-70.*

** De ce point de vue, une représentation par une série divergente peut apporter plus d'information. Un bel exemple de ce fait m'a été communiqué par Robert Moussu il y a bien des années. Il s'agit d'une conséquence du fait qu'une série formelle solution d'une équation polynomiale (ou analytique) est nécessairement convergente : si $P_1(x,y)dx+Q_1(x,y)dy=0$ et $P_2(x,y)dx+Q_2(x,y)dy=0$ sont deux équations de Pfaff polynomiales ayant en commun une même solution formelle divergente $y=y(x)\in R[[x]]$, les deux équations sont proportionnelles. En effet, l'élimination de y' conduit à $(P_1Q_2-P_2Q_1)(x,y(x))=0$. Puisque la série $y(x)$ diverge, on a nécessairement $P_1Q_2-P_2Q_1\equiv 0$. Jean Ecalle m'a fait remarquer l'analogie avec les équations algébriques sur Q : alors qu'une racine rationnelle n'apporte d'autre connaissance qu'elle-même, une racine irrationnelle permet de reconstruire l'équation (supposée irréductible) à la multiplication près par une constante.

"Il y a même plus : voici un fait que je n'ai pu démontrer rigoureusement, mais qui me paraît pourtant très vraisemblable.

Étant données des équations de la forme définie dans le $n^0 13$ *et une solution particulière quelconque de ces équations, on peut toujours trouver une solution périodique (dont la période peut, il est vrai, être très longue), telle que la différence entre les deux solutions soit aussi petite que l'on veut. D'ailleurs, ce qui nous rend ces solutions si précieuses, c'est qu'elles sont, pour ainsi dire, la seule brèche par où nous puissions essayer de pénétrer dans une place jusqu'ici réputée inabordable."*

L'idée de regarder l'ensemble des solutions, ou un ensemble de solutions, et non pas une solution particulière, n'est certes pas nouvelle. La notion d'espace des phases* est présente chez Lagrange dans sa "méthode de variations des constantes" puisque les dites constantes paramètrent l'ensemble des mouvements kepleriens; Jean-Marie Souriau dirait même qu'il est présente sous sa forme la plus conceptuelle, celle intrinsèque de l'"espace des mouvements"**, elle est présente chez Hamilton et chez Jacobi qui en dégagent la structure symplectique introduite par Lagrange en 1808 dans son *Mémoire sur la théorie des variations des éléments des planètes* ; elle l'est également chez Le Verrier quand celui-ci étudie les résonances dans les positions d'équilibre des astéroïdes, et plus encore chez Hill, lorsque celui-ci démontre en 1878 – un an avant la thèse de Poincaré qui l'admirait et s'est inspiré de lui – le premier résultat rigoureux de stabilité***. Elle est aussi chez les fondateurs de la mécanique statistique****, James Clerck Maxwell, Ludwig Boltzmann et Josiah Willard Gibbs*****. C'est d'ailleurs à ce dernier que Poincaré attribue l'emploi du mot "phase" pour désigner un système de valeurs des quantités $x_1, \ldots, x_n$ qui définissent l'état

---

* Une superbe illutration de la force de cette notion (en fait simplement de celle d'espace de configuration) se trouve dans le premier paragraphe du livre d'Arnold *Equations différentielles ordinaires*, aux éditions Mir, 1974 pour la traduction française.

** Voir *Les origines du calcul symplectique chez Lagrange* par Patrick Iglesias, *L'Enseignement Mathématique, t. 44 (1998), p. 257-277).*

*** Il s'agit des modèles simplifiés de la théorie de la Lune qu'on appelle aujourd'hui le "Problème restreint circulaire plan" et le "Problème de Hill". Hill introduit ses fameuses "régions" qui limitent à un certain voisinage compact de la terre les mouvements que peut avoir la Lune dans ce modèle, mais n'interdisent pas les collisions avec la Terre. Il démontre également l'existence de la solution périodique qui porte son nom et sert d'"orbite intermédiaire" dans l'étude du mouvement de la Lune. Dans l'introduction aux œuvres complètes de Hill qu'il donne en 1905, Poincaré, oubliant les solutions homographiques d'Euler et Lagrange, écrit : "c'était là le premier exemple d'une solution périodique du problème des trois corps."

**** A laquelle Poincaré s'est interessé de près comme en témoigne par exemple l'article *Sur la théorie cinétique des gaz*, paru en 1894 dans la *Revue générale des Sciences pures et appliquées, t. 5, p. 513-521*, où il discute de la validité du "postulat de Maxwell", c'est-à- dire de l'"hypothèse ergodique".

***** Quant à la présence de cette notion chez Liouville, elle semble claire sur la formulation moderne de son théorème – fondamental dans la mécanique statistique de Maxwell-Boltzmann – qui affirme que le flot d'un système hamiltonien conserve le volume dans l'espace des phases. Mais, à la page 663 de son livre *Joseph Liouville 1809-1882 Master of Pure and Applied Mathematics*, Joseph Lützen écrit "For Liouville, the theorem was originally just a lemma in the theory of perturbations, and if or when he realized its applicability to Hamilton's equations, he probably never thought of it as dealing with volume in phase space, let alone with the theory of heat. Thus Liouville never came to realize what we today consider the (positions-vitesses) d'un système matériel*. Mais j'ai envie de dire que l'espace des phases n'apparaît vraiment comme un objet géométrique à part entière qu'avec les recherches de Poincaré sur la théorie géométrique des équations différentielles à partir de 1881 et plus encore, en même temps que se dégagent les principes de l'*Analysis situs*, avec ses recherches sur le Problème des trois corps à partir de 1883 et celles de Hadamard, quinze ans plus tard, sur la dynamique symbolique qui code les géodésiques des surfaces à courbure négative.

Pourquoi ? Parce que tant qu'on peut calculer, on n'est pas obligé de faire de la géométrie.

1.3 ... ou ne pas intégrer ?

Tant qu'on étudie un système "complètement intégrable", on peut écrire des formules** pour les solutions et ne pas s'intéresser à la structure globale. C'est le cas pour le problème des deux corps, le problème des deux centres fixes, les toupies d'Euler, Lagrange ou Kovalewskaia, le flot géodésique d'un ellipsoïde, mais aussi certains systèmes de dimension infinie comme l'équation de Korteweg-deVries. Faire de la géométrie devient par contre une nécessité si l'on veut comprendre le flot géodésique d'une surface de courbure négative plongée dans R^3 (le problème de Hadamard) ou abstraite (ce qui lui permet d'être compacte). Ici pas de formules*** et pourtant je dirais volontiers qu'il s'agit encore d'un problème intégrable, même si l'intégrabilité dont il s'agit est aussi éloignée que possible de la complète intégrabilité au sens de la mécanique classique. La structure, sinon l' évolution, du système est si parfaitement comprise, c'est quelque chose de si simple et de si stable, que je n'hésite pas à le qualifier ainsi****. Simplement, intégrer prend ici un autre sens plus géométrique. En revanche, quand on en vient aux problèmes de la mécanique céleste et plus particulièrement au problème des trois corps, étudié dans les trois volumes des *Méthodes nouvelles de la mécanique céleste*, on rencontre des situations *mixtes* où, sans être intégrables, les systèmes considérés n'en sont pas si loin parce que les masses des planètes sont beaucoup plus petites que celle du soleil. C'est ce que Poincaré appelle le *"Problème général de la Dynamique"*. Les intersections homoclines transverses, qu'il découvre à la suite des questions posées par Edvard Phragmén sur la première version,

---

true importance of his theorem."

* Voir l'article de Henri Poincaré, *Réflexions sur la théorie cinétique des gaz, Journal de Physique théorique et appliquée, 4ème série, t. 5, p. 369-403 (1906).*

** Il y a vingt-cinq ans, participant à Nice à l'organisation d'un séminaire sur les "solitons" avec des physiciens, j'ai été frappé de ce que ceux-ci passaient leur temps à écrire des formules, souvent très compliquées, alors que les mathématiciens faisaient de petits dessins. Je caricature, bien entendu, mais il y a là, je crois, une différence assez profonde.

*** sauf bien entendu dans le cas d'une surface de révolution ou dans celui d'une surface compacte de courbure constante. Dans le premier cas on a l'intégrale de Clairaut; dans le deuxième, après passage au revêtement universel, on se ramène aux géodésiques du disque de Poincaré, mais le problème global – action d'un sous-groupe discret de $PSL(2,R)$ – demeure extérieur aux formules.

**** Pour un exposé élémentaire du résultat d'Hadamard et la superbe description qu'en donne Pierre Duhem en 1906 comme parangon de la "sensibilité aux conditions initiales", voir l'article de Jean-Luc Chabert, *Hadamard et les géodésiques des surfaces à courbure négative* dans le livre *Chaos et déterminisme*, Editions du Seuil, 1992.

gravement fautive, du mémoire *“Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique”** fournissent de l'hyperbolicité, c'est-à-dire un comportement du type de celui qu'Hadamard étudiera à l'état pur, mais on ne sait toujours pas si c'est sur un ensemble de mesure positive de l'espace des phases qu'un tel comportement se rencontre. Au contraire, on sait aujourd'hui grâce aux théorèmes de type Kolmogorov-Arnold-Moser (KAM), que la région où règne l'ellipticité, sous la forme de mouvements quasi-périodiques, est de mesure positive et même de densité d'autant plus proche de 1 qu'on est proche d'un système intégrable. Il résulte de cette intrication de comportements opposés une extrême complexité à laquelle Poincaré fait allusion dans son mémoire de 1905 aux *Transactions of the American Mathematical Society* (tome VI des *œuvres*) quand, à propos des géodésiques des surfaces convexes – qu'il considère comme une version simplifiée du Problème restreint des trois corps – il dit

“malheureusement, le problème est beaucoup plus difficile que celui qui a été résolu par Monsieur Hadamard”.

Et en effet, le problème des géodésiques d'une petite perturbation de la métrique standard (ronde) de la sphère est d'une difficulté sans commune mesure avec celui des géodésiques d'une petite perturbation du plan hyperbolique ou d'une surface hyperbolique de révolution. Dans un tel problème, comme en Mécanique céleste, les formules données par la “théorie des perturbations” permettent de décrire le comportement des solutions (géodésiques ou mouvements célestes) à court ou moyen terme, mais ces formules deviennent inopérantes à long terme (divergence des séries de perturbation). On reviendra sur ce point dans le paragraphe 2.2.

Il serait sans doute intéressant décrire une histoire des démonstrations de non-intégrabilité en les situant par rapport à la conception géométrique d'un espace des phases**. Il y a celles, algébrico-analytiques, de Bruns, Painlevé, Husson, celles, analytico géométriques du Poincaré du premier tome des *Méthodes nouvelles*, celles purement géométriques du Poincaré du troisième tome, qui mènent à la diffusion d'Arnold et plus récemment aux méthodes variationnelles de John Mather dans lesquelles est abandonnée l'idée d'un contrôle géométrique total sans doute utopique. Il y a également les méthodes de type Zyglin, basées sur l'étude de l'équation aux variations le long d'une solution particulière bien choisie, récemment reprises par Juan Morales Ruiz et Jean-Pierre Ramis dans le cadre de la théorie de Galois différentielle. D'essence locale, cette dernière approche donne cependant de résultats globaux pourvu qu'on se restreigne au monde des intégrales méromorphes. Une telle restriction n'est pas, comme on pourrait le croire, arbitraire. C'est au contraire le monde différentiable qui est trop souple pour qu'une notion de non-intégrabilité seulement différentiable soit fortement liée à des propriétés géométriques d'un système. Il y a enfin, les systèmes comme celui des n centres fixes dans le plan pour $n \geq 3$ dont Sergey Bolotin,

---

* Sur l'histoire de ce mémoire, lauréat en 1889 du prix du roi de Suède et publié après correction en 1890 dans le volume 13 des *Acta Mathematica*, on consultera le livre *Poincaré and the Three Body Problem* par June Barrow-Green, AMS et London Math Soc. 1996.

** Un point de départ pourrait être le survol de Valery Kozlov *Integrability and non-integrability in Hamiltonian mechanics, Russian Math. Surveys 38 no 1, p.1-76, 1983*, traduction de *Uspekhi Mat. Nauk 38 no1, p.3-67, 1983.*

poursuivant des travaux de Valery Kozlov, a montré qu'ils se ramènent, via la métrique de Jacobi, à la situation de Hadamard (c'est plus compliqué dans l'espace) mais ce qui précède explique que je les mette à part.

2.1 Le point de vue géométrique des "Méthodes nouvelles".

J'évoquerai maintenant un certain nombre de passages des *Méthodes nouvelles* qui montrent comment l'étude du Problème des trois corps a amené Poincaré à créer les notions géométriques qui fondent la théorie qualitative des systèmes dynamiques*; ce sera la partie "aller" du titre. Je passerai en revue dans le paragraphe suivant, et ce sera la partie "retour", la façon dont ces notions, constamment approfondies par les mathématiciens (mais on découvre encore bien des choses dans ce livre étonnant**), ont commencé récemment à être considérées comme pertinentes et mêmes fondamentales (?) par les astronomes.

Commençons par les solutions périodiques, déjà évoquées. Leurs solutions "asymptotiques" (tome I, paragraphes 104 et suivants ; tome III, chapitre XXV) ont donné naissance à la théorie des variétés invariantes (stable et instable) associées à un sous-ensemble invariant "normalement hyperbolique" de l'espace des phases. Ces variétés sont un exemple typique d'objet géométrique associé à une équation différentielle : non plus des solutions isolées mais un ensemble de solutions rassemblées par la propriété qu'elles partagent d'être (positivement ou négativement) asymptotes à l'ensemble invariant considéré, lequel peut lui-même consister en une unique solution ou un ensemble de solutions. Et c'est bien ainsi qu'y pense Poincaré lorsqu'exposant les "méthodes de M. Bohlin" (tome II, paragraphes 204 et suivants), il recherche ces variétés invariantes comme solutions particulières de l'équation de Hamilton-Jacobi. Son analyse de la divergence des séries de Bohlin (tome II, paragraphe 225) contient déjà, dans le cas particulier d'un pendule rapidement "forcé", une estimation exacte bien qu'incomplètement prouvée des phénomènes de séparation exponentiellement petite des variétés stable et instable. Ce type de question, qui fait actuellement l'objet de nombreuses recherches, se rattache naturellement à la théorie des fonctions résurgentes de Jean Ecalle. Bien entendu, ces variétés jouent le premier rôle dans la découverte mentionnée plus haut des solutions "doublement asymptotiques", homoclines ou hétéroclines (chapitre XXXIII, paragraphe 397) et dans les histoires de "chaos", si mal nommé, qui en ont resulté***. On connaît la phrase fameuse

---

* Celles de théorie de la mesure sont essentiellement présentes chez Gibbs et Boltzmann, même si ce n'est pas exactement sous la forme qu'elles ont aujourd'hui. Voir le bel article de Paul et Tatiana Ehrenfest, *vol. IV 2 II, no 6* de l'*Encyclopädie der mathematischen Wissenschaften*, publié en 1912, l'année de la mort de Poincaré. Une traduction en anglais est parue en 1959 à *Cornell University Press* sous le titre *The Conceptual Foundations of the Statistical Approach in Mechanics.*

** Le séminaire que Jacques Laskar et moi avons conduit sur les trois volumes de *Méthodes nouvelles* de 1988 à 1990 au Bureau des Longitudes nous a bien souvent fait découvrir avec émerveillement combien d'idées soi-disant récentes se trouvent déjà dans Poincaré.

*** René Thom, qui est l'inventeur de cet exemple, dit à juste titre qu'il est ridicule d'appeler "chaotique" un système aussi simple que l'itération sur le tore de dimension deux $T^2=R^2/Z^2$ du difféomorphisme défini par $(x,y)\mapsto(2x+y,x+y)$. Si les orbites sont compliquées, la structure est on ne peut plus simple. Ceci nous ramène à la discussion du paragraphe précédent

“On sera frappé de la complexité de cette figure que je ne cherche même pas à tracer. Rien n’est plus propre à nous donner une idée de la complication du problème des trois corps et en général de tous les problèmes de Dynamique où il n’y a pas d’intégrale uniforme et où les séries de Bohlin sont divergentes.”

Passons au volume III, chapitre XXII, où est développée l’idée des “invariants intégraux”. Bien entendu, Liouville avait démontré* la conservation du volume dans l’espace des phases, mais Poincaré en fait un véritable outil en considérant l’existence des invariants comme un ersatz infinitésimal de l’intégrabilité dont il a montré à la fin du tome I qu’elle n’a pas lieu. La présentation qu’il en donne dans les paragraphes 242 à 244 en terme d’intégrales des équations aux variations le long d’une trajectoire est un bel exemple, trop peu connu aujourd’hui, de sa vision géométrique.

Le chapitre XXVI, intitulé “Stabilité à la Poisson” en référence au problème de la stabilité des demi-grands axes des ellipses décrites en première approximation par les planètes lorsqu’on ne néglige plus les carrés des masses de celles-ci, est l’application la plus frappante de la conservation du volume. Poincaré y démontre avec une rigueur parfaite son célèbre “Théorème de récurrence” sous la forme fine, alors que la théorie de la mesure n’est pas encore établie. Plutôt que d’étudier comme l’avaient fait Lagrange, Poisson, Haretu, les “termes séculaires” dans les développements en série censés donner l’évolution temporelle des demi-grands axes des planètes, Poincaré obtient, au moins dans le cas du “Problème restreint” où le volume est fini, un résultat de stabilité, raffinant celui de Hill, par un raisonnement de pure théorie de la mesure. Le théorème de récurrence est l’ancêtre direct du “Théorème ergodique” que démontrera en 1931 le seul continuateur direct de Poincaré en mécanique céleste, Georges David Birkhoff. Plus tard, sous l’impulsion d’Andrei Kolmogorov, ceci deviendra la “Théorie ergodique”.

Les invariants intégraux sont également fondamentaux dans le chapitre XXVII, qui traite de l’“anneau de section” dans le Problème restreint des trois corps (en fait, c’est plutôt un disque chez Poincaré ; c’est Birkhoff qui, éclatant le centre, en fera un anneau). Les “distortions monotones de l’anneau conservant les aires” ont été le terrain qui a nourri bien des développements contemporains de la dynamique qualitative et de la géométrie symplectique, en particulier la preuve par Birkhoff en 1913 du “dernier théorème géométrique de Poincaré”**, ses estimations lipschitziennes *a priori* sur les courbes invariantes, le théorème de la courbe invariante de Moser (1962), la théorie d’Aubry-Mather*** (à partir de 1982) et le début de dynamique symbolique qu’elle contient (dans une situation qui, contrairement à celles étudiées par Hadamard, Morse, Anosov, Smale, etc..., n’est pas “hyper-

* Voir cependant la note ***** au bas de la page 3.

** Un théorème de point fixe qui est l’ancêtre du théorème de Conley-Zehnder et des résultats non perturbatifs d’existence de solutions périodiques des systèmes hamiltoniens.

*** Rappelons cependant qu’une bonne partie de cette théorie se trouve dès 1932 dans les travaux de Gustav Hedlund sur les géodésiques d’un tore riemannien. Le travail d’Hedlund est plus particulier en ce qu’il considère seulement des flots géodésiques, mais également plus général en ce qu’une surface de section n’existe pas forcément pour ces flots (voir la Note à la fin de mon exposé au *séminaire Bourbaki* intitulé *La dynamique au voisinage d’un point fixe elliptique conservatif : de Poincaré et Birkhoff à Aubry et Mather*, exposé 622, février 1984).

bolique"). Extraordinairement féconde, la notion de surface de section a mis en lumière la profonde parenté qui existe entre les solutions d'une équation différentielle et les orbites obtenues en itérant une application d'un espace topologique dans lui-même. Associée au développement des expériences numériques sur ordinateur, elle a nourri d'innombrables travaux d'un intérêt très inégal*.

Venons-en enfin aux mouvements quasi-périodiques. Le premier geste géométrique est de considérer non pas simplement une solution quasi-périodique mais son adhérence dans l'espace des phases. On obtient ainsi un ensemble invariant dynamiquement signifiant, un "tore lagrangien"** dont on peut chercher une "fonction génératrice" comme solution de l'équation de Hamilton-Jacobi, ce qui permet à Poincaré de construire les "séries de Lindstedt" (tome II, paragraphe 125) dont Lindstedt lui-même n'avait pu construire que les premiers termes. On assiste bien ici au passage de l'espace des phases comme pur lieu de calcul à l'espace de phases comme lieu à la fois de topologie et de théorie de la mesure.

Rappelons ces phrases du paragraphe 149, porte timidement ouverte à la possibilité que les séries à fréquences fixées convergent pour certaines fréquences particulières :

"Ne peut-il pas arriver que les séries (2) convergent quand on donne aux x_i^0 *certaines valeurs choisies ? Supposons pour simplifier qu'il y ait deux degrés de liberté; les séries ne pourraient-elles pas, par exemple, converger quand* x_1^0 *et* x_2^0 *ont été choisis de telle sorte que le rapport* $\frac{n_1}{n_2}$ *soit incommensurable, et que son carré soit au contraire commensurable (ou quand le rapport* $\frac{n_1}{n_2}$ *est assujetti à une autre condition analogue à celle que je viens d'énoncer un peu au hasard) ?*
Les raisonnements de ce chapitre ne me permettent pas d'affirmer que ce fait ne se présentera pas. Tout ce qu'il m'est permis de dire, c'est qu'il est fort invraisemblable."

Nous connaissons la suite. Dans son adresse au Congrès international des mathématiciens (Amsterdam, 1954), Kolmogorov – réalisant un rêve que Karl Weierstrass avait confié dans une lettre à Sonia Kowalewskaia soixante seize ans auparavant – dit :

"Beaucoup de mes lecteurs auront vraisemblablement deviné qu'il s'agit essentiellement de rendre effective une idée déjà largement discutée dans la littérature de mécanique céleste, à savoir, la possibilité d'éviter les "dénominateurs anormalement petits" dans les calculs de

---

* Parmi les travaux historiquement les plus intéressants, en dehors du précoce article de Fermi, Pasta et Ulam cité plus loin, je mentionnerai l'article de Michel Hénon et Carl Heiles, *The Applicability of the Third Integral Of Motion; Some Numerical Experiments*, paru en 1964 dans l'*Astronomical Journal*. Les auteurs y étudient la dynamique d'une application de premier retour suggérée par l'étude du mouvement d'une étoile dans un potentiel galactique. Ils ont la surprise de constater que lorsque l'énergie augmente, les courbes invariantes se font de plus en plus rares et semblent se dissoudre dans une région que les orbites parcourent de façon erratique. Un survol très complet de l'expérimentation numérique en systèmes dynamiques jusqu'en 1980 se trouve dans le cours de Hénon à l'Ecole des Houches en 1981 (session XXXVI, *Chaotic behaviour of deterministic systems*), intitulé *Numerical exploration of Hamiltonian systems*.

** Pour comprendre pourquoi l'on se limite aux tores lagrangiens, voir le paragraphe 3 de la rédaction des exposés *Séries de Lindstedt* que j'ai donnés au séminaire Poincaré en mars 1989 : *Notes scientifiques et techniques du Bureau des Longitudes*, 1990.

perturbation des orbites. Cependant, contrairement à la théorie classique des perturbations, j'obtiens des résultats précis au lieu d'une conclusion sur la convergence de séries de telle ou telle approximation d'ordre fini (par rapport à θ). Ceci est dû au fait que, au lieu de calculer le mouvement perturbé sous des conditions initiales fixées, je modifie les conditions initiales elles-mêmes de façon à obtenir des mouvements avec des fréquences normales (au sens de la condition 2.8) λ_α à chaque instant lorsque θ varie $\cdots$"

Le changement de point de vue opéré par Poincaré est devenu effectif : Kolmogorov remplace en effet un problème de Cauchy – où se donnant des conditions initiales, on essaie de trouver la solution correspondante – par un problème aux limites de type Dirichlet où l'on fixe le nombre de rotation, c'est-à-dire la dynamique que l'on cherche *a priori*. En fait, ce n'est plus une solution ni même un tore de solutions qu'on obtient mais, lorsqu'on considère toutes les fréquences admissibles, un ensemble de Cantor de mesure positive de solutions, c'est-à-dire une connaissance du système de nature à la fois topologique et probabiliste. On peut alors se poser, comme le fera Arnold en 1964, les problèmes de "diffusion" qui concernent le complémentaire de l'ensemble des tores invariants. Bien entendu, les astronomes connaissaient depuis longtemps le problème des petits diviseurs et celui des résonances mais, à partir de Kolmogorov, la vision géométrique, confortée par des techniques d'analyse très fines et des techniques numériques de plus en plus raffinées, vient remplacer la manipulation des "séries de perturbation" dont Poincaré avait montré la divergence. Le résultat de Kolmogorov infirmait, pour des systèmes hamiltoniens à un nombre fini de degrés de liberté, l'"hypothèse ergodique" formulée sous diverses formes par Boltzmann dans les années 1870-1880. Plus précisément, il montrait la non-généricité (au sens de la mesure) de l'ergodicité sur une surface d'énergie constante pour les systèmes proches de systèmes intégrables, c'est-à-dire l'inexistence "en général" pour de tels systèmes, d'ensembles invariants de mesure positive. Il arrive rarement, et ce n'en est que plus remarquable, que les mathématiques précèdent l'intuition physique. Mais il faut se rappeler que presque en même temps (et sans doute indépendamment), l'expérience numérique fondamentale de Fermi-Pasta-Ulam (1954, année de la mort de Fermi, publiée en 1955) fournissait un exemple de comportement non ergodique d'un système formé de 32 oscillateurs liés par des ressorts non linéaires. La surprise que causa cette expérience est claire dans la citation suivante* (*Collected papers of E. Fermi*, vol. II, U. of Chicago Press (1966) page 978) :

"Let us say here that the results of our computations were, from the beginning, surprising us. Instead of a continuous flow of energy from the first mode to the higher modes, all of the problems show an entirely different behaviour. ... Instead of a gradual increase of all the higher modes, the energy is exchanged, essentially, among only a certain few. It is therefore, very hard to observe the rate of "thermalization" or mixing in our problem, and this was the initial purpose of the calculation."

Décrivant cette expérience numérique dans son cours des Houches de 1981, déjà cité, Hénon insiste sur cette surprise :

"These results were very puzzling at the time, because this was before the KAM theorem, and dynamical systems were believed to be generally ergodic. In the light of the KAM

---

* Voir le chapitre 3, *Origin of soliton theory*, du survol de Richard Palais, *The symmetries of solitons, Bulletin A.M.S. vol 34, n^0 4, October 1997, p. 339-403.*

theorem, the results are more easily understood: fig. 78 simply represents a quasi-periodic orbit, lying on an invariant torus in phase space."

Deux visions de l'espace des phases sont en concurrence ici, celle de Maxwell-Boltzmann comme lieu d'équipartition de l'énergie et celle, géométrique, de Poincaré et des théorèmes de non-intégrabilité. C'est encore la première qui inspire cette "surprise" mais c'est la seconde qui permettra de la comprendre.*

Une dernière remarque : ce n'est qu'en 1977 que Nikolai Nekhoroshev publie la démonstration d'un théorème de stabilité en temps exponentiellement long pour un hamiltonien proche d'un hamiltonien intégrable qui vérifie une certaine condition appelée "raideur". Très lié à l'existence des séries de Lindstedt, ce théorème aurait dû logiquement précéder les théorèmes KAM. Mais, je pose la question, sa preuve, dans laquelle on doit contrôler la diffusion rapide due aux résonances (c'est le rôle de la raideur) et raccorder des développements en série (formes normales), aurait-elle pu être entreprise par un mathématicien insuffisamment pénétré de la réalité géométrique de l'espaces des phases ?

2.2 L'espace des phases aujourd'hui en Mécanique céleste

Faisons un rapide saut dans le temps et examinons sur quelques exemples l'impact de l'approche qualitative de Poincaré sur les travaux contemporains de mécanique céleste et d'astronomie.

A partir de 1974, Richard McGehee étudie de manière géométrique les collisions triples (celles justement que Sundman éliminait et dont Carl-Ludwig Siegel avait prouvé qu'elles n'étaient en général pas régularisables analytiquement) et montre comment, fondamentalement plus complexes qu'une collision double, elles autorisent à peu près n'importe quel comportement lorsque les trois corps les évitent de très peu. Il introduit pour cela la "variété de collision". Cette matérialisation éclatée de l'ensemble des points à l'infini de l'espace des phases qui représentent une collision des trois corps peut servir de "bord" à n'importe laquelle des sous-variétés d'énergie constante non nulle. On peut comprendre cette construction comme une réalisation de la réduction de la (pseudo)symétrie d'homothétie du problème des n corps, symétrie reconnue en 1922 par Elie Cartan dans son premier livre, *Leçons sur les invariants intégraux*, directement inspiré par Poincaré. Le système dynamique que l'on obtient sur (au voisinage de) la variété de collision décrit le comportement des corps lorsqu'ils arrivent en collision (au voisinage de la collision). Sur la variété elle-même, le système induit n'est plus hamiltonien mais au contraire dissipatif et admet une "fonction de Lyapunov" (i.e. une fonction qui décroît le long des solutions)

---

* On notera le complet renversement que représentait l'hypothèse de Maxwell-Boltzmann par rapport à ce qu'était alors la tendance dominante en mathématiques et en mécanique céleste, à savoir la recherche de méthodes pour intégrer les équations de la dynamique. Mais on ne rejoint qu'en apparence les recherches de Poincaré car, en mécanique statistique, on ne considérait que des systèmes à un très grand nombre (ou même un nombre infini) de degrés de liberté (éventuellement avec des chocs). On lira à ce propos *Boltzmann's Ergodic Hypothesis, a Conjecture for Centuries ?* de Domokos Szasz, publié dans *Studia Scientarum Mathematicarum Hungarica* 31 (1996), pages 299 à 322. On y verra en particulier que c'est du côté des billards de Sinaï, modèles des gaz de sphères dures, que l'on doit chercher la confirmation mathématique de l'hypothèse ergodique.

fournie par la classique "relation de Lagrange-Jacobi". Les singularités du système ainsi complété appartiennent à la variété de collision. Elles correspondent aux mouvements homothétiques découverts par Euler et Lagrange à la fin du dix-huitième siècle. Leurs variétés invariantes guident le comportement des solutions qui évitent de très peu la collision totale. La richesse dynamique que ceci implique, exemplaire de la force de la notion de variété invariante, est illustrée par les travaux de Rick Moeckel sur la construction d'un début de dynamique symbolique dans le problème plan trois corps. Ces travaux sont résumés dans un très bel article paru dans *Contemporary Mathematics* en 1988 et intitulé *Some Qualitative Features of the Three-Body Problem.* Y sont rassemblés les plus notables des résultats théoriques connus au moment où l'article est écrit, c'est-à-dire assez peu de chose*. Bien qu'on ne soit pas du tout dans une situation hyperbolique, Moeckel réussit quand même, en étudiant les intersections des variétés stable et instable des solutions homographiques de Lagrange suffisamment excentriques, à montrer l'existence, lorsque le moment cinétique est petit, de solutions variées qui, par exemple, se comportent de la manière suivante : le mouvement ressemble d'abord à un mouvement à la Euler où les trois corps restent en permanence alignés puis, après une petite promenade dans l'espace de phases, en vient à ressembler beaucoup à un mouvement de type Lagrange où les trois corps forment à chaque instant un triangle équilatéral, puis l'un des corps part très loin des deux autres mais finit par revenir... On obtient ainsi un ensemble de mesure nulle de solutions d'une arbitraire complexité, à l'évidence complètement inaccessible à l'analyse dans le sens où, même si on écrit, comme Sundman, le développement en série d'une telle solution, on ne comprendra rien à son comportement qualitatif sur ce développement**.

La conséquence la plus spectaculaire des travaux de McGehee a été obtenue par Joseph Gerver (1991) et Zihong (=Jeff) Xia (thèse 1988, publiée en 1992) qui ont montré l'existence de solutions (à dire vrai d'un ensemble de Cantor de solutions) du problème des $3n$ corps dans le plan avec n suffisamment grand pour Gerver, des cinq corps dans l'espace pour Xia, telles que certains des corps s'échappent à l'infini en temps fini***.

Nettement plus proches de la réalité spatiale, je citerai les recherches où, à partir de 1985, Carles Simó et ses co-auteurs étudient les possibilités de mettre en orbite, de façon stable, des satellites pendant un temps fini mais "suffisamment" long, disons quelques années. Même si d'un point de vue théorique il n'y a pas en général de "stabilité mathématique" – c'est-à-dire sur un temps infiniment long – il y a une "stabilité pratique" sur des temps (très,

---

* Au niveau numérique, et pour le problème de Hill, une image globale de la dynamique commence aujourd'hui à se dessiner (C. Simó et T. Stuchi (2000)).

** Dans le cas du problème restreint spatial, des solutions très complexes, dont la description ne peut se faire que par la dynamique symbolique, avaient déjà été obtenues par K.Sitnikov (1960), V.M. Alexeev (1969), C. Conley (1971). Un bel exposé du résultat de Sitnikov est donné par Moser dans la deuxième partie de son livre *Stable and Random Motions in Dynamical Systems*, publié en 1973 à Princeton.

*** Pour une explicitation de ce qui précède et une description détaillée de la solution de Xia, je renvoie à l'exposé que j'ai donné au *Séminaire Bourbaki* en juin 1997 (exposé 832 *A l'infini en temps fini*). On y verra en particulier le rôle joué par un article de 1975 où Mather et McGehee démontrent le même résultat pour quatre corps sur la droite après régularisation des collisions doubles, et celui de l'analyse par Simó de la dynamique sur la variété de collision du problème isocèle (1981).

suffisamment) longs. De plus, les régions de stabilité pratique semblent toujours limitées par des variétés stables et instables d'orbites périodiques ou d'ensembles invariants plus généraux*. On appréciera la façon dont ces idée font leur chemin dans l'extrait suivant de la préface d'un livre à paraître chez WSP dans lequel Simó et ses collaborateurs décrivent les travaux qu'ils ont effectué pour l'agence spatiale européenne :

"The present work is the final report of a study contract that was done for the European Space Agency in 1985. At that moment it was part of the mission analysis studies done by ESA for the SOHO mission. Unfortunately, not any of the techniques developed in our work was used for the real mission, and the tools used for the determination of the nominal trajectory, the transfer from the Earth and the station keeping, were the same ones used, almost ten years before, for the ISEE–C mission, requiring a larger cost. Now the scenario has changed. Most of the missions to the Lagrange points are studied using the dynamical systems tools and ideas of our work. They have been shown to give a global and geometric picture of the problem and, at the same time, they provide a systematic approach that avoids the use of the "trial and error" procedures, so widely used in the study of this kind of missions."

Il faut citer aussi le cas d'Edward Belbruno, qui en 1990-1991 avait réussi par des recherches qualitatives de ce type à récupérer un satellite japonais perdu dans la (vaste) nature**. N'est-ce pas un bel exemple d'application d'une idée purement abstraite, Mesdames et Messieurs les partisans d'un encadrement étroit des orientations de la recherche ?

Un autre exemple intéressant est la théorie élaborée par Jack Wisdom pour expliquer les "trous de Kirkwood" dans la distribution des demi-grands axes des astéroïdes (*Astronomical Journal 1982*) et les travaux d'Anatoly Neischtadt qu'elle a suscités (*Soviet Phys. Doklady 1986*). Le modèle est un problème restreint plan elliptique moyenné (Soleil, Jupiter, astéroïde). Un astéroïde plaçé dans une zone de résonance de l'espace des phases (3/1 dans le travail de Wisdom) peut acquérir une excentricité suffisante pour qu'il croise l'orbite de Mars et finisse par être ejecté du système. Typiquement, l'excentricité variera peu pendant un million d'années puis augmentera assez brutalement. Mathématiquement, il s'agit d'un "saut de l'invariant adiabatique" dû à la traversée d'une variété invariante de l'application de premier retour dans un anneau de section.

Je parlerai maintenant un peu plus longuement des travaux de Jacques Laskar. Après avoir dirigé ensemble un séminaire de trois ans sur les *Méthodes nouvelles*, nous avons créé au début de 1992 l'équipe Astronomie et Systèmes Dynamiques (ASD) au sein du Centre de calcul du Bureau des Longitudes, actuellement Institut de Mécanique Céleste (IMCCE). Avec à la fois des astronomes et des mathématiciens, cette aventure me paraît exemplaire de l'intrusion (lente) du point de vue global et géométrique de Poincaré dans la mécanique céleste la plus appliquée. J'irai jusqu'à dire que c'est seulement aujourd'hui que, grâce à la puissance de calcul numérique des ordinateurs, la notion d'espace des phases commence à s'incarner dans les recherches mêmes des astronomes.

---

* Voir l'exposé de Simó *Effective Computations in Hamiltonian Dynamics* lors de la journée annuelle de la S.M.F. consacrée à la mécanique céleste en Juin 1996.

** Voir l'article de vulgarisation *Gravity's Rim: Riding chaos to the Moon*, écrit en Septembre 1994 dans la revue *Discover* par Adam Frank.

Les travaux de Laskar (et de ses collaborateurs, en particulier Frederic Joutel et Philippe Robutel) concernent le système solaire, non plus des modèles epurés de mathématiciens mais le vrai (enfin presque*) système solaire, les vraies planètes y compris la Terre. J'évoquerai trois points qui me paraissent remarquables.

1) L'instabilité du système solaire** sur des durées de l'ordre de cent millions d'années, où se manifeste la notion d'exposants de Lyapounov. C'est à ce propos que Laskar a introduit l'*analyse en fréquences*, méthode si efficace d'analyse du comportement global d'un système hamiltonien qu'elle est aujourd'hui utilisée avec succès dans les domaines les plus divers, par exemple la définition des paramètres dans un accélérateur de particules.

L'intégration numérique directe des équations du mouvement n'était pas possible sur de telles durées en 1989-1990, date de ces travaux. Laskar remplace celles-ci par des équations moyennées (c'est en fait un peu plus compliqué que ça) bien connues des astronomes – le "système séculaire au deuxième ordre des masses et au cinquième ordre des excentricités et inclinaisons" – qui décrit (approximativement) l'évolution au cours des siècles des éléments caractérisant à chaque instant les ellipses képlériennes que suivent approximativement (pendant une durée suffisamment petite) les planètes. Intégrable dans l'approximation képlérienne où les planètes n'influent pas les unes sur les autres, ce système l'est de "moins en moins" lorsqu'on s'éloigne de la singularité représentée par des mouvements circulaires coplanaires et de même sens de toutes les planètes***. La non-intégrabilité signifie que l'espace des phases n'est plus rempli par des tores invariants (i.e. des mouvements quasi-périodiques), même si les théorèmes de type KAM permettent d'affirmer que ces tores deviennent dominants lorsqu'on s'approche de la singularité. La surprise est que dans la zone où se trouve effectivement la solution qui nous intéresse tant, le mouvement du système solaire, les tores ont pratiquement disparu****, laissant la place à des phénomènes complexes de diffusion. Qui plus est, les responsables de cet état de fait peuvent être identifiées, ce sont des "résonances séculaires", dépendance rationnelle de certaines fréquences séculaires (par exemple $2(g_4 - g_3) - (s_4 - s_3) \approx 0$, où g_3, g_4 désignent les fréquences de précession des périhélies des ellipses décrites par la Terre et par Mars, et s_3, s_4 celles de leurs nœuds). Interprétés dans le cadre classique comme des dénominateurs anormalement petits qui font diverger les calculs, ces termes reçoivent ici une interprétation géométrique : ils causent des transitions imprévisibles entre rotation et libration pour les combinaisons d'angles correspondant à ces combinaisons de fréquences, ce qui nous ramène aux séries

---

* Des corrections aux équations de Newton du mouvement des planètes, en particulier celles dues à la lune et à la relativité, sont prises en considération.

** Une description détaillée et didactique de ses travaux, située dans une perspective historique, est donnée par Laskar dans sa contribution au volume déjà cité en note *Chaos et déterminisme* (Editions du Seuil, 1992) sous le titre (ironique ?) *La stabilité du système solaire.* Voir également son article *Large scale chaos and marginal stability in the solar system*, reproduisant une conférence au onzième colloque international de physique mathématique, Paris Juillet 1994 (Celestial Mechanics 64 (1996) 115-162).

*** L'approximation linéaire du système séculaire au voisinage de cette singularité est l'objet de travaux célèbres de Lagrange et Laplace. Elle est au cœur de la première "démonstration" de stabilité du système solaire (voir l'article de Laskar cité ci-dessus).

**** Le système est donc hors du domaine d'application du théorème de stabilité démontré par Arnold en 1963.

de Bohlin. C'est là qu'intervient l'analyse en fréquences. En un mot, Laskar découpe le mouvement en tranches dont il fait l'hypothèse qu'elles sont quasi-périodiques et analyse la dérive des fréquences ainsi obtenues, réalisant en quelque sorte une image de l'espace des actions (du système képlérien non perturbé) dans l'espace des fréquences. La conclusion est qu'au bout de cent millions d'années l'incertitude sur les positions des périhélies et des nœuds des ellipses képlériennes (mais pas sur la taille de leurs grands axes) est totale ! Ces résultats, sans être mathématiquement démontrés – il faudrait une délicate analyse des erreurs pouvant s'introduire dans l'intégration numérique de ce système dont le développement du Hamiltonien comporte 150000 termes – ont été confirmés en 1992 par comparaison avec l'intégration directe des équations de Newton.

2) La possibilité que Mercure s'échappe hors du système solaire au bout d'un temps de l'ordre de cinq milliards d'années. Là encore, la démarche de Laskar est directement inspirée par la théorie qualitative des systèmes dynamiques et plus précisément la notion de pseudo-orbite et le "lemme de l'ombre" (shadowing, "lemme de pistage" pour certains : existence d'une véritable orbite près de chaque pseudo-orbite). Bien entendu, ce dernier ne vaut que dans les systèmes hyperboliques, mais les travaux de John Mather basés sur la méthode variationnelle ont montré qu'il peut également valoir, sous une forme affaiblie, dans certaines situations beaucoup plus générales. Laskar intègre numériquement le système séculaire pendant cinq cents millions d'années à partir de cinq données initiales très rapprochées (la différence de la position de la Terre est de l'ordre de dix mètres entre deux d'entre elles). De ces cinq évolutions, il ne conserve que celle pour laquelle l'excentricité de Mercure est la plus grande. Puis il recommence en prenant cinq données initiales très proche de l'état final de la solution choisie. En répétant cette opération une dizaine de fois, il réussit à faire "s'échapper" Mercure qui s'approche trop de Vénus (une autre possibilité est la collision avec Vénus). Que cet article ait été refusé par les éditeurs de la revue *Nature** montre bien que la géométrie des systèmes dynamiques n'est pas encore admise communément : il est pourtant beaucoup plus pertinent de considérer une famille d'orbites qu'une orbite particulière sur la définition de laquelle pèsent de toute façon des incertitudes. Poincaré, Hadamard et Duhem le savaient bien.

3) L'effet stabilisateur de la Lune sur l'axe de rotation de la Terre, qui est "démontré" par l'étude globale, à l'aide de l'analyse en fréquences, du pendule perturbé (par les mouvements planétaires) que forme le couple de variables <inclinaison-fréquence de précession> associées à l'axe de rotation de la Terre.

Lorsqu'un degré de plus dans l'inclinaison de l'axe de rotation de la Terre peut suffire à expliquer une ère glaciaire, on comprend que Laskar ait pu intituler un article de vulgarisation *La lune et l'origine de l'homme.* Il montre en effet que, si l'on enlevait la Lune (jolie manière de dire les choses), le point représentant l'état du système se trouverait dans une zone de l'espace des phases ne contenant pas ou peu de tores invariants, ce qui autoriserait une diffusion conduisant, au bout de quelques millions d'années, à un retournement de l'axe de la Terre, alors que dans l'état actuel ce point se trouve dans une région où les

* sans même le soumettre à des spécialistes, sans doute sous le prétexte que Laskar avait "modifié" les conditions initiales du système solaire.

tores invariants sont si denses qu'ils n'autorisent pratiquement pas de diffusion*. C'est bien la considération globale de l'espace des phases qui est à l'œuvre ici.

Une remarque encore : curieusement, dans le premier point, le formalisme symplectique ne joue pas un rôle prépondérant. Désirant s'appuyer sur les acquis des astronomes, Laskar a conservé leur façon de faire, celle de Le Verrier précisément, et il ne travaille pas dans des variables symplectiques. Ceci n'aurait pas étonné Poincaré qui écrit à la fin du paragraphe 129, chapitre IX, du tome II des *Méthodes nouvelles* :

"J'ajouterai que nous avons choisi d'une manière particulière les constantes d'intégration, afin de conserver aux équations leur forme canonique. M. Newcomb ne s'y est pas astreint, et c'est ce que font d'ailleurs les astronomes dans l'application de la méthode de Lagrange. Les équations où s'introduisent les crochets de Lagrange prennent ainsi une forme en apparence plus compliquée. Mais cette différence n'a rien d'essentiel."

L'idée même de considérer l'espace des phases comme un objet global, lieu de géométrie où s'organise l'ensemble des solutions, est en effet plus importante que le fait d'utiliser un formalisme symplectique ou telles coordonnées particulières**.

Revenant aux mathématiques mais pensant toujours à la possible échappée de Mercure hors du système solaire, je propose au lecteur de méditer sur deux extraits (transcrits textuellement) du dernier paragraphe, intitulé *The oldest open question in dynamical systems*, du dernier article publié par Michel Herman, *Some Open Problems in Dynamical systems, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, vol. II, Berlin 1998****. Il s'agit de décider si, plutôt qu'un mouvement quasi-périodique stable, le destin de la plupart des solutions du problème planétaire des n corps n'est pas que certains corps s'échappent à l'infini ou finissent en collision. Comme il arrive souvent****, la réponse dépend de la définition de "la plupart" :

I. Newton, $[N_1]$, certainly believed that the n-body problem, $n \geq 3$ (n particles moving under universal gravitation) is topologically unstable and, to paraphrase Laplace, makes the hypothesis that God solves the problem and controls the instabilities (hypothesis criticized by Leibniz and by all the enlighted XVIIIth century)

...

The fact that the bounded orbits have positive Lebesgue measure when the masses belong to a non empty open set, is a remarkable result announced by V.I. Arnold $[A_4]$ (Arnold only gives a proof for planar 3-body problem and if the author is not mistaken, Arnold's claim is correct). In some respect Arnold's claim proves that Lagrange and Laplace, against Newton, are correct in the sense of measure theory and that in the sense of topology, the above question, in some respect, could show Newton is correct.

---

* En quelque sorte, les tores disparus laissent un fort "souvenir" qui ralentit considérablement la diffusion.

** Je parle ici du choix des coordonnées. Il n'est pas question, bien entendu, de nier l'importance conceptuelle des structures symplectiques.

*** Pour replacer ces citations dans leur contexte, voir mon article *Michel Herman, la mécanique céleste et quelques souvenirs*, à paraître dans le numéro d'avril 2001 de la *Gazette des mathématiciens.*

**** Voir le superbe livre d'Oxtoby, *Measure and Category.*

N.B. Les opinions avancées dans cet article ne sont pas universellement partagées. Alain Albouy soutient par exemple que l'influence véritable des idées de Poincaré sur le développement de l'astronomie et en particulier dans les exemples que je cite, est minime, en tout cas incomparablement moins grande que celle de l'accroissement de la puissance des ordinateurs. Le débat est ouvert.

Je remercie les organisateurs ou plutôt les organisatrices, Sara Franceschelli et Tatiana Marins Roque, de leur invitation. La transcription par Tatiana de l'enregistrement de ma conférence a seule vaincu ma réticence à rédiger celle-ci. Faut-il l'en remercier ? Le lecteur jugera.

Je remercie également Jean Ecalle de m'avoir invité à parler à Orsay en Décembre 1998 dans le cadre du Séminaire d'Histoire des Sciences et des techniques intitulé “Evolution des mathématiques au cours des cinquante dernières années : tendances lourdes” ; j'ai mis à contribution dans le présent exposé les notes de lecture de Poincaré que j'avais préparées alors.

Merci enfin à Alain Albouy, Patrick Bernard, Marc Chaperon, Florin Diacu, Jean Ecalle, Jacques Fejoz, Dominique Flament, Michel Hénon, Phil Holmes, Jacques Laskar, Rick Moeckel, David Sauzin et Carles Simó pour des lectures critiques et/ou des références à différents stades de la rédaction. Leurs remarques ont beaucoup enrichi le texte.