

LE PROBLEME DE LA LUNE
ET LA THEORIE DES SYSTEMES DYNAMIQUES

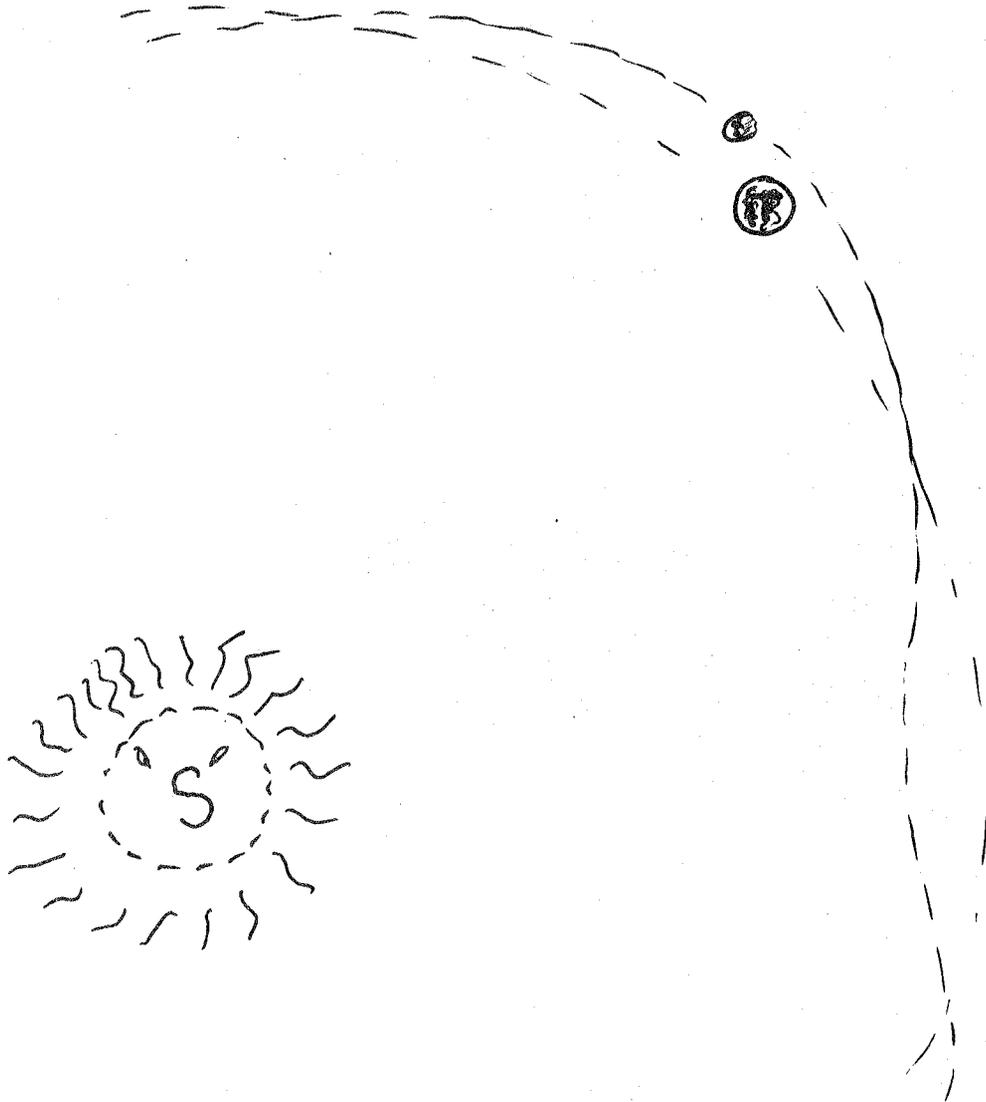
(1^{ère} partie)

Notes du cours de A. Chenciner , Paris VII, 1985-1986.

A la mémoire de Charles Conley.

Le problème n'est pas ici d'y mettre les pieds, plutôt d'y mettre les mains, je veux dire dans les équations de Newton. La thèse de Charles Conley, qui généralise au cas de masses arbitraires des deux corps primaires les résultats de Poincaré et Birkhoff sur le problème restreint (et circulaire) des trois corps, sera prétexte à l'introduction de bien des notions fondamentales de la théorie des systèmes dynamiques. Cet exemple et ses petites soeurs étant à la base du sujet, ceci n'a rien d'étonnant mais, s'il faut étudier des difféomorphismes de l'anneau ayant la propriété de "distortion monotone", qu'au moins on sache pourquoi. L'histoire n'est pas si vieille.

Le problème...



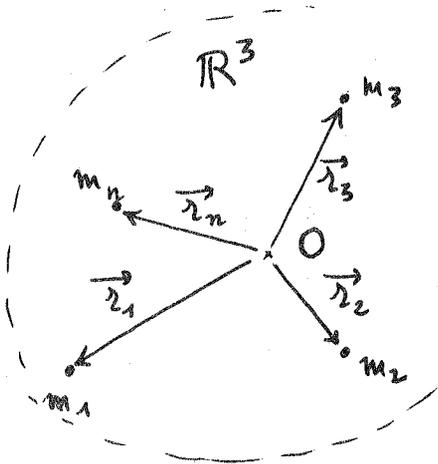
La référence fondamentale: Charles Conley, On Some New Long Periodic Solutions of the Plane Restricted Three Body Problem, Communications on Pure and Applied Mathematics, vol XVI, 449-467 (1963).

I- LES EQUATIONS ET LEUR GEOMETRIE APPROCHEE.

1.- Newton

Référence: H. Pollard, Celestial Mechanics,

Carus Math. Monographs n°18, M.A.A. 1976.



$$m_k \frac{d^2 \vec{r}_k}{dt^2} = \sum_{j \neq k} \frac{G m_j m_k}{r_{jk}^2} \frac{\vec{r}_j - \vec{r}_k}{r_{jk}}$$

où $r_{ij} = \|\vec{r}_i - \vec{r}_j\|$

S'il y a n corps, on obtient un champ de vecteurs sur R^{6n} privé de ses diagonales $\vec{r}_j = \vec{r}_k$:

$$\vec{r}_k = (x_k, y_k, z_k), \quad \frac{d\vec{r}_k}{dt} = (u_k, v_k, w_k),$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx_k}{dt} = u_k, \quad \frac{dy_k}{dt} = v_k, \quad \frac{dz_k}{dt} = w_k, \\ \frac{du_k}{dt} = \sum_{j \neq k} \frac{G m_j}{r_{jk}^3} (x_j - x_k), \\ \frac{dv_k}{dt} = \sum_{j \neq k} \frac{G m_j}{r_{jk}^3} (y_j - y_k), \\ \frac{dw_k}{dt} = \sum_{j \neq k} \frac{G m_j}{r_{jk}^3} (z_j - z_k), \end{array} \right.$$

$k = 1, \dots, n.$

2
gohit

Lois de conservation:

(i) Le centre de masse $\sum m_k \vec{r}_k / \sum m_k$ a une accélération nulle; le prendre comme origine des coordonnées ne change donc pas les équations. Autrement dit, on se restreindra au sous-espace vectoriel de codimension 6 de \mathbb{R}^{6n} défini par les équations

$$\sum m_k \vec{r}_k = \vec{0}, \quad \sum m_k \frac{d\vec{r}_k}{dt} = \vec{0}.$$

(ii) L'énergie totale

$$T + V = \underbrace{\frac{1}{2} \sum m_k \left\| \frac{d\vec{r}_k}{dt} \right\|^2}_{\text{cinétique } T} - \underbrace{\sum_{1 \leq j < k \leq n} \frac{G m_j m_k}{r_{jk}}}_{\text{potentielle } V}$$

se conserve au cours du mouvement; les équations de Newton s'écrivent en effet

$$m_k \frac{d^2 \vec{r}_k}{dt^2} = - \text{grad}_k V,$$

où $\text{grad}_k V$ désigne le vecteur $\left(\frac{\partial V}{\partial x_k}, \frac{\partial V}{\partial y_k}, \frac{\partial V}{\partial z_k} \right)$.

(iii) Le moment cinétique

$$\vec{C} = \sum m_k \left(\vec{r}_k \wedge \frac{d\vec{r}_k}{dt} \right)$$

est lui aussi constant au cours du mouvement; c'est évident et bien connu.

Avec trois corps dans \mathbb{R}^3 il nous reste quand même un champ de vecteurs sur un espace (variété en général) de dimension $6 \times 3 - 6 - 1 - 3 = 8$ ce qui est encore bien effrayant (au moins pour un mathématicien). Avec trois corps dans \mathbb{R}^2 le même décompte nous donne $4 \times 3 - 4 - 1 - 1 = 6$ qui n'est guère plus sympathique.

Dans le cas de deux corps, au contraire, on sait complètement intégrer les équations du mouvement, et ce depuis Kepler.^(*)

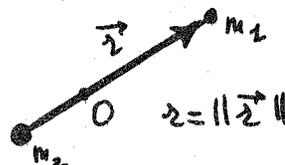
(*) i.e. avant que les équations soient écrites ... voir note page 11.

2.- Kepler revu par Levi-Civita et quelques autres: la fibration de Hopf dans tous ses états

Lorsqu'il n'y a que deux corps, seul reste à déterminer le mouvement autour du centre de masse du segment qui les joint:

le vecteur $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ vérifie l'équation de Kepler

$$(1) \quad \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = - \frac{G(m_1 + m_2)}{r^3} \vec{r} \quad ,$$



et la constance du moment cinétique devient celle de

$$\vec{r} \wedge \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{C} \quad ,$$

d'où il suit que chaque orbite est située dans un plan (orthogonal à \vec{C}).

Nous nous placerons dorénavant dans un tel plan, et normaliserons les unités de façon que $G(m_1 + m_2) = 1$.

Identifiant $\vec{r} = (x_1, x_2)$ et $\frac{d\vec{r}}{dt} = (y_1, y_2)$ respectivement à

$$x = x_1 + ix_2 \in \mathbb{C} - 0, \quad y = y_1 + iy_2 \in \mathbb{C},$$

l'énergie totale s'écrit (à un facteur 2 près)

$$H(x, \bar{x}, y, \bar{y}) = |y|^2 - \frac{2}{|x|} \quad ,$$

et l'équation de Kepler prend, conformément à sa nature variationnelle, la forme Hamiltonienne (voir Arnold, Méthodes Mathématiques de la Mécanique Classique, Editions Mir)

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \bar{y}} = y \\ \frac{dy}{dt} = - \frac{\partial H}{\partial x} = - \frac{x}{|x|^3} \end{cases}$$

Note: Nous ferons les abus de notation suivants: H sera souvent écrite $H(x,y)$ ou $H(x_1,x_2,y_1,y_2)$. L'identité

$$\frac{\partial H}{\partial x} dx + \frac{\partial H}{\partial \bar{x}} d\bar{x} + \frac{\partial H}{\partial y} dy + \frac{\partial H}{\partial \bar{y}} d\bar{y} = \frac{\partial H}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial H}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial H}{\partial y_1} dy_1 + \frac{\partial H}{\partial y_2} dy_2$$

fournit immédiatement $\frac{\partial H}{\partial \bar{x}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial H}{\partial x_1} + i \frac{\partial H}{\partial x_2} \right)$, etc...

(voir n'importe quel livre sur les fonctions analytiques).

L'équation (2) s'écrit donc, de façon plus classique,

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \frac{\partial H}{\partial x_1} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial H}{\partial x_2} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial H}{\partial y_1} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial H}{\partial y_2} \end{pmatrix} ;$$

le second membre est le gradient symplectique $\text{grad}_\omega H$ de H relatif à la 2-forme symplectique $\omega = 2(dx_1 \wedge dy_1 + dx_2 \wedge dy_2) = dx \wedge d\bar{y} + d\bar{x} \wedge dy$. Il est caractérisé par la formule

$$\forall x, dH(x) = \omega(x, \text{grad}_\omega H),$$

et ne diffère du gradient usuel que par une rotation de $\frac{\pi}{2}$ dans chaque plan (x_1, y_1) et (x_2, y_2) et une homothétie non significative (voir Arnold, M.M.M.C. chap. 8).

Remarquons que cette forme des équations rend évidente la conservation de l'énergie.

supra!
2 grad p!

$\frac{\pi}{2}$
après
 $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

*explique ω
 $\gamma_1 - \omega$
i.e. grad q!*

Fixons l'énergie H à une valeur négative, notée $-\frac{1}{\epsilon^2}$ en conformité avec Conley: les mouvements correspondants sont elliptiques, nous le verrons bientôt. Il n'est pas difficile de se persuader que l'équation

$$H(x, y) + \frac{1}{\epsilon^2} = 0$$

définit une sous-variété Σ_ϵ de $(\mathbb{C} - 0) \times \mathbb{C}$ difféomorphe au tore solide ouvert $S^1 \times \mathbb{R}^2$.

C'est le champ de vecteurs défini sur cette variété par l'équation de Kepler (2) que nous désirons comprendre: la non compacité de Σ_ϵ , source de difficultés diverses, provient de l'existence d'orbites de collision d'énergie quelconque; au voisinage d'une collision, $|x|$ tend vers 0 et $|y|$ vers l'infini. Levi-Civita a proposé au début du siècle le "changement de variables"

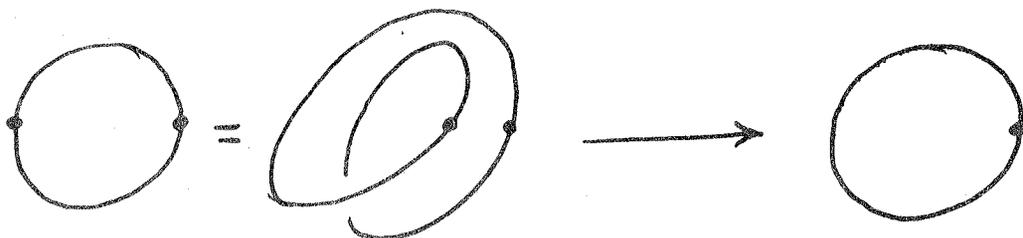
$$(L.C.) \quad x = 2z^2, \quad y = \frac{w}{\epsilon z},$$

assorti du changement de temps

$$dt = 2\epsilon |x| dt'$$

(qui empêche la vitesse de devenir infinie au voisinage d'une collision) pour régulariser ces collisions.

Plus précisément, le complémentaire $\tilde{\Sigma}_\epsilon$ du plan ($z = 0$) dans la sphère $S^3 \subset \mathbb{C}^2$ d'équation $K(z, w) \equiv |z|^2 + |w|^2 - \epsilon^2 = 0$ est évidemment difféomorphe à $S^1 \times \mathbb{R}^2$, et la restriction à $\tilde{\Sigma}_\epsilon$ de l'application (L.C.) définie ci-dessus est un revêtement à deux feuillets de $\tilde{\Sigma}_\epsilon$ sur Σ_ϵ , c'est-à-dire un homéomorphisme local dont l'image réciproque de chaque petit disque est formée de deux disques disjoints (penser à la restriction au cercle unité de \mathbb{C} de l'application $z \mapsto z^2$).



Après changement de la longueur des vecteurs suivant la loi indiquée (changement de temps), le champ défini par (2) sur Σ_ε a pour image réciproque par (L.C.) sur $\tilde{\Sigma}_\varepsilon$ la restriction d'un champ régulier défini sur S^3 toute entière par les formules

1
t

$$(3) \begin{cases} \frac{dz}{dt} = \frac{\partial K}{\partial \bar{w}} = w \\ \frac{dw}{dt} = -\frac{\partial K}{\partial z} = -z \end{cases}$$

~~ou K(z,w)~~
La démonstration de tout ceci est immédiate (ce qui n'enlève rien à la beauté de la chose) et vaut également pour les fonctions H plus compliquées que nous rencontrerons par la suite: on pose

$$K(z, w) = \varepsilon^2 |z|^2 \left[H\left(2z^2, \frac{w}{\varepsilon \bar{z}}\right) + \frac{1}{\varepsilon^2} \right],$$

et on montre que la restriction à $\tilde{\Sigma}_\varepsilon = \{(z, w), K(z, w) = 0, z \neq 0\}$ du champ de vecteurs

$$\begin{cases} \frac{dz}{dt} = \frac{\partial K}{\partial \bar{w}} = \varepsilon \bar{z} \frac{\partial H}{\partial y}\left(2z^2, \frac{w}{\varepsilon \bar{z}}\right) \\ \frac{dw}{dt} = -\frac{\partial K}{\partial z} = -\varepsilon z \left[H\left(2z^2, \frac{w}{\varepsilon \bar{z}}\right) + \frac{1}{\varepsilon^2} \right] - 4\varepsilon^2 |z|^2 \bar{z} \frac{\partial H}{\partial x}\left(-, -\right) + \varepsilon \frac{w}{\bar{z}} \frac{\partial H}{\partial y}\left(-, -\right) \end{cases}$$

admet une image directe par (L.C.) sur Σ_ε , qui n'est autre que

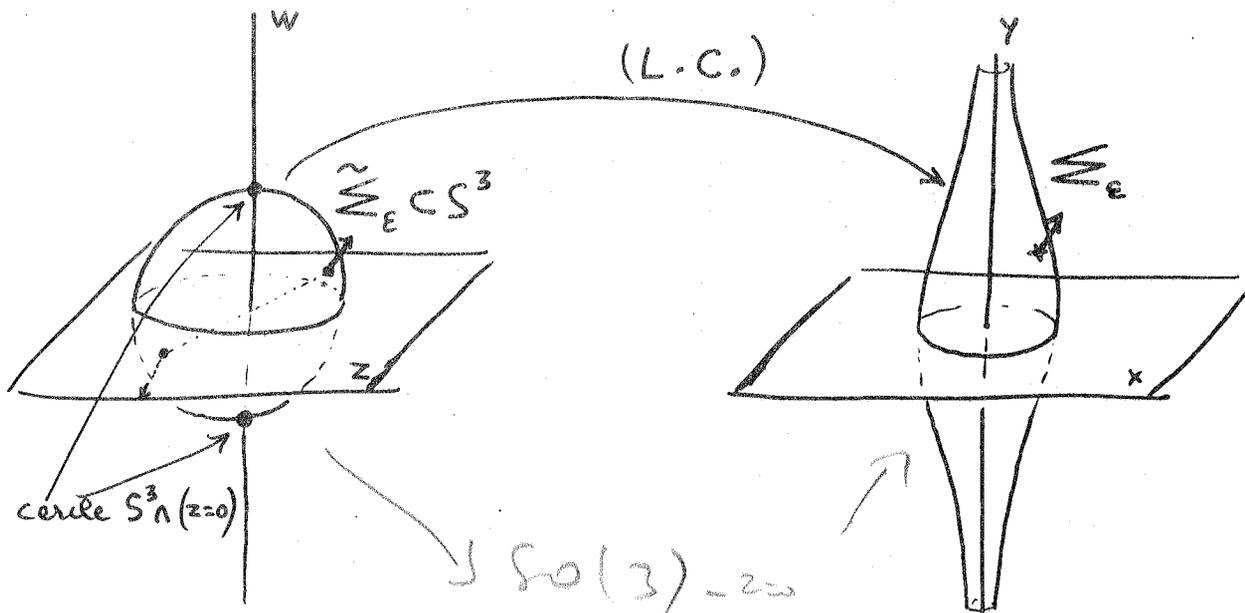
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 4z \frac{dz}{dt} = 2\varepsilon |z| \frac{\partial H}{\partial y}(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = \frac{1}{\varepsilon \bar{z}} \frac{dw}{dt} - \frac{w}{\varepsilon \bar{z}^2} \frac{dz}{dt} = -2\varepsilon |z| \frac{\partial H}{\partial x}(x, y) \end{cases},$$

c'est-à-dire (2) au changement de temps.

Remarque: Que (3) ait encore la forme Hamiltonienne n'est pas un miracle mais la conséquence de la préservation à homothétie près de la forme symplectique ω par l'application (L.C.): $dx \wedge d\bar{y} + d\bar{x} \wedge dy = \frac{2}{\varepsilon} (dz \wedge d\bar{w} + d\bar{z} \wedge dw)$.

(voir Arnold, M.M.M.C. ou Siegel, Moser, Lectures on celestial mechanics, Springer 1971, chapitre 1, §2).

Z est pt de temps
OK Hamiltonien car K=0
→ temps en plus = 0.



Revenant à l'équation (linéaire!) (3), nous la résolvons en se plaçant dans une base propre; chaque valeur propre $\pm i$ de la matrice associée étant double, le choix d'une telle base n'est pas unique à homothétie près: celui que nous faisons, analogue à celui de Conley, s'imposera par la suite comme le mieux adapté à notre problème car il fait jouer un rôle particulier aux orbites Kepleriennes circulaires. On pose

$$\begin{cases} u_1 = w + iz \\ u_2 = \bar{w} + i\bar{z} \end{cases},$$

$$\frac{1}{\epsilon} (dz \wedge d\bar{w} + d\bar{z} \wedge dw)$$

ce qui transforme (3) en

$$(4) \begin{cases} \frac{du_1}{dt} = i u_1 \\ \frac{du_2}{dt} = i u_2 \end{cases}$$

$$\frac{1}{\epsilon i} (du_1 \wedge d\bar{u}_1 + du_2 \wedge d\bar{u}_2)$$

qui s'intègre explicitement en

$$u_1(t) = c_1 e^{it}, \quad u_2(t) = c_2 e^{it}, \quad |c_1|^2 + |c_2|^2 = 2\epsilon^2.$$

(Ne pas oublier que nous sommes sur la sphère d'équation $|z|^2 + |w|^2 = \epsilon^2$, c'est-à-dire $|u_1|^2 + |u_2|^2 = 2\epsilon^2$).

Les courbes intégrales sont donc les intersections de la sphère S^3 de \mathbb{C}^2 d'équation $|u_1|^2 + |u_2|^2 = 2\varepsilon^2$ avec les droites complexes de \mathbb{C}^2 :

$$\frac{u_1(t)}{u_2(t)} = \frac{c_1}{c_2} \in \mathbb{C} \cup \infty = \mathbb{P}_1(\mathbb{C}) = \text{sphère de Riemann.} \\ = \{ \text{droites complexes de } \mathbb{C}^2 \}.$$

Chacune est donc un grand cercle de S^3 .

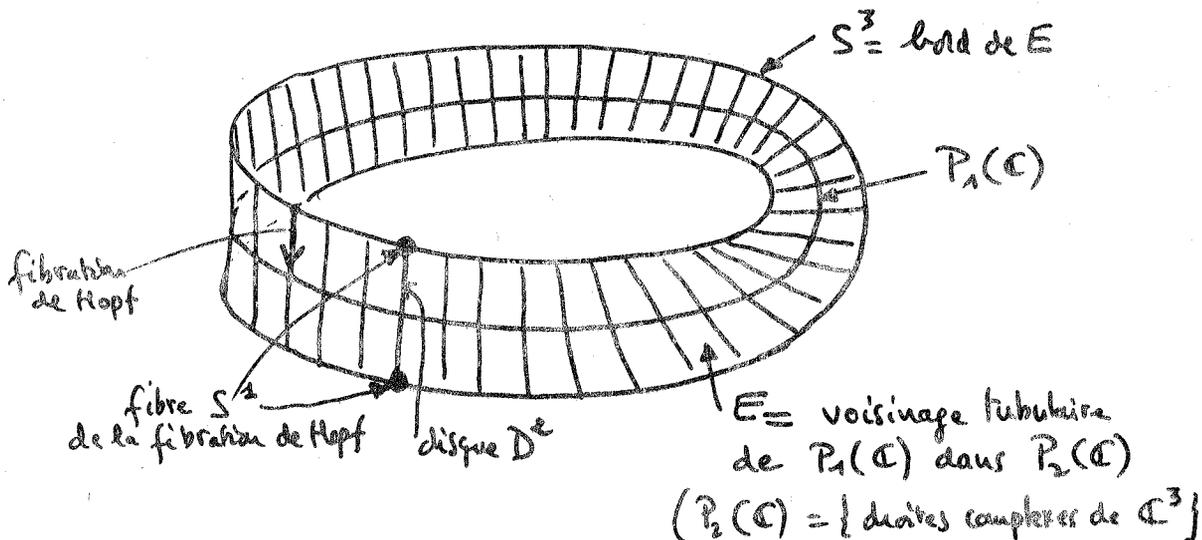
L'application de quotient

$$\mathbb{C}^2 \supset S^3 \longrightarrow S^2 = \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$$

qui, au couple (u_1, u_2) vérifiant $|u_1|^2 + |u_2|^2 = 2\varepsilon^2$ (ou 1, c'est pareil) associe l'élément de l'espace projectif $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ de coordonnées homogènes $[u_1, u_2]$ est une fibration localement triviale dont les fibres sont nos courbes intégrales (l'image réciproque d'un petit disque dans $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ est homéomorphe au produit de ce disque par le cercle S^1 ; pour plus de précisions voir n'importe quel livre de Topologie Algébrique).

Elle est célèbre sous le nom de fibration de Hopf.

Non contente de représenter le générateur du groupe d'homotopie $\pi_3(S^2) \cong \mathbb{Z}$, elle apparait également (à isomorphisme près) comme restriction au bord du fibré en disques normal à $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ canoniquement plongé dans $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$; la figure ci-dessous représente ceci après qu'on ait malhonnêtement remplacé \mathbb{C} par \mathbb{R} :



(*) droite figurée ici sous e.v. de dimension 1 sur \mathbb{C} .

(*) Pour l'invariant de Hopf, voir Milnor, *Topology from the diff. viewpoint*, U of Virginia, Fall 1965

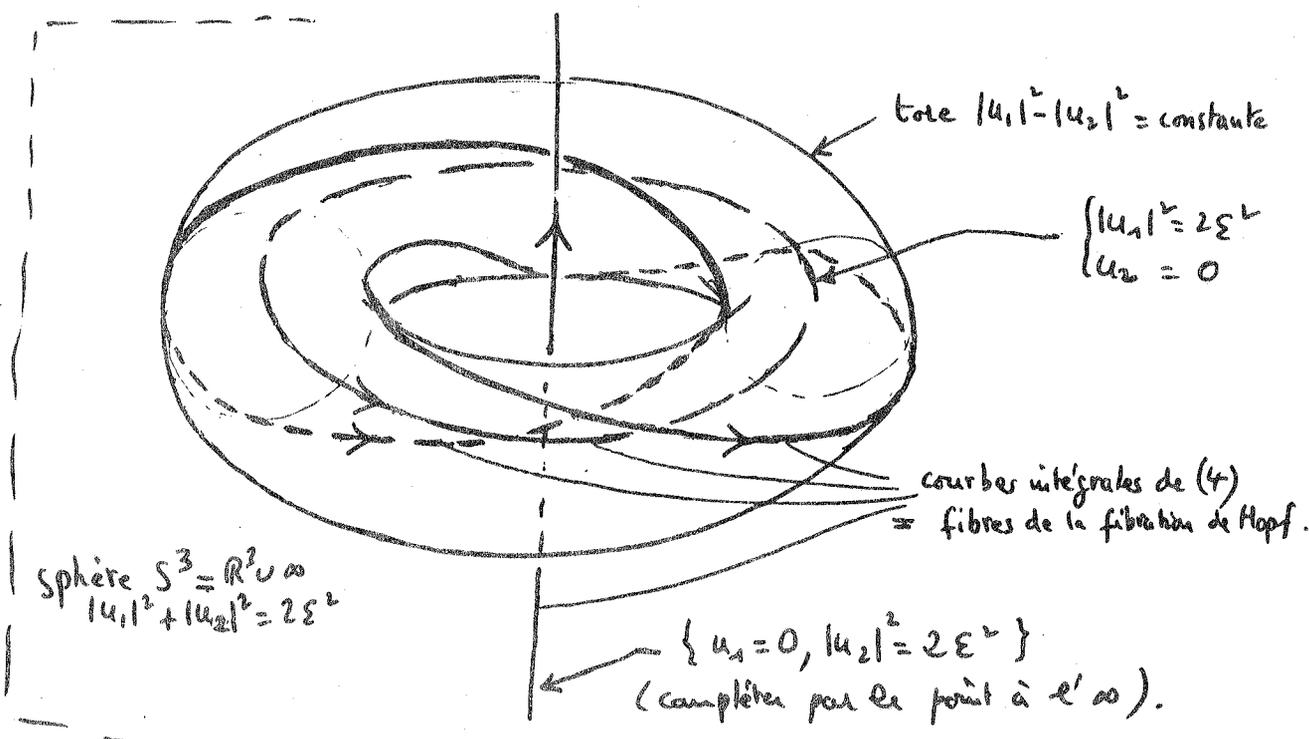
Disc sur le

Ce n'est pas tout; nous verrons bientôt les liens étroits qu'elle entretient avec le flot géodésique sur la sphère ronde S^2 et donc, celà va de soi, avec le groupe orthogonal $SO(3)$ dont S^3 est, tiens, tiens!, un revêtement à deux feuillets.

Pour la décrire, laissons nous guider par la façon retorse dont nous l'avons introduite: dans nos diverses coordonnées, le moment cinétique s'écrit

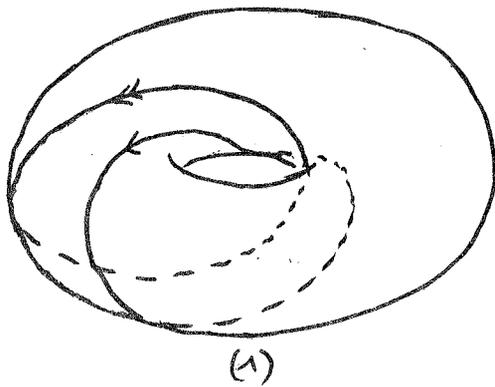
$$\begin{aligned} \vec{r} \wedge \frac{d\vec{r}}{dt} &= x_1 y_2 - x_2 y_1 = \operatorname{Im}(\bar{x}y) = \frac{1}{2i}(\bar{x}y - x\bar{y}) \\ &= \frac{1}{2\varepsilon}(\bar{z}w - z\bar{w}) = \frac{1}{2\varepsilon}(|u_1|^2 - |u_2|^2). \end{aligned}$$

De sa constance le long des courbes intégrales de (2) sur $\tilde{\Sigma}_\varepsilon$, on déduit que les tores $T^2 \cong S^1 \times S^1$ (éventuellement dégénérés en un cercle) d'équations $|u_1|^2 + |u_2|^2 = 2\varepsilon^2$, $|u_1|^2 - |u_2|^2 = \text{constante}$, sont laissés invariants par le flot de (4). Ce n'est certes pas une grande découverte puisqu'il est évident que $|u_1|^2$ et $|u_2|^2$ restent constants le long des courbes intégrales de (4), mais ces tores auront une grande importance par la suite et de plus leur considération facilite beaucoup la compréhension spatiale de cet enchevêtrement de cercles que forment dans S^3 les fibres de la fibration de Hopf.

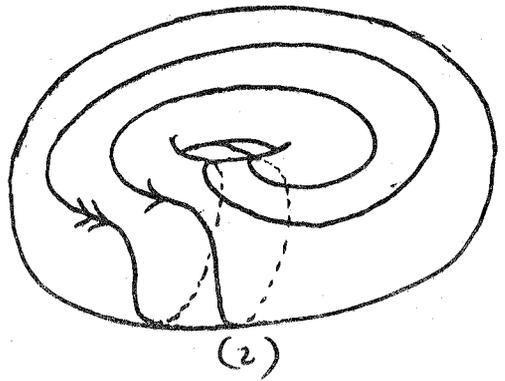


Les courbes intégrales de (4) forment des réseaux de courbes "parallèles" sur chacun de ces tores, à l'exception des deux qui correspondent respectivement à $u_1 = 0$ et $u_2 = 0$. Bien entendu, seul le choix de la décomposition de S^3 en tores T^2 , i.e. le choix de la base de \mathbb{C}^2 , fait jouer un rôle particulier à ces deux dernières.

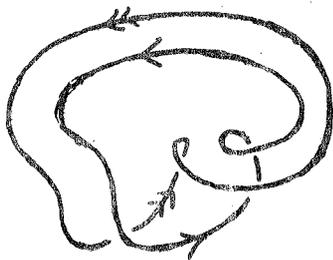
Cette description met en évidence une propriété fondamentale de la fibration de Hopf: dans S^3 (ou, ce qui revient au même, dans $\mathbb{R}^3 = S^3$ moins un point) les fibres sont deux à deux enlacées. Cet enlacement, qu'on peut faire remonter au fait que deux droites complexes distinctes de \mathbb{C}^2 s'intersectent transversalement à l'origine, (choisir une base dans laquelle les deux cercles considérés sont portés respectivement par $u_1 = 0$ et $u_2 = 0$ et contempler la figure qui précède), se voit facilement lorsque les deux cercles appartiennent à un même tore (il ne reste plus ensuite qu'à se ramener à cette situation par déformation sans créer d'intersection, ce qui est facile):



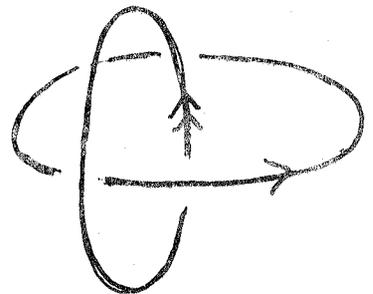
se déforme
en



et



se déforme
en



Note : on "voit" déjà l'enlacement sur (1), mais (2) est plus sûr, surtout s'il y a plusieurs tores.

Mais revenons sur terre, ou plutôt dans le plan des x , pour y recueillir les fruits du travail de Levi-Civita, en l'occurrence les ellipses de Kepler^(*):

Soit $(u_1(t), u_2(t))$ la courbe intégrale de (4) qui s'écrit

$$u_1(t) = r_1 e^{i(s_1+t)}, \quad u_2(t) = r_2 e^{i(s_2+t)}, \quad r_1^2 + r_2^2 = 2\varepsilon^2;$$

Des formules

$$x = 2z^2 = -\frac{1}{4}(u_1 - \bar{u}_2)^2, \quad y = \frac{w}{\varepsilon z} = \frac{1}{\varepsilon i} \frac{u_1 + \bar{u}_2}{u_1 - u_2},$$

on déduit sans mal que

$$x = -\frac{1}{2} e^{i\varphi} \left[(r_1^2 + r_2^2) \cos \chi - 2r_1 r_2 + i(r_1^2 - r_2^2) \sin \chi \right],$$

où

$$\varphi = s_1 - s_2 = \text{Arg } u_1 - \text{Arg } u_2 \quad \text{et}$$

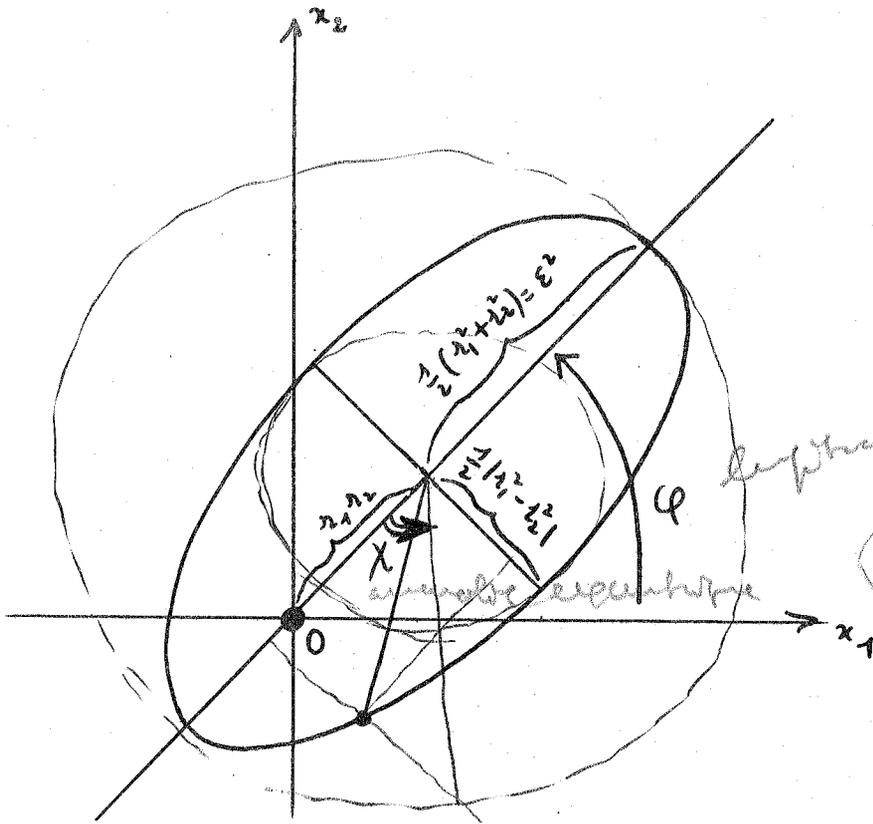
$$\chi = s_1 + s_2 + 2t = \text{Arg } u_1 + \text{Arg } u_2$$

sont bien définis modulo 2π .

On obtient évidemment une ellipse dont le grand axe, incliné de l'angle φ , a pour longueur $r_1^2 + r_2^2 = 2\varepsilon^2$ (inversement proportionnel au module de l'énergie), et le petit axe $|r_1^2 - r_2^2|$ (proportionnel au module du moment cinétique).

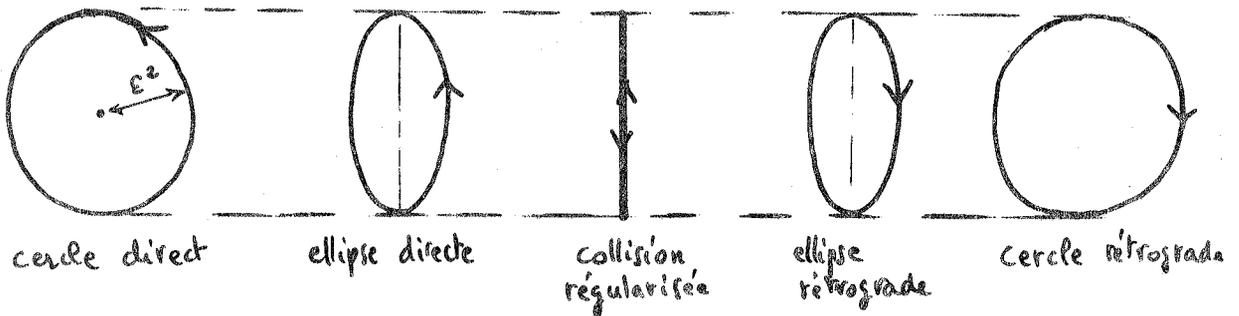
(*) Ce n'est bien entendu pas Kepler qui a intégré les équations différentielles du problème des deux corps qu'il aurait été bien en peine d'écrire. En ce temps là, les anges poussaient encore les planètes!

D de $S^2 =$ espace
 des orbites de Kepler
 = espace des ellipses
 régulaires



l'ensemble des orbites
 $g = \text{elliptique}$
 l'ensemble des orbites
 hyperboliques

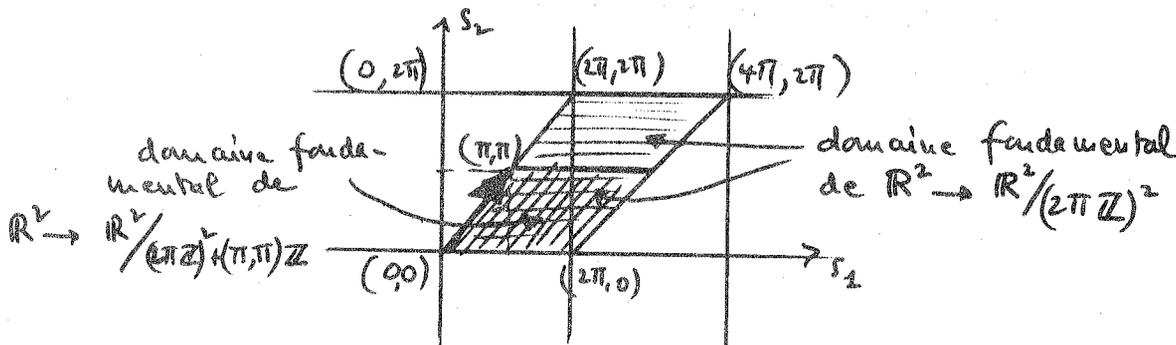
A angle φ constant, on a donc la suite de dessins ci-dessous (faits pour $\varphi = \frac{\pi}{2}$) lorsqu'on passe de $r_2 = 0$ à $r_1 = 0$:



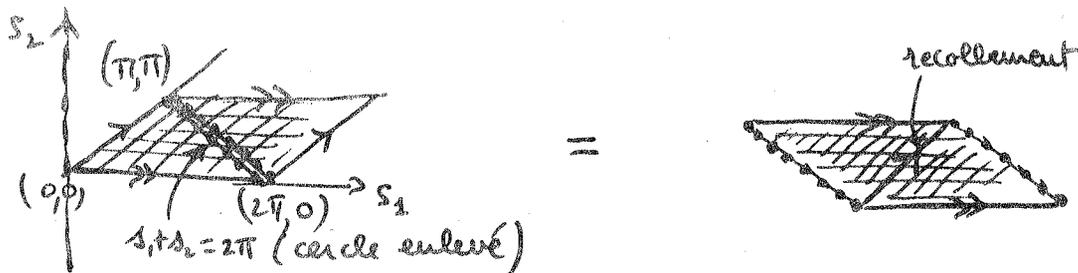
On voit ici à quoi se référerait le choix des coordonnées propres u_1, u_2 : les deux orbites particulières dans cette représentation ($u_1 = 0$ ou $u_2 = 0$) correspondent aux mouvements Kepleriens circulaires. Quant à la collision (qui se produit bien lorsque le moment cinétique s'annule) elle est régularisée en choc élastique.

Dans la sphère S^3 , les courbes intégrales correspondant aux orbites de collision remplissent le tore $|u_1| = |u_2|$ (moment cinétique nul); quant aux courbes intégrales remplissant le tore $|u_1| = r_1, |u_2| = r_2$, elles correspondent à des ellipses ne différant que par leur inclinaison φ . Ces ellipses sont parcourues dans le sens direct si $r_1 > r_2$ (moment cinétique positif), le sens rétrograde si $r_1 < r_2$ (moment cinétique négatif).

Remarquons enfin que les tores $|u_1| = r_1, |u_2| = r_2, r_1 \neq r_2$, de $\tilde{\Sigma}_E \subset S^3$ ont pour image par l'application de Levi-Civita (L.C.) des tores de Σ_E qu'ils revêtent deux fois: le point (u_1, u_2) et le point $(-u_1, -u_2) = (u_1 e^{i\pi}, u_2 e^{i\pi})$, qui appartiennent à la même courbe intégrale du flot de (4), ont en effet même image par (L.C.) et la figure qui suit montre que le quotient du tore $\mathbb{R}^2 / (2\pi\mathbb{Z})^2$ (coordonnées s_1, s_2) par le sous-groupe discret engendré par le vecteur (π, π) est encore difféomorphe au tore.



Chaque ellipse Keplerienne est ainsi revêtue deux fois par la courbe intégrale de (4) qui lui correspond et l'ensemble des orbites^(*) ayant un moment cinétique fixé non nul engendre dans l'espace (x, y) un tore $T^2 \subset \tilde{\Sigma}_E$. Les orbites de collision, quant à elles, engendrent (avant la régularisation) un cylindre ouvert $S^1 \times \mathbb{R}$ (tore privé d'un cercle, voir figure ci-dessous) :



(*) (à énergie fixée $-\frac{1}{\epsilon^2}$)

Nous en arrivons à la notion la plus importante de ce chapitre, celle de surface de section (en l'occurrence, anneau de section).

Appelons une fois pour toutes courbes intégrales circulaires les courbes $|u_1| = \sqrt{2\varepsilon}$, $u_2 = 0$, et $u_1 = 0$, $|u_2| = \sqrt{2\varepsilon}$.

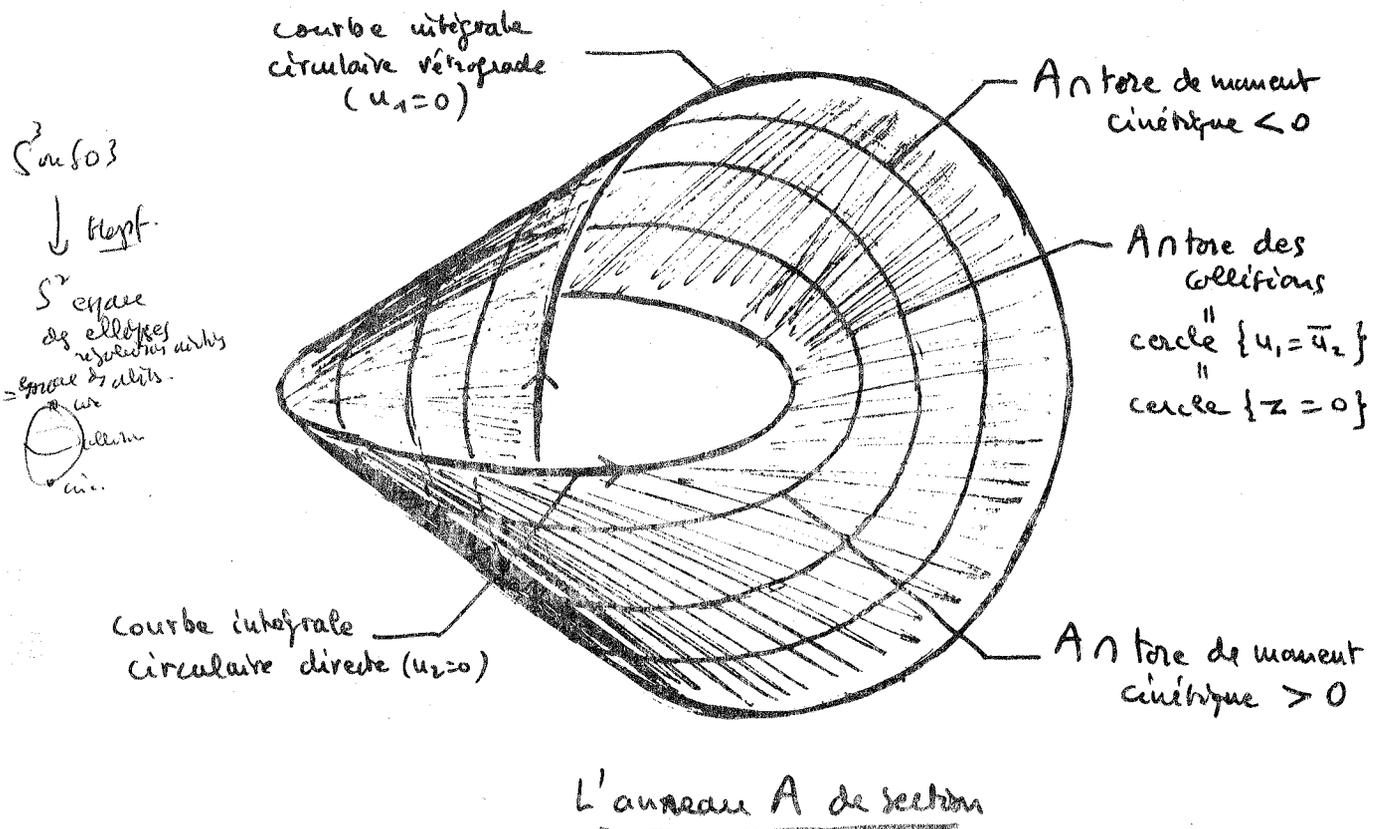
Le long de chaque courbe intégrale non circulaire de (4), la différence φ des arguments de u_1 et u_2 est constante; leur somme χ , au contraire, peut servir à paramétrer l'orbite (attention, χ parcourt deux fois le cercle lorsqu'on parcourt la courbe intégrale!).

L'adhérence A dans S^3 de

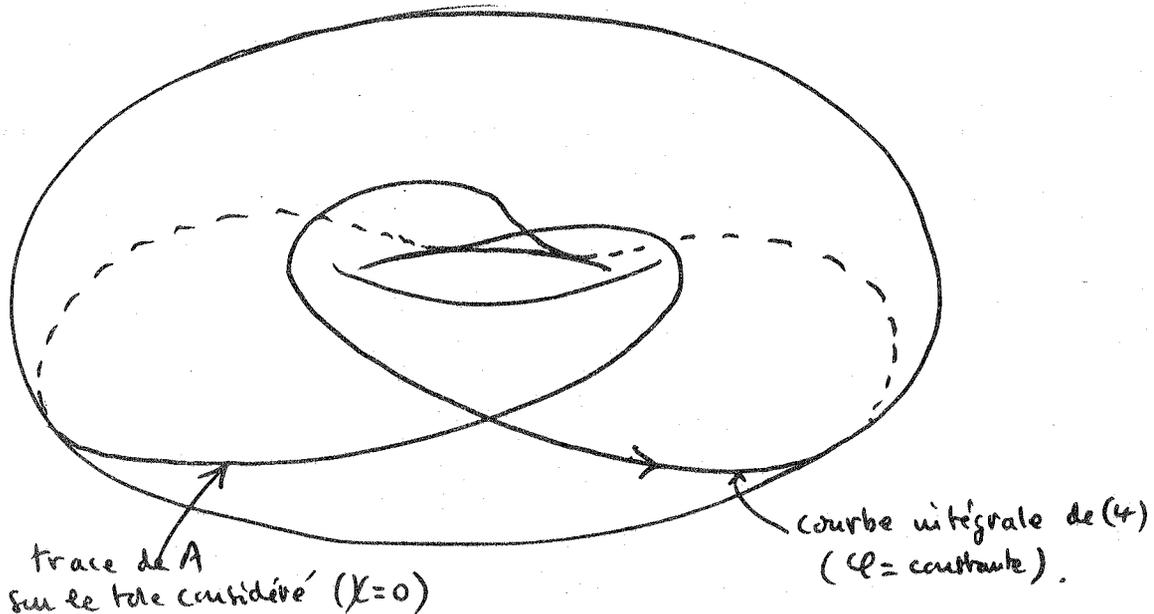
$$\overset{\circ}{A} = \left\{ (u_1, u_2) \in \mathbb{C}^2, |u_1|^2 + |u_2|^2 = 2\varepsilon^2, \chi = \text{Arg} u_1 + \text{Arg} u_2 = 0 \pmod{2\pi} \right\}$$

est un anneau, naturellement difféomorphe à $S^1, [-2\varepsilon^2, 2\varepsilon^2]$:

on a en effet sur $\overset{\circ}{A}$ des coordonnées $(\text{Arg} u_1, r_1^2 - r_2^2)$ et l'adhérence est obtenue en ajoutant les deux courbes intégrales circulaires.



Chaque courbe intégrale non circulaire de (4) rencontre A transversalement en deux points diamétralement opposés de S^3 .



En particulier, φ et $r_1^2 - r_2^2$ sont des coordonnées naturelles non pas sur A , mais sur son quotient \mathcal{A} par l'antipodie $(u_1, u_2) \mapsto (-u_1, -u_2)$, encore difféomorphe à $S^1[-2\varepsilon^2, 2\varepsilon^2]$. L'intérieur \mathring{A} de \mathcal{A} rencontre transversalement et en un seul point chaque courbe intégrale "non circulaire" du flot quotient de (4) sur $S^3/\text{antipodie}$ (difféomorphe à $SO(3)$ comme nous le verrons bientôt). La restriction de ce dernier flot au complémentaire du cercle âme de \mathcal{A} (image de l'âme ($z=0$) de A) est bien entendu difféomorphe au flot défini par (2) sur Σ_ε (après changement de temps).

Nous noterons $T: A \rightarrow A$ l'unique prolongement continu (en fait C^∞) de l'application qui, à un point de \mathring{A} , fait correspondre le premier point de \mathring{A} où la courbe intégrale (orientée) de (4) recoupe A (application de premier retour de Poincaré). T est évidemment conjuguée à la rotation de π de $S^1[-2\varepsilon^2, 2\varepsilon^2]$, et son avatar \mathcal{T} après quotient par l'antipodie est l'identité.

L'application T (resp. \mathcal{T}) décrit entièrement la géométrie du flot de (4) (resp. du flot quotient) à difféomorphisme près, mais ne dit rien sur le paramétrage des courbes intégrales.

On retrouve par exemple sur les relations $T^2 = \text{Identité}$, $\mathcal{T} = \text{Identité}$, que toutes les orbites de (4) et de son quotient par l'antipodie sont périodiques.

Mais revenons au quotient de S^3 par l'antipodie: le groupe $SU(2)$ des isomorphismes \mathbb{C} -linéaires de \mathbb{C}^2 vérifiant ${}^t \bar{L} L = \text{Id}$, $\det L = 1$, s'identifie naturellement à la sphère S^3 : un élément L de $SU(2)$ est en effet représenté par une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$$

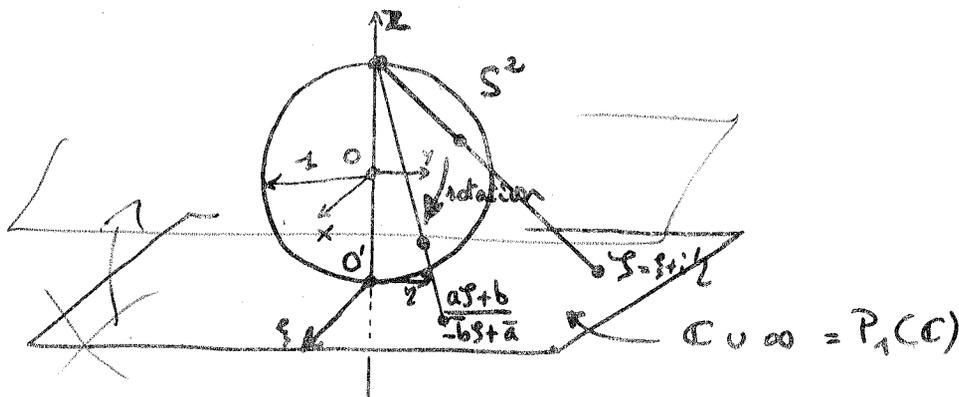
où $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ vérifie $|a|^2 + |b|^2 = 1$ (la correspondance $(a, b) \mapsto q$ définie par $q = \xi_0 1 + \xi_1 i + \xi_2 j + \xi_3 k$, $a = \xi_0 + \xi_1 i$, $b = \xi_2 + \xi_3 i$ identifie $SU(2)$ au groupe des quaternions de norme 1).

L'application

$$\zeta \mapsto \frac{a\zeta + b}{-\bar{b}\zeta + \bar{a}}$$

définit une action de $SU(2)$ sur la sphère de Riemann $P_1(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \cup \infty$ (ou encore un homomorphisme de $SU(2)$ dans $PSL(2, \mathbb{C})$).

Par projection stéréographique on obtient une action de $PSL(2, \mathbb{C})$ sur la sphère unité de \mathbb{R}^3 , qui identifie l'image $PSU(2) = SU(2)/\pm \text{Id}$ de $SU(2)$ dans $PSL(2, \mathbb{C})$ au groupe $SO(3)$ des rotations de \mathbb{R}^3 .



$SO(3)$ étant engendré par les rotations d'axe Oz et celles d'axe Ox (par exemple) il suffit, pour prouver cette dernière affirmation, de remarquer que

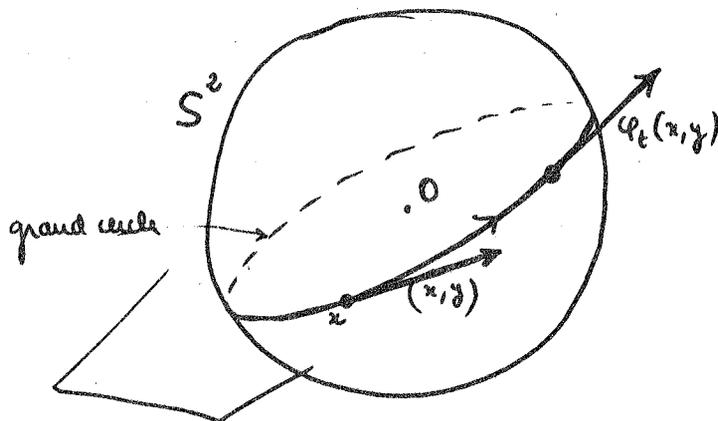
$\begin{pmatrix} e^{i\varphi/2} & 0 \\ 0 & \bar{e}^{i\varphi/2} \end{pmatrix}$ a pour image la rotation d'angle φ autour de Oz , et que

$\begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & i \sin \frac{\theta}{2} \\ i \sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$ a pour image la rotation d'angle θ autour de Ox .

(Voir Gelfand, Minlos, Shapiro, Representations of the rotation and Lorentz groups and their applications, Pergamon press 1963).

$SO(3)$ s'interprète également comme fibré unitaire tangent de la sphère S^2 : un vecteur unitaire y tangent à S^2 au point x est en effet un couple ordonné (x,y) de vecteurs unitaires orthogonaux de \mathbb{R}^3 ; un tel couple se complète uniquement (par leur produit vectoriel $z = x \wedge y$) en une base orthogonale positive de \mathbb{R}^3 , image de la base canonique par un élément bien défini de $SO(3)$.

C'est donc dans $SO(3)$ que vit le flot géodésique $(\varphi_t)_{t \in \mathbb{R}}$ de S^2 (munie de la métrique induite par la métrique euclidienne de \mathbb{R}^3), associant à un vecteur tangent $v(x,y)$ de S^2 le vecteur tangent $\varphi_t(x,y)$ obtenu en translatant (x,y) à la vitesse unité pendant le temps t le long de l'unique géodésique (grand cercle) orientée qu'il définit.



Witten

De la description ci-dessus de $SU(2) = S^3$ comme revêtement à deux feuillets de $SO(3) = SU(2)/\pm Id = S^3/\text{antipodie}$, on déduit que l'image réciproque par $S^3 \rightarrow SO(3)$ du flot géodésique de S^2 coïncide avec le flot de (4) sur S^3 .

En effet, la courbe intégrale du flot géodésique issue du vecteur tangent $x = (1,0,0)$, $y = (0,1,0)$ est le cercle de $SO(3)$ formé des rotations autour de Oz , lequel est l'image de l'ensemble des éléments de $SU(2)$ de la forme $a = e^{i\theta/2}$, $b = 0$, c'est-à-dire l'intersection de $SU(2) = S^3 \subset \mathbb{C}^2$ avec la droite complexe d'équation $b = 0$.

Il ne reste plus qu'à noter que $SU(2)$ préserve l'ensemble des droites complexes de \mathbb{C}^2 et $SO(3)$ l'ensemble des grands cercles de S^2 (le paramétrage ne pose pas de problème).

Le flot géodésique sur la sphère ronde S^2 apparaît ainsi comme la régularisation naturelle du problème des deux corps lorsque l'énergie est fixée à une valeur négative. Ce fait, démontré la première fois par J. Moser, admet des généralisations aux cas où l'énergie est nulle (orbites paraboliques, flot géodésique sur le plan plat) ou positive (orbites hyperboliques, flot géodésique sur le plan hyperbolique): voir J. Milnor, On the geometry of the Kepler problem, American Mathematical Monthly, vol. 90, n°6, June-July 1983, pp.353-365, et Alexeev, Quasi-random oscillations and qualitative questions in Celestial mechanics, Amer. Math. Soc. Translations (2) vol. 116, 1981.

Exercice: Le long d'une orbite elliptique d'énergie $E = -\frac{1}{2}$ la vitesse

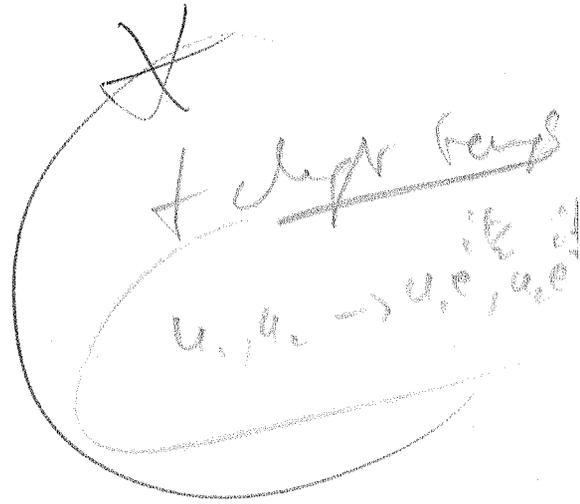
$$y = \frac{w}{\varepsilon z} = \frac{u_1 + \bar{u}_2}{i\varepsilon(u_1 - \bar{u}_2)} \quad \text{s'écrit} \quad \frac{1}{i\sqrt{2}} e^{i\varphi} \frac{r_1 e^{i\theta/2} + r_2 e^{-i\theta/2}}{r_1 e^{i\theta/2} - r_2 e^{-i\theta/2}}$$

Montrer que y décrit un cercle dont l'image inverse par la projection stéréographique du pôle nord de S^2 sur le plan $z = 0$ est un grand cercle de S^2 . Retrouver alors ce qui précède.

Concours p. 18

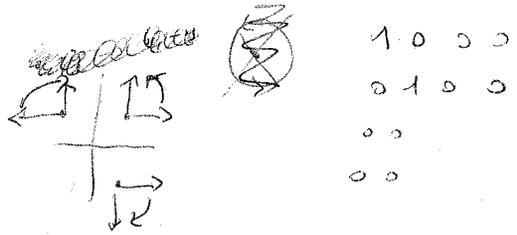
$S^3 = SU(2)$ flat.

\downarrow
 $so(3)$ hyperbol.



$\frac{da}{dt} = ia$

$\frac{db}{dt} = -ib$



ligne 4 rajoutée: à condition de choisir comme coord. sur \mathbb{C}^2 $u_1 = a$, $u_2 = \bar{b}$, et de remplacer par t_2 .

ligne 10 changer: ~~...~~

$\begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ -\bar{B} & \bar{A} \end{pmatrix}$

$A = ae^{it}$, $B = be^{-it}$

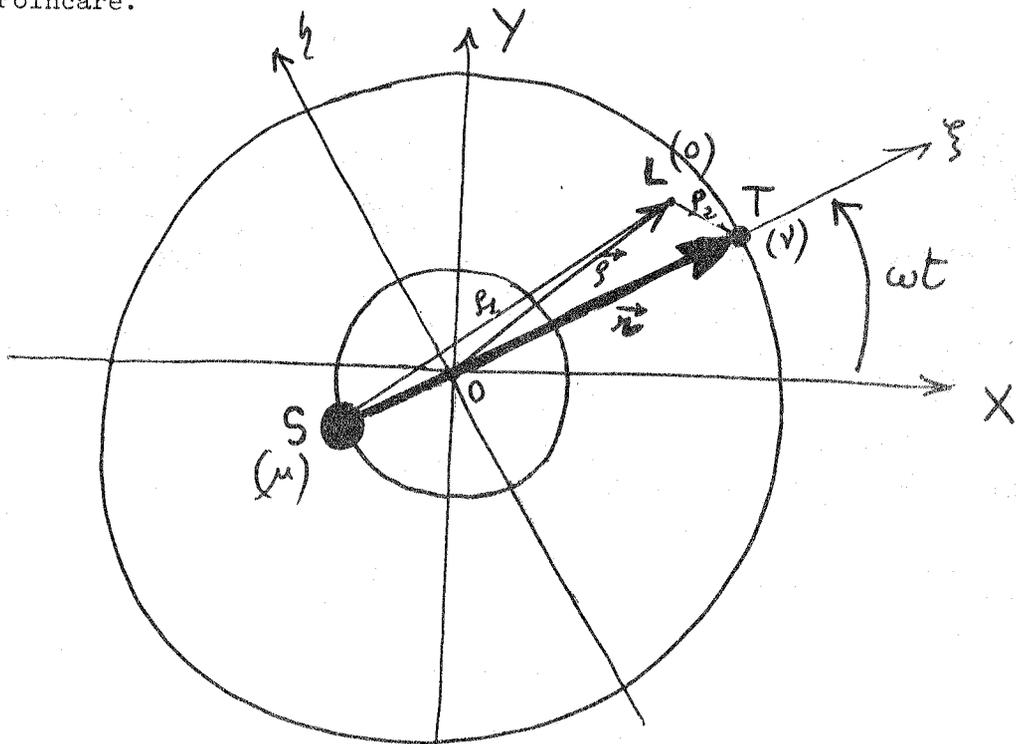
seul image de $so(3)$ sur \mathbb{C}^2 (à droite)
 l'ensemble de $so(3)$ image de $\begin{pmatrix} 0 & e \\ -\bar{e} & 0 \end{pmatrix}$

Dans des coord. u_1, u_2

$[u_1, u_2 \rightarrow u_1 e^{it}, u_2 e^{-it}]$

3.- Le problème de la lune

A chacun sa lune et les moutons seront bien gardés. La nôtre est de masse nulle et se meut dans un plan où le soleil et la terre décrivent uniformément des cercles centrés sur leur centre de masse. Il paraît que ce n'est pas un problème stupide; il a en tout cas un nom, problème restreint circulaire des trois corps, et une belle histoire depuis Hill^(*) et Poincaré.



$$\begin{aligned} \vec{ST} &= \vec{z}, & \vec{z}(t) &= (\cos \omega t, \sin \omega t) \\ \vec{OL} &= \vec{r}, & |SL| &= \rho_1, \quad |TL| = \rho_2, \quad |\vec{z}| = z = 1. \end{aligned}$$

Les équations de Newton, telles qu'elles sont écrites au bas de la page 1, gardent un sens si certaines des masses s'annulent; physiquement, cela signifie que les corps considérés n'influencent pas le mouvement des autres mais sont influencés par ces derniers.

(*) En fait depuis Euler!

Dans les coordonnées de Jacobi $(\vec{r}, \vec{\rho})$ décrites sur la figure, on obtient

$$\left\{ \begin{array}{l} (1) \quad \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = - \frac{G(\mu+\nu)}{r^3} \vec{r} = -G(\mu+\nu) \frac{\vec{r}}{r^3}, \\ (2) \quad \frac{d^2 \vec{\rho}}{dt^2} = - \frac{G\mu}{\rho_1^3} \left(\vec{\rho} + \frac{\nu}{\mu+\nu} \vec{r} \right) - \frac{G\nu}{\rho_2^3} \left(\vec{\rho} - \frac{\mu}{\mu+\nu} \vec{r} \right); \end{array} \right.$$

(1) est, comme on pouvait s'y attendre, une équation de Newton à deux corps; rappelons qu'on en a choisi la solution dans laquelle S et T ont un mouvement circulaire uniforme autour de O; la fréquence d'un tel mouvement est déterminée par (1): $\omega = \sqrt{G(\mu+\nu)/r^3} = \sqrt{G(\mu+\nu)}$.

Le mouvement de L est donc décrit par l'équation (2) dans laquelle on remplace \vec{r} par $(\cos \omega t, \sin \omega t)$.

Dans le repère tournant (ξ, η) défini par

$$Z = X + iY = (\xi + i\eta) e^{i\omega t} = \zeta e^{i\omega t},$$

cette équation devient

$$\frac{d^2 \zeta}{dt^2} + 2i\omega \frac{d\zeta}{dt} - \omega^2 \zeta = \frac{G\mu}{|\zeta_1 - \zeta|^3} (\zeta_1 - \zeta) + \frac{G\nu}{|\zeta_2 - \zeta|^3} (\zeta_2 - \zeta),$$

$$\text{où } \zeta_1 = -\frac{\nu}{\mu+\nu}, \quad \zeta_2 = \frac{\mu}{\mu+\nu},$$

décrivent respectivement la position de S et celle de T dans le repère tournant (après identification de \mathbb{R}^2 à \mathbb{C}).

La formulation Hamiltonienne des équations dans le repère tournant s'obtient en posant

$$\frac{d\mathcal{S}}{dt} + i\omega\mathcal{S} = u.$$

Le rôle de l'énergie est tenu par l'intégrale de Jacobi

$$H(\mathcal{S}, u) = |u|^2 + i\omega(\bar{\mathcal{S}}u - \mathcal{S}\bar{u}) - \frac{2G\mu}{|\mathcal{S}_1 - \mathcal{S}|} - \frac{2G\nu}{|\mathcal{S}_2 - \mathcal{S}|} + \text{cste},$$

et les équations deviennent

$$\begin{cases} \frac{d\mathcal{S}}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \bar{u}} = u - i\omega\mathcal{S} \\ \frac{du}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \mathcal{S}} = -i\omega u + \frac{G\mu}{|\mathcal{S}_1 - \mathcal{S}|^3}(\mathcal{S}_1 - \mathcal{S}) + \frac{G\nu}{|\mathcal{S}_2 - \mathcal{S}|^3}(\mathcal{S}_2 - \mathcal{S}). \end{cases}$$

On remarquera que dans ces coordonnées l'expression du moment cinétique reste inchangée:

$$\bar{z} \frac{dz}{dt} - z \frac{d\bar{z}}{dt} = \bar{\mathcal{S}}u - \mathcal{S}\bar{u}.$$

Les coordonnées $(x, y) \in \mathbb{C}^2$ de Conley sont très légèrement différentes:

$$\begin{cases} \mathcal{S} = x + \frac{\mu}{\mu + \nu} \\ u = y + i\omega \frac{\mu}{\mu + \nu} \end{cases}$$

Compte tenu de la valeur de ω rappelée plus haut, l'intégrale de Jacobi devient

$$H(x, y) = |y|^2 + i\omega(\bar{x}y - x\bar{y}) - \frac{2G\nu}{|x|} - \frac{2G\mu}{|x+1|} - G\mu(x+\bar{x}) + \text{cste},$$

et les équations

$$(5) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y} \\ \frac{dy}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x} \end{cases}$$

Remarquons qu'on retrouve bien le Hamiltonien (l'énergie) du problème des deux corps en égalant à zéro μ et ω , ce qui revient à envoyer le soleil à l'infini.

On choisira comme Conley la normalisation $G = 1$, $\mu + \nu = 1$ (donc $\omega = 1$), ce qui donne (après choix de la constante)

$$H(x, y) = |y|^2 + i(\bar{x}y - x\bar{y}) - \frac{2\nu}{|x|} - \frac{2\mu}{|x+1|} - \mu(x+\bar{x}) + 2\mu$$

Si H est très négative, ce que nous supposons, x ne peut se trouver que dans l'une des trois régions de Hill, voisinages respectivement de -1 , 0 , et l'infini. Nous nous placerons dans le cas où la lune se trouve au voisinage de la terre (x proche de 0) ce qui, au moins pour le moment, est réaliste. H admet alors le développement limité ($|x| \ll 1$)

$$H(x, y) = |y|^2 + i(\bar{x}y - x\bar{y}) - \frac{2\nu}{|x|} - 2\mu \left[\frac{1}{4}|x|^2 + \frac{3}{8}(x^2 + \bar{x}^2) + O_3(x) \right],$$

où $O_3(x)$ désigne des termes d'ordre supérieur ou égal à trois en x, \bar{x} .

Lorsque $|x|$ est petit, l'influence du soleil sur la lune devient négligeable par rapport à celle de la terre et, à la limite de la collision, le couple terre-lune est régi après régularisation par une équation à deux corps.

q \rightarrow
 OK $\frac{g(t)}{2} = H_0$

$z = Q_1 + iQ_2$
 $w = P_1 + iP_2$

Calculus
 15.10.99

$H = H_2 + H_4 + H_6$

$H_2 = \frac{1}{2} (Q_1^2 + Q_2^2 + P_1^2 + P_2^2)$

$H_4 = 2(Q_1^2 + Q_2^2)(Q_1P_1 - Q_2P_2)$

$H_6 = -4(Q_1^6 + Q_2^6 - 3Q_1^4Q_2^2 - 3Q_1^2Q_2^4)$

au jour
 $R = Q_1^2 + Q_2^2$

Pas de deux variables disjoints de configuration.
 | des complexes?

$\begin{cases} \ddot{Q}_1 = -Q_1 + \delta R \dot{Q}_2 + 12Q_1(2Q_1^4 - 2Q_1^2Q_2^2 - Q_2^4) \\ \ddot{Q}_2 = -Q_2 - \delta R \dot{Q}_1 + 12Q_2(2Q_2^4 - 2Q_1^2Q_2^2 - Q_1^4) \end{cases}$

oui! fait des Γ de la colline:

$\begin{cases} \dot{Q}_2 = iQ_1 & (\Rightarrow R = \cancel{Q_1^2 + Q_2^2} = 0) \\ \dot{Q}_1 = iQ_2 & \end{cases}$
 | OK! |

$\Rightarrow_{\text{sub}} \ddot{Q}_1 = -Q_1 + 36Q_1^5$

\Rightarrow Hamiltonien $\frac{1}{2}(Q_1^2 + Q_1^2) - 6Q_1^6$ \leftarrow

$$H = |y|^2 + i(\bar{x}y - x\bar{y}) - \frac{2GM}{|z|} - \frac{2GV}{|z+1|} - \mu(x+\bar{x}) + 2\mu$$

$$K(z, w) = f^2(z, w) |z|^2 + |w|^2 = \nu \varepsilon^2 - \varepsilon^2 g(z)$$

$$z = re^{i\theta}$$

u
S
u

Stromberg

q, q
P, P

$$S = re^{i\theta}$$

$$u = \left(P_1 + \frac{1}{2}iP_2\right) e^{i\theta}$$

(r, S) de S

(P₁, P₂)

$H = \sqrt{\text{dune standard}} \rightarrow \frac{1}{2}$

$$\left(P_1^2 + \frac{P_2^2}{2}\right) - 2\omega P_2 - 2 \left\{ \frac{GM}{r} + \frac{GV}{r} \right\}$$

$e^{-i\theta}$
u

Nous fixons dorénavant l'énergie à la valeur $H = -\frac{1}{\varepsilon^2}$ et considérons ε comme un petit paramètre.

La composante connexe Σ_ε de $H = -\frac{1}{\varepsilon^2}$ correspondant à la région de Hill considérée est manifestement difféomorphe à son analogue Σ_ε pour le problème à deux corps, c'est-à-dire $S^1 \times \mathbb{R}^2$, et la régularisation de la collision se fait comme précédemment à l'aide de la transformation de Levi-Civita

$$(L.C.) \quad x = 2z^2, \quad y = \frac{w}{\varepsilon \bar{z}}.$$

Définie comme à la page 6, la nouvelle intégrale vaut

$$\begin{aligned} K(z, w) &= \varepsilon^2 |z|^2 \left[H\left(2z^2, \frac{w}{\varepsilon \bar{z}}\right) + \frac{1}{\varepsilon^2} \right] \\ &= f^2(z, w) \cdot |z|^2 + |w|^2 - \nu \varepsilon^2 - \varepsilon^2 g(z), \end{aligned}$$

ou

$$f(z, w) = \left\{ 1 + 2i\varepsilon(\bar{z}w - z\bar{w}) \right\}^{1/2} \in \mathbb{R},$$

$$\begin{aligned} g(z) &= \cancel{2} |z|^6 + 3 |z|^2 (z^4 + \bar{z}^4) + O_g(z) \\ &= 2 |z|^4 \left(\frac{1}{12z^2 + 1} - 1 + z^2 + \bar{z}^2 \right) \end{aligned}$$

et après le changement de temps

$$dt = 2\varepsilon |z| dt' = 4\varepsilon |z|^2 dt',$$

le flot de Newton sur Σ_ε se régularise en un flot sur la sphère de dimension trois d'équation $K = 0$ qui s'écrit

diver-
tempo-
t'

$$(6) \quad \begin{cases} \frac{dz}{dt} = \frac{\partial K}{\partial \bar{w}} = w - 2i\varepsilon |z|^2 z, \\ \frac{dw}{dt} = -\frac{\partial K}{\partial z} = -f^2(z, w) z - 2i\varepsilon |z|^4 w + \mu \varepsilon^2 \frac{\partial g}{\partial z}(z). \end{cases}$$

4.- Ah si l'approximation linéaire n'était pas dégénérée!

Puisqu' ε est petit, l'étude de (6) sur la sphère $K = 0$ se confond avec celle de (6) au voisinage de son point singulier (0,0). Les méthodes permettant une telle étude locale font l'objet d'un copieux chapitre de la théorie des systèmes dynamiques dont le parfum sera donné par un survol des "Chapitres supplémentaires de la théorie des équations différentielles ordinaires" d'Arnold, publié aux éditions Mir.

Comme dans tout problème local, on commence par linéariser le champ de vecteurs, i.e. ne garder dans le second membre de (6) que les termes linéaires en z, w . On obtient sans surprise le champ de vecteurs (3), régularisation du problème des deux corps. Nous voici en fait devant la première difficulté sérieuse: le problème des deux corps n'est pas un problème honnête; il est affreusement dégénéré! On n'a pas idée en effet d'avoir toutes ses orbites d'énergie négative périodiques! La difficulté saute aux yeux si on pense à l'anneau de section et à l'application de premier retour de Poincaré \mathcal{C} qui est l'Identité: pas d'application plus difficile à perturber que l'Identité; tout peut arriver, aucun garde-fou du type théorème des fonctions implicites ne permet de contrôler les perturbations.

A titre d'illustration de la dégénérescence, supposons qu'à la place de (3), c'est-à-dire de (4) dans une base propre, la linéarisation nous ait fourni les équations suivantes:

$$(7) \quad \begin{cases} \frac{du_1}{dt} = i\lambda_1 u_1, \\ \frac{du_2}{dt} = i\lambda_2 u_2. \end{cases}$$

On supposera que λ_1 et λ_2 sont des réels non nuls distincts; en remplaçant éventuellement l'une ou l'autre des variables u_1, u_2 par sa conjuguée, on peut supposer que λ_1 et λ_2 sont positifs.

Le portrait de phase de (7) a certaines similarités avec celui de (4):

A l'exception près des orbites périodiques de la forme

$$u_1(t) = r_1 e^{i\lambda_1 t}, u_2(t) = 0 \text{ et } u_1(t) = 0, u_2(t) = r_2 e^{i\lambda_2 t}$$

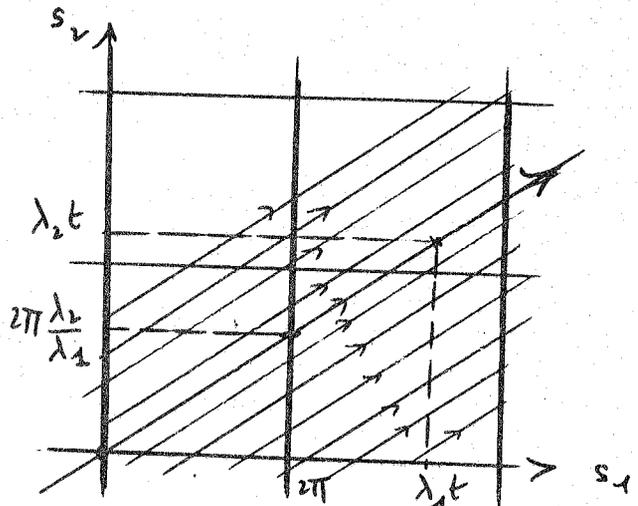
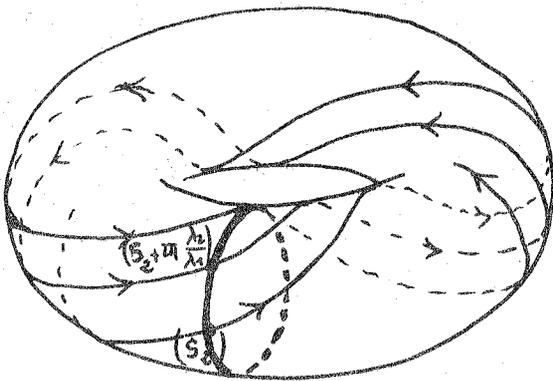
(que nous appellerons fondamentales ou primaires), les solutions

$$u_1(t) = c_1 e^{i\lambda_1 t}, u_2(t) = c_2 e^{i\lambda_2 t}$$

vivent sur les tores T^2 d'équations $|u_1| = r_1, |u_2| = r_2$.

Mais, ces solutions ne sont plus forcément périodiques: elles ne le sont en fait que s'il existe des entiers positifs n_1, n_2 et un temps t tels que $\lambda_1 t = 2\pi n_1, \lambda_2 t = 2\pi n_2$, c'est-à-dire $n_2 \lambda_1 - n_1 \lambda_2 = 0$.

Dans le cas contraire, chacune est dense dans le tore qu'elle habite; pour le démontrer, nous utilisons à nouveau l'idée de Poincaré d'une surface (ici une courbe!) de section:



L'application de premier retour sur un cercle ($s_1 = \text{constante}$) est évidemment (voir figure) la rotation d'angle $2\pi \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$; il ne reste donc à montrer que la densité dans le cercle des orbites ^(*) d'une rotation d'angle $2\pi \alpha$ lorsque α n'est pas rationnel.

(*) Si $f: X \rightarrow X$ est une application bijective, on appelle orbite de $x \in X$ l'ensemble des itérés $\{f^n(x), n \in \mathbb{Z}\}$ de x . L'idée de surface de section montre le rapport avec les orbites des équations différentielles; on peut également dire qu'on considère $\{f^n, n \in \mathbb{Z}\}$ comme un flot à temps discret.

Les orbites d'une rotation se déduisant l'une de l'autre par une rotation, tout découle du

Lemme: Si α est irrationnel, l'ensemble $\{n\alpha \bmod 1, n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $\mathbb{T}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

Démonstration: (i) si $n_1 \neq n_2$, $n_1\alpha \neq n_2\alpha \bmod 1$; sinon, il existe $m \neq 0$ tel que $(n_1 - n_2)\alpha = m$ et α est rationnel.

(ii) L'ensemble considéré étant infini d'après (i), il possède un point d'accumulation dans le compact \mathbb{T}^1 ; pour tout ε positif, il existe donc deux entiers positifs $n_2 > n_1$ tels que $d(n_1\alpha, n_2\alpha) < \varepsilon$ (où d désigne la distance dans le cercle).

(iii) L'invariance par rotation de la distance (mesure de Lebesgue, mesure de Haar) sur le cercle implique $d((n_2 - n_1)\alpha, 0) < \varepsilon$, et donc $d(m(n_2 - n_1)\alpha, (m-1)(n_2 - n_1)\alpha) < \varepsilon$ pour tout entier positif m . On a donc recouvert le cercle par un ε -réseau de points de la forme $n\alpha \bmod 1, n \in \mathbb{N}$. La conclusion est aisée.

Remarque: Si on remplace le cercle ($s_1 = \alpha t$) par le cercle ($s_2 = \alpha_2 t$), le rapport $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$ définissant l'angle de rotation de l'application de premier retour se trouve remplacé par le rapport inverse $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$.

Plus généralement, la droite de \mathbb{R}^2

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x = \mu_1 t + x_0, y = \mu_2 t + y_0, t \in \mathbb{R}\}$$

a pour image un cercle dans le tore $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ si et seulement s'il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\mu_1 t_0 = n_1 \in \mathbb{Z}, \mu_2 t_0 = n_2 \in \mathbb{Z}$; si t_0 est le plus petit temps ayant cette propriété, n_1 et n_2 sont premiers entre eux et le cercle est l'image de l'intervalle de D paramétré par t entre 0 et t_0 .

(*) Afin de ne pas trainer d'inutiles facteurs 2π , nous travaillerons toujours dans un cercle de longueur 1: le cercle sera $\mathbb{T}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, le tore $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$, etc... On parlera alors de nombre de rotation d'une rotation de \mathbb{T}^1 plutôt que d'angle de rotation qu'on réserve à $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$.

Il existe donc p_1 et p_2 entiers tels que

$$A = \begin{pmatrix} m_1 & p_1 \\ m_2 & p_2 \end{pmatrix}$$

soit de déterminant 1, i.e. représente un élément de $SL(2, \mathbb{R})$.

Un tel élément "passe au quotient" (exercice!) et définit un difféomorphisme de $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ sur lui-même qui transporte le cercle ($s_2 = 0$) sur l'image de D.

Transportées par $A^{-1} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}$, les orbites du champ de vecteurs, images des droites ($x = \lambda_1 t + cste$, $y = \lambda_2 t + cste$) deviennent les images dans \mathbb{T}^2 des droites

$$\left(x = (a_1 \lambda_1 + a_2 \lambda_2)t + cste, y = (b_1 \lambda_1 + b_2 \lambda_2)t + cste, t \in \mathbb{R} \right);$$

le nombre de rotation de l'application de premier retour sur le cercle ($s_2 = 0$) est donc $\omega \pmod{1}$, où

$$\omega = \frac{a_1 \lambda_1 + a_2 \lambda_2}{b_1 \lambda_1 + b_2 \lambda_2} = \frac{a_1 \frac{\lambda_1}{\lambda_2} + a_2}{b_1 \frac{\lambda_1}{\lambda_2} + b_2}$$

Comme ce nombre de rotation ne change pas (exercice!) lorsqu'on transforme à la fois les courbes intégrales et le cercle de section par A, nous venons de calculer le nombre de rotation de l'application de premier retour de notre champ de vecteurs sur le cercle image de D dans \mathbb{T}^2 .

Le résultat est bien intéressant: ω est le transformé de $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ par l'élément de $PSL(2, \mathbb{Z}) = SL(2, \mathbb{Z})/\pm Id$ représenté par A^{-1} . L'action de $PSL(2, \mathbb{R})$ sur $P_1(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ est celle qui se déduit de l'action de $SL(2, \mathbb{R})$ sur l'ensemble des droites de \mathbb{R}^2 (c'est celle qu'induit sur \mathbb{R} l'action naturelle de $PSL(2, \mathbb{R})$ sur le demi-plan de Poincaré dont c'est le groupe des isométries directes).

Bien entendu, le caractère éventuellement contradictoire des mathématiques ne se révèle pas à ce stade et ω est rationnel si et seulement si son transformé par un élément de $PSL(2, \mathbb{Z})$ l'est; il y a mieux:

si on n'exige plus (et pourquoi l'exigerait-on?) que A préserve l'orientation, i.e. si on se permet $\det A = \pm 1$, le Lemme suivant dit exactement en quoi α et son transformé $\beta = (a_1\alpha + a_2)/(b_1\alpha + b_2)$ se ressemblent ;

Lemme: Soient

$$\alpha = \alpha_0 + \frac{1}{\alpha_1 + \frac{1}{\alpha_2 + \frac{1}{\dots}}} \quad , \quad \beta = \beta_0 + \frac{1}{\beta_1 + \frac{1}{\beta_2 + \frac{1}{\dots}}}$$

deux nombres réels positifs écrits sous forme de fraction continue ($\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{N}_+$); il existe $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{Z}$, $a_1 b_2 - a_2 b_1 = \pm 1$ tels que

$$\beta = \frac{a_1 \alpha + a_2}{b_1 \alpha + b_2}$$

si et seulement s'il existe $m \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$ tels que

$$\beta_i = \alpha_{i+m} \quad \text{pour } i \geq n.$$

Les divers nombres de rotation obtenus en changeant de cercle de section ont donc tous la même queue (tail) de leur développement en fraction continue. En particulier, leurs propriétés d'approximation par les rationnels sont les mêmes et c'est heureux car les dites propriétés dicteront le comportement des orbites quasi-périodiques correspondantes sous l'effet d'une petite perturbation hamiltonienne de (7) (théorie de Kolmogorof, Arnold, Moser, familièrement appelée théorie K.A.M.). Pour la démonstration du Lemme et le lien des fractions continues avec la théorie de l'approximation, on consultera le petit livre de J.W.S. Cassels, An introduction to diophantine approximation, Cambridge tract in Mathematics n°45, Cambridge University press, 1957, en particulier le Théorème IV du Chapitre 1; on lira aussi avec profit le (également petit) livre de Khinchine sur les Fractions Continues, *publié en anglais à l'Université de Chicago en 1964*).

Suite de la Remarque: On pourrait également remplacer les cercles de section par des courbes de section, images d'un plongement différentiable du cercle dans le tore. Une telle courbe est toujours l'image du cercle ($s_2 = 0$) par un difféomorphisme de T^2 (voir par exemple A. Chenciner, Đoàn Quỳnh, Hoàng Xuân Sính, Equations différentielles, quelques aspects de la théorie reliés au problème de la turbulence hydrodynamique, Viện Toán Học, Hà Nội 1979, ou le démontrer soi-même car ce texte est difficile à trouver). Le difféomorphisme de premier retour des courbes intégrales sur une telle courbe de section est donc différentiablement conjugué à une rotation, ce qui montre que le problème de la conjugaison des difféomorphismes du cercle à des rotations, source de si belles recherches depuis Poincaré et Denjoy jusqu'à Herman et Yoccoz, est très lié à l'étude des champs de vecteurs sur le tore et donc, incidemment, à la Mécanique Céleste.

Revenant à (7), posons-nous le problème qui va nous occuper à propos de la lune: les orbites périodiques primaires résistent-elles à une petite perturbation (non linéaire a priori) des équations? Ce genre de question est récurrent en Mécanique Céleste sous le nom (bien sûr!) de théorie des perturbations.

Sans autre condition, la réponse à notre question est en général négative: les orbites primaires se groupent en effet en familles à un paramètre (r_1 ou r_2) et de telles familles sont très instables; en fait, un champ de vecteurs linéaire ayant en 0 un spectre totalement imaginaire (ici $\pm i\lambda_1, \pm i\lambda_2$) est un parangon d'instabilité; il suffit de considérer un champ linéaire arbitrairement voisin dont les valeurs propres possèdent une partie réelle légèrement négative. L'origine devient un attracteur global: toutes les courbes intégrales y sont adhérentes, et il n'y a certainement pas d'orbite périodique.

La condition supplémentaire dont nous disposons est le caractère Hamiltonien des champs de vecteurs considérés - penser à la dimension deux où le champ X est Hamiltonien pour la deux-forme $\omega = dx_1 \wedge dx_2$ si et seulement si son flot préserve la mesure de Lebesgue, ce qui empêche sûrement l'origine d'être un attracteur: si le Hamiltonien H est une perturbation de $x_1^2 + x_2^2$, les courbes de niveau de H voisines de son point singulier représentent une famille à un paramètre d'orbites périodiques du champ $X = \left(\frac{\partial H}{\partial x_2}, -\frac{\partial H}{\partial x_1} \right)$.

Il semble donc naturel de fixer l'"énergie" (intégrale de Jacobi, Hamiltonien) et c'est bien ce que nous avons fait jusqu'ici.

Le champ (7) s'écrit sous forme Hamiltonienne

$$\begin{cases} \frac{du_1}{dt} = i \frac{\partial H_+}{\partial u_1} \\ \frac{du_2}{dt} = i \frac{\partial H_+}{\partial u_2} \end{cases}, \quad H_+(u_1, u_2) = \lambda_1 |u_1|^2 + \lambda_2 |u_2|^2;$$

En réel, $(u_1 = b_1 + ia_1, u_2 = b_2 + ia_2)$, ceci n'est autre que l'expression donnée page 4:

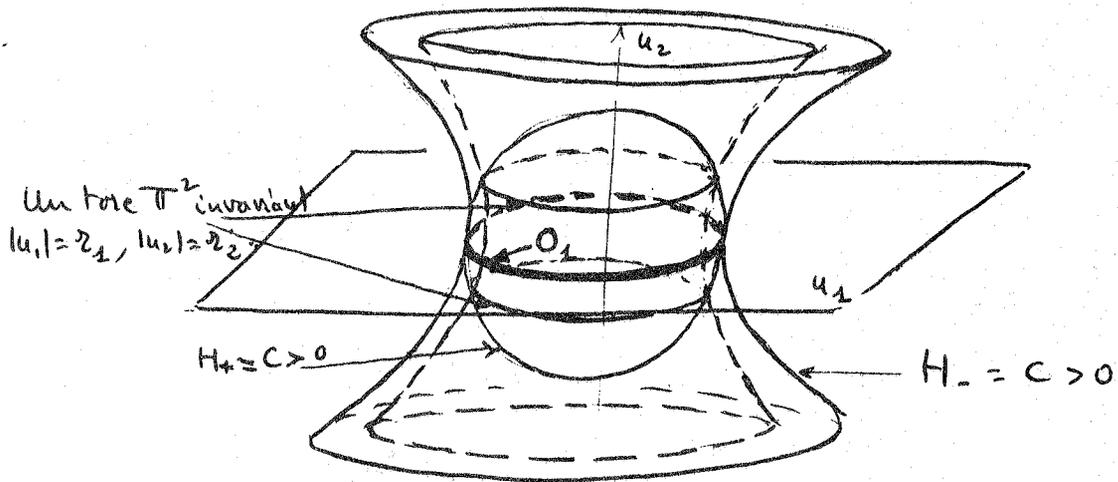
$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial H_+}{\partial a_1} \\ \frac{\partial H_+}{\partial a_2} \\ \frac{\partial H_+}{\partial b_1} \\ \frac{\partial H_+}{\partial b_2} \end{pmatrix}$$

(Remarquer que la structure complexe choisie sur \mathbb{R}^4 diffère de celle qui intervenait page 4: on acoquinait a_1 et a_2 , non pas a_1 et b_1 ; le fait que λ_1 diffère de λ_2 rend ceci impossible maintenant).

En prenant comme variables $v_1 = u_1$ et $v_2 = \bar{u}_2$, on aurait abouti aux mêmes formules avec le Hamiltonien

$$H_-(u_1, v_2) = \lambda_1 |v_1|^2 - \lambda_2 |v_2|^2.$$

Les variétés d'énergie constante sont très différentes globalement ($H_+ = \text{cste}$ est difféomorphe à S^3 , $H_- = \text{cste}$ à $\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}$) mais se ressemblent beaucoup au voisinage de leur intersection commune O_1 avec le plan ($u_2 = 0$).



Plus généralement, toute fonction I de la forme

$$I(u_1, u_2) = \mu_1 |u_1|^2 + \mu_2 |u_2|^2, \quad \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R},$$

est une intégrale première de (7), i.e. une fonction constante le long des courbes intégrales, sans être pour autant un Hamiltonien.

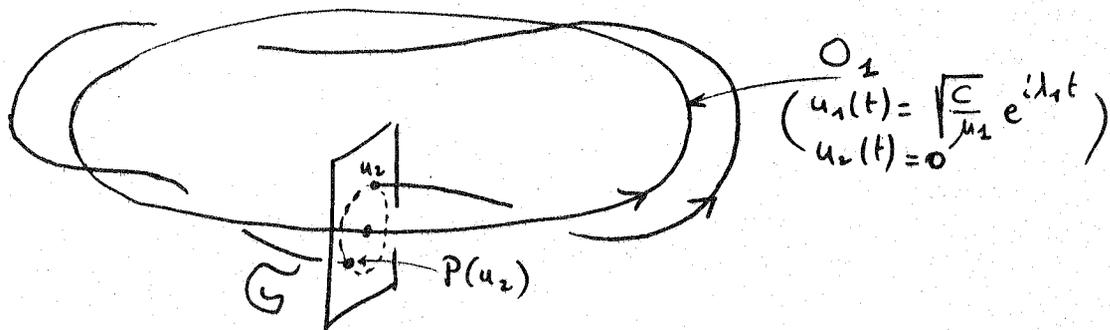
Nous supposons dans la suite que $\mu_1 > 0$, et restreindrons le champ (7) à la sous-variété invariante \mathcal{J}_C d'équation ($I = C > 0$) qui coupe le plan ($u_2 = 0$) suivant l'orbite périodique primaire O_1 $\left[u_1(t) = \sqrt{\frac{C}{\mu_1}} e^{i\lambda_1 t}, u_2(t) = 0 \right]$.

Ayant isolé l'orbite périodique primaire O_1 en se restreignant à \mathcal{J}_C , le premier outil auquel on pense est le Théorème des fonctions implicites; nous allons voir qu'il peut être utilisé...presque toujours..., mais justement pas dans le problème de la lune.

Soit \mathcal{G} une surface de section (locale) associée à l'orbite périodique O_1 dans \mathcal{J}_C .

Définissons par exemple \mathcal{G} par l'équation locale ($\text{Arg } u_1 = 0 \text{ mod. } 2\pi$),
 et choisissons dans \mathcal{G} la coordonnée $u_2 \in \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$.

Figure dans \mathcal{J}_c



L'intersection ($u_2 = 0$) de l'orbite primaire O_1 avec \mathcal{G} est un point fixe de l'application P de premier retour sur \mathcal{G} du champ défini par (7) sur \mathcal{J}_c .

Le temps nécessaire au retour sur \mathcal{G} est évidemment égal à $2\pi/\lambda_1$, d'où il suit que P est la rotation de nombre de rotation λ_2/λ_1

$$P(u_2) = u_2 e^{2\pi i \lambda_2/\lambda_1}.$$

On retrouve bien sûr le résultat de l'étude précédente sur les tores.

Considérons maintenant une perturbation de classe $C^{k \geq 1}$ de (7) dont on suppose qu'elle laisse invariante une sous-variété de classe C^k , C^k -proche (*) de \mathcal{J}_c . Un changement de classe C^k de coordonnées C^k -proche de l'Identité nous ramène au cas d'une perturbation de (7) laissant invariante (*) la sous-variété \mathcal{J}_c ; les théorèmes classiques sur la dépendance différentiable des courbes intégrales d'un champ par rapport aux données initiales et aux perturbations (voir Arnold, Equations Différentielles Ordinaires, § 32, Editions Mir, 1974: on ne perd pas de dérivée) montrent alors qu'au voisinage de O_1 , \mathcal{G} est encore une surface de section pour le nouveau champ de vecteurs; si 1 n'est pas dans le spectre de $DP(0)$, i.e. si λ_2/λ_1 n'est pas entier, on déduit du théorème des fonctions implicites que la nouvelle application de premier retour sur \mathcal{G} possède un point fixe près de 0 dépendant différentiablement des paramètres.

(*) au voisinage de O_1 .

Nous venons de démontrer le

Théorème de Liapunov: Considérons dans $\mathbb{R}^4 = \mathbb{C}^2$ (coordonnées u_1, u_2) un champ de vecteurs X de classe C^1 dont la dérivée à l'origine soit analogue à (7):

$$(X) \begin{cases} \frac{du_1}{dt} = i\lambda_1 u_1 + \varphi_1(u_1, u_2), \\ \frac{du_2}{dt} = i\lambda_2 u_2 + \varphi_2(u_1, u_2); \end{cases}$$

$[(\varphi_1, \varphi_2)$ est une application de $\mathbb{R}^4 = \mathbb{C}^2$ dans lui-même de classe C^1 dont la dérivée s'annule à l'origine, et $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}_+, \lambda_1 \neq 0$].

Supposons que X possède une intégrale première I de classe C^2 dont le développement de Taylor à l'origine soit

$$I(u_1, u_2) = \mu_1 |u_1|^2 + \mu_2 |u_2|^2 + \psi(u_1, u_2);$$

$[\psi$ est une fonction sur $\mathbb{R}^4 = \mathbb{C}^2$ de classe C^2 nulle ainsi que ses deux premières dérivées à l'origine, et $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}, \mu_1 \neq 0$].

Si λ_2/λ_1 n'est pas entier, chaque variété de niveau de I rencontrant le plan $(u_2 = 0)$ suivant une courbe fermée non vide γ assez proche de l'origine, contient une orbite périodique de X proche de γ , et de période proche de $2\pi/\lambda_1$.

Il suffit en effet d'introduire un petit paramètre ε par le changement de variables

$$\begin{cases} u_1 = \varepsilon v_1, \\ u_2 = \varepsilon v_2. \end{cases}$$

Nous utiliserons la notation $O_k(\varepsilon)$ pour désigner une fonction sur la boule unité de \mathbb{R}^4 dont la norme C^k tend vers 0 avec ε .

Le champ de vecteurs (X) devient

$$\begin{cases} \frac{dv_1}{dt} = i\lambda_1 v_1 + \frac{1}{\varepsilon} \varphi_1(\varepsilon v_1, \varepsilon v_2) = i\lambda_1 v_1 + O_1(\varepsilon), \\ \frac{dv_2}{dt} = i\lambda_2 v_2 + \frac{1}{\varepsilon} \varphi_2(\varepsilon v_1, \varepsilon v_2) = i\lambda_2 v_2 + O_1(\varepsilon), \end{cases}$$

que l'on restreint à la sous-variété d'équation $J(v_1, v_2) = 1$, où

$$\begin{aligned} J(v_1, v_2) &= \frac{1}{\varepsilon^2} I(\varepsilon v_1, \varepsilon v_2) = \mu_1 |v_1|^2 + \mu_2 |v_2|^2 + \frac{1}{\varepsilon^2} \psi(\varepsilon v_1, \varepsilon v_2) \\ &= \mu_1 |v_1|^2 + \mu_2 |v_2|^2 + O_2(\varepsilon). \end{aligned}$$

Le théorème que nous venons d'énoncer est en fait un cas particulier du Théorème de Liapunov: d'une part, on peut considérer des champs de vecteurs ayant en 0 des valeurs propres quelconques (autres que $\pm i\lambda_1$), pourvu qu'aucune ne soit un multiple entier de $i\lambda_1$; en particulier la dimension ambiante peut être quelconque. D'autre part, la famille à un paramètre (la valeur C de I) d'orbites périodiques obtenue engendre une sous-variété de dimension deux de l'espace ambiant, de classe C^2 si (X) est de classe C^2 , y compris à l'origine où elle est tangente à l'ordre deux au plan propre associé aux valeurs propres $\pm i\lambda_2$ (le plan $u_2 = 0$). La démonstration de ceci sera prétexte à l'introduction de la théorie des formes normales.

De la régularité des solutions d'équations différentielles en fonction du temps et des conditions initiales, on déduit que les courbes intégrales de (X) voisines de l'origine sont de la forme

$$\begin{cases} u_1(t) = e^{i\lambda_1 t} [u_1 + \alpha_1(u_1, u_2, t)], \\ u_2(t) = e^{i\lambda_2 t} [u_2 + \alpha_2(u_1, u_2, t)], \end{cases} \quad (u_1(0) = u_1, u_2(0) = u_2),$$

où α_1 et α_2 sont des fonctions de classe C^2 sur $\mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}$ définies au voisinage de $\{0\} \times \{0\} \times [0, \frac{2\pi}{\lambda_1}]$, qui s'annulent ainsi que leurs dérivées premières en tout point de $\{0\} \times \{0\} \times \mathbb{R}$.

En particulier,

$$\begin{cases} u_1(t) = u_1 e^{i\lambda_1 t} + o(|u_1| + |u_2|), \\ u_2(t) = u_2 e^{i\lambda_2 t} + o(|u_1| + |u_2|), \end{cases} \text{ avec des } o \text{ uniformes en } t.$$

Supposons un instant que le plus petit temps positif T au bout duquel l'argument de $u_1(T)$ soit égal modulo 2π à celui de u_1 soit de la forme

$$T = \frac{2\pi}{\lambda_1} + \theta(u_1, u_2),$$

où θ est une fonction de classe C^2 sur \mathbb{R}^4 au voisinage de l'origine. On aurait alors

$$u_2(T) = u_2 e^{2\pi i \frac{\lambda_2}{\lambda_1}} + f(u_1, u_2),$$

où f est une fonction de classe C^2 nulle en 0 ainsi que sa dérivée, et on en déduirait que l'équation $u_2(T) = u_2$ équivaut à une équation de la forme $u_2 = g(u_1)$, où g est une fonction nulle en 0 ainsi que sa dérivée.

Le graphe de g serait donc une sous-variété N de dimension deux de \mathbb{R}^4 , tangente en 0 au plan ($u_2 = 0$), et contenant les origines des éventuelles orbites périodiques que nous recherchons. De plus, on voit facilement que, dans ces conditions, l'existence de l'intégrale ^(*) première I force l'égalité $u_1(T) = u_1$ (et pas seulement $\text{Arg } u_1(T) = \text{Arg } u_1 \pmod{2\pi}$) pour tous les points (u_1, u_2) de N : autrement dit, N est la réunion des orbites périodiques données par le Théorème de Liapunov.

Il y a deux difficultés à surmonter pour transformer ce rêve en une démonstration décente:

- 1) On ne peut assurer que $\text{Arg } u_1(2\pi/\lambda_1)$ est proche de $\text{Arg } u_1 + 2\pi$ que si le terme de perturbation $\alpha_1(u_1, u_2, \frac{2\pi}{\lambda_1})$ est petit en module devant $|u_1|$, ce qui n'a de chance d'être vrai que si (u_1, u_2) ne s'approche pas trop près du plan ($u_2 = 0$), par exemple si on se restreint au "secteur" \mathcal{C} d'équation $|u_2| \leq |u_1|$.

(*) Les sous-variétés de niveau de I qui nous intéressent admettent, au voisinage de ($u_2 = 0$), une équation de la forme $|u_1| = f(\text{Arg } u_1, u_2)$. La conclusion vaut encore si f n'est que C^0 . Nous reviendrons sur ce point.

2) Même dans \mathcal{E} , T n'est pas a priori une fonction dérivable de $u_1, \bar{u}_1, u_2, \bar{u}_2$ à l'origine: penser aux termes tels que \bar{u}_1^2/u_1 dans l'identité

$$\text{Arg } u_1 + \lambda_1 T + \text{Arg} \left(1 + \frac{\alpha_1(u_1, u_2, T)}{u_1} \right) = \text{Arg } u_1 + 2\pi .$$

Bien entendu, tous ces ennuis n'existeraient pas si $u_1(t)$ était divisible par u_1 , et c'est essentiellement un changement de variables nous ramenant à cette situation (à des termes de degré arbitrairement haut près) que va nous fournir la théorie des formes normales.

Formes normales: Une bonne référence est Arnold, Chapitres Supplémentaires de la Théorie des Equations Differentielles Ordinaires, Chapitre 5, Ed. Mir, 1980.

L'idée, qui remonte à la thèse de Poincaré (1879), est de chercher des variables au voisinage d'une singularité d'un champ de vecteurs, dans lesquelles les traits saillants de la géométrie du portrait de phase apparaissent: il s'agira essentiellement de rendre manifeste l'existence d'une symétrie (approchée) et d'en déduire l'existence de sous-ensembles (approximativement) invariants.

La remarque initiale est que le changement de variables

$$Y = X + h(X) , \quad X = (x_1, \dots, x_n), \quad Y = (y_1, \dots, y_n), \quad h = (h_1, \dots, h_n) ,$$

dans lequel les h_i sont des polynomes homogènes, de degré $r \geq 2$ indépendant de i , en les x_i , transforme l'équation

$$\frac{dX}{dt} = AX + F(X) , \quad F = (f_1, \dots, f_n) ,$$

dans laquelle les f_i sont d'ordre ≥ 2 en les x_i , en une équation de la forme

$$\frac{dY}{dt} = AY + F(Y) + [Dh(Y)AY - Ah(Y)] \\ + \text{termes d'ordre } \geq r+1$$

qui ne diffère de l'équation initiale que par des termes d'ordre $\geq r$, les termes d'ordre r étant obtenus en ajoutant aux anciens le crochet

$$(L_A h)(Y) = [A, h](Y) = Dh(Y)AY - Ah(Y)$$

des champs $Y \mapsto AY$ et $Y \mapsto h(Y)$.

Une base de l'espace vectoriel des h est évidemment formée par ceux qui vérifient

$$h_i(Y) = 0 \text{ pour } i \neq s, \quad h_s(Y) = y_1^{i_1} \dots y_n^{i_n}, \quad i_1 + \dots + i_n = r;$$

Si $A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, le crochet $[A, h] = k$ est défini par

$$h_i(Y) = 0 \text{ pour } i \neq s, \quad h_s(Y) = (i_1 \lambda_1 + \dots + i_n \lambda_n - \lambda_s) y_1^{i_1} \dots y_n^{i_n},$$

et ne contribue à l'image de l'opérateur L_A que si les valeurs propres λ_i de A ne vérifient pas la relation

$$\lambda_s = i_1 \lambda_1 + \dots + i_n \lambda_n, \quad i_1, \dots, i_n \in \mathbb{N}, \quad i_1 + i_2 + \dots + i_n = r \geq 2.$$

Une telle relation est appelée résonance et un monome tel que h_s est appelé monome (ou terme) résonnant s'il correspond à une résonance.

En composant un nombre fini (resp. un nombre infini) de changements de variables du type ci-dessus, on obtient le

Théorème: Considérons, au voisinage de 0 dans \mathbb{R}^n , l'équation

$$\frac{dX}{dt} = AX + F(X),$$

dans laquelle $A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ et F est une application de classe C^k nulle à l'origine ainsi que sa dérivée première. Par un changement de variables de la forme $\text{Id} + H$, $H = (h_1, \dots, h_n)$, h_i polynomes d'ordre ≥ 2 , on peut supprimer dans le développement de Taylor de F à l'origine tous les monomes non résonnants de degré inférieur à un degré fixé.

Si les composantes de F sont des séries formelles, on peut, par un changement de variables formel de la forme $\text{Id} + H$, h_i séries formelles d'ordre ≥ 2 , supprimer dans F tous les monomes non résonnants.

Remarque importante: Supposons que les valeurs propres de A ne soient pas toutes réelles et notons les

$$\lambda_1, \bar{\lambda}_1, \lambda_2, \bar{\lambda}_2, \dots, \lambda_k, \bar{\lambda}_k, \mu_{2k+1}, \dots, \mu_n.$$

Dans une base $X_1, \bar{X}_1, \dots, X_k, \bar{X}_k, Y_{2k+1}, \dots, Y_n$ dont les $2k$ premiers vecteurs se groupent en paires conjuguées, un élément de \mathbb{R}^n a des coordonnées de la forme $x_1, \bar{x}_1, \dots, x_k, \bar{x}_k, y_{2k+1}, \dots, y_n$, et est donc parfaitement repéré par la donnée de $(x_1, \dots, x_k, y_{2k+1}, \dots, y_n) \in \mathbb{C}^k \times \mathbb{R}^{n-2k}$.

Cette identification de \mathbb{R}^n à $\mathbb{C}^k \times \mathbb{R}^{n-2k}$ étant faite, le raisonnement précédent, qui est purement formel, peut être fait, et le théorème est encore valable: la seule différence est que les x_i , $i = 1, \dots, k$, sont complexes ainsi que les λ_i correspondants.

Par exemple, l'équation dans $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$

$$\frac{du}{dt} = \lambda u + F(u)$$

est formellement équivalente (*)

(i) à l'équation linéaire $\frac{du}{dt} = \lambda u$ si $\text{Re}(\lambda) \neq 0$ (pas de résonance),

(ii) à une équation formelle de la forme $\frac{du}{dt} = u\varphi(|u|^2)$ où φ est une série formelle à une variable à coefficients complexes vérifiant $\varphi(0) = \lambda$ si $\text{Re}(\lambda) = 0$, $\lambda \neq 0$ (les seules résonances sont de la forme $\lambda = \lambda + p(\lambda + \bar{\lambda})$)

et on remarquera que le second membre est équivariant sous l'action du groupe des rotations: $ue^{i\alpha}\varphi(|ue^{i\alpha}|^2) = [u\varphi(|u|^2)]e^{i\alpha}$,

(iii) à elle-même et pas mieux si $\lambda = 0$ (tous les monomes sont résonnants: $\lambda = p\lambda + q\bar{\lambda}$).

(*) Lorsque deux champs (équations) se déduisent l'un de l'autre par un changement de variables (formel), on dit qu'ils sont (formellement) équivalents.

Revenant à notre problème, nous voyons que, pourvu que λ_2 ne soit pas un multiple entier de λ_1 , les résonances sont engendrées par les relations

$$i\lambda_1 + (i\bar{\lambda}_1) = 0, \quad i\lambda_2 + (i\bar{\lambda}_2) = 0, \quad \text{et éventuellement } i\lambda_1 = m(i\lambda_2), \quad \begin{matrix} l \geq 1 \\ m \geq 2 \end{matrix}$$

En particulier, les monomes résonnants de degré inférieur ou égal à deux ne peuvent être que

$$u_1^2, \quad u_2^2 \quad \text{dans la composante } \frac{du_1}{dt},$$

$$u_2, \quad u_1 \bar{u}_2 \quad \text{dans la composante } \frac{du_2}{dt}.$$

À changement de variables polynomial près, on peut donc supposer que le champ de vecteurs (X) s'écrit

$$\begin{cases} \frac{du_1}{dt} = i\lambda_1 u_1 + a u_2^2 + \tilde{\varphi}_1(u_1, u_2), \\ \frac{du_2}{dt} = i\lambda_2 u_2 + b u_1 \bar{u}_2 + \tilde{\varphi}_2(u_1, u_2), \end{cases}$$

où a et b sont des nombres complexes, et $\tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2$ des fonctions sur \mathbb{R}^4 de classe C^2 nulles à l'origine ainsi que leurs dérivées jusqu'à l'ordre deux.

Les courbes intégrales du champ (X) prennent alors la forme

$$\begin{cases} u_1(t) = e^{i\lambda_1 t} [u_1 + t a u_2^2 + \tilde{\alpha}_1(u_1, u_2, t)], \\ u_2(t) = e^{i\lambda_2 t} [u_2 + t b u_1 \bar{u}_2 + \tilde{\alpha}_2(u_1, u_2, t)], \\ (u_1(0) = u_1, \quad u_2(0) = u_2), \end{cases}$$

où $\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2$ sont des fonctions de classe C^2 sur un voisinage de $\{0\} \times \{0\} \times [0, \frac{2\pi}{\lambda_1}]$ dans $\mathbb{C}, \mathbb{C}, \mathbb{R}$, dont les dérivées jusqu'à l'ordre deux en $u_1, \bar{u}_1, u_2, \bar{u}_2$ s'annulent sur $\{0\} \times \{0\} \times \mathbb{R}$. (Pour démontrer ce point, on détermine par identification le développement de Taylor de $u_1(t), u_2(t)$ par rapport aux variables $u_1, \bar{u}_1, u_2, \bar{u}_2$, en remarquant que a ou b ne sont différents de zero que si $2\lambda_2 - \lambda_1 = 0$).

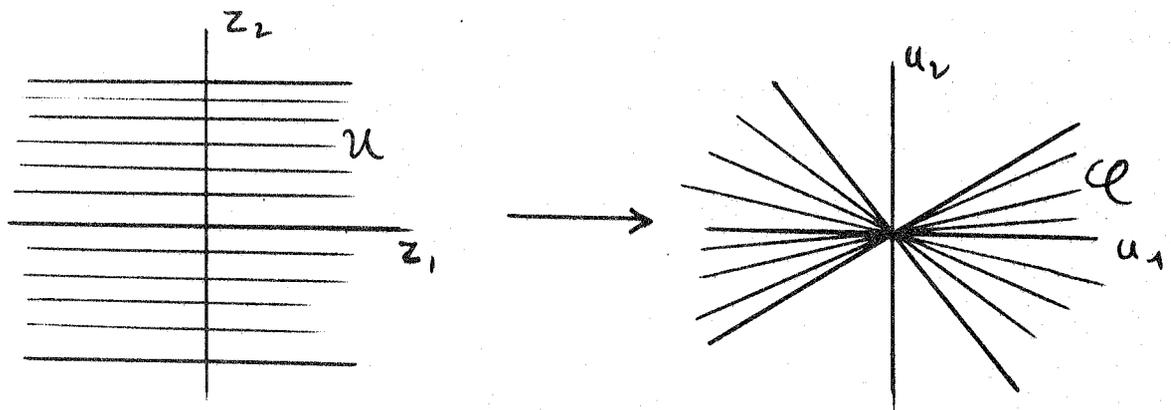
Reprenant la "démonstration" esquissée plus haut, nous cherchons à résoudre, dans le domaine \mathcal{C} défini par $|u_2| \leq |u_1|$, les équations

$$\begin{cases} 2\pi = \lambda_1 T + \text{Arg} \left[1 + T a \frac{u_2^2}{u_1} + \frac{\tilde{\alpha}_1(u_1, u_2, T)}{u_1} \right], \\ e^{i\lambda_2 T} \left[u_2 + T b u_1 \bar{u}_2 + \tilde{\alpha}_2(u_1, u_2, T) \right] = u_2. \end{cases}$$

Appliquer le théorème des fonctions implicites à des équations définies dans un domaine tel que \mathcal{C} , qui n'est pas ouvert au voisinage de 0, pose quelques problèmes. Heureusement les "géomètres algébristes (iques?)" ont inventé depuis longtemps une panacée pour les cas de ce genre: c'est l'éclatement (local)

$$(z_1, z_2) \longmapsto (u_1 = z_1, u_2 = z_1 z_2)$$

qui applique justement le voisinage de zero ($|z_2| \leq 1$) dans \mathbb{C}^2 sur le domaine \mathcal{C} ; en réel ça donne la figure suivante



Dans les variables z_1, z_2, T , nos équations deviennent

$$\begin{cases} \Phi_1(z_1, T, z_2) \equiv -2\pi + \lambda_1 T + \text{Arg} \left[1 + T a z_1 z_2^2 + \frac{\tilde{\alpha}_1(z_1, z_1 z_2, T)}{z_1} \right] = 0, \\ \Phi_2(z_1, T, z_2) \equiv (e^{i\lambda_2 T} - 1) z_2 + e^{i\lambda_2 T} \left[T e^{\frac{z_1}{z_1}} + \frac{\tilde{\alpha}_2(z_1, z_1 z_2, T)}{z_1} \right] = 0. \end{cases}$$

et définissent T et z_2 comme fonctions de classe C^1 de z_1, \bar{z}_1 par simple application du théorème des fonctions implicites; en effet,

1) Φ_1 et Φ_2 sont de classe C^1 dans le voisinage de $0 \in \mathbb{C}^2$ où elles sont définies: il suffit de remarquer que

$$\frac{\tilde{\alpha}_1(z_1, z_1 z_2, T)}{z_1} \quad \text{et} \quad \frac{\tilde{\alpha}_2(z_1, z_1 z_2, T)}{z_1}$$

sont de classe C^1 (et de dérivée nulle par rapport aux variables z_1, \bar{z}_1 en $z_1 = z_2 = 0$).

$$2) (\Phi_1, \Phi_2): \mathbb{C} \times \mathbb{R} \times \mathbb{C}, (0, \frac{2\pi}{\lambda_1}, 0) \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{C}, (0, 0),$$

et

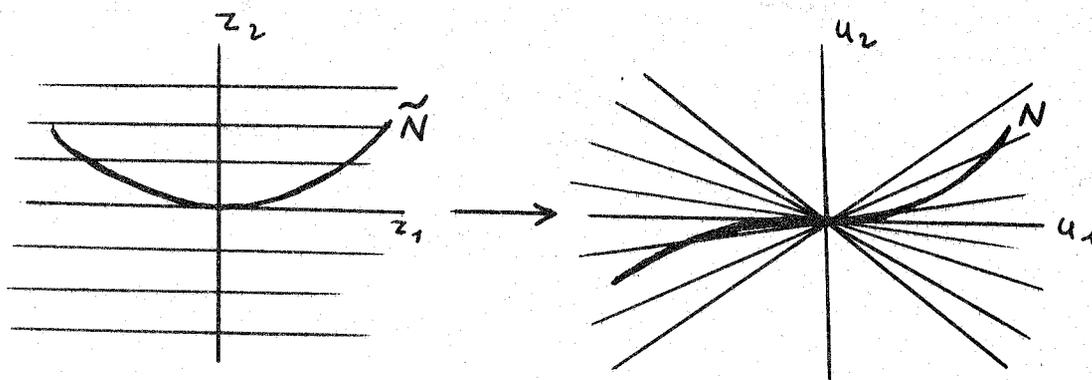
$$\frac{\partial(\Phi_1, \Phi_2, \bar{\Phi}_2)}{\partial(T, z_2, \bar{z}_2)}(0, \frac{2\pi}{\lambda_1}, 0) = \begin{pmatrix} \lambda_2 & \text{uuuu} \\ 0 & e^{\frac{2\pi i \lambda_2}{\lambda_2}} - 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-\frac{2\pi i \lambda_2}{\lambda_2}} - 1 \end{pmatrix}$$

est inversible.

Il reste à redescendre sur terre, en l'occurrence dans \mathcal{E} : la sous-variété \tilde{N} de dimension deux de \mathbb{C}^2 définie comme graphe de $z_1 \mapsto z_2$ est manifestement tangente au plan ($z_2 = 0$), donc sûrement pas au plan ($z_1 = 0$) qu'elle coupe transversalement en un seul point;

on en déduit qu'elle se projette sur une sous-variété N de classe C^2 de $\mathbb{R}^4 = \mathbb{C}^2$, tangente à l'ordre deux à l'origine au plan ($u_2 = 0$):

en effet, \tilde{N} est le graphe d'une fonction $z_2 = f(z_1)$ de classe C^1 en z_1, \bar{z}_1 , nulle ainsi que ses dérivées premières en 0, de classe C^2 en dehors de $z_1 = 0$, et ayant des dérivées partielles secondes $o\left(\frac{1}{|z_1|}\right)$ lorsque $|z_1|$ tend vers 0 (il suffit de vérifier que Φ_1 et Φ_2 ont ces propriétés); N est donc le graphe de $u_2 = u_1 f(u_1)$ qui est de classe C^2 et s'annule en 0 à l'ordre deux.



Exercices: 1) Montrer que la forme normale formelle de (X) est

$$\begin{cases} \frac{du_1}{dt} = u_1 f_1(|u_1|^2, |u_2|^2), & f_1(0,0) = i\lambda_1, \\ \frac{du_2}{dt} = u_2 f_2(|u_1|^2, |u_2|^2), & f_2(0,0) = i\lambda_2, \\ f_1(x,y), f_2(x,y) \text{ séries formelles en } x,y \text{ à coefficients complexes,} \end{cases}$$

si λ_1 et λ_2 sont rationnellement indépendants,

$$\begin{cases} \frac{du_1}{dt} = u_1 f_1(|u_1|^2, |u_2|^2, u_1 \bar{u}_2^m) + u_1^l u_2^m g_1(|u_1|^2, |u_2|^2, u_1 \bar{u}_2^m), & f_1(0,0,0) = i\lambda_1, \\ \frac{du_2}{dt} = u_2 f_2(|u_1|^2, |u_2|^2, u_1 \bar{u}_2^m) + u_1^l \bar{u}_2^{m-1} g_2(|u_1|^2, |u_2|^2, u_1 \bar{u}_2^m), & f_2(0,0,0) = i\lambda_2, \\ f_1(x,y,z), \dots \text{ séries formelles en } x,y,z, \bar{z} \text{ à coefficients complexes,} \end{cases}$$

si $\lambda_1 = m\lambda_2$, $m \geq 2$ [Moyen mnémotechnique: on verra plus loin que, dans le cas Hamiltonien, la forme normale de H ne dépend que de $|u_1|^2$, $|u_2|^2$, $u_1 \bar{u}_2^m$, $\bar{u}_1 u_2^m$; dériver alors par rapport à \bar{u}_1 et \bar{u}_2 respectivement].

Remarquer que dans le cas non résonnant (λ_1 et λ_2 rationnellement indépendants) l'étude formelle de (X) se ramène à celle d'une équation de Volterra dans \mathbb{R}^2

$$(V) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x F_1(x, y), \\ \frac{dy}{dt} = y F_2(x, y), \end{cases} \quad x = |u_1|^2, \quad y = |u_2|^2, \quad F_1 = 2 \operatorname{Re} f_1, \quad F_2 = 2 \operatorname{Re} f_2.$$

Si les séries formelles convergent, l'invariance de (X) par $SO(2) \times SO(2)$ fait correspondre à un point singulier de (V) sur les axes (resp. en dehors des axes) une orbite périodique de (X) (resp. un tore \mathbb{T}^2 invariant), et à une orbite périodique de (V) un tore \mathbb{T}^3 invariant par (X).

Les équations de ce type (tout au moins leur restriction au quadrant positif) interviennent en biologie des populations pour décrire les phénomènes de compétition d'espèces (équations prédateur-proie dans le cas de \mathbb{R}^2). Lorsque n espèces sont présentes (équation analogue à (V) dans \mathbb{R}^n , correspondant à (X) dans \mathbb{C}^n , $n > 2$) la forme particulière de l'équation n'apporte qu'une simplicité illusoire: Smale a en effet remarqué (Journal of Mathematical Biology 3,5-7(1976)) qu'avec des F_i bien choisis, une telle équation pouvait avoir un comportement asymptotique aussi complexe qu'une équation générale dans \mathbb{R}^{n-1} . En fait, dès $n = 3$, et même avec des F_i linéaires, on trouve des comportements chaotiques (Coullet et Tresser, *Occurrence of strange attractors in 3d Volterra equations*, Phys. Letters 79 A p. 259-263, 1980).

2) Montrer que lorsque (X) est de classe C^k , $k = 2, 3, \dots, \infty$, la sous-variété N est de classe C^k , et est tangente à l'ordre k au plan ($u_2 = 0$) si (X) est sous forme normale jusqu'à l'ordre k (lorsque $k = \infty$, la mise sous forme normale utilise le théorème de Borel affirmant l'existence de fonctions C^∞ ayant un développement de Taylor prescrit).

Question: Existe-t-il un champ (X) de classe C^1 pour lequel N ne soit pas une sous-variété C^1 de \mathbb{R}^4 ?

Nota: Notre définition de N vient du début du remarquable cours de J.J. Duistermaat intitulé Bifurcations of periodic solutions near equilibrium points of Hamiltonian systems (CIME Montecatini 1983, Bifurcation theory and applications, Springer Lecture Notes in Mathematics 1057, 1984). Nous aurons l'occasion d'en reparler.

(*) Remarquer qu'alors la composante suivant u_2 de (X) $|_{u_2=0}$ est nulle à l'ordre k.

La démonstration analytique du Théorème de Liapunov:

Notre référence est le livre de Siegel et Moser, Lectures on Celestial Mechanics, Springer 1971, Chapitre II, §§ 16 et 17.

Il s'agit de démontrer, dans le cas où le champ (X) est analytique réel, l'existence d'une sous-variété analytique N de \mathbb{R}^4 , union d'orbites périodiques (y compris 0) de (X) .

Nous donnons cette démonstration, car c'est elle qui sert de modèle à Conley dans le cas dégénéré du problème restreint des trois corps.

Si le processus (infini) de mise sous forme normale convergeait, on obtiendrait un changement de variables analytique réel dans un voisinage de l'origine,

$$(u_1, u_2) \longmapsto (\mathcal{Y}_1 = u_1 + \dots, \mathcal{Y}_2 = u_2 + \dots)$$

transformant (X) en

$$(X) \begin{cases} \frac{d\mathcal{Y}_1}{dt} = i\lambda_1 \mathcal{Y}_1 + \Psi_1(\mathcal{Y}_1, \mathcal{Y}_2), \\ \frac{d\mathcal{Y}_2}{dt} = i\lambda_2 \mathcal{Y}_2 + \Psi_2(\mathcal{Y}_1, \mathcal{Y}_2), \end{cases}$$

où les deuxièmes membres ne comportent que des monomes résonnants.

En particulier, $\Psi_2(\mathcal{Y}_1, 0) = 0$ car toutes les résonances $i\lambda_2 = \dots$ comportent obligatoirement au deuxième membre un multiple de $i\lambda_2$ ou $(i\lambda_2)$; le plan $(\mathcal{Y}_2 = 0)$ serait donc invariant par le champ. [Au contraire, si $\lambda_1 = m\lambda_2$, $\Psi_1(\mathcal{Y}_1, \mathcal{Y}_2)$ peut comporter par exemple un terme en u_2^m empêchant $\Psi_1(0, \mathcal{Y}_2)$ de s'annuler; en cas de résonance, le plan $(\mathcal{Y}_1 = 0)$ pourrait donc ne pas être invariant]. De plus, contenu dans la sous-variété N d'équation $\mathcal{Y}_2(T) = \mathcal{Y}_2$, le plan $(\mathcal{Y}_2 = 0)$ ne pourrait que coïncider avec elle. La restriction à N de (X) serait de la forme

$$(i) \quad \frac{d\mathcal{Y}_1}{dt} = [i\lambda_1 + f(|\mathcal{Y}_1|^2)]\mathcal{Y}_1 = \alpha(|\mathcal{Y}_1|^2)\mathcal{Y}_1, \quad \alpha(0) = i\lambda_1$$

(*) Comparer à l'exercice 1) ci-dessus.

(seules interviennent les résonances $i\lambda_1 = i\lambda_1 + p(i\lambda_1 + \overline{i\lambda_1})$) ne mettant en cause que les valeurs propres $i\lambda_1, \overline{i\lambda_1}$, et les orbites périodiques s'écriraient

mal dit.
faite $|S_1|^{1/2}$
fonction de ω_1

$$\begin{cases} \mathcal{Y}_1(t) = c_1 e^{\alpha (|c_1|^2) t} \\ \mathcal{Y}_2(t) = 0 \end{cases}$$

L'existence de l'intégrale première I impliquerait donc

$$\overline{\alpha} \equiv -\alpha$$

Enfin, rappelons que dans le changement de variables faisant passer de (u_1, u_2) à $(\mathcal{Y}_1, \mathcal{Y}_2)$ il est inutile d'utiliser des monomes résonnants puisque ceux-ci, ayant une image nulle dans l'application $h \mapsto [A, h]$ (voir page 37), ne contribuent pas effectivement à la mise sous forme normale. Soumis à cette condition, le changement de variables devient uniquement déterminé. Alternativement, on peut supposer que c'est le changement de variables inverse qui a cette propriété, ce qui implique

$$(ii) \begin{cases} u_1(\mathcal{Y}_1, 0) = \mathcal{Y}_1 + \text{série d'ordre } \geq 2 \text{ en } \mathcal{Y}_1, \text{ sans termes } \mathcal{Y}_1 |\mathcal{Y}_1|^{2k} \\ u_2(\mathcal{Y}_1, 0) = \text{série d'ordre } \geq 2 \text{ en } \mathcal{Y}_1, \text{ sans termes } \mathcal{Y}_1 |\mathcal{Y}_1|^{2k} \end{cases}$$

Tout ceci n'a que bien peu de chances d'être vrai dans le monde des fonctions analytiques (on y reviendra), mais l'est certainement dans celui des séries formelles; le seul point nécessitant une explication est la relation $\overline{\alpha} \equiv -\alpha$. En fait, nous allons voir que celle-ci est vérifiée dès qu'il existe une intégrale première topologique I dont les sous-variétés de niveau $I = C, C$ petit (disons > 0) peuvent s'écrire

$|u_1| = f_C(\text{Arg } u_1, u_2)$ au voisinage du plan ($u_2 = 0$) dans des coordonnées u_1, u_2 mettant (X) sous forme normale à l'ordre deux (d'après ce qui précède, cette hypothèse implique l'existence d'une sous-variété N de classe C^2 de \mathbb{R}^4 feuilletée par des orbites périodiques de (X) de période proche de $2\pi/\lambda_1$).

Supposons en effet que $\bar{\alpha} \neq -\alpha$; il existe un terme $\alpha_k |z_1|^{2k}$ tel que $\text{Re } \alpha_k \neq 0$. Si nous tronquons à l'ordre $\ell > 2k+1$ le changement de variables formel de la page 44, nous obtenons un changement de variables polynomial

$$(u_1, u_2) \longmapsto (\xi_1, \xi_2),$$

transformant (X) en

$$(X) \begin{cases} \frac{d\xi_1}{dt} = i\lambda_1 \xi_1 + \hat{\Psi}_1(\xi_1, \xi_2) + o\left[(|\xi_1| + |\xi_2|)^\ell \right], \\ \frac{d\xi_2}{dt} = i\lambda_2 \xi_2 + \hat{\Psi}_2(\xi_1, \xi_2) + o\left[(|\xi_1| + |\xi_2|)^\ell \right], \end{cases}$$

où $\hat{\Psi}_1$ et $\hat{\Psi}_2$ sont des polynômes en $\xi_1, \bar{\xi}_1, \xi_2, \bar{\xi}_2$ de degré inférieur ou égal à ℓ , ne comportant que des termes résonnants.

D'après l'exercice 2, la sous-variété N est de classe C^ℓ et tangente à l'ordre ℓ au plan ($\xi_2 = 0$): $\xi_2 = o(|\xi_1|^\ell)$.

ATTENTION: en général, la sous-variété N dépend du système de coordonnées choisi; cependant, elle prend un sens intrinsèque à partir du moment où elle représente une famille à un paramètre d'orbites périodiques de (X).

Prenant ξ_1 comme coordonnée sur N, on obtient pour la restriction de (X) à N

$$\begin{aligned} \frac{d\xi_1}{dt} &= i\lambda_1 \xi_1 + \hat{\Psi}_1(\xi_1, o(|\xi_1|^\ell)) + o(|\xi_1|^\ell) \\ &= i\lambda_1 \xi_1 + \hat{\Psi}_1(\xi_1, 0) + o(|\xi_1|^\ell), \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\frac{d\xi_1}{dt} = \hat{\alpha}(|\xi_1|^2) \xi_1 + o(|\xi_1|^l),$$

où le polynôme $\hat{\alpha}$ (troncation de la série formelle α) contient le terme $\alpha_k |\xi_1|^{2k}$ vérifiant $\operatorname{Re} \alpha_k \neq 0$.

Mais alors (*)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} |\xi_1|^2 &= 2 \operatorname{Re} \left(\bar{\xi}_1 \frac{d\xi_1}{dt} \right) = 2 \operatorname{Re} \hat{\alpha}(|\xi_1|^2) |\xi_1|^2 + o(|\xi_1|^{l+2}) \\ &= 2(\operatorname{Re} \alpha_k) |\xi_1|^{2k+2} + o(|\xi_1|^{2k+2}) \end{aligned}$$

est du signe de $\operatorname{Re} \alpha_k$ si $\xi_1 \neq 0$ est assez proche de 0. On en déduit facilement que toutes les courbes intégrales de $(X)|_N$ sont, dans un voisinage de 0, adhérentes à 0, ce qui contredit l'existence sur N d'orbites périodiques.

Nota: Une fonction telle que $|\xi_1|^2$ décroissante (croissante) le long des courbes intégrales d'un champ est appelée fonction de Liapunov pour ce champ. C'est l'outil principal des démonstrations de stabilité asymptotique (voir plus loin, ... peut être ...).

Remarque: On comparera avec profit le raisonnement que nous venons de faire avec celui, purement formel, de Siegel-Moser.

Nous venons de montrer le

(*) On suppose que k est le plus petit indice ayant cette propriété.

Lemme: Sous les hypothèses du Théorème de Liapunov (avec éventuellement une intégrale première simplement C^0 , voir pages 45,46), et si le champ (X) est analytique réel, il existe quatre séries formelles ^(*)uniquement déterminées, $\alpha(x)$, $\mathcal{S}(t)$, $u_1(\mathcal{S}, \bar{\mathcal{S}})$, $u_2(\mathcal{S}, \bar{\mathcal{S}})$ qui vérifient

(i) $\frac{d\mathcal{S}}{dt} = \alpha(|\mathcal{S}|^2) \mathcal{S}$, $\alpha(0) = i\lambda_1$, $\bar{\alpha} \equiv -\alpha$,

(ii) $\begin{cases} u_1(\mathcal{S}, \bar{\mathcal{S}}) = \mathcal{S} + \text{série d'ordre} \geq 2 \text{ sans termes } \mathcal{S}(\bar{\mathcal{S}})^k, \\ u_2(\mathcal{S}, \bar{\mathcal{S}}) = \text{série d'ordre} \geq 2 \text{ sans termes } \mathcal{S}(\bar{\mathcal{S}})^k, \end{cases}$

(iii) $\begin{cases} \text{Les séries formelles en } t, \\ u_1(t) = u_1(\mathcal{S}(t), \bar{\mathcal{S}}(t)), \quad u_2(t) = u_2(\mathcal{S}(t), \bar{\mathcal{S}}(t)), \\ \text{vérifient formellement l'équation (X).} \end{cases}$

Ce Lemme résume les résultats du § 16 du chapitre II de Siegel-Moser: nous nous excusons d'en avoir ôté le côté quelque peu miraculeux.

Il ne nous "reste plus" qu'à montrer la convergence des diverses séries impliquées, ce que nous ferons en paraphrasant le paragraphe 17 du chapitre II du susdit: peu de mathématiciens ont mieux manipulé les séries que Siegel, alors...

(*) à coefficients complexes.

Démonstration de la convergence par la méthode des séries majorantes (*)

Pour une bonne introduction à la méthode des séries majorantes, consulter le deuxième tome du cours d'analyse mathématique de G. Valiron, Equations fonctionnelles, Applications, 2^{ème} édition, Masson et Cie, 1950, pages 88 et suivantes.

On déduit de (i) que les séries en t , u_1 et u_2 vérifient ($\alpha = \alpha(\mathfrak{S}\bar{\mathfrak{S}})$)

$$\frac{du_i}{dt} = \frac{du_i}{d\mathfrak{S}} \alpha \mathfrak{S} + \frac{du_i}{d\bar{\mathfrak{S}}} \bar{\alpha} \bar{\mathfrak{S}} = \left(\frac{du_i}{d\mathfrak{S}} \mathfrak{S} - \frac{du_i}{d\bar{\mathfrak{S}}} \bar{\mathfrak{S}} \right) \alpha, \quad i = 1, 2;$$

(iii) devient alors

$$\begin{cases} \left(\frac{du_1}{d\mathfrak{S}} \mathfrak{S} - \frac{du_1}{d\bar{\mathfrak{S}}} \bar{\mathfrak{S}} \right) \alpha - i\lambda_1 u_1 = \varphi_1(u_1, u_2), \\ \left(\frac{du_2}{d\mathfrak{S}} \mathfrak{S} - \frac{du_2}{d\bar{\mathfrak{S}}} \bar{\mathfrak{S}} \right) \alpha - i\lambda_2 u_2 = \varphi_2(u_1, u_2), \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} \left[\mathfrak{S} + \sum_{p,q} (p-q) \{u_1\}_{pq} \mathfrak{S}^p \bar{\mathfrak{S}}^q \right] \left[i\lambda_1 + \sum_2 \{ \alpha \}_2 \mathfrak{S}^2 \bar{\mathfrak{S}}^2 \right] \\ - i\lambda_1 \left[\mathfrak{S} + \sum_{p,q} \{u_1\}_{pq} \mathfrak{S}^p \bar{\mathfrak{S}}^q \right] = \varphi_1(u_1, u_2), \\ \left[\sum_{p,q} (p-q) \{u_2\}_{pq} \mathfrak{S}^p \bar{\mathfrak{S}}^q \right] \left[i\lambda_1 + \sum_2 \{ \alpha \}_2 \mathfrak{S}^2 \bar{\mathfrak{S}}^2 \right] \\ - i\lambda_2 \left[\sum_{p,q} \{u_2\}_{pq} \mathfrak{S}^p \bar{\mathfrak{S}}^q \right] = \varphi_2(u_1, u_2), \end{cases}$$

(*) Dans cette démonstration, \mathfrak{S} et $\bar{\mathfrak{S}}$ sont traitées comme des indéterminées indépendantes.

Suivant toujours Siegel et Moser, nous adoptons les conventions que voici: si σ est une série entière, $|\sigma|$ désigne la série entière obtenue en remplaçant chaque coefficient de σ par son module. Etant données deux séries entières σ, γ à coefficients réels positifs, la relation $\sigma \prec \gamma$ signifiera que chaque coefficient de σ est inférieur ou égal au coefficient correspondant de γ .

On notera enfin $u_1^* = u_1 - \gamma$, $u_2^* = u_2$, $\alpha^* = \alpha - i\lambda_1$, $\bar{u}_j = \sum [u_j]_{p_1} \bar{\gamma}^{p_1} \gamma^q$,
 $S = |u_1^*| + |\bar{u}_1^*| + |u_2^*| + |\bar{u}_2^*|$, $s = u_1 + \bar{u}_1 + u_2 + \bar{u}_2$.

Les majorations précédentes donnent immédiatement (on suppose $c_1 \geq 1$):

$$|u_1^*| + |u_2^*| + \gamma |\alpha^*| \prec c_1 \left[|\varphi_1(u_1, u_2)| + |\varphi_2(u_1, u_2)| + |\alpha^*| (|u_1^*| + |u_2^*|) \right],$$

et donc, tenant compte de ce que $\bar{\alpha} \equiv -\alpha$,

$$S + (\gamma + \bar{\gamma}) |\alpha^*| \prec c_1 \left[|\varphi_1(u_1, u_2)| + |\varphi_1(\bar{u}_1, \bar{u}_2)| + |\varphi_2(u_1, u_2)| + |\varphi_2(\bar{u}_1, \bar{u}_2)| + |\alpha^*| S \right].$$

Pour estimer $\varphi(u_1, u_2) = \sum \varphi_{ijkl} u_1^i \bar{u}_1^j u_2^k \bar{u}_2^l$, $\varphi = \varphi_1, \bar{\varphi}_1, \varphi_2, \bar{\varphi}_2$,

on remarque classiquement qu'il existe $c_2 > 0$ tel que

$$\sum |\varphi_{ijkl}| c_2^{i+j+k+l} = c_3 < \infty, \text{ ce qui implique } |\varphi_{ijkl}| \leq \frac{c_3}{c_2^{i+j+k+l}}$$

et donc, tenant compte de ce que φ est d'ordre ≥ 2 en $u_1, \bar{u}_1, u_2, \bar{u}_2$,

$$\begin{aligned} |\varphi(u_1, u_2)| &\prec \sum_{i+j+k+l \geq 2} \frac{c_3}{c_2^{i+j+k+l}} u_1^i \bar{u}_1^j u_2^k \bar{u}_2^l \\ &= \frac{c_3}{\left(1 - \frac{u_1}{c_2}\right) \left(1 - \frac{\bar{u}_1}{c_2}\right) \left(1 - \frac{u_2}{c_2}\right) \left(1 - \frac{\bar{u}_2}{c_2}\right)} - c_3 - \frac{c_3}{c_2} (u_1 + \bar{u}_1 + u_2 + \bar{u}_2) \\ &\prec \frac{c_3}{1 - \frac{s}{c_2}} - c_3 - \frac{c_3 s}{c_2} = \frac{c_3 s^2}{c_2^2 - c_2 s} \end{aligned}$$

Puisque $\overline{S} \prec \mathcal{S} + \overline{\mathcal{S}} + S$, nos majorations deviennent

$$S + (\mathcal{S} + \overline{\mathcal{S}}) \overline{\alpha^*} \prec c_1 \left[\frac{4 c_3 (\mathcal{S} + \overline{\mathcal{S}} + S)^2}{c_2^2 - c_2 (\mathcal{S} + \overline{\mathcal{S}} + S)} + \overline{\alpha^*} S \right].$$

Pour assurer la convergence de u_1, u_2, α , il suffit de démontrer celle des séries S et $\overline{\alpha^*}$ à coefficients réels positifs, ou encore celle des séries $S(X, X)$ et $\overline{\alpha^*}(XX)$ en une seule indéterminée X , ou enfin celle de

$$U = 2 \overline{\alpha^*}(XX) + \frac{S(X, X)}{X}$$

(série à une indéterminée X , sans terme constant).

La majoration ci-dessus devient, après remplacement de \mathcal{S} et $\overline{\mathcal{S}}$ par X :

$$XU \prec c_1 \left[\frac{4 c_3 X^2 \left(2 + \frac{S}{X}\right)^2}{c_2^2 - c_2 X \left(2 + \frac{S}{X}\right)} + \overline{\alpha^*} S \right], \text{ donc}$$

$$U \prec c_1 \left[\frac{4 c_3 X (2 + U)^2}{c_2^2 - c_2 X (2 + U)} + \frac{1}{4} U^2 \right];$$

La technique des séries majorantes tient dans la remarque suivante:

Si $W = W(X) = \sum_{i \geq 1} w_i X^i$ vérifie

$$W = c_1 \left[\frac{4 c_3 X (2 + W)^2}{c_2^2 - c_2 X (2 + W)} + \frac{1}{4} W^2 \right],$$

W est une majorante de U , i.é. $U \prec W$; en particulier, la convergence de W implique celle de U .

En effet, la majoration sur $U = \sum_{i \geq 1} u_i X^i$ est de la forme

$$u_i \leq P_i(u_1, u_2, \dots, u_{i-1}),$$

où les P_i sont des polynomes à coefficients réels positifs:

$$P_1 = \frac{16c_3}{c_2^2}, \quad P_2(u_1) = \frac{32c_3}{c_2^3} + \frac{16c_3}{c_2^2} u_1 + \frac{1}{4} u_1^2, \quad \text{etc.} \dots$$

On a donc, si $W = \sum_{i \geq 1} w_i X^i$,

$u_1 \leq w_1 = P_1$, ..., et par récurrence sur i ,

$$u_i \leq P_i(u_1, u_2, \dots, u_{i-1}) \leq P_i(w_1, w_2, \dots, w_{i-1}) = w_i.$$

Quant à la convergence de W ,^(*) on la déduit de l'identité

$$A(X)W^3 + B(X)W^2 + C(X)W + D(X) \equiv f(X, W) = 0,$$

$$A(X) = -c_1 c_2 X,$$

$$B(X) = (4c_2 - 2c_1 c_2)X + 16c_1 c_3 + c_1 c_2^2,$$

$$C(X) = (64c_1 c_3 + 8c_2)X - 4c_2^2,$$

$$D(X) = 64c_1 c_3 X,$$

à la condition de savoir que le Théorème des fonctions implicites est vrai en analytique (et de remarquer que $\frac{\partial f}{\partial W}(0,0) \neq 0$).

A vrai dire, nous trichons un peu en évoquant le Théorème des fonctions implicites puisque celui-ci se démontre ... par la méthode des séries majorantes! On peut se reporter au livre cité de Valiron, ou au livre de l'auteur, Courbes Algébriques Planes, Publications Math. de Paris VII, 1978.

(*) qui est bien déterminée comme série formelle sans terme constant par les identités $w_i = P_i(w_1, \dots, w_{i-1})$, $i = 1, 2, \dots$

Dans ce dernier ouvrage on démontre également un Théorème plus général (et bien utile) dans lequel on s'affranchit de la condition $\frac{\partial f}{\partial w}(0,0) \neq 0$ (on la récupère en fait après un nombre fini d'éclatements):

Théorème: Soit $f(X,Y) \in \mathbb{C}\{X,Y\}$ une série convergente telle que $f(0,0) = 0$, et soit $W \in \mathbb{C}[[X]]$, $W(0) = 0$, une série formelle telle que $f(X,W) \equiv 0$ dans $\mathbb{C}[[X]]$. Alors $W \in \mathbb{C}\{X\}$, i.e. W est une série convergente.

Nous avons donc démontré le

Théorème de Liapunov (version raffinée): Considérons dans $\mathbb{R}^4 = \mathbb{C}^2$ (coordonnées u_1, u_2) un champ de vecteurs (X) de classe C^k ($k = 2, 3, \dots, \infty$, analytique) de la forme

$$(X) \begin{cases} \frac{du_1}{dt} = i\lambda_1 u_1 + \varphi_1(u_1, u_2), \\ \frac{du_2}{dt} = i\lambda_2 u_2 + \varphi_2(u_1, u_2), \end{cases}$$

où les dérivées d'ordre un de φ_1 et φ_2 s'annulent à l'origine, et λ_1, λ_2 sont des réels non nuls (on peut les supposer positifs).

Supposons que (X) possède une intégrale première I de classe C^0 ayant la propriété suivante: dans des coordonnées $\xi_1 = u_1 + \dots, \xi_2 = u_2 + \dots$ où (X) est sous forme normale à l'ordre deux, les hypersurfaces $I = C$ ($C > 0$ par exemple) admettent au voisinage du plan ($\xi_2 = 0$) (et assez près de 0) un paramétrage de la forme $|\xi_1| = f_C(\text{Arg} \xi_1, \xi_2)$.

Si λ_2/λ_1 n'est pas entier, il existe une sous-variété N de dimension deux de classe C^k de \mathbb{R}^4 , tangente en 0 au plan ($u_2 = 0$), feuilletée par des orbites périodiques de (X) dont la période est une fonction C^k de la position qui vaut $\frac{2\pi}{\lambda_1}$ en 0.

Si (X) est sous forme normale à l'ordre k dans des coordonnées $\xi_1 = u_1 + \dots, \xi_2 = u_2 + \dots$, N est tangente à l'ordre k au plan ($\xi_2 = 0$) (resp. coïncide avec ce plan dans le cas analytique).

5.- L'approximation cubique (ou le problème des deux corps dans un repère tournant) (et l'existence des orbites périodiques primaires^(*))

Nous revenons dans ce paragraphe au problème de la lune; l'approximation linéaire étant dégénérée ($\lambda_1 = \lambda_2$), le Théorème de Liapunov ne peut être invoqué pour démontrer l'existence d'orbites périodiques de période proche de 2π . Quelques exemples tirés d'un article de Moser^(**) vont nous permettre de faire le point:

(i) Le premier exemple est peu encourageant: il montre que, même dans le cas d'un champ Hamiltonien, il peut n'exister aucune orbite périodique lorsque $\lambda_1 = \pm \lambda_2$.

$$\begin{cases} \frac{dv_1}{dt} = i \frac{\partial H}{\partial v_1} \\ \frac{dv_2}{dt} = i \frac{\partial H}{\partial v_2} \end{cases}, \quad \begin{aligned} H(v_1, v_2) &= |v_1|^2 - |v_2|^2 + 2(|v_1|^2 + |v_2|^2) \operatorname{Re}(v_1 v_2), \\ I &= H, \\ (\lambda_1 &= 1, \lambda_2 = -1). \end{aligned}$$

*expliquez
faute de un cas
de l'équation (la solution est
à l'ordre 3 !*

On vérifie que

$$\frac{d}{dt} \operatorname{Im}(v_1 v_2) = 4(\operatorname{Re}(v_1 v_2))^2 + (|v_1|^2 + |v_2|^2)^2;$$

la fonction $\operatorname{Im}(v_1 v_2)$ est donc croissante le long de chaque courbe intégrale autre que $(0,0)$ (fonction de Liapunov) ce qui exclut toute possibilité d'orbite périodique.

(*) encore appelées "modes fondamentaux"

(**) On a Theorem of Alan Weinstein, Communications in Pure and Applied Mathematics vol. XXIX 727-747 (1976) et vol. XXXI 529-530 (1978).

(ii) Le deuxième exemple est également un champ Hamiltonien et montre que, si $\lambda_1 = \pm j\lambda_2$ (j entier ≥ 2), il peut n'exister que la seule famille d'orbites périodiques assurée par le Théorème de Liapunov (périodes proches de $\frac{2\pi}{\lambda_1}$).

$$\begin{cases} \frac{dv_1}{dt} = i \frac{\partial H}{\partial v_1} \\ \frac{dv_2}{dt} = i \frac{\partial H}{\partial v_2} \end{cases}, \quad \begin{aligned} H(v_1, v_2) &= j|v_1|^2 - |v_2|^2 + 2\operatorname{Re}(v_1 v_2^j) \\ I &= H \\ (\lambda_1 &= 2, \lambda_2 = -1) \end{aligned}$$

On vérifie que

$$\frac{d}{dt} \operatorname{Im}(v_1 v_2^j) = |v_2|^{2j-2} (|v_1|^2 + |v_2|^2);$$

la fonction $\operatorname{Im}(v_1 v_2^j)$ est donc croissante le long de chaque courbe intégrale non située dans le plan ($v_2 = 0$), ce qui exclut toute autre orbite périodique que celles de la famille $v_1(t) = c_1 e^{ijt}$, $v_2(t) = 0$.

(iii) Le dernier exemple diffère en deux points importants des précédents: le champ n'est pas Hamiltonien, et les sous-variétés $I = C$ sont des sphères:

$$\begin{cases} \frac{du_1}{dt} = i j u_1 + \bar{u}_2 u_2^{j+1} \\ \frac{du_2}{dt} = i u_2 - \bar{u}_1 u_2^{j+1} \end{cases}, \quad \begin{aligned} I(u_1, u_2) &= |u_1|^2 + |u_2|^2, \\ \lambda_1 &= j, \lambda_2 = 1, \quad j \text{ entier } \geq 1 \end{aligned}$$

On vérifie que

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{u_1}{u_2^j} \right) = |u_2|^2 + j |u_1|^2;$$

Il n'y a donc pas d'autre orbite périodique que celles de la famille $u_1(t) = c_1 e^{ijt}$, $u_2(t) = 0$.

Il se trouve que ces exemples sont optimaux: dès 1950, Seifert^(*) avait démontré que toute perturbation assez petite (au sens C^0) du champ de Hopf sur S^3 possède au moins une orbite périodique. Plus récemment, Weinstein^(*) a prouvé que dans le cas d'un champ Hamiltonien (H de classe C^2 , $H(u_1, u_2) = \lambda_1 |u_1|^2 + \lambda_2 |u_2|^2 + \dots$) dont les hypersurfaces d'énergie constante sont, au voisinage de 0, difféomorphes à S^3 (λ_1 et $\lambda_2 > 0$), il existe toujours deux familles d'orbites périodiques de périodes respectivement voisines de $\frac{2\pi}{\lambda_1}$ et $\frac{2\pi}{\lambda_2}$ au voisinage de 0, et ceci quels que soient λ_1 et λ_2 positifs (par exemple $\lambda_1 = \lambda_2$). Ce résultat vaut en fait dans \mathbb{R}^{2n} , et Moser^(*) a montré dans le cas non Hamiltonien un résultat analogue qui généralise le Théorème de Seifert: en supposant que I , de classe C^2 , est de la forme $\mu_1 |u_1|^2 + \mu_2 |u_2|^2 + \dots$, μ_1 et $\mu_2 > 0$, et que le champ est de classe C^1 , on trouve au moins une famille d'orbites périodiques.

Contrairement au Théorème de Liapunov qui est doublement local (on travaille au voisinage d'une orbite périodique du champ linéaire, elle-même supposée assez proche de 0), les Théorèmes de Seifert, Weinstein, et Moser, participent à la fois du local et du global: globaux dans la sphère ($I = C$), ils sont néanmoins locaux dans le sens où C doit être choisi tel que cette sphère soit assez proche de 0. Des Théorèmes plus globaux ont été démontrés par Rabinowitz, Ekeland, Lasry, etc... par des méthodes variationnelles (voir un panorama et des références dans Berestycki, orbites périodiques des systèmes conservatifs, Séminaire Goulaouic, Meyer, Schwartz, école Polytechnique, exposé XXIV, 1982).

(*) H. Seifert, Closed integral curves in 3-space and isotropic 2-dimensional deformations, Proc. Amer. Math. Soc., 1, 287-302 (1950).

A. Weinstein, Normal modes for non-linear Hamiltonian systems, Inv. Math., 20, 47-57, (1973).

J. Moser, Periodic orbits near an equilibrium and a Theorem by Alan Weinstein, Comm. Pure and Applied Math., XXIX, 727-747 (1976).

Ignorant pour le moment ces théorèmes profonds, nous allons démontrer l'existence des orbites périodiques primaires dans le problème de la lune par la méthode purement locale qui nous a servi pour le Théorème de Liapunov: une orbite (périodique) donnée du champ de Hopf n'ayant aucune raison a priori de résister à une perturbation arbitraire de ce champ (perturber par exemple l'application de Poincaré locale, égale à l'identité, en une translation), c'est l'examen des termes d'ordre supérieur (trois, en l'occurrence) du développement de Taylor qui peut seul nous mener à la conclusion.

Tronqué à l'ordre trois en z, \bar{z}, w, \bar{w} , le champ de vecteurs (8) obtenu à la fin du paragraphe trois par régularisation devient

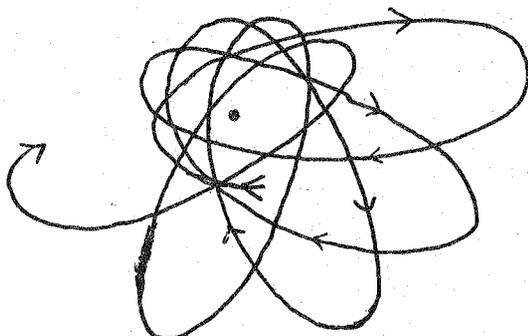
$$(8) \quad \begin{cases} \frac{dz}{dt} = \frac{\partial \hat{K}}{\partial \bar{w}} = w - 2i\varepsilon |z|^2 z, \\ \frac{dw}{dt} = -\frac{\partial \hat{K}}{\partial z} = -f^2(z, w)z - 2i\varepsilon |z|^2 w, \end{cases}$$

où $\hat{K} = f^2(z, w) |z|^2 + |w|^2 - \nu \varepsilon^2$ est la troncation à l'ordre quatre du Hamiltonien K (rappelons que $f^2(z, w) = 1 + 2i\varepsilon(\bar{z}w - z\bar{w})$).

Comme celle au premier ordre, cette troncation a elle aussi une interprétation très simple: il "suffit" d'annuler la masse μ du soleil pour passer de (6) à (8); que ceci ait un sens vient de ce qu'aussi gros soit-il, le soleil n'intervient que peu relativement à la terre lorsque la lune est très près de cette dernière. Le champ (8) s'interprète donc simplement comme la régularisation de Levi-Civita des équations du problème des deux corps (Terre, Lune) dans un repère tournant centré sur la Terre ($\omega = 1$; dans le cas général, remplacer $f^2(z, w)$ par $1 + 2i\omega\varepsilon(\bar{z}w - z\bar{w})$).

Cette interprétation rend évidente l'existence des orbites périodiques primaires, de période voisine de 2π , puisque les orbites Kepleriennes circulaires, directe et rétrograde (voir page 12), continuent à être périodiques dans le repère tournant. Les autres sont ou bien périodiques

ou bien quasi-périodiques (ellipses ayant un mouvement de précession) et vont manifestement habiter sur des tores "feuilletant" la sphère S^3 définie par ($\hat{K} = 0$): l'approximation au troisième ordre est encore complètement intégrable (voir Arnold M.M.M.C.).



(pour une figure plus précise, voir page 64).

Une intégrale définissant les tores en question est donnée par le moment cinétique

$$\frac{1}{2} \operatorname{Im}(\bar{x}y) = \frac{1}{i\epsilon} (\bar{z}w - z\bar{w}),$$

qu'on peut remplacer par

$$f^2(z,w) = 1 + 2i\epsilon (\bar{z}w - z\bar{w});$$

quant aux équations des deux familles d'orbites périodiques primaires, on les obtient par exemple en cherchant les singularités de l'intersection des deux hypersurfaces ($\hat{K} = \text{constante}$) et ($f^2 = \text{constante}$), c'est-

à-dire en résolvant les équations

$$\frac{\frac{\partial \hat{K}}{\partial z}}{\frac{\partial f^2}{\partial z}} = \frac{\frac{\partial \hat{K}}{\partial \bar{z}}}{\frac{\partial f^2}{\partial \bar{z}}} = \frac{\frac{\partial \hat{K}}{\partial w}}{\frac{\partial f^2}{\partial w}} = \frac{\frac{\partial \hat{K}}{\partial \bar{w}}}{\frac{\partial f^2}{\partial \bar{w}}} ;$$

on obtient ainsi la relation $w = \pm if(z,w)z$ qui, sur chaque sphère ($\hat{K} = \text{constante}$), définit deux courbes fermées parallèles tracées sur un tore ($|z| = \text{constante}$, $|w| = \text{constante}$).

Le changement de variables

$$\begin{cases} \xi_1 = w + if(z,w)z , \\ \xi_2 = \bar{w} + if(z,w)\bar{z} , \end{cases}$$

s'impose alors (c'est celui qu'utilise Conley; on remarquera qu'il est non canonique, i.e. qu'il ne préserve plus à homothétie près la forme symplectique standard, voir note au bas de la page 6);

de (8), le champ devient (après multiplication par $\frac{1}{f}$, c'est-à-dire changement de temps)

(9)
$$\begin{cases} \frac{d\xi_1}{dt} = i\xi_1 \left(1 - \frac{\varepsilon}{2\tilde{f}^3(|\xi_1|^2 - |\xi_2|^2)} |\xi_1 - \bar{\xi}_2|^2 \right) , \\ \frac{d\xi_2}{dt} = i\xi_2 \left(1 + \frac{\varepsilon}{2\tilde{f}^3(|\xi_1|^2 - |\xi_2|^2)} |\xi_1 - \bar{\xi}_2|^2 \right) , \end{cases}$$

où la fonction d'une variable réelle \tilde{f} est définie implicitement par

$$\tilde{f}^2(x) = 1 - \frac{\varepsilon}{\tilde{f}(x)} x , \quad \text{et vérifie donc}$$

$$\tilde{f}(x) = 1 - \frac{\varepsilon}{2} x + O(\varepsilon^2 x^2) .$$

Les orbites périodiques primaires s'écrivent maintenant très simplement:

$$\xi_1(t) = c_1 e^{i \left(1 - \frac{\varepsilon |c_1|^2}{2\tilde{f}^3(|c_1|^2)} \right) t}, \quad \xi_2(t) = 0, \quad \text{et}$$

$$\xi_1(t) = 0, \quad \xi_2(t) = c_2 e^{i \left(1 + \frac{\varepsilon |c_2|^2}{2\tilde{f}^3(|c_2|^2)} \right) t}.$$

$c_1 = c_2$
"
 $\sqrt{2\varepsilon}$

Plus généralement, $|c_1|^2$ et $|c_2|^2$ étant évidemment des intégrales premières du champ (9), les courbes intégrales sont de la forme

$$\xi_1(t) = r_1 e^{i\alpha_1(t)}, \quad \xi_2(t) = r_2 e^{i\alpha_2(t)},$$

où on peut supposer r_1 et r_2 réels positifs ou nuls; les arguments vérifient alors les équations

$$\begin{cases} \frac{d\alpha_1}{dt} = 1 - \frac{\varepsilon}{2\tilde{f}^3(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)} \left[\lambda_1^2 + \lambda_2^2 - 2\lambda_1\lambda_2 \cos(\alpha_1 + \alpha_2) \right], \\ \frac{d\alpha_2}{dt} = 1 + \frac{\varepsilon}{2\tilde{f}^3(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)} \left[\lambda_1^2 + \lambda_2^2 - 2\lambda_1\lambda_2 \cos(\alpha_1 + \alpha_2) \right], \end{cases}$$

qui, impliquant $\frac{d\alpha_1}{dt} + \frac{d\alpha_2}{dt} = 2$, s'intègrent explicitement en

$$\begin{cases} \alpha_1(t) = \alpha_1(0) + t - \frac{(\lambda_1^2 + \lambda_2^2)\varepsilon t}{2\tilde{f}^3(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)} + \frac{\lambda_1\lambda_2\varepsilon}{2\tilde{f}^3(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)} \left[\sin(\alpha_1(0) + \alpha_2(0) + 2t) - \sin(\alpha_1(0) + \alpha_2(0)) \right], \\ \alpha_2(t) = \alpha_2(0) + t + \frac{(\lambda_1^2 + \lambda_2^2)\varepsilon t}{2\tilde{f}^3(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)} - \frac{\lambda_1\lambda_2\varepsilon}{2\tilde{f}^3(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)} \left[\sin(\alpha_1(0) + \alpha_2(0) + 2t) - \sin(\alpha_1(0) + \alpha_2(0)) \right] \end{cases}$$

(rappelons que sur l'hypersurface ($\hat{K} = 0$), on a $r_1^2 + r_2^2 = 2V\varepsilon^2$).

Comme dans le paragraphe 2, l'anneau A défini dans la sphère ($\hat{K} = 0$)

par ($\text{Arg } \xi_1 + \text{Arg } \xi_2 = 0 \pmod{2\pi}$), est bordé par les

deux orbites périodiques primaires et son intérieur rencontre transversa-

lement toutes les autres courbes intégrales.

L'application de premier retour de Poincaré P_ε coïncide ici encore avec l'application "temps π ", puisque c'est au bout de ce temps que $\alpha_1(t) + \alpha_2(t) = \alpha_1(0) + \alpha_2(0) + 2t$ reprend, modulo 2π , la valeur $\alpha_1(0) + \alpha_2(0)$.

On peut choisir comme paramètres sur l'intérieur de A , d'une part $\theta = \text{Arg } \xi_1$ (c'est-à-dire α_1), d'autre part $r = r_1^2 - r_2^2$, qui varie entre $-2V\varepsilon^2$ et $+2V\varepsilon^2$; on constate que P_ε , définie a priori sur l'intérieur de A , se prolonge en un difféomorphisme de A lui-même, défini par

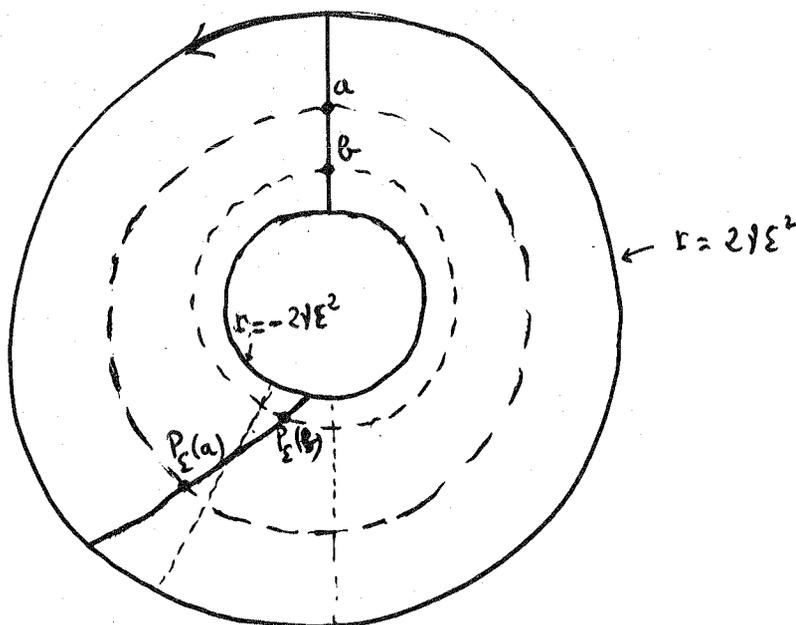
$$P_\varepsilon(\theta, r) = \left(\theta + \pi - \frac{\pi V \varepsilon^3}{\tilde{f}^3(r)}, r \right) = \left(\theta + \pi - \pi V \varepsilon^3 - \frac{3\pi V \varepsilon^4}{2} r + \varepsilon^5 r^2 g(\varepsilon, r), r \right).$$

La conservation des cercles ($r = \text{constante}$) reflète bien entendu celle des tores ($|\xi_1| = r_1, |\xi_2| = r_2$) dont ils sont les intersections avec A .

Comparant avec le paragraphe 2, nous constatons qu'une dégénérescence a été levée: au lieu d'être une rotation rigide d'angle π , l'application P_ε peut maintenant être considérée comme une famille de rotations du cercle, dont l'angle varie avec la coordonnée radiale r qui détermine le cercle.

Si ε est assez petit, cette variation est monotone;

on dit alors que P_ε est une "distortion monotone standard" de l'anneau, en anglais "standard monotone twist map", l'adjectif "standard" faisant référence à la conservation par P_ε de chaque cercle ($r = \text{constante}$).



Remarques:

1.- C'est le facteur $\frac{1}{f^2(r)}$ qui crée la distortion; nous verrons cependant que l'existence des orbites périodiques primaires n'en dépend pas (il suffira de savoir que $\frac{1}{f^2(r)} = 1 + O(\epsilon r)$).

2.- Dans le paragraphe 2, nous avons introduit

$$\varphi = \text{Arg } \xi_1 - \text{Arg } \xi_2 \text{ modulo } 2\pi$$

comme coordonnée, non pas sur A, mais sur son quotient \mathcal{A} par l'antipodie $(\xi_1, \xi_2) \mapsto (-\xi_1, -\xi_2)$ de la sphère S^3 ; \mathcal{A} est un anneau de section pour le flot sur $SO(3)$ quotient du flot de (9), dont l'application de premier retour $\mathcal{P}_\epsilon : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$, quotient de P_ϵ , s'écrit

$$\mathcal{P}_\epsilon(\varphi, r) = \left(\varphi - \frac{2\pi\nu\epsilon^3}{f^2(r)}, r \right) = \left(\varphi - 2\pi\nu\epsilon^3 - 3\pi\nu\epsilon^4 r + 2\epsilon^5 r^2 g(\epsilon, r), r \right).$$

L'interprétation des variables φ et $\chi = \text{Arg } \xi_1 + \text{Arg } \xi_2 \text{ mod. } 2\pi$ est la même que dans le repère fixe; un calcul identique à celui de la page 11 donne en effet

$$x = -\frac{1}{2\tilde{f}^2(r_1^2 - r_2^2)} e^{i\varphi} \left[(r_1^2 + r_2^2) \cos \chi - 2r_1 r_2 + i(r_1^2 - r_2^2) \sin \chi \right],$$

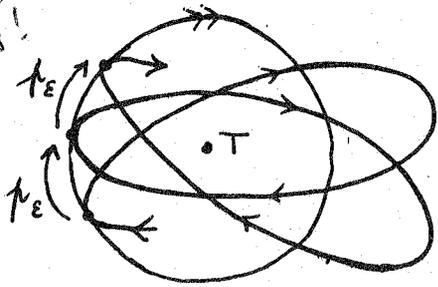
où $|\xi_1| = r_1, |\xi_2| = r_2$.

En particulier, l'anneau $\chi = 0 \text{ mod. } 2\pi$ correspond aux points de tangence de la trajectoire (dans le plan de x) avec le cercle de rayon

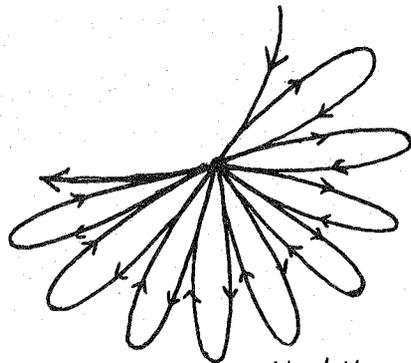
$$\frac{(\lambda_1 - \lambda_2)^2}{2\tilde{f}^2(\lambda_1^2 - \lambda_2^2)} = 2\sqrt{\epsilon^2} \left[1 - \sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{4\nu^2\epsilon^4}} \right]$$

qui en est une enveloppe (caustique), la composante angulaire p_ϵ de l'application $\mathcal{P}_\epsilon(\varphi, r) = (p_\epsilon(\varphi), r)$ s'interprétant comme la rotation sur ce cercle qui fait passer d'un point de tangence au suivant (voir figure), et coïncidant donc avec celle définie par Birkhoff dans son premier grand article sur le problème restreint des trois corps (The restricted problem of three bodies, Rendiconti Circolo Mat. Palermo, vol. 39, 265-334 (1915)).

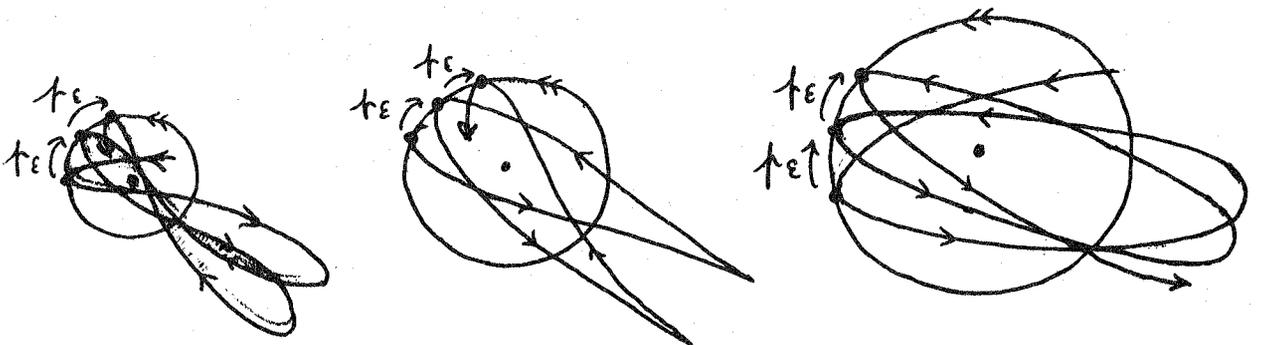
Point $\lambda = \pi(2\pi)$
 périodique et
 un effectif!



$\lambda < 0$, précession d'ellipses rétrogrades



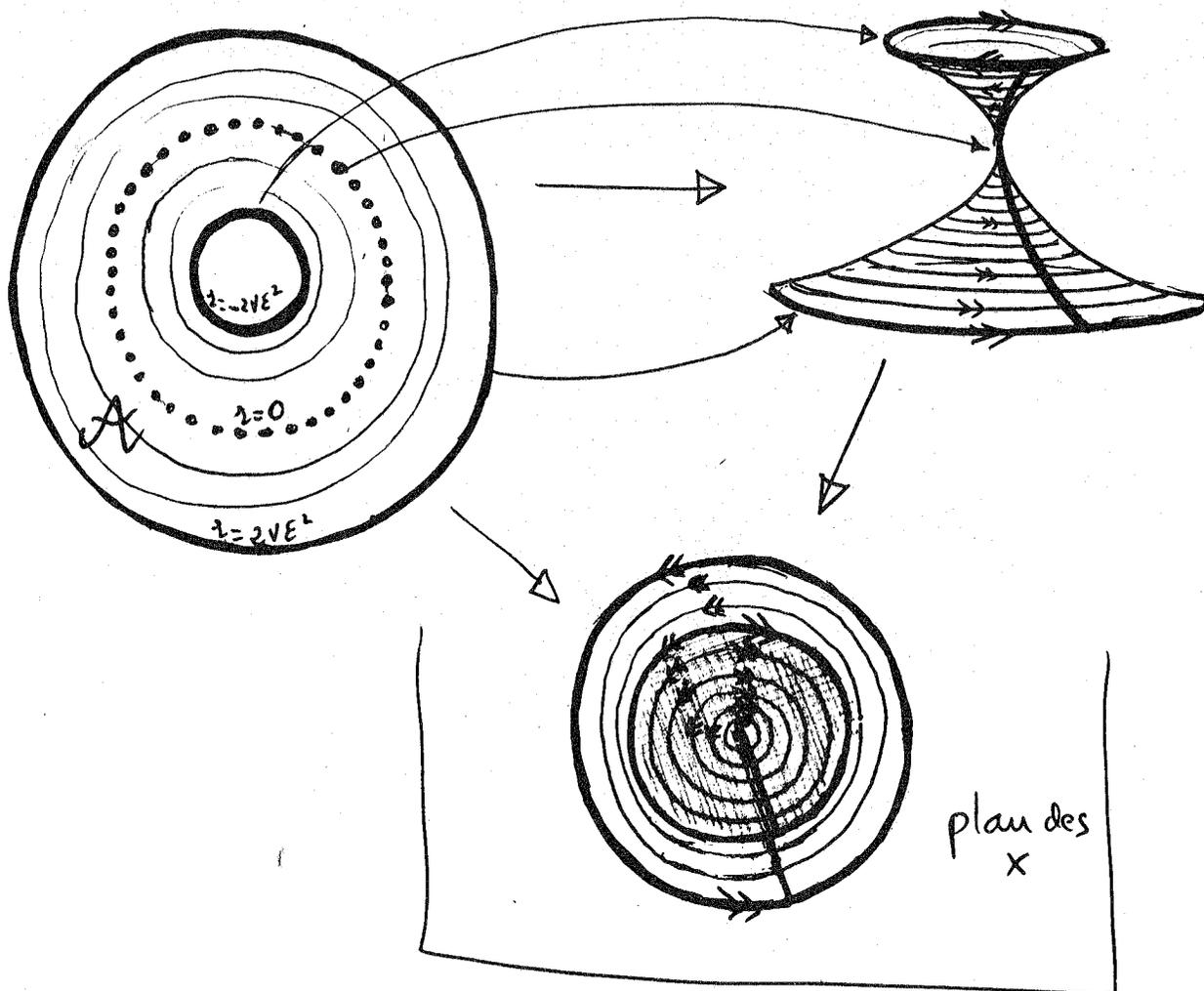
$\lambda = 0$ précession d'orbites de collision (cercle de rayon nul).



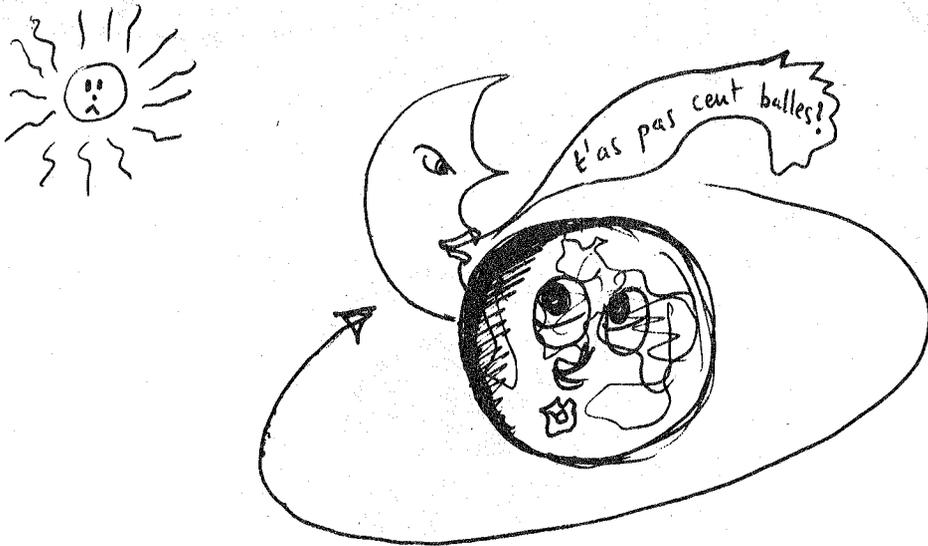
$\lambda > 0$, précession d'ellipses directes.

[L'énergie étant très négative, la vitesse de rotation sur l'ellipse est beaucoup plus grande que la vitesse de rotation des axes; la figure n'est pas à l'échelle!]

Chaque cercle ($r = \text{constante}$) de l'anneau \mathcal{A} correspond ainsi à un cercle (de rayon $2\sqrt{\varepsilon^2 \left[1 - \sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{4V^2\varepsilon^4}}\right]}$) dans le plan des x , que les trajectoires enveloppent dans le sens rétrograde ou direct suivant que r est négatif ou positif. Lorsque r est nul (orbites de collision) le cercle associé dans le plan des x se réduit à l'origine. Remarquons avec Birkhoff que ces cercles peuvent s'interpréter comme des orbites périodiques primaires, rétrogrades ou directes, correspondant à des valeurs de l'intégrale de Jacobi H comprises entre $-\frac{1}{\varepsilon^2}$ et $-\infty$, la valeur $-\infty$ correspondant à la coïncidence Terre-Lune. On arrive ainsi à la vision qu'a Birkhoff de l'anneau \mathcal{A} comme ramifié le long de ($r = 0$) au-dessus du plan de la variable x :



3.- On pourrait être tenté de croire à ce point que les Mathématiques sont contradictoires: dans le repère fixe, tous les mouvements elliptiques Kepleriens d'énergie fixée ont même période. Ils donnent donc lieu dans le repère tournant à des mouvements qui sont ou bien tous périodiques (période de rotation du repère et période du mouvement sur l'ellipse rationnellement dépendants), ou bien tous quasi-périodiques; on pourrait hâtivement en conclure que l'application P_ϵ (ou \mathcal{D}_ϵ) doit être conjuguée à une rotation rigide (i.e. la même pour tous les r): en effet, c'est seulement dans ce cas que toutes les orbites de P_ϵ (ou \mathcal{D}_ϵ) ont le même type (périodique ou quasi-périodique), l'existence d'une distortion impliquant au contraire la présence simultanée d'orbites périodiques et d'orbites quasi-périodiques. La contradiction disparaît dès qu'on remarque que fixer la valeur de l'intégrale de Jacobi ne revient pas à fixer celle de l'énergie dans le repère fixe: par exemple, les orbites circulaires directe et rétrograde ayant même intégrale de Jacobi ont des rayons différents, et donc des énergies différentes dans le repère fixe (voir figures et formules dans la remarque 2).



4.- Il est instructif de faire un "mauvais choix", par exemple

$$\text{Arg } \xi_1 = 0 \text{ modulo } 2\pi$$

de la surface de section: l'application de premier retour Q_ε est définie, dans les coordonnées $(\alpha = \text{Arg } \xi_2, r)$, par les équations implicites

$$\begin{cases} 2\pi = \left(1 - \frac{V\varepsilon^3}{\tilde{f}^3(r)}\right)T + \frac{V\varepsilon^3 \sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{4V^2\varepsilon^4}}}{2\tilde{f}^3(r)} \left[\sin(\alpha + 2T) - \sin \alpha \right], \\ Q_\varepsilon(\alpha, r) = \left(\alpha + \left(1 + \frac{V\varepsilon^3}{\tilde{f}^3(r)}\right)T - \frac{V\varepsilon^3 \sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{4V^2\varepsilon^4}}}{2\tilde{f}^3(r)} \left[\sin(\alpha + 2T) - \sin \alpha \right], r \right) \end{cases}$$

ou encore

$$\begin{aligned} Q_\varepsilon(\alpha, r) &= (\alpha + 2\tau, r), \\ \tau = T - 2\pi &= \frac{2\pi V\varepsilon^3}{\tilde{f}^3(r)} + \frac{V\varepsilon^3}{\tilde{f}(r)}\tau - \frac{V\varepsilon^3 \sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{4V^2\varepsilon^4}}}{2\tilde{f}^3(r)} \left[\sin(\alpha + 2\tau) - \sin \alpha \right], \end{aligned}$$

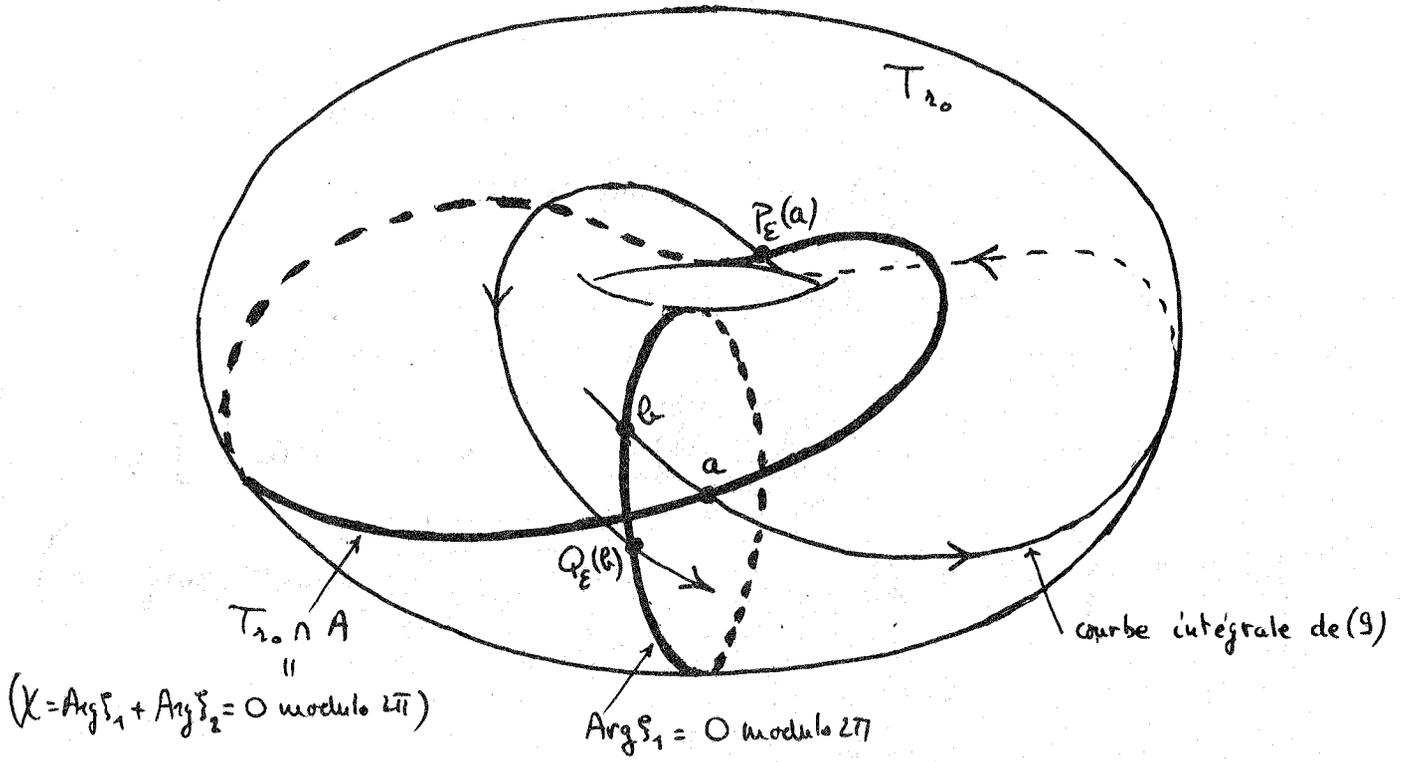
et donc

$$Q_\varepsilon(\alpha, r) = (f_{\varepsilon, 2}(\alpha), r),$$

où le difféomorphisme $f_{\varepsilon, 2}$ admet un développement limité en ε de la forme

$$f_{\varepsilon, 2}(\alpha) = \alpha + \frac{4\pi V\varepsilon^3}{\tilde{f}^3(r)} + \frac{4\pi V^2\varepsilon^6}{\tilde{f}^6(r)} - \frac{4\pi V^2\varepsilon^6 \sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{4V^2\varepsilon^4}}}{\tilde{f}^6(r)} \cos \alpha + O(\varepsilon^9).$$

Sur le tore T_{r_0} d'équations $(K = 0, r = r_0, \text{ i.e. } |\xi_1| = r_1, |\xi_2| = r_2)$, nous avons donc deux courbes de section:



Nous avons vu qu'il existe une coordonnée θ sur le cercle $T_{r_0} \cap A$ telle que la restriction à ce cercle de P_ϵ soit une rotation (d'angle $\pi - \pi\nu\epsilon^3 - \frac{3\pi\nu\epsilon^4}{2} + O(\epsilon^5)$).

Il n'est pas difficile d'en déduire qu'il existe une coordonnée β sur le cercle ($\text{Arg } \xi_1 = 0 \text{ modulo } 2\pi$) en termes de laquelle Q_ϵ devienne une rotation: que P_ϵ soit conjuguée à une rotation implique en effet l'existence sur le tore T_{r_0} de coordonnées dans lesquelles les courbes intégrales de la restriction de (9) à T_{r_0} soient des "droites" (images de droites de \mathbb{R}^2 par la projection canonique $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 = T_{r_0}$; voir S.Sternberg, Celestial Mechanics, Part II, Chapter III, Theorem 1.1, ou le cours de l'auteur à Hanoi déjà cité page 29; on peut également le montrer soi-même, ce n'est pas difficile!).

Le difféomorphisme du cercle $f_{\varepsilon, \lambda}$ est donc conjugué à une rotation, ce qui ne saute pas aux yeux sur la formule qui le définit!

On peut cependant remarquer, et ce sera utile dans la suite, que si f est un difféomorphisme du cercle de la forme

$$f(\alpha) = \alpha + a + b \cos \alpha + O(c),$$
$$c = o(|b|), \quad b = o(|a|), \quad a = o(1),$$

la conjugaison par le difféomorphisme

$$h(\alpha) = \alpha - \frac{b}{a} \sin \alpha$$

le transforme en

$$h \circ f \circ h^{-1}(\alpha') = \alpha' + a + O\left(\frac{b^2}{|a|} + |c| + |ba|\right)$$
$$= \alpha' + a + o(|b|).$$

Il ne faudrait pas en déduire que la dynamique de la famille à deux paramètres

$$f_{a,b}(\alpha) = \alpha + a + b \cos \alpha, \quad |b| < 1,$$

de difféomorphismes analytiques du cercle est facile à étudier; si on fixe b à une valeur non nulle, la famille à un paramètre obtenue présente toute la complexité d'une famille générale de difféomorphismes du cercle: les valeurs de a pour lesquelles $f_{a,b}$ est analytiquement conjugué à une rotation non périodique sont de mesure non nulle (Théorèmes d'Arnold et d'Herman) mais leur complémentaire contient un ouvert dense de valeurs de a telles que $f_{a,b}$ soit structurellement stable, i.e. ait un nombre fini d'orbites périodiques hyperboliques.

Sur ce dernier point, on pourra consulter les références suivantes:

V.I.Arnold, Chapitres supplémentaires de la théorie des équations différentielles, Chapitre III, § 11.K;

M.R.Herman, Sur la conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle à des rotations, Publications de l'I.H.E.S. n°49, 5-234, (1979);

M.R.Herman, Mesure de Lebesgue et nombre de rotation, Springer Lecture Notes n°597, 271-293, (1977);

et enfin le cours de l'auteur à Hanoi cité page 29.

Remark (from a letter to E. Zehnder).

Achsen-angle var. for rotating plane Kepler
pts after lin. WKB approximation:

$$X_1 = \frac{w + i'fz}{\sqrt{2f}} e^{-i \frac{\xi}{2f^2} (z\bar{w} + \bar{z}w)}$$

$$X_2 = \frac{\bar{w} + i'f\bar{z}}{\sqrt{2f}} e^{i \frac{\xi}{2f^2} (z\bar{w} + \bar{z}w)}$$

$$(f^2 = 1 + 2i\varepsilon(\bar{z}w - z\bar{w}))$$

Normal form in these variables:

$$|X_1|^2 + |X_2|^2 - \varepsilon(|X_1|^4 - |X_2|^4) - \nu \varepsilon^2$$

$$- \frac{\varepsilon^2}{2} \left[|X_1|^6 - |X_1|^4 |X_2|^2 - |X_2|^4 |X_1|^2 + |X_2|^6 \right]$$

$$- \frac{\mu \varepsilon^2}{8} \left[\begin{aligned} &2|X_1|^6 + 6|X_1|^4 |X_2|^2 + 6|X_1|^2 |X_2|^4 + 2|X_2|^6 \\ &+ 18(|X_1|^2 + |X_2|^2)(X_1^\nu \bar{X}_2^2 + \bar{X}_1^2 X_2^\nu) \\ &+ 12(|X_1|^2 \bar{X}_1^2 X_2^2 + |X_2|^2 X_1^\nu \bar{X}_2^2 + |X_1|^2 X_1^\nu \bar{X}_2^2 + |X_1|^2 \bar{X}_1^2 X_2^2) \end{aligned} \right]$$

Good luck.

Existence des orbites périodiques primaires:

Dans les coordonnées $\xi_1 = w + if(z,w)z$, $\xi_2 = \bar{w} + if(z,w)\bar{z}$, le champ de vecteurs (6) (non tronqué!) s'écrit

$$(10) \begin{cases} \frac{d\xi_1}{dt} = i\xi_1 \left(1 - \frac{\varepsilon}{2} |\xi_1 - \bar{\xi}_2|^2 \right) + \varepsilon^2 O_5(\xi) , \\ \frac{d\xi_2}{dt} = i\xi_2 \left(1 + \frac{\varepsilon}{2} |\xi_1 - \bar{\xi}_2|^2 \right) + \varepsilon^2 O_5(\xi) , \end{cases}$$

où les $O_5(\xi)$ désignent des termes d'ordre au moins 5 en $\xi_1, \bar{\xi}_1, \xi_2, \bar{\xi}_2$.

Cette approximation suffit pour montrer l'existence de deux familles d'orbites périodiques primaires, de périodes voisines de 2π , approchant les orbites circulaires directes et rétrogrades obtenues en oubliant le soleil.

Nous montrons d'abord cette existence dans le cadre C^k , $k \geq 5$, par la méthode très simple qui nous a servi dans le Théorème de Liapunov; nous expliquons ensuite la structure de la preuve de Conley dans le cas analytique, laissant au lecteur le soin de démontrer la convergence par une méthode analogue à celle que nous avons exposée dans le paragraphe 4. Enfin, nous faisons allusion à une preuve donnée par Birkhoff, qui utilise la symétrie des équations.

La théorie des formes normales fournit de nouvelles coordonnées (encore notées ξ_1, ξ_2) dans lesquelles le champ s'écrit de la même manière à la suppression près des termes/résonnants d'ordre trois, c'est-à-dire

non

$$\begin{cases} \frac{d\xi_1}{dt} = i\xi_1 \left(1 - \frac{\varepsilon}{2} (|\xi_1|^2 + |\xi_2|^2) \right) + \varepsilon^2 \varphi_1(\xi_1, \xi_2), \\ \frac{d\xi_2}{dt} = i\xi_2 \left(1 + \frac{\varepsilon}{2} (|\xi_1|^2 + |\xi_2|^2) \right) + \varepsilon^2 \varphi_2(\xi_1, \xi_2), \end{cases}$$

où φ_1 et φ_2 sont des fonctions analytiques d'ordre ≥ 5 en $\xi_1, \bar{\xi}_1, \xi_2, \bar{\xi}_2$ (il suffirait en fait de les supposer C^4 et nulles à l'ordre 4 en $\xi_1 = \xi_2 = 0$).

La solution $\xi_1(t), \xi_2(t)$ au temps t , issue de $\xi_1(0) = \xi_1, \xi_2(0) = \xi_2$ s'écrit alors

$$\begin{cases} \xi_1(t) = e^{it} \left[\xi_1 \left(1 - i \frac{\varepsilon}{2} (|\xi_1|^2 + |\xi_2|^2) t \right) + \varepsilon^2 \alpha_1(\xi_1, \xi_2, t) \right], \\ \xi_2(t) = e^{it} \left[\xi_2 \left(1 + i \frac{\varepsilon}{2} (|\xi_1|^2 + |\xi_2|^2) t \right) + \varepsilon^2 \alpha_2(\xi_1, \xi_2, t) \right], \end{cases}$$

où α_1 et α_2 sont d'ordre ≥ 5 en $\xi_1, \bar{\xi}_1, \xi_2, \bar{\xi}_2$, uniformément en t variant dans un intervalle compact.

Dans le domaine $|\xi_2| \leq |\xi_1|$, les équations de N_1 , ensemble putatif des orbites périodiques voisines du plan ($\xi_2 = 0$) et de périodes proches de 2π , prennent, après remplacement de ξ_1 par z_1 et ξ_2 par $z_1 z_2$, la forme

$$\begin{cases} -2\pi + T + A \lambda \left[1 - i \frac{\varepsilon}{2} |z_1|^2 (1 + |z_2|^2) T + \varepsilon^2 \frac{\alpha_1(z_1, z_1 z_2, T)}{z_1} \right] = 0, \\ \left[e^{iT} (1 + i \frac{\varepsilon}{2} |z_1|^2 (1 + |z_2|^2) T) - 1 \right] z_2 + \varepsilon^2 e^{iT} \frac{\alpha_2(z_1, z_1 z_2, T)}{z_1} = 0 \end{cases}$$

La première équation détermine T comme fonction C^3 de $z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2$,

$$T = 2\pi + \pi \varepsilon |z_1|^2 (1 + |z_2|^2) + o_3 ,$$

§ 03

où o_3 désigne une fonction nulle à l'ordre 3 le long de $(z_1 = 0)$.

La deuxième devient ainsi

$$\left[2i\pi \varepsilon |z_1|^2 (1 + |z_2|^2) + o_3 \right] z_2 + o_3 ,$$

c'est-à-dire, après division par $|z_1|^2$,

$$z_2 + o_1 = 0,$$

où o_1 est une fonction C^1 nulle ainsi que ses dérivées premières le long de $(z_1 = 0)$.

N_1 est donc une sous-variété C^1 , tangente au plan $(z_2 = 0)$ dans les coordonnées z_1, z_2 . On en déduit comme pour le Théorème de Liapunov que, dans l'espace $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2$, N_1 est une sous-variété C^2 , tangente à l'ordre deux au plan $(\mathfrak{F}_2 = 0)$.

Bien entendu, la même démonstration marche en C^k à condition de pousser jusqu'à l'ordre k les formes normales (remarquer que dans les termes résonnants on a toujours $z_1 |z_1|^2$ en facteur).

Ainsi, nous avons montré l'existence, pour les valeurs assez négatives de l'intégrale de Jacobi, de deux familles d'orbites périodiques primaires; dans le plan des x, c'est-à-dire dans le repère tournant, ces orbites correspondent à des mouvements approximativement circulaires de la lune autour de la terre, dans le sens direct ou rétrograde.

On notera que ces familles ne coïncident pas avec les familles N_1, N_2 d'orbites périodiques primaires du champ (6) correspondant à une valeur fixée de ξ : elles ont simplement en commun avec ces dernières les orbites dont la constante de Jacobi vaut $-\frac{1}{\xi^2}$.

Analyticité de N_1 : Nous reprenons la démarche suivie lors de la démonstration du Théorème de Liapunov en analytique: supposant tout d'abord que l'opération de mise sous forme normale peut être faite dans le monde des séries convergentes, nous en déduisons la forme a priori sous laquelle chercher les orbites périodiques, expliquant ainsi la structure de la preuve que donne Conley:

Notons

$$(\xi_1, \xi_2) \mapsto (\zeta_1 = \xi_1 + \dots, \zeta_2 = \xi_2 + \dots)$$

un changement de coordonnées transformant le champ (10) en une forme normale

$$\begin{cases} \frac{d\zeta_1}{dt} = i\zeta_1 \left(1 - \frac{\varepsilon}{2} (|\zeta_1|^2 + |\zeta_2|^2) \right) + \varepsilon^2 \zeta_1 \varphi_1(|\zeta_1|^2, |\zeta_2|^2, \zeta_1 \bar{\zeta}_2) + \varepsilon^2 \zeta_2 \psi_1(|\zeta_1|^2, |\zeta_2|^2, \zeta_1 \bar{\zeta}_2) \\ \frac{d\zeta_2}{dt} = i\zeta_2 \left(1 + \frac{\varepsilon}{2} (|\zeta_1|^2 + |\zeta_2|^2) \right) + \varepsilon^2 \zeta_1 \varphi_2(|\zeta_1|^2, |\zeta_2|^2, \zeta_1 \bar{\zeta}_2) + \varepsilon^2 \zeta_2 \psi_2(|\zeta_1|^2, |\zeta_2|^2, \zeta_1 \bar{\zeta}_2) \end{cases}$$

où $\varphi_i(x, y, z)$, $\psi_i(x, y, z)$, $i = 1, 2$, sont des séries en x, y, z, \bar{z} .

Les courbes intégrales prennent alors la forme suivante:

$$\begin{cases} \zeta_1(t) = e^{it} \left[\zeta_1 - i \frac{\varepsilon}{2} t \zeta_1 (|\zeta_1|^2 + |\zeta_2|^2) + \varepsilon^2 \zeta_1 \alpha_1(|\zeta_1|^2, |\zeta_2|^2, \zeta_1 \bar{\zeta}_2, t) + \varepsilon^2 \zeta_2 \beta_1(|\zeta_1|^2, |\zeta_2|^2, \zeta_1 \bar{\zeta}_2, t) \right], \\ \zeta_2(t) = e^{it} \left[\zeta_2 + i \frac{\varepsilon}{2} t \zeta_2 (|\zeta_1|^2 + |\zeta_2|^2) + \varepsilon^2 \zeta_1 \alpha_2(|\zeta_1|^2, |\zeta_2|^2, \zeta_1 \bar{\zeta}_2, t) + \varepsilon^2 \zeta_2 \beta_2(|\zeta_1|^2, |\zeta_2|^2, \zeta_1 \bar{\zeta}_2, t) \right]. \end{cases}$$

A la différence du cas où $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$ n'est pas entier, les plans $\zeta_1 = 0$ et $\zeta_2 = 0$ n'ont maintenant aucune raison d'être invariants. Dans les coordonnées z_1, z_2 définies par $\zeta_1 = z_1$, $\zeta_2 = z_1 z_2$, les équations de N_1 sont de la forme

$$\begin{cases} -2\pi + T + A \log \left[1 - i \frac{\varepsilon}{2} T |z_1|^2 (1 + |z_2|^2) + \varepsilon^2 \alpha_1(|z_1|^2, |z_1|^2 |z_2|^2, |z_1|^2 \bar{z}_2, T) + \varepsilon^2 z_2 \beta_1(\dots) \right], \\ \left[e^{iT} \left(1 + i \frac{\varepsilon}{2} T |z_1|^2 (1 + |z_2|^2) + \varepsilon^2 \beta_2(|z_1|^2, |z_1|^2 |z_2|^2, |z_1|^2 \bar{z}_2, T) \right) - 1 \right] z_2 + \varepsilon^2 e^{iT} \alpha_2(\dots) = 0 \end{cases}$$

d'où on déduit sans peine que N_1 est définie par une équation

$$z_2 = \gamma(|z_1|^2),$$

c'est-à-dire

$$\zeta_2 = \gamma(|\zeta_1|^2)\zeta_1.$$

Si on choisit ζ_1 comme paramètre sur N_1 , la restriction du champ à N_1 devient

$$\frac{d\zeta_1}{dt} = \alpha(|\zeta_1|^2)\zeta_1,$$

où $\bar{\alpha} = -\alpha$ puisque toutes les orbites sont périodiques sur N_1 .

Revenant à la réalité, nous déduisons de ce qui précède l'existence et l'unicité de séries formelles

$$\alpha(x), \gamma(x), \zeta(t), \xi_1(\zeta_1, \bar{\zeta}_1, \zeta_2, \bar{\zeta}_2), \xi_2(\zeta_1, \bar{\zeta}_1, \zeta_2, \bar{\zeta}_2)$$

telles que

(i) $\frac{d\zeta}{dt} = \alpha(|\zeta|^2)\zeta, \alpha(0) = i,$

(ii) $\xi_1(\zeta_1, \bar{\zeta}_1, \zeta_2, \bar{\zeta}_2) = \zeta_1 +$ série d'ordre ≥ 2 sans terme de la forme $\zeta_i^p(|\zeta_1|^2, |\zeta_2|^2, \zeta_1 \bar{\zeta}_2, \bar{\zeta}_1 \zeta_2), i = 1, 2,$

$\xi_2(\zeta_1, \bar{\zeta}_1, \zeta_2, \bar{\zeta}_2) = \zeta_2 +$ série tatati tatata ...

(iii) Les séries formelles en t

$\xi_i(t) = \xi_i(\zeta(t), \bar{\zeta}(t), \gamma(|\zeta(t)|^2)\zeta(t), \bar{\gamma}(|\zeta(t)|^2)\bar{\zeta}(t)), i = 1, 2,$
vérifient formellement l'équation (10).

Un raisonnement analogue à celui des pages 46-47 montre qu'on a forcément

$$\bar{\alpha} = -\alpha.$$

On en déduit le Lemme suivant, à comparer à celui énoncé page 48 :

Lemme. - Il existe cinq séries formelles uniquement déterminées

$$\alpha(x), \delta(x), \gamma(t), \xi_1(\gamma, \bar{\gamma}), \xi_2(\gamma, \bar{\gamma}),$$

qui vérifient

$$(i) \frac{d\gamma}{dt} = \alpha(|\gamma|^2)\gamma, \quad \alpha(0) = i, \quad \bar{\alpha} = -\alpha,$$

(ii) $\xi_1(\gamma, \bar{\gamma}) = \gamma +$ série d'ordre ≥ 2 à coefficients polynomes en deux variables $\gamma, \bar{\gamma}$ sans terme en $\gamma(\bar{\gamma})^k$,

$$\xi_2(\gamma, \bar{\gamma}) = \gamma\bar{\gamma} + \text{série tralali tralala} \dots$$

(iii) Les séries formelles en t obtenues en remplaçant dans $\xi_1(\gamma, \bar{\gamma})$ et $\xi_2(\gamma, \bar{\gamma})$ les variables $\gamma, \bar{\gamma}$ par $\gamma(t), \bar{\gamma}(t)$, et les paramètres $\gamma, \bar{\gamma}$ par $\gamma(|\gamma(t)|^2), \bar{\gamma}(|\gamma(t)|^2)$, vérifient formellement l'équation (10).

Si maintenant on cherche à déterminer par récurrence les coefficients de ces diverses séries, on tombe naturellement sur la formulation de Conley: considérant γ et $\bar{\gamma}$ comme paramètres, on détermine des séries formelles

$$\xi_1(\gamma, \bar{\gamma}) = \gamma + \dots, \quad \xi_2(\gamma, \bar{\gamma}) = \gamma\bar{\gamma} + \dots, \quad \alpha(|\gamma|^2) = i + \dots, \quad \beta(|\gamma|^2),$$

à coefficients polynomes en $\gamma, \bar{\gamma}$, telles que (comparer à la page 49) :

$$(10 \text{ bis}) \left\{ \begin{aligned} \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial \xi} \xi - \frac{\partial \xi_1}{\partial \bar{\xi}} \bar{\xi} \right) \alpha &= i \xi_1 \left(1 - \frac{\xi}{2} |\xi_1 - \bar{\xi}_2|^2 \right) + \varepsilon^2 O_5(\xi), \\ \beta \xi + \left(\frac{\partial \xi_2}{\partial \xi} \xi - \frac{\partial \xi_2}{\partial \bar{\xi}} \bar{\xi} \right) \alpha &= i \xi_2 \left(1 + \frac{\xi}{2} |\xi_1 - \bar{\xi}_2|^2 \right) + \varepsilon^2 O_5(\xi); \end{aligned} \right.$$

Le Théorème des fonctions implicites fournit alors $\gamma = \gamma(|\xi|^2)$ à partir de l'équation $\beta = 0$.

La détermination par récurrence des coefficients se passe exactement comme à la page 50; en particulier, ceux de α et β sont déterminés à l'ordre r par la considération des termes en $\xi(\bar{\xi})^r$ respectivement dans la première et la deuxième équation, on trouve

$$\left\{ \begin{aligned} \xi_1 &= \xi + \frac{\xi}{4} \gamma \xi^2 - \frac{\xi}{4} \bar{\gamma} \xi \bar{\xi}^2 + \varepsilon^2 O_4(\xi) O_2(\gamma) + \varepsilon^2 O_5(\xi), \\ \xi_2 &= \gamma \xi - \frac{\xi}{4} \gamma^2 \xi^2 + \frac{\xi}{4} \gamma \bar{\gamma} \xi \bar{\xi}^2 + \varepsilon^2 O_4(\xi) O_2(\gamma) + \varepsilon^2 O_5(\xi), \\ \alpha &= i - i \frac{\xi}{2} (1 + \gamma \bar{\gamma}) |\xi|^2 + \varepsilon^2 O_2(|\xi|^2), \\ \beta &= i \varepsilon \gamma (1 + \gamma \bar{\gamma}) |\xi|^2 + \varepsilon^2 O_2(|\xi|^2); \end{aligned} \right.$$

de la dernière équation on déduit $\gamma = \varepsilon |\xi|^2 \delta(|\xi|^2)$ et donc

$$\left\{ \begin{aligned} \xi_1 &= \xi + \varepsilon^2 O_5(\xi), \\ \xi_2 &= \varepsilon \xi |\xi|^2 \delta(|\xi|^2) + \varepsilon^2 O_5(\xi), \\ \alpha &= i \left(1 - \frac{\xi}{2} |\xi|^2 \right) + \varepsilon^2 O_2(|\xi|^2). \end{aligned} \right.$$

Que le paramétrage soit de cette forme peut se vérifier directement en invoquant l'unicité de N_1 et en remarquant qu'un tel choix de ξ_1, ξ_2, α , est solution au 5^{ème} ordre près en \mathcal{Y} des équations (10bis) avec $\beta = 0$. Cela vient de ce que, de même qu'au premier ordre on a $\frac{\partial \xi_1}{\partial \mathcal{Y}} \mathcal{Y} - \frac{\partial \xi_1}{\partial \bar{\mathcal{Y}}} \bar{\mathcal{Y}} = \xi_1$, on a au troisième ordre $\frac{\partial \xi_1}{\partial \mathcal{Y}} \mathcal{Y} - \frac{\partial \xi_1}{\partial \bar{\mathcal{Y}}} \bar{\mathcal{Y}} = \xi_1$ (écoutez la résonance!).

Quant à la convergence des diverses séries, elle se montre par une méthode de séries majorantes strictement analogue à celle que nous avons utilisée pour le Théorème de Liapunov.

Les symétries des équations et la méthode de prolongement de Birkhoff

Le Hamiltonien $H(x,y)$ écrit page 22 vérifie

$$H(\bar{x}, -\bar{y}) = H(x, y).$$

Les équations (5) sont donc invariantes par la transformation

$$(x, y, t) \longmapsto (\bar{x}, -\bar{y}, -t).$$

Dans les variables (z, w) de Levi-Civita, ceci se traduit par l'invariance des équations (6) sous la transformation

$$(z, w, t) \longmapsto (-\bar{z}, -\bar{w}, -t).$$

Bien entendu, le passage de $SO(3)$ à son revêtement à deux feuillets S^3 porte avec lui l'invariance de ces mêmes équations sous la transformation

$$(z, w, t) \longleftrightarrow (-z, -w, t).$$

En définitive, les équations (10) (variables ξ_1, ξ_2) sont invariantes sous les transformations

$$(\xi_1, \xi_2, t) \longleftrightarrow (-\xi_1, -\xi_2, t),$$

$$(\xi_1, \xi_2, t) \longleftrightarrow (-\xi_1, -\xi_2, -t).$$

De l'unicité des orbites périodiques primaires directe et rétrograde d'intégrale de Jacobi fixée, on déduit que, dans le plan des x , chacune est invariante par remplacement de x par \bar{x} , c'est-à-dire symétrique par rapport à l'axe Terre-Soleil. Prenant pour modèle le mémoire de 1915 de Birkhoff sur le problème restreint des trois corps, nous donnons maintenant une démonstration de leur existence basée sur cette propriété de symétrie et plus précisément sur la conséquence suivante: l'intersection des orbites périodiques primaires avec l'axe Terre-Soleil se fait à angle droit dans le repère tournant (et donc aussi dans le repère fixe).

Considérons d'abord le champ (9) (problème des deux corps dans un repère tournant): les orbites issues d'un point de l'axe Terre-Soleil opposé au Soleil (lequel est en l'occurrence à l'infini) avec une vitesse orthogonale à cet axe forment deux familles à un paramètre (u ou v liés par la relation $u + v = 4v\xi^2$ si l'intégrale de Jacobi est fixée: $|\beta_1|^u + |\beta_2|^v - 2v\xi^2 = 0$) définies par les conditions initiales suivantes (les signes $+$ et $-$ sont respectivement associés aux orbites directes et rétrogrades):

$$\xi_1(0) - \bar{\xi}_2(0) = i\sqrt{u}, \quad \xi_1(0) + \bar{\xi}_2(0) = \pm i\sqrt{v},$$

$$u, v > 0, \quad u + v = 4v\xi^2,$$

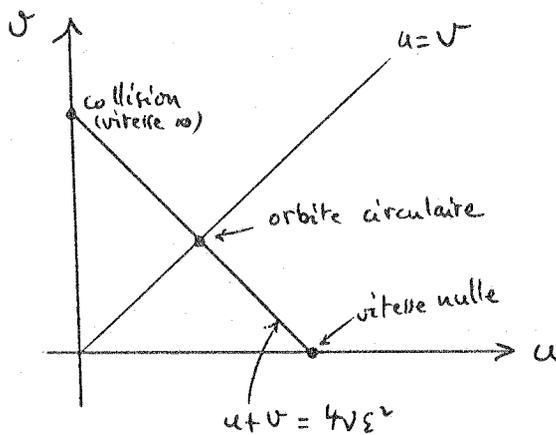
c'est-à-dire

$$\xi_1(0) = \frac{i}{2}(\sqrt{u} \pm \sqrt{v}) \quad , \quad \xi_2(0) = \frac{i}{2}(\sqrt{u} \mp \sqrt{v}) \quad ,$$

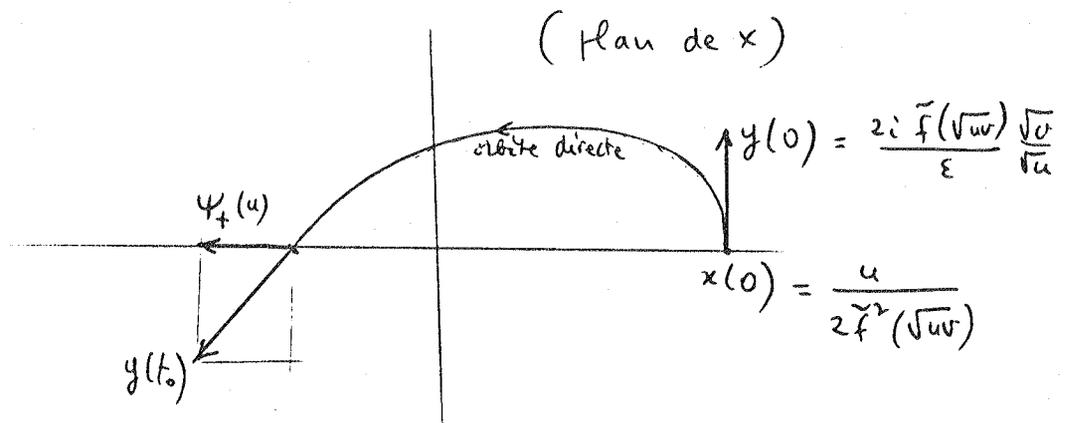
ou encore

$$x(0) = \frac{u}{2\tilde{f}^2(\pm\sqrt{uv})} \quad , \quad y(0) = \pm \frac{2i\tilde{f}(\pm\sqrt{uv})}{\varepsilon} \frac{\sqrt{v}}{\sqrt{u}} \quad .$$

Les orbites périodiques primaires (orbites circulaires) sont obtenues lorsque $u = v = 2V\varepsilon^2$.



Notons $\Psi_{\pm}(u) = \text{Re}(y(t_0))$, où t_0 est le premier temps positif tel que $x(t_0)$ soit réel négatif. Les orbites périodiques primaires sont caractérisées par la condition $\Psi_{\pm}(u) = 0$ (voir la figure ci-dessous).



Le passage des équations (9) aux équations (10) étant une petite perturbation (termes $\mu \varepsilon^2 O(|\xi_1 + \xi_2|^5)$), il suffit de montrer que, dans le cas de (9), l'équation $\Psi_{\pm}(u) = 0$ se résoud par le Théorème des fonctions implicites, c'est-à-dire

$$\frac{d\Psi_{\pm}}{du}(2\nu\varepsilon^2) \neq 0.$$

Mais

$$\begin{aligned} \Psi_{\pm}(u) &= \operatorname{Re} \left[-\frac{2i}{\varepsilon} \tilde{f}(|\xi_1(t_0)|^2 - |\xi_2(t_0)|^2) \frac{\xi_1(t_0) + \bar{\xi}_2(t_0)}{\bar{\xi}_1(t_0) - \xi_2(t_0)} \right] \\ &= \frac{2}{\varepsilon} \frac{\tilde{f}(|\xi_1(t_0)|^2 - |\xi_2(t_0)|^2)}{\bar{\xi}_1(t_0) - \xi_2(t_0)} \operatorname{Im}(\xi_1(t_0) + \bar{\xi}_2(t_0)) \\ &= -\frac{4}{\varepsilon} \frac{\tilde{f}(|\xi_1(t_0)|^2 - |\xi_2(t_0)|^2)}{\bar{\xi}_1(t_0) - \xi_2(t_0)} \operatorname{Im}(\xi_2(t_0)) \end{aligned}$$

puisque, $x(t_0) = -\frac{(\xi_1(t_0) - \bar{\xi}_2(t_0))^2}{2\tilde{f}^2(|\xi_1(t_0)|^2 - |\xi_2(t_0)|^2)}$ étant réel négatif,

$$\bar{\xi}_1(t_0) - \xi_2(t_0) = \bar{\xi}_1(t_0) - \xi_2(t_0) \text{ est réel.}$$

Considérant par exemple les orbites directes, on voit que $\xi_2(t_0) = 0$ lorsque $u = \nu = 2\nu\varepsilon^2$, et donc

$$\frac{d\Psi_{+}}{du}(2\nu\varepsilon^2) = \frac{4\tilde{f}(2\nu\varepsilon^2)}{\varepsilon\sqrt{2\nu\varepsilon^2}} \frac{d}{du} \left(\operatorname{Im} \xi_2(t_0) \right) \Big|_{u=2\nu\varepsilon^2}.$$

Notons $\xi_2(t) = r_2 e^{i\alpha_2(t)}$.

Si $r_2 \neq 0$, $\alpha_2(t)$ peut être défini par la formule de la page 61 (données initiales $\xi_1(0) = r_1 e^{i\alpha_1(0)}$, $\xi_2(0) = r_2 e^{i\alpha_2(0)}$):

$$\alpha_2(t) = \alpha_2(0) + t + \frac{(r_1^2 + r_2^2) \varepsilon t}{2f^3(r_1^2 - r_2^2)} - \frac{r_1 r_2 \varepsilon}{2f^3(r_1^2 - r_2^2)} \left[\sin(\alpha_1(0) + \alpha_2(0) + 2t) - \sin(\alpha_1(0) + \alpha_2(0)) \right]$$

Pour la famille à un paramètre que nous étudions, on peut choisir

$$r_1 = \frac{1}{2}(\sqrt{u} + \sqrt{v}) \quad , \quad r_2 = \frac{1}{2}(\sqrt{u} - \sqrt{v}) \quad ,$$

$$\alpha_1(0) = \frac{\pi}{2} \quad , \quad \alpha_2(0) = \frac{\pi}{2} \quad (\text{et ce même si } u = v).$$

Puisque $r_2 = 0$ pour $u = 2v\varepsilon^2$, on obtient

$$\frac{d}{du} (\text{Im } \xi_2(t_0)) \Big|_{u=2v\varepsilon^2} = \frac{dr_2}{du} \times \sin \alpha_2(t_0) \Big|_{u=2v\varepsilon^2}$$

$$= \left[\frac{1}{2} \frac{d}{du} (\sqrt{u} - \sqrt{4v\varepsilon^2 - u}) \right] \cdot \sin \alpha_2(t_0) \Big|_{u=2v\varepsilon^2}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2v\varepsilon^2}} \sin \alpha_2(t_0) \Big|_{u=2v\varepsilon^2} .$$

Enfin, puisque $r_1 = \sqrt{2v\varepsilon^2}$ lorsque $u = 2v\varepsilon^2$,

$$\alpha_2(t_0) = \frac{\pi}{2} + t_0 + \frac{2\nu\varepsilon^3 t_0}{2\tilde{f}^3(2\nu\varepsilon^2)}, \quad \text{et de même}$$

$$\pi = \alpha_1(t_0) = \frac{\pi}{2} + t_0 - \frac{2\nu\varepsilon^3 t_0}{2\tilde{f}^3(2\nu\varepsilon^2)}; \quad \text{on en déduit}$$

$$\alpha_2(t_0) = \pi + \frac{2\nu\varepsilon^3 t_0}{\tilde{f}^3(2\nu\varepsilon^2)}.$$

En particulier, $\sin \alpha_2(t_0)$ ne s'annule pas pour $u = 2\nu\varepsilon^2$ tant que ε est assez petit, ce qui termine la démonstration.

6.- Notre problème de la lune réduit à l'étude d'une distortion monotone de l'anneau

Alors que l'approximation au troisième ordre suffit pour démontrer l'existence des orbites périodiques primaires, nous avons besoin pour ce qui suit de préciser les équations (10). L'expression exacte de ces équations s'obtient sans peine:

$$(11) \quad \begin{cases} \frac{d\xi_1}{dt} = i\xi_1 \left(1 - \frac{\varepsilon |\xi_1 - \bar{\xi}_2|^2}{2\tilde{f}^3} \right) + \frac{\mu \varepsilon^2}{\tilde{f}} H_1(\xi_1, \xi_2), \\ \frac{d\xi_2}{dt} = i\xi_2 \left(1 + \frac{\varepsilon |\xi_1 - \bar{\xi}_2|^2}{2\tilde{f}^3} \right) + \frac{\mu \varepsilon^2}{\tilde{f}} H_2(\xi_1, \xi_2), \end{cases}$$

où $\tilde{f} = \tilde{f}(|\xi_1|^2 - |\xi_2|^2)$ est définie dans la formule (9), et

$$\begin{cases} H_1(\xi_1, \xi_2) = \frac{\partial g}{\partial \bar{z}} - \frac{2i\varepsilon z}{\tilde{f}} \operatorname{Im} \left(\bar{z} \frac{\partial g}{\partial \bar{z}} \right), \\ H_2(\xi_1, \xi_2) = \overline{\left(\frac{\partial g}{\partial \bar{z}} \right)} - \frac{2i\varepsilon \bar{z}}{\tilde{f}} \operatorname{Im} \left(\bar{z} \frac{\partial g}{\partial \bar{z}} \right), \end{cases}$$

avec $z = \frac{\xi_1 - \bar{\xi}_2}{2i\tilde{f}}$, et $g(z) = 2|z|^2 \left(\frac{1}{|2z^2 + 1|} - 1 + z^2 + \bar{z}^2 \right)$.

Rappelons également que l'intégrale première K devient

$$L(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{2} \left(|\xi_1|^2 + |\xi_2|^2 \right) - \nu \varepsilon^2 - \mu \varepsilon^2 g(z).$$

Nous utiliserons dans ce paragraphe les approximations suivantes:

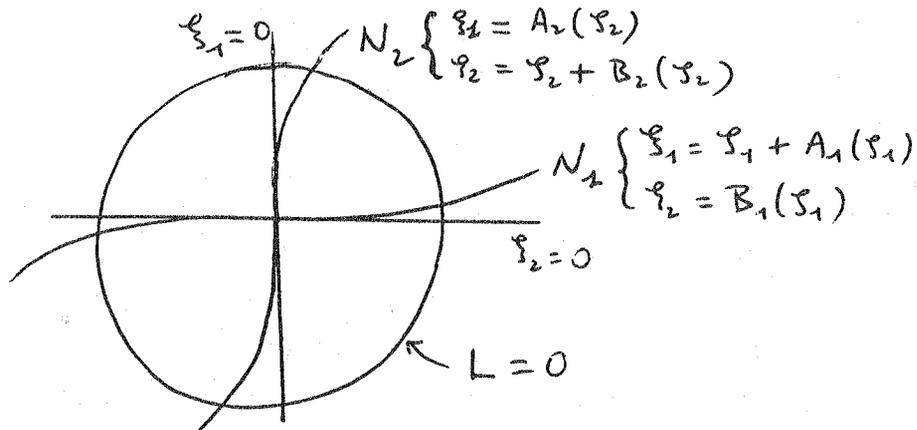
$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{f} H_1(\xi_1, \xi_2) = h\left(\frac{\xi_1 - \bar{\xi}_2}{2i}\right) + O_7(\xi), \\ \frac{1}{f} H_2(\xi_1, \xi_2) = \overline{h\left(\frac{\xi_1 - \bar{\xi}_2}{2i}\right)} + O_7(\xi), \\ h(\xi) = \mathcal{F}\left[6|\xi|^4 + 3\xi^4 + 15\bar{\xi}^4\right], \\ L(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{2}(|\xi_1|^2 + |\xi_2|^2) - \nu\xi^2 + \mu\xi^2 O_6(\xi). \end{array} \right.$$

Il serait agréable à ce point de mettre (11) sous forme normale jusqu'à l'ordre 5; cependant, les termes d'ordre 3, bien que non tous résonants, sont assez sympathiques, et le faible gain provenant de leur mise sous forme normale ne justifie pas les calculs compliqués des répercussions jusqu'à l'ordre 5 de cette opération. Par contre, mettre sous forme normale les seuls termes d'ordre 5, i.e. les termes de l'ordre explicite le plus élevé, est inoffensif: il suffit de supprimer les termes non résonants.

Appelant toujours ξ_1, ξ_2 les nouvelles variables, on obtient le nouveau champ:

$$(12) \left\{ \begin{array}{l} \frac{d\xi_1}{dt} = i\xi_1 \left[1 - \frac{\varepsilon}{2} |\xi_1 - \bar{\xi}_2|^2 - \frac{3\varepsilon^2}{4} (|\xi_1|^4 - |\xi_2|^4) \right] \\ \quad - \frac{3\mu\varepsilon^2}{16} i\xi_1 \left[|\xi_1|^4 + 3|\xi_2|^4 + 6|\xi_1|^2|\xi_2|^2 + 5\xi_1^2\bar{\xi}_2^2 + 15\bar{\xi}_1^2\xi_2^2 \right] \\ \quad - \frac{15\mu\varepsilon^2}{8} i |\xi_2|^2 \bar{\xi}_1 \xi_1^2 + \varepsilon^2 O_7(\xi), \\ \frac{d\xi_2}{dt} = i\xi_2 \left[1 + \frac{\varepsilon}{2} |\xi_1 - \bar{\xi}_2|^2 + \frac{3\varepsilon^2}{4} (|\xi_1|^4 - |\xi_2|^4) \right] \\ \quad - \frac{3\mu\varepsilon^2}{16} i\xi_2 \left[3|\xi_1|^4 + |\xi_2|^4 + 6|\xi_1|^2|\xi_2|^2 + 5\bar{\xi}_1^2\xi_2^2 + 15\xi_1^2\bar{\xi}_2^2 \right] \\ \quad - \frac{15\mu\varepsilon^2}{8} i |\xi_1|^2 \xi_1^2 \bar{\xi}_2 + \varepsilon^2 O_7(\xi). \end{array} \right.$$

Afin d'écrire commodément l'équation d'un anneau de section, il est naturel de remplacer les plans des coordonnées \mathcal{F}_1 et \mathcal{F}_2 par les deux sous-variétés analytiques N_1 et N_2 , feuilletées par des orbites périodiques, que nous avons mises en évidence dans le paragraphe précédent.



Un changement de variables ayant cette propriété est évidemment

$$(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2) \longrightarrow (\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2),$$

défini à partir des paramétrages de N_1 et N_2 (se reporter à la figure) par

$$(13) \quad \begin{cases} \mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_1 + A_1(\mathcal{F}_1) + A_2(\mathcal{F}_2), \\ \mathcal{F}_2 = \mathcal{F}_2 + B_1(\mathcal{F}_1) + B_2(\mathcal{F}_2). \end{cases}$$

Les évaluations

$$(13 bis) \quad \begin{cases} A_1(\mathcal{F}_1) = \varepsilon^2 O_5(\mathcal{F}_1), \\ B_1(\mathcal{F}_1) = \varepsilon \mathcal{F}_1 |\mathcal{F}_1|^2 \delta_1(|\mathcal{F}_1|^2) + \varepsilon^2 O_5(\mathcal{F}_1) \end{cases}$$

données page 77 et les évaluations similaires de A_2, B_2 , montrent déjà

qu'un tel changement de variables ne modifie pas la forme des équations jusqu'à l'ordre 4 puisque les éventuels termes d'ordre 3 de B_1 et A_2 sont résonants (revoir les pages 36,37 sur les formes normales).

La connaissance des termes d'ordre 5 du champ de vecteurs nous permet de raffiner (13bis); on commence par analyser les coefficients $\{\alpha\}_2$ et $\{\beta\}_2$ de $|\mathcal{F}|^4$ dans les développements de α et β à partir des formules de récurrence (celles de la page 50 à la présence près de β):

$$\begin{aligned} \{\alpha\}_2 &= \{ \varphi_1(\xi_1(\mathcal{F}, \bar{\mathcal{F}}), \xi_2(\mathcal{F}, \bar{\mathcal{F}})) \}_{3,2} , \\ \{\beta\}_2 + \delta \{\alpha\}_2 &= \{ \varphi_2(\xi_1(\mathcal{F}, \bar{\mathcal{F}}), \xi_2(\mathcal{F}, \bar{\mathcal{F}})) \}_{3,2} , \end{aligned}$$

où l'on a noté (12) sous la forme ramassée

$$\frac{d\xi_1}{dt} = i\xi_2 + \varphi_1(\xi_1, \xi_2), \quad \frac{d\xi_2}{dt} = i\xi_1 + \varphi_2(\xi_1, \xi_2).$$

Le développement à l'ordre 3 de $\xi_1(\mathcal{F}, \bar{\mathcal{F}})$ et $\xi_2(\mathcal{F}, \bar{\mathcal{F}})$ donné à la page 77 suffit pour ce calcul. On constate que $\{\beta\}_2$ s'écrit

$$\{\beta\}_2 = \frac{3i\varepsilon^2}{2} \gamma \left(1 - \frac{\mu}{4} + O_2(\gamma)\right) - \frac{15i\mu\varepsilon^2}{8} \bar{\gamma}, \text{ et donc que}$$

$$\beta = i\varepsilon|\mathcal{F}|^2 \left[\gamma(1 + \delta\bar{\gamma}) + \frac{3\varepsilon}{2} \gamma \left(1 - \frac{\mu}{4} + O_2(\gamma)\right) |\mathcal{F}|^2 - \frac{15\mu\varepsilon}{8} \bar{\gamma} |\mathcal{F}|^2 + \varepsilon O_2(|\mathcal{F}|^2) \right];$$

L'équation $\beta = 0$ fournit alors

$$\gamma = \varepsilon |\mathcal{F}|^4 \tilde{\gamma}(|\mathcal{F}|^2),$$

et on montre ~~sans~~ sans peine que

$$(13'_{ca}) \left\{ \begin{aligned} A_1(\mathcal{F}_1) &= \varepsilon^2 O_7(\mathcal{F}_2), \\ B_1(\mathcal{F}_1) &= \varepsilon \mathcal{F}_1 |\mathcal{F}_1|^4 \tilde{\delta}_1(|\mathcal{F}_1|^2) + \varepsilon^2 O_7(\mathcal{F}_2), \end{aligned} \right.$$

et des formules analogues pour A_2 et B_2 .

En particulier, ainsi que l'avait déjà remarqué Conley, le changement de variables (13) ne modifie pas la forme des équations (12); seul le reste devient $\varepsilon O_7(\mathcal{F})$ au lieu de $\varepsilon^2 O_7(\mathcal{F})$: les responsables en sont les termes de la forme

$$\begin{aligned} i \varepsilon \mathcal{F} |\mathcal{F}|^4 \tilde{\delta}(|\mathcal{F}|^2) - \varepsilon \frac{d}{dt} [\mathcal{F} |\mathcal{F}|^4 \tilde{\delta}(|\mathcal{F}|^2)] \\ = - \varepsilon \mathcal{F} |\mathcal{F}|^4 \frac{d}{dt} [\tilde{\delta}(|\mathcal{F}|^2)] + \varepsilon^2 O_7(\mathcal{F}) = \varepsilon O_7(\mathcal{F}). \end{aligned}$$

En résumé,

$$(14) \left\{ \begin{aligned} \frac{d\mathcal{F}_1}{dt} &= i \mathcal{F}_1 \left[1 - \frac{\varepsilon}{2} |\mathcal{F}_1 - \bar{\mathcal{F}}_2|^2 - \frac{3\varepsilon^2}{4} (|\mathcal{F}_1|^4 - |\mathcal{F}_2|^4) \right] \\ &\quad - \frac{3\mu\varepsilon^2}{16} i \mathcal{F}_1 \left[|\mathcal{F}_1|^4 + 3|\mathcal{F}_2|^4 + 6|\mathcal{F}_1|^2 |\mathcal{F}_2|^2 + 5\bar{\mathcal{F}}_1^2 \mathcal{F}_2^2 + 15\bar{\mathcal{F}}_1^2 \mathcal{F}_2^2 \right] \\ &\quad - \frac{15\mu\varepsilon^2}{8} i |\mathcal{F}_2|^2 \bar{\mathcal{F}}_1 \mathcal{F}_2^2 + \varepsilon O_7(\mathcal{F}), \\ \frac{d\mathcal{F}_2}{dt} &= i \mathcal{F}_2 \left[1 + \frac{\varepsilon}{2} |\mathcal{F}_1 - \bar{\mathcal{F}}_2|^2 + \frac{3\varepsilon^2}{4} (|\mathcal{F}_1|^4 - |\mathcal{F}_2|^4) \right] \\ &\quad - \frac{3\mu\varepsilon^2}{16} i \mathcal{F}_2 \left[3|\mathcal{F}_1|^4 + |\mathcal{F}_2|^4 + 6|\mathcal{F}_1|^2 |\mathcal{F}_2|^2 + 5\bar{\mathcal{F}}_1^2 \mathcal{F}_2^2 + 15\bar{\mathcal{F}}_1^2 \mathcal{F}_2^2 \right] \\ &\quad - \frac{15\mu\varepsilon^2}{8} i |\mathcal{F}_1|^2 \bar{\mathcal{F}}_1^2 \mathcal{F}_2 + \varepsilon O_7(\mathcal{F}), \end{aligned} \right.$$

les équations respectives de N_1 et N_2 sont $\mathcal{F}_2 = 0$, $\bar{\mathcal{F}}_1 = 0$, et l'intégrale première s'écrit

$$M(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2) = \frac{1}{2} (|\mathcal{F}_1|^2 + |\mathcal{F}_2|^2) - \nu \varepsilon^2 + \varepsilon O_6(\mathcal{F}).$$

Il est maintenant facile d'écrire l'équation d'un anneau de section pour le champ de vecteurs (14) dans la 3-sphère $M = 0$:
 $\text{Arg } \mathcal{I}_1 + \text{Arg } \mathcal{I}_2 = 0 \pmod{2}$ ferait l'affaire, c'est d'ailleurs le choix de Conley. Il est cependant plus agréable et guère plus difficile de choisir un tel anneau qui contienne le "cercle" $z = 0$ correspondant aux singularités du problème initial (comparer à Birkhoff []).

En effet, $z = 0$ s'écrit encore $\mathcal{I}_1 = \bar{\mathcal{I}}_2$ avant la mise sous forme normale des termes d'ordre 5 de (11), donc $\mathcal{I}_1 - \bar{\mathcal{I}}_2 + \varepsilon^2 O_5(\mathcal{I}) = 0$ après cette mise sous forme normale, donc

$$(15) \quad \mathcal{I}_1 - \bar{\mathcal{I}}_2 + \varepsilon O_5(\mathcal{I}) = 0$$

après le changement de variables (13).

Ecrivons cette équation sous la forme

$$\mathcal{I}_1 + \varepsilon \mathcal{I}_1 u_1(\mathcal{I}) + \varepsilon \bar{\mathcal{I}}_1 v_1(\mathcal{I}) = \bar{\mathcal{I}}_2 + \varepsilon \mathcal{I}_2 u_2(\mathcal{I}) + \varepsilon \bar{\mathcal{I}}_2 v_2(\mathcal{I}),$$

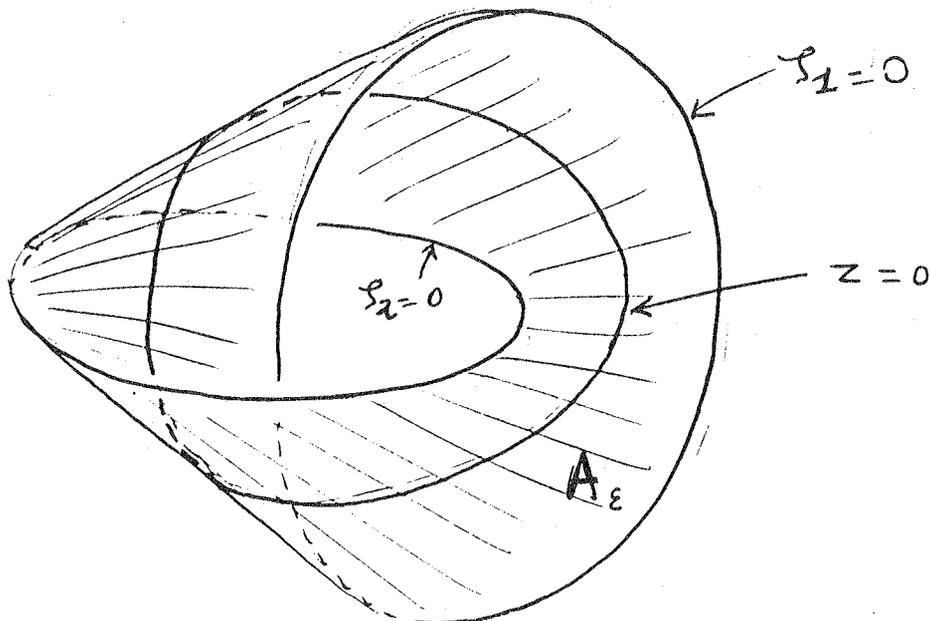
où les u_i et les v_i sont des $O_4(\mathcal{I})$.

L'égalité des arguments des deux membres fournit l'équation d'un anneau A_ε selon notre désir (plus exactement l'équation d'un tel anneau dans le complémentaire des deux orbites périodiques primaires):

$$\text{Arg } \mathcal{I}_1 + \text{Arg} \left(1 + \varepsilon u_1(\mathcal{I}) + \varepsilon \frac{\bar{\mathcal{I}}_1}{\mathcal{I}_1} v_1(\mathcal{I}) \right) = \text{Arg } \bar{\mathcal{I}}_2 + \text{Arg} \left(1 + \varepsilon \frac{\mathcal{I}_2}{\bar{\mathcal{I}}_2} u_2(\mathcal{I}) + \varepsilon v_2(\mathcal{I}) \right)$$

c'est-à-dire

$$(16) \quad \text{Arg } \mathcal{I}_1 + \text{Arg } \bar{\mathcal{I}}_2 + \varepsilon O_4(\mathcal{I}) = 0 \pmod{2\pi}$$



Nous en venons à l'expression approchée de l'application de premier retour $P_\varepsilon : A_\varepsilon \rightarrow A_\varepsilon$ définie sur l'anneau A_ε par le champ (14); en coordonnées polaires

$$J_1 = r_1 e^{i\alpha_1}, \quad J_2 = r_2 e^{i\alpha_2},$$

ce dernier devient

$$(14') \left\{ \begin{aligned} \frac{d\alpha_1}{dt} &= 1 - \frac{\varepsilon}{2}(r_1^2 + r_2^2) + \varepsilon r_1 r_2 \cos \chi - \frac{3\varepsilon^2}{4}(r_1^4 - r_2^4) \\ &\quad - \frac{3\mu\varepsilon^2}{16}(r_1^4 + 3r_2^4 + 6r_1^2 r_2^2 + 20r_1^2 r_2^2 \cos 2\Phi) \\ &\quad - \frac{15\mu\varepsilon^2}{8} r_2^4 \cos 2\Phi + \varepsilon O_6(r_1, r_2), \\ \frac{d\alpha_2}{dt} &= 1 + \frac{\varepsilon}{2}(r_1^2 + r_2^2) - \varepsilon r_1 r_2 \cos \chi + \frac{3\varepsilon^2}{4}(r_1^4 - r_2^4) \\ &\quad - \frac{3\mu\varepsilon^2}{16}(3r_1^4 + r_2^4 + 6r_1^2 r_2^2 + 20r_1^2 r_2^2 \cos 2\Phi) \\ &\quad - \frac{15\mu\varepsilon^2}{8} r_1^4 \cos 2\Phi + \varepsilon O_6(r_1, r_2), \\ \frac{dr_1}{dt} &= r_1 \left[-\frac{15\mu\varepsilon^2}{8}(r_1^2 + r_2^2)r_2^2 \sin 2\Phi + \varepsilon O_6(r_1, r_2) \right], \\ \frac{dr_2}{dt} &= r_2 \left[\frac{15\mu\varepsilon^2}{8}(r_1^2 + r_2^2)r_1^2 \sin 2\Phi + \varepsilon O_6(r_1, r_2) \right], \end{aligned} \right.$$

où l'on a repris des notations

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \chi, \quad \alpha_1 - \alpha_2 = \Phi$$

analogues à celles de la page 11.

Bien entendu, les termes $\varepsilon O_6(r_1, r_2)$ qui apparaissent dans (14') sont tous analytiques en $\alpha_1, \alpha_2, r_1, r_2$; cela vient de ce que le reste $\varepsilon O_7(S)$ de $\frac{dS_1}{dt}$ (resp. $\frac{dS_2}{dt}$) s'annule lorsque $S_1 = 0$ (resp. $S_2 = 0$).

Notons

$$\mathcal{R} \equiv \chi + \varepsilon O_4(r_1, r_2) = 0 \pmod{2\pi}$$

l'équation de l'intérieur de A_ε et $T_\varepsilon = T_\varepsilon(\alpha_1, \alpha_2, r_1, r_2)$ le temps de retour sur A_ε de la courbe intégrale de (14') issue de $(\alpha_1, \alpha_2, r_1, r_2) \in A_\varepsilon$.

Désignant par $\alpha_1(t), \alpha_2(t), r_1(t), r_2(t)$ le paramétrage de cette courbe intégrale, on voit immédiatement que sur un intervalle de temps borné (par exemple par 2π , qui suffit car T_ε est proche de π),

$$r_i(t) = r_i + \varepsilon^2 O_5(r_1, r_2) + \varepsilon O_7(r_1, r_2);$$

en particulier, sur un tel intervalle,

$$\frac{d}{dt} \mathcal{R}(\alpha_1(t), \alpha_2(t), r_1(t), r_2(t)) = 2 + \varepsilon O_4(r_1, r_2),$$

d'où l'on déduit que

$$2\pi = \int_0^{T_\varepsilon} \{2 + \varepsilon O_4(r_1, r_2)\} dt = 2T_\varepsilon + \varepsilon O_4(r_1, r_2),$$

et donc que

$$T_\varepsilon = \pi + \varepsilon O_4(r_1, r_2).$$

Avant de choisir des coordonnées sur A_ε , faisons quelques remarques sur la régularité de P_ε :

L'application

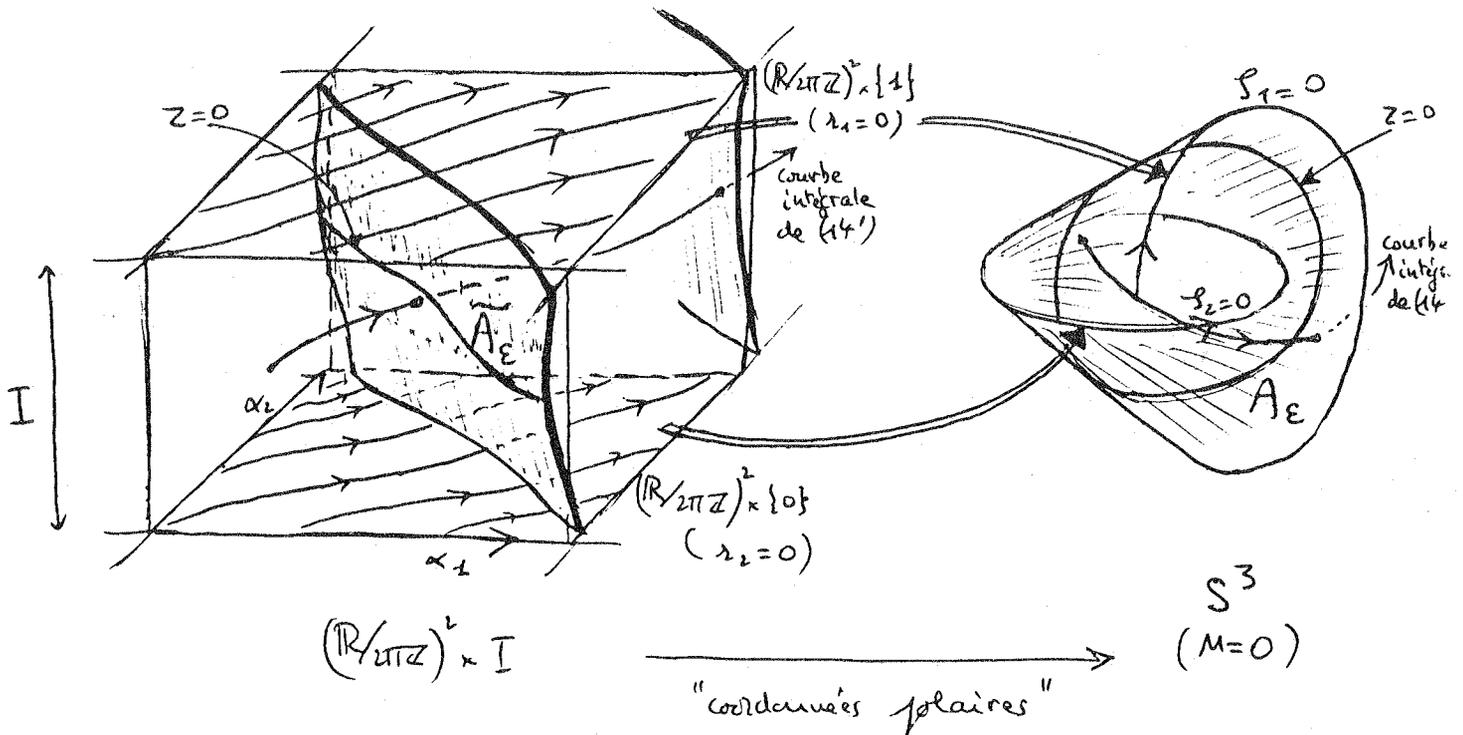
$$((\alpha_1, \alpha_2), (r_1, r_2)) \longmapsto (r_1 e^{i\alpha_1}, r_2 e^{i\alpha_2})$$

de $(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^2 \times \mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{C}^2 = \mathbb{R}^4$ est analytique (réelle); l'image réciproque de la sphère S^3 d'équation $M = 0$ est un tore T^3 d'équation (analytique)

$$\frac{1}{2}(r_1^2 + r_2^2) - \gamma \varepsilon^2 + \varepsilon O_6(r_1, r_2) = 0$$

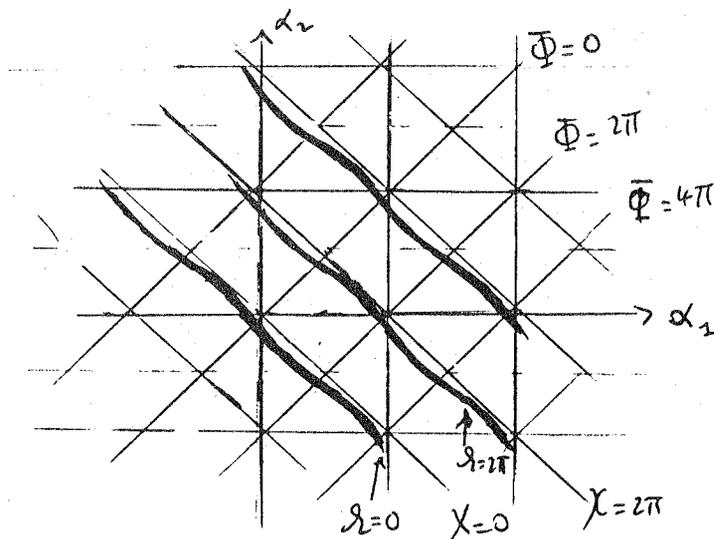
dont la partie située dans le "quadrant" $r_1 \geq 0, r_2 \geq 0$ est diffeomorphe au produit de $(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^2$ par un intervalle I ("hollow anchor ring" de Conley) et est bordée par deux tores de dimension deux $r_1 = 0$ et $r_2 = 0$, laissés invariants par le flot de (14'), qui s'envoient sur les orbites périodiques primaires de la sphère $M = 0$.

Le flot de (14') étant évidemment transverse au sous-anneau \tilde{A}_ε de T^3 défini par $\mathcal{R} = 0 \pmod{2\pi}$ (figure), l'application de premier retour de (14') sur \tilde{A}_ε est analytique jusqu'au bord. Mais l'application "coordonnées polaires" de $(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^2 \times \mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{C}^2 = \mathbb{R}^4$ induit un diffeomorphisme analytique de \tilde{A}_ε sur son image A_ε , ce qui montre que P_ε , définie a priori sur l'intérieur de A_ε , se prolonge en fait en un diffeomorphisme de A_ε analytique jusqu'au bord.

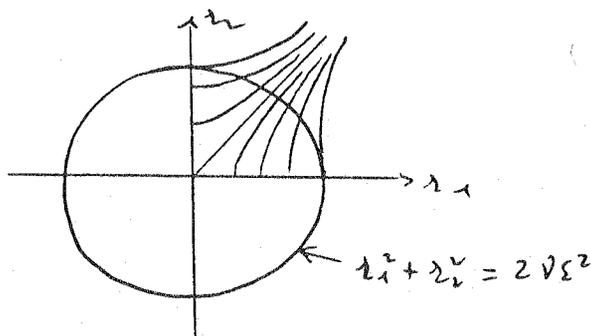


Exercice. - Montrer que la restriction de P_ϵ à l'un des bords de l'anneau est analytiquement conjuguée à une rotation d'angle $\beta = \alpha/\alpha+1$ où α est l'angle de la rotation à laquelle est conjuguée la dérivée en son point fixe de l'application de premier retour de (14) sur une transversale locale dans S^3 à l'orbite périodique primaire qui correspond au bord considéré (il s'agit de comparer les applications de premier retour d'un champ sans zéro sur le tore T^2 sur deux courbes fermées transversales non homologues dans le cas où l'une de ces applications est conjuguée à une rotation).

La forme des équations (14') impose pratiquement le choix des coordonnées sur A_ϵ (identifié à \tilde{A}_ϵ): $\bar{\Phi}$ comme coordonnée angulaire, $r = r_1^2 - r_2^2$ comme coordonnée radiale (comparer à la page 63); cependant, $\bar{\Phi}$ n'est pas vraiment une coordonnée angulaire car elle varie de 4π quand on fait le tour de l'anneau; on travaille donc avec $\bar{\Phi}/2$ en faisant attention au déphasage de π qui s'introduit dans le calcul de l'application de premier retour (figure, à r fixé).



Quant à r , c'est une très bonne coordonnée à ceci près qu'elle n'est pas différentiable au bord (figure schématique dans le cas où $M = \frac{1}{2}(\lambda_1^2 - \lambda_2^2) - \nu \varepsilon^2$).



Ceci ne nous gênera pas plus que le choix naturel des coordonnées polaires symplectiques $z = \sqrt{2} e^{i\theta}$ dans l'étude classique de la stabilité des points fixes elliptiques des difféomorphismes du plan qui conservent les aires (comparer par exemple à ce qui est fait dans le livre "Lectures on celestial mechanics" de Siegel et Moser).

Nous devons donc calculer

$$P_\varepsilon(\Phi/2, \lambda) = (\pi + \Phi/2(T_\varepsilon), \lambda(T_\varepsilon)),$$

où $T_\varepsilon = T_\varepsilon(\alpha_1, \alpha_2, r_1, r_2)$, $(\alpha_1, \alpha_2, r_1, r_2)$ est le point de $(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^2 \times I$ qui correspond à $(\Phi/2, r) \in \tilde{A}_\varepsilon$ et $(\alpha_1(T_\varepsilon), \alpha_2(T_\varepsilon), r_1(T_\varepsilon), r_2(T_\varepsilon))$ celui qui correspond à $(\Phi/2(T_\varepsilon), r(T_\varepsilon)) \in \tilde{A}_\varepsilon$.

Comme à la page 91, on déduit de l'estimation $r_i(t) = r_i + \varepsilon^2 O_5 + \varepsilon O_7$ que, sur un intervalle de longueur 2π , on a

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d}{dt} \Phi(\alpha_1(t), \alpha_2(t), r_1(t), r_2(t)) &= -\varepsilon(\lambda_1^2 + \lambda_2^2) + 2\varepsilon \lambda_1 \lambda_2 \cos \chi \\ &\quad - \frac{3\varepsilon^2}{2} \left(1 - \frac{\mu}{4}\right) (\lambda_1^4 - \lambda_2^4) + \frac{15\mu\varepsilon^2}{8} (\lambda_1^4 - \lambda_2^4) \cos 2\Phi + \varepsilon O_6(\lambda_1, \lambda_2), \\ \frac{d}{dt} \lambda(\alpha_1(t), \alpha_2(t), r_1(t), r_2(t)) &= -\frac{15\mu\varepsilon^2}{2} (\lambda_1^2 + \lambda_2^2) \lambda_1^2 \lambda_2^2 \sin 2\Phi + \varepsilon O_8(\lambda_1, \lambda_2), \\ \frac{d}{dt} \chi(\alpha_1(t), \alpha_2(t), r_1(t), r_2(t)) &= 2 + \varepsilon^2 O_4(\lambda_1, \lambda_2) + \varepsilon O_6(\lambda_1, \lambda_2). \end{aligned} \right.$$

On en déduit en intégrant que

$$\begin{aligned} \chi(t) &= \chi(0) + 2t + \varepsilon^2 O_4(\lambda_1, \lambda_2) + \varepsilon O_6(\lambda_1, \lambda_2) \\ &= 2t + \varepsilon O_4(\lambda_1, \lambda_2), \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{aligned} \Phi(T_\varepsilon) &= \bar{\Phi} - \varepsilon(\lambda_1^2 + \lambda_2^2)T_\varepsilon + \varepsilon\lambda_1\lambda_2 \sin 2T_\varepsilon - \frac{3\varepsilon^2}{2}\left(1 - \frac{\mu}{4}\right)(\lambda_1^4 - \lambda_2^4)T_\varepsilon \\ &\quad + \frac{15\mu\varepsilon^2}{8}(\lambda_1^4 - \lambda_2^4)T_\varepsilon \cos 2\bar{\Phi} + \varepsilon O_6(\lambda_1, \lambda_2) \\ &= \bar{\Phi} + (\lambda_1^2 + \lambda_2^2) \left[-\varepsilon\pi - \frac{3\varepsilon^2\pi}{2}\left(1 - \frac{\mu}{4}\right)\lambda_2 + \frac{15\mu\varepsilon^2\pi}{8}\lambda_2 \cos 2\bar{\Phi} \right] \\ &\quad + \varepsilon O_6(\lambda_1, \lambda_2), \\ \lambda(T_\varepsilon) &= \lambda - \frac{15\mu\pi\varepsilon^2}{2}(\lambda_1^2 + \lambda_2^2)\lambda_1^2\lambda_2^2 \sin 2\bar{\Phi} + \varepsilon O_8(\lambda_1, \lambda_2). \end{aligned} \right.$$

Enfin, puisque l'on est dans la sphère $M = 0$,

$$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 = 2\nu\varepsilon^2 + \varepsilon O_6(\lambda_1, \lambda_2);$$

en particulier, λ_1 et λ_2 sont des $O(\varepsilon)$, et $\lambda_1^2\lambda_2^2 = \nu^2\varepsilon^4 - \frac{\lambda^2}{4} + O(\varepsilon^6)$, d'où

$$\left\{ \begin{aligned} \Phi(T_\varepsilon) &= \bar{\Phi} - 2\pi\nu\varepsilon^3 - 3\pi\nu\varepsilon^4\left(1 - \frac{\mu}{4}\right)\lambda_2 + \frac{15\pi\mu\nu\varepsilon^4}{4}\lambda_2 \cos 2\bar{\Phi} + O(\varepsilon^7), \\ \lambda(T_\varepsilon) &= \lambda - 15\pi\mu\nu^3\varepsilon^8 \sin 2\bar{\Phi} + \frac{15\pi\mu\nu\varepsilon^4}{4}\lambda^2 \sin 2\bar{\Phi} + O(\varepsilon^9). \end{aligned} \right.$$

Il sera agréable dans la suite de travailler avec un cercle de longueur 1, i.e. d'identifier le cercle à \mathbb{R}/\mathbb{Z} ; posons pour cela

$$\theta = \Phi/4\pi$$

il vient

$$\begin{cases} P_\varepsilon(\theta, \lambda) = (\mathbb{H}, R), \\ \mathbb{H} = \theta + \frac{1}{2} - \frac{\nu}{2} \varepsilon^3 - \frac{3\nu}{4} \varepsilon^4 \left(1 - \frac{\mu}{4}\right) \lambda + \frac{15\mu\nu \varepsilon^4}{16} \lambda^2 \cos 8\pi\theta + O(\varepsilon^7), \\ R = \lambda - \frac{15\pi\mu\nu^2 \varepsilon^8}{4} \sin 8\pi\theta + \frac{15\pi\mu\nu \varepsilon^4}{4} \lambda^2 \sin 8\pi\theta + O(\varepsilon^9), \end{cases}$$

que l'on peut encore simplifier: le changement de coordonnées (comparer à celui de la page 69)

$$(\theta, \lambda) \longmapsto (\varphi, \lambda),$$

$$\begin{cases} \varphi = \theta + \frac{15\mu}{64\pi} \varepsilon \lambda^2 \sin 8\pi\theta, \\ \lambda = \lambda + \frac{15\mu\nu^2 \varepsilon^5}{4} \cos 8\pi\theta - \frac{15\mu}{16} \varepsilon \lambda^2 \cos 8\pi\theta, \end{cases}$$

transforme P_ε en

$$P_\varepsilon(\varphi, \lambda) = \left(\varphi + \frac{1}{2} - \frac{\nu}{2} \varepsilon^3 - \frac{3\nu}{4} \varepsilon^4 \left(1 - \frac{\mu}{4}\right) \lambda + O(\varepsilon^7), \lambda + O(\varepsilon^9)\right).$$

Un dernier changement de coordonnées, l'homothétie

$$\lambda = 2\nu\varepsilon^2 \rho$$

rend voisins de $\rho = \pm 1$ les bords de l'anneau;

P_ε devient

$$(17) \quad P_\varepsilon(\varphi, \rho) = \left(\varphi + \frac{1}{2} - \frac{\nu}{2} \varepsilon^3 - \frac{3\nu^2}{2} \left(1 - \frac{\mu}{4}\right) \varepsilon^6 \rho + O(\varepsilon^7), \rho + O(\varepsilon^7) \right)$$

qui nous donne grand plaisir.

Remarque. - Estimons l'équation du "cercle" $z = 0$ correspondant aux singularités: $z = 0$ équivaut à $\xi_1 - \bar{\xi}_2 = 0$, donc $\xi_1 - \bar{\xi}_2 + \varepsilon O_5(\xi) = 0$, donc

$$r_1 e^{i\chi} - r_2 + \varepsilon O_5(r_1, r_2) = 0. \text{ On en déduit}$$

$$r_1 \cos \chi - r_2 + \varepsilon O_5(r_1, r_2) = 0,$$

$$r_1 \sin \chi + \varepsilon O_5(r_1, r_2) = 0,$$

$$r_2^2 = r_1^2 (\cos^2 \chi + \sin^2 \chi) + \varepsilon O_6(r_1, r_2), \text{ c'est-à-dire}$$

$$r_2 = \varepsilon O_6(r_1, r_2), \text{ et d'après le Théorème des fonctions implicites,}$$

$$r_2 = \mathcal{R}(\theta), \quad \|\mathcal{R}\|_0 = O(\varepsilon^7).$$

Après le changement de coordonnées $(\theta, r) \mapsto (\varphi, s)$ cette équation devient

$$s = \mathcal{f}(\varphi), \quad \|\mathcal{f}\|_0 = O(\varepsilon^5);$$

l'homothétie $s = 2\nu\varepsilon^2 \rho$ la transforme enfin en

$$(18) \quad \rho = \mathcal{f}(\varphi), \quad \|\mathcal{f}\|_0 = O(\varepsilon^3).$$

Autre remarque.- (Comparer à celle de la page 63)

Nous avons remarqué à la fin du paragraphe précédent que le passage de $SO(3)$ à son revêtement à deux feuilletés S^3 dans la transformation de Levi-Civita se traduisait par l'invariance de (11) sous la transformation

$$(\xi_1, \xi_2, t) \longmapsto (-\xi_1, -\xi_2, t) .$$

La suppression des termes non résonants d'ordre 5 peut donc se faire par un changement de variables polynomial de degré 5 respectant cette symétrie; autrement dit, (12) jouit également de cette invariance.

De même, l'unicité des orbites périodiques primaires de chaque famille forçant leur invariance, les équations (14) sont-elles invariantes sous la transformation

$$(\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2, t) \longmapsto (-\mathcal{J}_1, -\mathcal{J}_2, t) .$$

Enfin, last but not least, l'anneau de section A_ε défini page 89 est lui aussi invariant, et tout ceci se traduit par l'invariance de P_ε sous la transformation

$$(\vartheta, r) \longmapsto (\vartheta + \frac{1}{2}, r)$$

(ajouter π à κ_1 et κ_2 , et contempler la figure de la page 93 pour comprendre), et donc évidemment sous la transformation

$$(\varphi, \rho) \longmapsto (\varphi + \frac{1}{2}, \rho) .$$

Dans l'anneau quotient \mathcal{A}_ε (anneau de section pour le flot dans $SO(3)$) muni des coordonnées $(\tilde{\varphi}, \rho) \equiv (2\varphi, \rho)$,

l'application de premier retour s'écrit donc

$$(17) \quad \mathcal{P}_\varepsilon(\tilde{\varphi}, \rho) = \left(\tilde{\varphi} - \nu \varepsilon^3 - 3\nu^2 \left(1 - \frac{\mu}{4}\right) \varepsilon^6 \rho + O(\varepsilon^7), \rho + O(\varepsilon^7) \right),$$

et nous donne autant de plaisir que la précédente.

Bien entendu, tout ce qu'on vient de dire peut être répété pour la symétrie

$$(\xi_1, \xi_2, t) \longmapsto (-\bar{\xi}_1, -\bar{\xi}_2, -t)$$

qui implique la transformation de P_ε en P_ε^{-1} sous

$$(\varphi, \rho) \longmapsto \left(-\varphi + \frac{1}{2}, \rho\right)$$

et celle de \mathcal{P}_ε en $\mathcal{P}_\varepsilon^{-1}$ sous

$$(\tilde{\varphi}, \rho) \longmapsto (-\tilde{\varphi}, \rho).$$

Le problème de la lune --

Erratum (6.11.85).

où l'on admet avec Gilbert levt qu'il y a d'autres rationnels que les entiers et les inverses d'entiers.

page 39 ligne 3 : et éventuellement $l(i\lambda_1) = m(i\lambda_2)$, $l \geq 1$, $m \geq 2$

page 42 : remplace la fin de la page à faire du dernier groupe de formules par la même saupoudrée de l :

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= u_1 f_1(|u_1|^2, |u_2|^2, u_1^l \bar{u}_2^m) + \bar{u}_1^{l-2} u_2^m g_1(|u_1|^2, |u_2|^2, u_1^l \bar{u}_2^m), f_1(0,0,0) = i\lambda_1 \\ \frac{dx_2}{dt} &= u_2 f_2(\text{---}) + u_1^l \bar{u}_2^{m-1} g_2(\text{---}), f_2(0,0,0) = i\lambda_2 \end{aligned} \right.$$

$$f_1(x, y, z) = \text{---}$$

$$\text{si } l\lambda_1 = m\lambda_2, l \geq 1, m \geq 2 \quad [\text{---}]$$

$$u_1^l \bar{u}_2^m, \bar{u}_1^l u_2^m;$$

page 43 : remplace la ligne 1 par

Remarque que, dans le cas où λ_1 et λ_2 sont rationnellement indépendants, l'étude --

Change of variables (course on Conley's thesis page 96)

October 10, 2011

The important point is to remember that, as defined on page 93,

$$r = r_1^2 - r_2^2 = O(\epsilon^2).$$

Then, if for simplicity, we start looking for a change of variables of the form

$$\varphi = \theta + a\epsilon r \sin 8\pi\theta, \quad s = r,$$

and write the original mapping $(\theta, r) \mapsto (\Theta, R)$ and the conjugate mapping $(\varphi, r) \mapsto (\Phi, R)$, we get

$$\Phi = \Theta + a\epsilon R \sin 8\pi\Theta = \theta + \frac{1}{2} - \frac{\nu}{2}\epsilon^3 - \frac{3\nu}{4}\epsilon^4\left(1 - \frac{\mu}{4}\right)r + \frac{15\mu\nu}{16}\epsilon^4 r \cos 8\pi\theta + O(\epsilon^7) + A,$$

with

$$A = a\epsilon(r + O(\epsilon^8)) \sin 8\pi\left(\theta + \frac{1}{2} - \frac{\nu}{2}\epsilon^3 + O(\epsilon^6)\right).$$

Using a Taylor expansion of the sine function, we get that

$$A = a\epsilon r \sin 8\pi\theta - 8\pi(a\epsilon r \cos 8\pi\theta) \frac{\nu}{2}\epsilon^3 + O(\epsilon^7);$$

Finally, if we choose, as is done in the notes, $a = \frac{15\mu}{64\pi}$, we get that

$$\Phi = \varphi + \frac{1}{2} - \frac{\nu}{2}\epsilon^3 - \frac{3\nu}{4}\epsilon^4\left(1 - \frac{\mu}{4}\right)r + O(\epsilon^7),$$

while R has not changed at the order $O(\epsilon^8)$.

It remains to compose the first change of variables with the one defined by $(\varphi, r) \mapsto (\varphi, s)$ defined by

$$s = r + \frac{15\mu\nu^2}{4}\epsilon^5 \cos 8\pi\varphi - \frac{15\mu}{16}\epsilon r^2 \cos \pi\varphi = r + O(\epsilon^5).$$

This does not change the form of Φ and one computes the transformation on the ray variables as above (I leave you check it works). Of course, one can do the composition of the two changes at one stroke.

Z bords de l'aubeau

$$\frac{1}{2}(\lambda_1^2 + \lambda_2^2) - V\varepsilon^2 + \varepsilon O_6(\lambda_1, \lambda_2) = 0$$

ERROR: timeout

OFFENDING COMMAND: timeout

STACK:

i.e. λ_1^2 et λ_2^2 sur d'ordre ε^2

dans $\lambda = \lambda_1^2 - \lambda_2^2$ et d'ordre ε^2 (p. 93)

$$\varphi = \theta + a\varepsilon \lambda \sin 8\pi \theta \quad R=2$$

$$\Phi = \Theta + a\varepsilon \lambda \sin 8\pi \Theta$$

$$= \theta + \frac{1}{2} - \frac{V}{2}\varepsilon^3 - \frac{3V}{4}\varepsilon^4\left(1 - \frac{\mu}{4}\right)\lambda + \frac{15\mu V}{16}\varepsilon^4 \lambda \sin 8\pi \theta$$

$$+ a\varepsilon \lambda \sin 8\pi \left(\theta + \frac{1}{2} - \frac{V}{2}\varepsilon^3 + O(\varepsilon^4) \right) + O(\varepsilon^7)$$

$$a\varepsilon \lambda \sin 8\pi \left(\theta - \frac{V}{2}\varepsilon^3 + O(\varepsilon^4) \right)$$

$$a\varepsilon \lambda \sin 8\pi \theta - 8\pi a\varepsilon \lambda \cos 8\pi \theta \cdot \frac{V}{2}\varepsilon^3 + O(\varepsilon^5)$$

$O(\varepsilon^7)$

$$= \varphi + \frac{1}{2} - \frac{V}{2}\varepsilon^3 - \frac{3V}{4}\varepsilon^4\left(1 - \frac{\mu}{4}\right)\lambda + O(\varepsilon^7)$$

si $\frac{15\mu V}{16}\varepsilon^4 \lambda \sin 8\pi \theta = 8\pi a\varepsilon \lambda \cos 8\pi \theta \cdot \frac{V}{2}\varepsilon^3$

i.e. $\frac{15\mu}{16} = \frac{8\pi a}{2}$ i.e. $\frac{15\mu}{64\pi} = a$

Non-intégrabilité du problème de la lune ?

Dans quelle mesure la dynamique exhibée jusqu'ici est-elle signifiante et les méthodes utilisées raisonnables ? Telle est la difficile question que nous nous posons dans ce chapitre. A titre d'exemple, montrer l'existence d'orbites périodiques de longues périodes dans le champ tronqué (8) à l'aide du Théorème de Poincaré-Birkhoff serait absurde: ce champ est en effet complètement intégrable (il possède les deux intégrales premières, forcément en involution, \hat{K} et f^2) et nous l'avons d'ailleurs intégré (page 61) sans cependant rester dans le cadre hamiltonien. Nous retrouvons ce cadre maintenant et exhibons des coordonnées action-angle dans \mathbb{R}^4 pour K (voir l'appendice sur Hamilton-Jacobi pour comprendre leur construction). Il se trouve que ces coordonnées sont suffisamment simples pour que l'on puisse écrire explicitement en termes d'icelles le hamiltonien K non tronqué défini page 23, ce qui nous ramène au problème fondamental (au sens de Poincaré) de la Dynamique: étudier le portrait de phase d'un champ dont le hamiltonien est de la forme

$$K(I_1, I_2, \mu, \nu) = K(I_1, I_2) + L(I_1, I_2, \mu, \nu),$$

où μ est un petit paramètre. Du point de vue théorique, le problème de la non-intégrabilité est clair; quand il s'agit d'étudier un champ particulier, les choses se compliquent singulièrement. Une bonne référence est Kozlov

Variation action - angle pour le système intégrable (8) page 58

~~$\hat{K}(z, w) = \dots$~~

$$\hat{K}(z, w) = f^2(z, w) (|z|^2 + |w|^2 - \nu \varepsilon^2)$$

$$f^2(z, w) = 1 + 2i\varepsilon(\bar{z}w - z\bar{w})$$

Si on se pose $\begin{cases} \xi_1 = w + ifz \\ \xi_2 = \bar{w} + if\bar{z} \end{cases}$, le coup devient

(comparer à (5) sans ~~travaux~~ multiplier par $\frac{1}{f}$!)

$$(3') \begin{cases} \frac{d\xi_1}{dt} = i\xi_1 \left(\tilde{f} - \frac{\varepsilon}{2\tilde{f}^2} |\xi_1 - \bar{\xi}_2|^2 \right) \\ \frac{d\xi_2}{dt} = i\xi_2 \left(\tilde{f} + \frac{\varepsilon}{2\tilde{f}^2} |\xi_1 - \bar{\xi}_2|^2 \right) \end{cases}$$

~~$\xi_1 = r_1 e^{i\alpha_1}, \xi_2 = r_2 e^{i\alpha_2}$~~
 $\tilde{f} = \tilde{f}(r_1, r_2)$

où $\tilde{f}(x)$ est définie par $\tilde{f}(x) = 1 - \frac{\varepsilon}{\tilde{f}(x)} x$

Posons $\begin{cases} I_1 = \frac{r_1^2}{2\tilde{f}(r_1, r_2)} \\ I_2 = \frac{r_2^2}{2\tilde{f}(r_1, r_2)} \end{cases}$,

$$\begin{cases} \beta_1 = \alpha_1 - \frac{\varepsilon r_1 r_2}{2\tilde{f}^3(r_1, r_2)} \sin(\alpha_1 + \alpha_2) \\ \beta_2 = \alpha_2 + \frac{\varepsilon r_1 r_2}{2\tilde{f}^3(r_1, r_2)} \sin(\alpha_1 + \alpha_2) \end{cases}$$

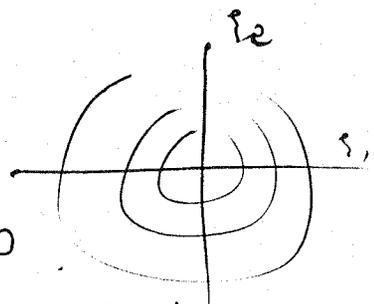
(donc $\beta_1 + \beta_2 = \beta_1 + \beta_2$
ce qui prouve
l'invariance)

Je dis que $I_1, I_2, \beta_1, \beta_2$ sont des constantes action angle pour la variété de ~~(8)~~

$$(8) \begin{cases} \frac{dz}{dt} = \frac{\partial \hat{K}}{\partial w} \\ \frac{dw}{dt} = -\frac{\partial \hat{K}}{\partial z} \end{cases}$$

au couplement de $\xi_1 = 0$ et $\xi_2 = 0$.

(ξ_1, ξ_2 ne sont pas des constantes symplectiques)



En effet,

$$\tilde{f}(r_1 - r_2) = 1 - \frac{\varepsilon}{\tilde{f}(r_1 - r_2)} (r_1^2 - r_2^2) = 1 - 2\varepsilon(I_1 - I_2)$$

et (9') s'écrit encore (comparer à la p. 6) après multiplication par f (fonc. r_1, r_2 sont constants, $\frac{d\beta_1}{dt} = i\beta_1 \frac{dx_1}{dt}$, $\frac{d\beta_2}{dt} = i\beta_2 \frac{dx_2}{dt}$):

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = f - \frac{\varepsilon}{2\tilde{f}(r_1 - r_2)} [r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos(\alpha_1 + \alpha_2)] \\ \frac{dx_2}{dt} = f + \frac{\varepsilon}{2\tilde{f}(r_1 - r_2)} [r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos(\alpha_1 + \alpha_2)] \end{cases}$$

donc (puisque $\frac{d(\alpha_1 + \alpha_2)}{dt} = 2f$)

$$\begin{cases} \frac{d\beta_1}{dt} = f - \frac{\varepsilon(r_1^2 + r_2^2)}{2\tilde{f}(r_1 - r_2)} = f - \frac{\varepsilon(I_1 + I_2)}{f} \\ \frac{d\beta_2}{dt} = f + \frac{\varepsilon(r_1^2 + r_2^2)}{2\tilde{f}(r_1 - r_2)} = f + \frac{\varepsilon(I_1 + I_2)}{f} \\ \frac{dI_1}{dt} = 0 \\ \frac{dI_2}{dt} = 0 \end{cases}$$

$$d\hat{K} = \frac{r_1^2 + r_2^2}{2} = \boxed{f \cdot (I_1 + I_2)} = (I_1 + I_2) \sqrt{1 - 2\varepsilon(I_1 - I_2)}$$

ou vérifie

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{K}}{\partial I_1} &= f + (I_1 + I_2) \frac{\partial f}{\partial I_1} = f + (I_1 + I_2) \frac{\partial}{\partial I_1} (\sqrt{1 - 2\varepsilon(I_1 - I_2)}) \\ &= f + (I_1 + I_2) \frac{(-2\varepsilon)}{2\sqrt{1 - 2\varepsilon(I_1 - I_2)}} = f - \frac{\varepsilon(I_1 + I_2)}{f} \\ &= \frac{d\beta_1}{dt} \end{aligned}$$

$$\text{de même } \frac{\partial \hat{K}}{\partial I_2} = \frac{d\beta_2}{dt}$$