Intégration du problème de Kepler par la méthode de Hamilton-Jacobi: coordonnées "action-angle" de Delaunay

par Alain Chenciner
Université Paris VII

Le paragraphe 8 du chapitre I, que nous explicitons ici, ne représente que trois pages assez "elliptiques" dans les "Méthodes Nouvelles". Nous avons utilisé le chapitre III des "Leçons de Mécanique Céleste" (1905), beaucoup plus détaillé, mais nous n'en avons pas adopté entièrement l'économie, préférant au prix d'un peu de lourdeur effectuer les calculs dans le cas général (voir la remarque 1 à la fin). Notons que le recours à la méthode de Hamilton-Jacobi se trouve déjà dans le premier volume du traité de Tisserand (1888). Quant aux notations, ce sont essentiellement celles de Delaunay ("Théorie du mouvement de la lune", volume I, Mémoires de l'Académie des Sciences, 28ème volume, 1860). Il est intéressant de noter que Delaunay n'utilise pas la méthode de Hamilton-Jacobi : il parvient à ses variables en essayant directement de simplifier les équations et "constate" que les équations du mouvement prennent alors la forme hamiltonienne.

Il s'agit de décrire le mouvement dans l'espace R^3 d'un point de masse m attiré suivant la loi de Newton par un centre fixe de masse M.

On ramène à cette question le "problème des deux corps" (positions $\vec{r_i}$, masses m_i, $i = 1, 2$) en remarquant que si $\vec{r} = \vec{r_2} - \vec{r_1}$ désigne la position relative du deuxième corps par rapport au premier et $r = \left|\vec{r}\right|$, leur distance, la différence des équations

$$m_1 \frac{d^2\,\vec{r_1}}{dt^2} = \frac{Gm_1m_2\,\vec{r}}{r^3}, \qquad m_2 \frac{d^2\,\vec{r_2}}{dt^2} = -\frac{Gm_1m_2\,\vec{r}}{r^3}$$

s'écrit

$$m \frac{d^2\,\vec{r}}{dt^2} = -\frac{GmM\,\vec{r}}{r^3},$$

où $M = m_1 + m_2$; de plus, le choix de $m = \frac{m_1m_2}{m_1+m_2}$ laisse inchangé le potentiel ($mM = m_1m_2$). On supposera dans la suite que $G = 1$.

Sous leur forme hamiltonienne, les équations du mouvement sont

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial F}{\partial y_i}, \qquad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial x_i}, \qquad i = 1, 2, 3,$$

où

$$\vec{r} = (x_1, x_2, x_3), \qquad m\frac{d\,\vec{r}}{dt} = (y_1, y_2, y_3), \qquad F = T + U,$$

$$T(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3) = \frac{1}{2m}(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2),$$

$$U(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3) = -\frac{mM}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}.$$

La forme de U rend naturelle l'utilisation des coordonnées "polaires"

$$x_1 + ix_2 = r\sin\omega\, e^{i\varphi}, \qquad x_3 = r\cos\omega\,.$$

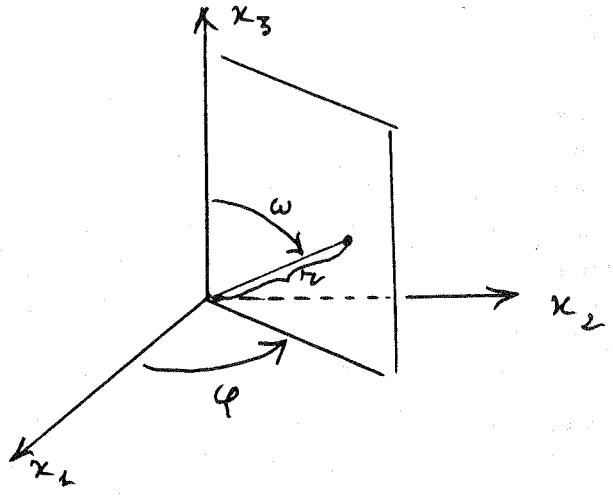

Figure 1

Le module r est un réel positif, la longitude φ varie entre 0 et 2π, et la colatitude ω entre 0 et π (figure 1). On montre immédiatement que

$$T = \frac{1}{2m}\left(R^2 + \frac{\Omega^2}{r^2} + \frac{\Phi^2}{r^2\sin^2\omega}\right), \qquad U = -\frac{mM}{r},$$

où

$$\begin{cases} R &= \dfrac{\partial L}{\partial \dot{r}} &= \dfrac{\partial T}{\partial \dot{r}} &= m\dot{r}, \\ \Omega &= \dfrac{\partial L}{\partial \dot{\omega}} &= \dfrac{\partial T}{\partial \dot{\omega}} &= mr^2\dot{\omega}, \\ \Phi &= \dfrac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} &= \dfrac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} &= mr^2(\sin^2\omega)\dot{\varphi}, \end{cases}$$

sont les variables conjuguées de r, ω, φ ($L = T - U$ est le lagrangien d'où provient par transformation de Legendre le hamiltonien F; on a utilisé

la notation $\dot{r}, \dot{\omega}, \dot{\varphi}$ pour les variables de vitesse $\frac{dr}{dt}, \frac{d\omega}{dt}, \frac{d\varphi}{dt}$ dans le fibré tangent.

L'équation de Hamilton-Jacobi indépendante de t s'écrit donc en coordonnées polaires :

$$\frac{1}{2m}\left(\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \omega}\right)^2 + \frac{1}{r^2 \sin^2 \omega}\left(\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right)^2\right) - \frac{mM}{r} = h,$$

et une (en fait quatre avec le choix des signes) "solution'complète" globale de celle-ci est évidemment donnée par la famille à trois paramètres L, G, Θ de fonctions

$$S(r, \omega, \varphi, L, G, \Theta) = S_1(r, L, G) + S_2(\omega, G, \Theta) + S_3(\varphi, \Theta)$$

définie à une constante près par les équations

$$\frac{\partial S_3}{\partial \varphi} = \Theta, \quad \left(\frac{\partial S_2}{\partial \omega}\right)^2 + \frac{\Theta^2}{\sin^2 \omega} = G^2, \quad \left(\frac{\partial S_1}{\partial r}\right)^2 + \frac{G^2}{r^2} - \frac{2m^2 M}{r} = 2mh$$

dans lesquelles seule est dépourvue d'innocence l'adoption de la notation $-\frac{m^4 M^2}{L^2}$ pour la constante négative (mouvements elliptiques) $2mh$ (on supposera G et L positifs). Les formules

$$R = \frac{\partial S}{\partial r}, \quad \Omega = \frac{\partial S}{\partial \omega}, \quad \Phi = \frac{\partial S}{\partial \varphi}, \quad l = \frac{\partial S}{\partial L}, \quad g = \frac{\partial S}{\partial G}, \quad \theta = \frac{\partial S}{\partial \Theta},$$

définissent sur un certain domaine un changement de variables symplectique

$$\Sigma : \quad (r, \omega, \varphi, R, \Omega, \Phi) \to (l, g, \theta, L, G, \Theta),$$

qui transforme le hamiltonien en

$$h = -\frac{m^3 M^2}{2L^2}$$

(la forme symplectique $dr \wedge dR + d\omega \wedge d\Omega + d\varphi \wedge d\Phi$ est transformée en $dl \wedge dL + dg \wedge dG + d\theta \wedge d\Theta$).

La solution complète $S = S(r, \omega, \varphi, L, G, \Theta)$ peut s'écrire

$$S = \int \sqrt{-\frac{m^4 M^2}{L^2} + \frac{2m^2 M}{r} - \frac{G^2}{r^2}}\, dr + \int \sqrt{G^2 - \frac{\Theta^2}{\sin^2 \omega}}\, d\omega + \Theta\varphi,$$

formule dans laquelle nous avons le choix des déterminations des racines carrées; les constantes L, G, Θ étant fixées, il correspond en général à chaque tel choix une sous-variété lagrangienne* invariante de T^*R^3 (coordonnées $q = (r, \omega, \varphi)$, $p = (R, \Omega, \Phi)$) qui est un graphe $p = \frac{\partial S}{\partial q}$. En recollant les quatre graphes ainsi obtenus, on construit un tore lagrangien (donc de dimension trois) invariant $T_{L,G,\Theta}$. Nous allons dans la suite expliciter la signification géométrique des variables l, g, θ, conjuguées de L, G, Θ, qui paramètrent ces tores et en termes desquelles le flot devient linéaire ($n = \frac{\partial}{\partial L}(-m^3M^2/2L^2) = m^3M^2/L^3$ est le mouvement moyen):

$$l = l_0 + nt, \quad g = g_0, \quad \theta = \theta_0,$$

et retrouver en même temps les caractéristiques bien connues des trajectoires elliptiques.

L'équation du tore $T_{L,G,\Theta}$ s'obtient en prenant toutes les déterminations des racines carrées dans la formule $p = \frac{\partial S}{\partial q}$, c'est-à-dire

$$(R, \Omega, \Phi) = \left(\sqrt{-\frac{m^4M^2}{L^2} + \frac{2m^2M}{r} - \frac{G^2}{r^2}}, \sqrt{G^2 - \frac{\Theta^2}{\sin^2\omega}}, \Theta \right);$$

les trois équations, découplées, définissent trois courbes $(C_1), (C_2), (C_3)$ (respectivement dans les plans $(r, R), (\omega, \Omega)$, et le cylindre (φ, Φ)), dont $T_{L,G,\Theta}$ est le produit; la troisième étant évidemment un cercle paramétré par l'angle φ, nous étudierons les deux premières.

Etude de (C_1): C'est la courbe du plan (r, R) d'équation

$$R^2 = -\frac{m^4M^2}{L^2} + \frac{2m^2M}{r} - \frac{G^2}{r^2}.$$

Notons, comme Poincaré, $[a(1-e), a(1+e)]$ l'intervalle de l'axe des r sur lequel se projette cette courbe: $a(1-e)$ et $a(1+e)$ sont les racines de l'équation

$$-\frac{m^4M^2}{L^2} + \frac{2m^2M}{r} - \frac{G^2}{r^2} = 0,$$

donc

$$L = m\sqrt{M}\sqrt{a}, \qquad G = m\sqrt{M}\sqrt{a(1-e^2)}.$$

---

* Rappelons qu'on appelle sous-variété lagrangienne de T^*R^n une sous-variété de dimension n sur laquelle la forme induite par la forme symplectique est identiquement nulle; généralisant les graphes des dérivées de fonctions $S(q)$, ces sous-variétés sont des "solutions géométriques globales" de l'équation de Hamilton-Jacobi.

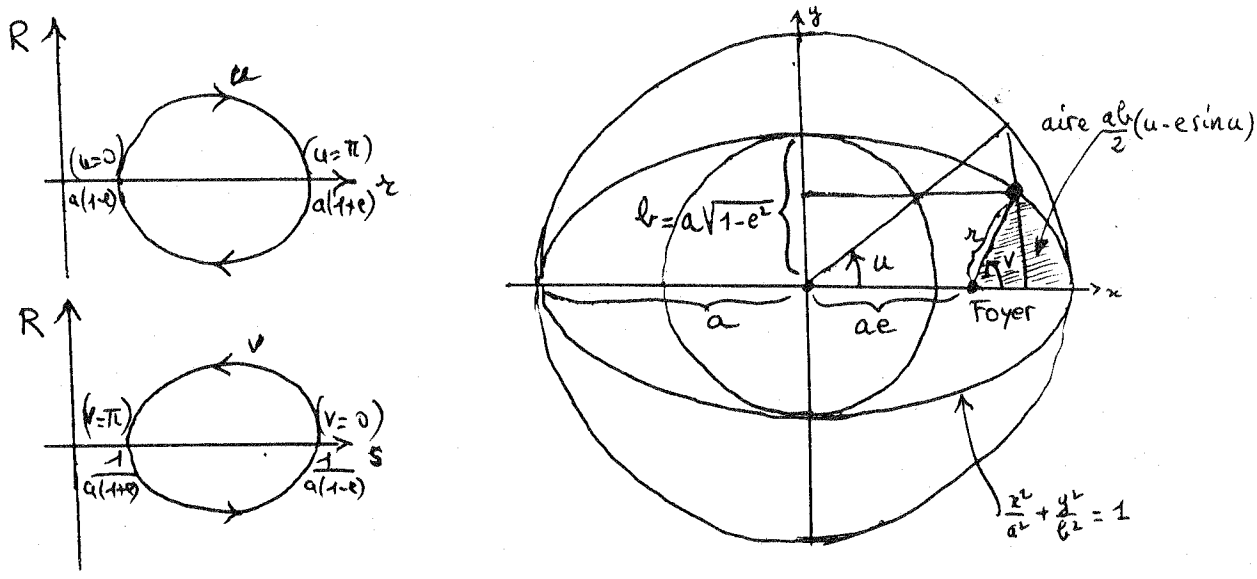

Figure 2

Poincaré utilise pour (C_1) deux paramètres angulaires u et v dont la signification apparaîtra bientôt; le premier, très naturel, est défini par

$$\begin{cases} r &= a(1 - e\cos u), \\ R &= \dfrac{em^2 M \sin u}{L(1 - e\cos u)} \end{cases}$$

(l'ambiguité sur les racines carrées a été levée par le choix de la deuxième équation dont seul le carré était déterminé; notons que, pour ce choix, u croit au cours du mouvement).

Le deuxième est obtenu semblablement après remplacement des coordonnées (r, R) par les coordonnées $(s = 1/r, R)$, bien définies puisque r reste positif sur (C_1). Il s'écrit

$$\begin{cases} s &= \dfrac{1 + e\cos v}{a(1 - e^2)}, \\ R &= \dfrac{Ge}{a(1 - e^2)} \sin v; \end{cases}$$

là encore, v croit au cours du mouvement; l'interprétation géométrique de u et v est classique: $r = \dfrac{a(1 - e^2)}{1 + e\cos v}$ est l'équation en coordonnées polaires (v, r) d'une ellipse rapportée à son foyer (v est l'anomalie vraie); quant à u, c'est l'anomalie excentrique (figure 2).

Il est facile de calculer l et (en partie) g (correspondant aux quatre choix possibles des radicaux) en terme des angles u et v:

$$l = \frac{\partial S}{\partial L} = \frac{m^4 M^2}{L^3} \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{-m^4 M^2}{L^2} + \frac{2m^2 M}{r} - \frac{G^2}{r^2}}} = \frac{m^4 M^2}{L^3} \int \frac{dr}{R}$$
$$= \frac{m^2 M a}{L^2} \int (1 - e \cos u)\, du \quad = u - e \sin u$$

(on a choisi la constante de façon que $l = 0$ pour $u = 0$); c'est l'équation de Kepler*. De même,

$$g = \frac{\partial S}{\partial G} = G \int \frac{d\omega}{\sqrt{G^2 - \frac{\Theta^2}{\sin^2 \omega}}} - G \int \frac{dr}{r^2 \sqrt{\frac{-m^4 M^2}{L^2} + \frac{2m^2 M}{r} - \frac{G^2}{r^2}}}$$

et la deuxième intégrale vaut

$$G \int \frac{ds}{\sqrt{\frac{-m^4 M^2}{L^2} + 2m^2 M s - G^2 s^2}} = G \int \frac{ds}{R} = - \int dv\,,$$

donc

$$g = -v + G \int \frac{d\omega}{\sqrt{G^2 - \frac{\Theta^2}{\sin^2 \omega}}}.$$

Etude de (C_2): C'est la courbe du plan (ω, Ω) d'équation

$$\Omega^2 = G^2 - \frac{\Theta^2}{\sin^2 \omega}.$$

Sa compréhension exige que l'on interprète G et Θ: on constate tout d'abord que $\Phi = \frac{\partial S}{\partial \varphi}$ coïncide avec Θ. Mais Φ et G sont respectivement la projection sur Ox_3 et la longueur du moment cinétique $\vec{C}$; un calcul immédiat fournit en effet

* Rappelons (voir la figure 2) que $u - e \sin u$ est la proportion d'aire enclose par une ellipse entre son grand axe et le rayon issu du foyer d'anomalie excentrique u.

$$\vec{C} = \begin{pmatrix} -mr^2\dot{\omega}\sin\varphi - mr^2\dot{\varphi}\sin\omega\cos\omega\cos\varphi \\ mr^2\dot{\omega}\cos\varphi - mr^2\dot{\varphi}\sin\omega\cos\omega\sin\varphi \\ mr^2\dot{\varphi}\sin^2\omega \end{pmatrix}.$$

Ainsi a-t-on (voir la définition de l'inclinaison i sur la figure 3)

$$\Theta = \Phi = G\cos i,$$

d'où l'on déduit que $\cos i$ reste constant au cours d'un mouvement. Nous pouvons maintenant réécrire l'équation de (C_2)

$$\Omega^2 = G^2\left(1 - \frac{\cos^2 i}{\sin^2\omega}\right).$$

Si $\vec{C}$ n'est pas horizontal ($\cos i \neq 0$), $\sin\omega$ ne s'annule pas et (C_2) est homéomorphe à un cercle (figure 5). Ecrivant son équation sous la forme

$$\Omega^2 = G^2\left(1 - \frac{\cos^2 i\,(\sin^2\omega + \cos^2\omega)}{\sin^2\omega}\right) = G^2\sin^2 i\,(1 - \cot^2 i\,\cot^2\omega),$$

on en obtient facilement le paramétrage suivant dans les coordonnées $(\cot\omega, \Omega)$:

$$\begin{cases} \cot\omega &= \dfrac{\sin\psi}{\cot i}, \\ \Omega &= -G\sin i\,\cos\psi. \end{cases}$$

Le choix du signe $-$ dans l'expression de Ω implique que, si $0 < i < \frac{\pi}{2}$, on tourne à ψ croissant dans le sens trigonométrique.
Il vient

$$\theta = \frac{\partial S}{\partial\Theta} = \varphi - \Theta\int\frac{d\omega}{\sin^2\omega\sqrt{G^2 - \dfrac{\Theta^2}{\sin^2\omega}}} = \varphi - \int\frac{G\cos i\,d\omega}{\Omega\sin^2\omega}$$

$$= \varphi + \int\frac{\cot i\,d\omega}{\sin^2\omega\,\cos\psi} = \varphi - \int d\psi$$

et on choisit la constante d'intégration de façon que $\theta = \varphi - \psi$. De même,

$$g = -v + G\int\frac{d\omega}{\Omega} = -v - \int\frac{d\omega}{\sin i\,\cos\psi}.$$

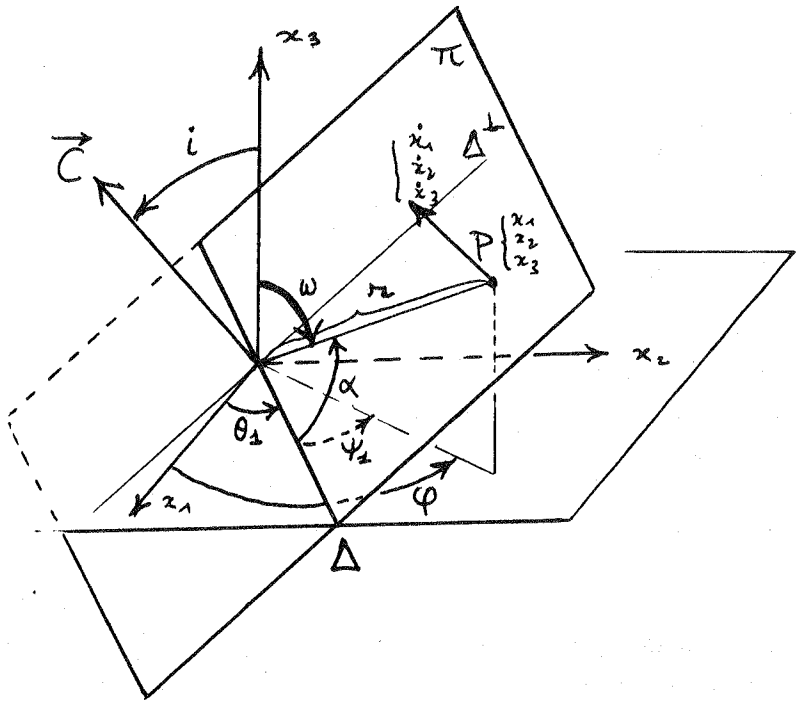

Figure 3

L'interprétation des angles ψ, θ, g repose sur les calculs élémentaires suivants (figure 3):
π désigne le plan orienté engendré à un instant donné par (x_1, x_2, x_3) et $(\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3)$, autrement dit le plan orthogonal au moment cinétique $\vec{C}$ (supposé non nul, on ne s'intéresse pas aux collisions). L'inclinaison i varie entre 0 et π, ainsi que les colatitudes ω (dans le plan vertical) et ϖ (dans le plan π).Quant aux longitudes $\theta_1, \varphi, \psi_1 = \varphi - \theta_1$, elles parcourent tout le cercle, de même que l'angle polaire α dans le plan π. On suppose pour le moment que $i \neq 0, \frac{\pi}{2}$.

Le plan π étant obtenu par rotation d'angle i du plan horizontal autour de la ligne des noeuds Δ, on a manifestement

$$\begin{pmatrix} \sin\omega \, \cos\psi_1 \\ \sin\omega \, \sin\psi_1 \\ \cos\omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos i & -\sin i \\ 0 & \sin i & \cos i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \\ 0 \end{pmatrix}.$$

En particulier,

$$\sin\psi_1 \;=\; \cot\omega \, \cot i.$$

i étant fixé au cours d'un mouvement, on en déduit

$$d\psi_1 \;=\; -\frac{\cot i}{\sin^2\omega \, \cos\psi_1} \, d\omega.$$

De même,

$$\sin\alpha \;=\; \frac{\cos\omega}{\sin i}\,, \qquad \text{et donc} \qquad d\alpha \;=\; -\frac{1}{\sin i\,\cos\psi_1}\,d\omega.$$

On en déduit immédiatement que, pour un bon choix des constantes,

$$\theta = \theta_1,\ \psi = \psi_1,\ \text{et}\ g = \alpha - v.$$

En particulier, la ligne des nœuds Δ reste fixe au cours d'un mouvement ainsi donc que le plan π: on retrouve le fait bien connu que les trajectoires sont planes (et elliptiques lorsque l'énergie est négative).
Notons que la convention d'orientation du plan π signifie que le mouvement se fait, dans ce plan, dans le sens trigonométrique; autrement dit, φ augmente le long d'une trajectoire si $0 < i < \frac{\pi}{2}$ et diminue si $\frac{\pi}{2} < 0 < \pi$.
La figure 4 résume la signification géométrique des variables "de Delaunay" $(l, g, \theta, L, G, \Theta)$*.

$L = \sqrt{-\dfrac{m^3M^2}{2h}} = m\sqrt{M}\sqrt{a}$,
h = énergie,
a = demi-grand axe.
$G = m\sqrt{M}\sqrt{a(1-e^2)} = |\vec{C}|$,
$\vec{C}$ moment cinétique,
e excentricité.
$\Theta = G\cos i$, i inclinaison.
l anomalie moyenne,
g argument du périhélie,
θ longitude du nœud.
Toutes sauf l sont constantes,
et $n = \dfrac{dl}{dt}$ vérifie $n^2a^3 = M$.

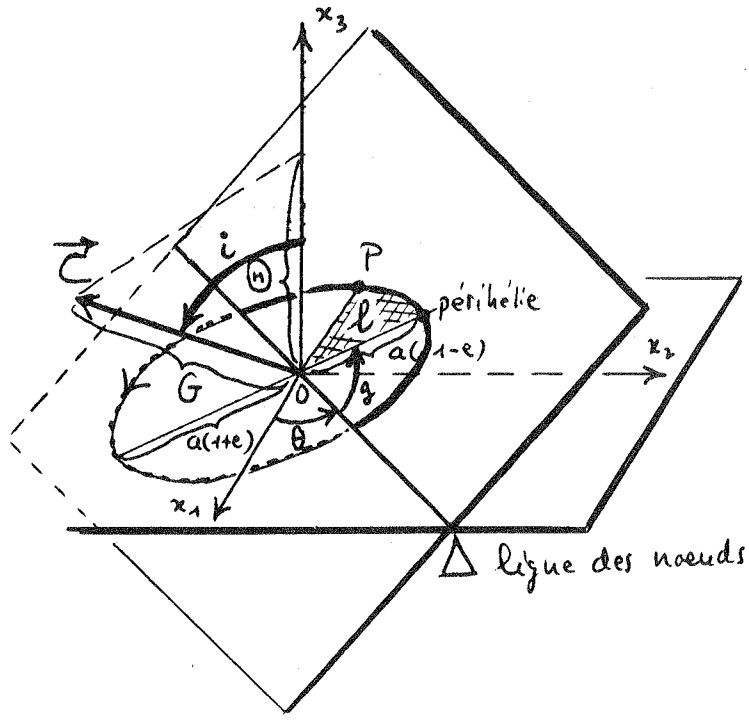

Figure 4

* Contrairement à ce qu'il fait dans les "Leçons", que nous avons suivies, Poincaré donne dans les "Méthodes Nouvelles" le nom de L,G,Θ aux quantités $\sqrt{a}$, $\sqrt{a(1-e^2)}$, et $\sqrt{a(1-e^2)}\cos i$ obtenues lorsque $m\sqrt{M}=1$. Il conviendrait donc de noter respectivement $m\sqrt{M}L$,$m\sqrt{M}G$,$m\sqrt{M}\Theta$ ce que nous avons noté L,G,Θ. Quant à Laskar, il utilise comme Delaunay les notations mL,mG,$m\Theta$.

Il nous reste à traiter le cas, à tous égards plus facile, où $\vec{C}$ est horizontal: $\cos i$ est nul, donc également Θ; on en déduit que $\theta = \varphi$, qui montre directement que le mouvement se passe dans un plan vertical fixe. Enfin,

$$g = -v + G \int \frac{d\omega}{\Omega} = -v \pm \omega + \text{constante}.$$

L'analogue de la courbe (C_2) est décrit sur la figure 5 et indique le choix des signes et de la constante pour lesquels g est encore la longitude du périhélie:

$$\begin{cases} g = -v + \omega + \frac{\pi}{2} & \text{si } \dot{\omega} > O, \\ g = -v - \omega + \frac{\pi}{2} & \text{si } \dot{\omega} < 0; \end{cases}$$

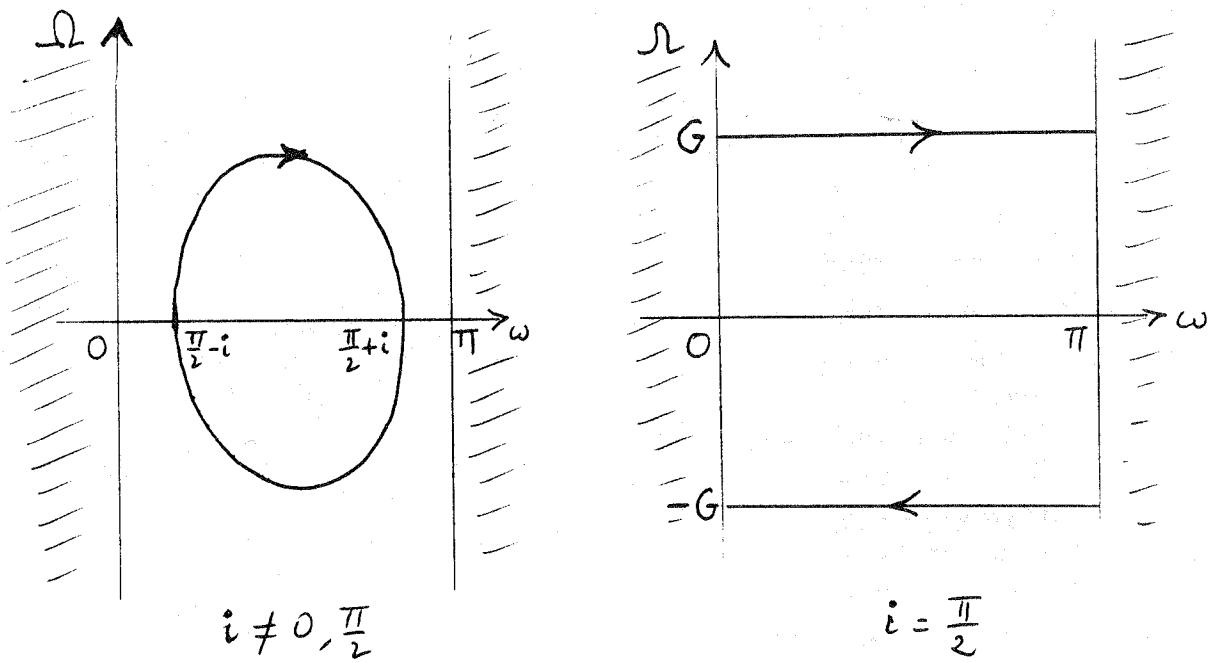

Figure 5

le problème de signe traduit simplement le passage, dans le plan vertical, de la mesure (ambigüe) des angles par la colatitude ω à celle par l'angle polaire α (figure 6).

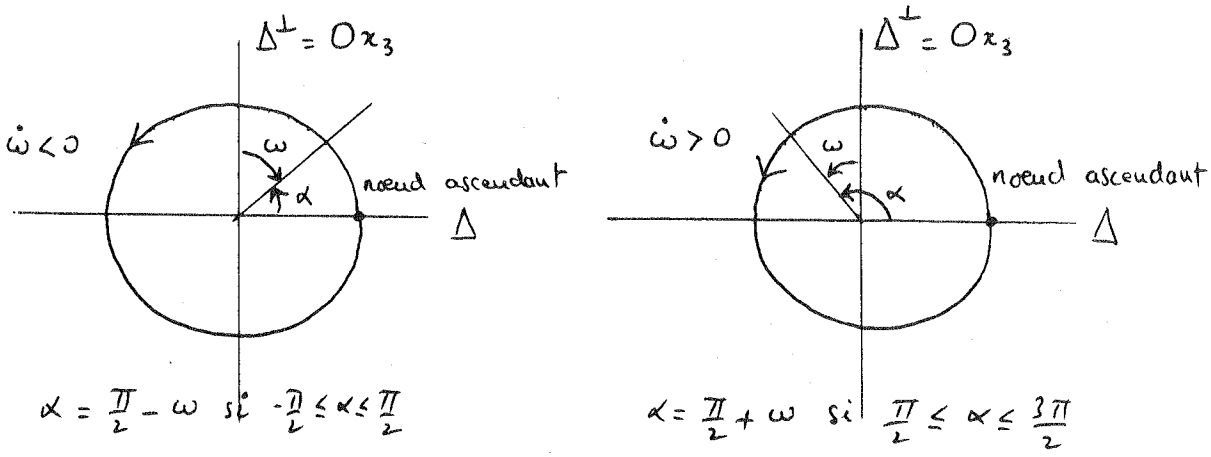

Figure 6

Pour finir, remarquons que l'on peut maintenant caractériser le domaine sur lequel le changement de variables symplectique Σ est défini: il suffit d'éviter

1) les mouvements pour lesquels

$$R^2 = -\frac{m^4 M^2}{L^2} + \frac{2m^2 M}{r} - \frac{G^2}{r^2} = 0,$$

c'est-à-dire $\dot r = 0$, autrement dit les mouvements circulaires,

2) ceux pour lesquels

$$\Omega^2 = G^2 - \frac{\Theta^2}{\sin^2 \omega} = 0,$$

c'est-à-dire $r^2\dot\omega = 0$, autrement dit les mouvements qui ont lieu dans le plan horizontal,

3) ceux enfin pour lesquels G (et donc Θ) s'annule, c'est-à-dire les mouvements menant à une collision.

Dans le premier cas c'est la longitude du périhélie g qui n'est pas définie, dans le deuxième c'est la longitude du nœud θ, dans le troisième c'est le plan de l'orbite.

Remarques :

1) Dans ses "Leçons de Mécanique céleste'" Poincaré commence par traiter le cas du mouvement dans un plan vertical; ceci revient à ne considérer que la famille à deux paramètres de solutions de l'équation de Hamilton-Jacobi obtenue à partir de S en annulant Θ et conduit à n'étudier que (C_1). La conclusion est obtenue par un argument de symétrie: on ramène en effet par rotation tout plan à devenir vertical.

Cet argument fournit effectivement une solution complète de l'équation de Hamilton-Jacobi à partir de la famille à deux paramètres de solutions considérée, mais encore faut-il vérifier que c'est bien S qu'on obtient ainsi.

2) Selon Goldstein on pouvait deviner a *priori* (hum hum !) la nature des variables g, θ:

(i) Θ étant la projection sur l'axe Ox_3 du moment cinétique, sa variable conjuguée θ est un angle fixe de rotation autour de cet axe.

(ii) G étant la longueur du moment cinétique, sa variable conjuguée g est un angle fixe dans le plan de l'orbite.

3) Les générateurs de l'homologie du tore $T_{L,G,\Theta}$ définis par les coordonnées l, g, θ ne sont pas ceux qui proviennent de sa décomposition en produit des trois "cercles" $(C_1), (C_2), (C_3)$; c'est la raison pour laquelle la recherche directe de coordonnées "action-angle" à l'aide de cette décomposition ne conduit aux variables de Delaunay qu'à un changement linéaire symplectique près de coordonnées. Les nouvelles variables d'action sont

$$\begin{cases} J_r &= L - G, \\ J_\omega &= G - \Theta, \\ J_\varphi &= \Theta, \end{cases}$$

auxquelles correspondent les angles

$$l,\ l+g,\ l+g+\theta.$$

Pour le voir, on peut utiliser les formules

$$J_r = \frac{1}{2\pi}\oint_{(C_1)} \frac{\partial S}{\partial r}\, dr, \quad J_\omega = \frac{1}{2\pi}\oint_{(C_2)} \frac{\partial S}{\partial \omega}\, d\omega, \quad J_\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Theta\, d\varphi,$$

pour calculer les dérivées partielles de J_r, J_ω, J_φ par rapport à L, G, Θ, ou simplement remarquer que les courbes (C_1), (C_2), (C_3) sont respectivement paramétrées par l, $v' + g'$, $v' + g' + \theta$ (les notations sont sur la figure 7). Rappelons qu'un changement de coordonnées linéaires de la forme $\begin{pmatrix} A & O \\ 0 & B \end{pmatrix}$ est symplectique (et donc ne change pas la forme canonique des équations) si et seulement si $B = {}^{tr}(A^{-1})$, ce qui indique comment calculer les nouveaux angles à partir des nouvelles actions ou réciproquement.

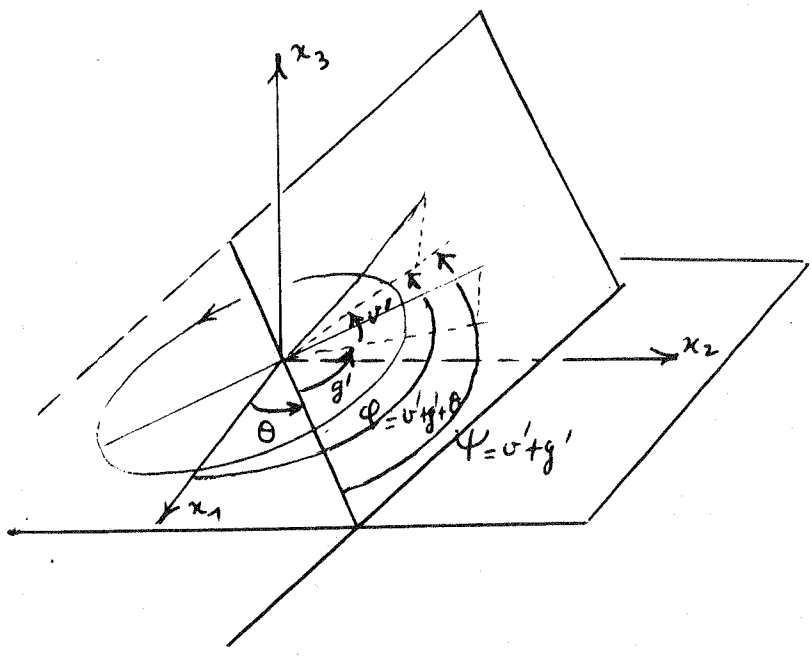

Figure 7

4) Poincaré utilise, pour l'étude des orbites de faibles excentricité et inclinaison, un système de coordonnées obtenu à partir de variables actions-angles $(\Lambda, H, Z, \lambda, h, \zeta)$ peu différentes des précédentes :

$$\begin{cases} \Lambda = L, \quad H = L - G, \quad Z = G - \Theta, \\ \lambda = l + g + \theta, \quad h = -g - \theta, \quad \zeta = -\theta. \end{cases}$$

Les *variables de Poincaré* $(\Lambda, \xi, p, \lambda, \eta, q)$ s'obtiennent en considérant les couples (H, h) et (Z, ζ) comme des coordonnées polaires symplectiques planes :

$$\begin{cases} \sqrt{2H}\cos h = \xi, \quad \sqrt{2H}\sin h = \eta, \\ \sqrt{2Z}\cos\zeta = p, \quad \sqrt{2Z}\sin\zeta = q, \end{cases}$$

ce qui permet de prolonger leur signification aux cas où $H = 0$ (excentricité nulle) ou $Z = 0$ (inclinaison nulle). Elles sont analytiques ! (cf complément).

Conclusion: nous décrirons brièvement la position dans l'ensemble des mouvements Kepleriens d'énergie $h < 0$ donnée, de ceux que l'on peut décrire à l'aide des coordonnées de Delaunay.

La surface Σ_h d'énergie h est définie dans $(R^3 - 0) \times R^3$ par l'équation

$$\frac{1}{2m}\|y\|^2 - \frac{mM}{\|x\|} = h;$$

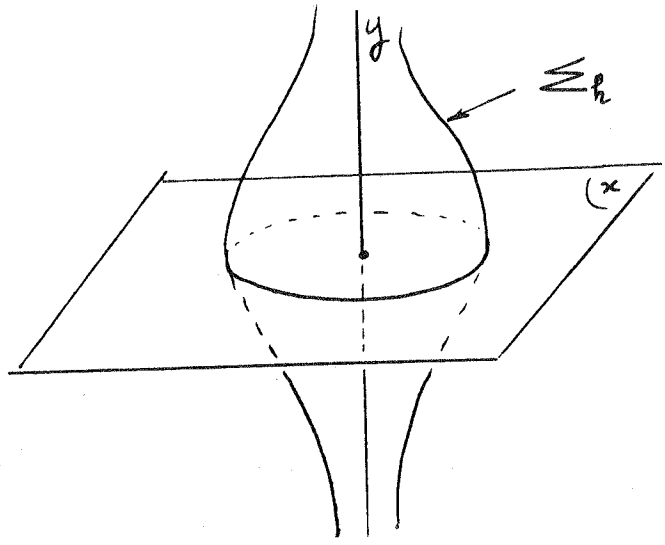

Figure 8

elle est difféomorphe, lorsque h est négatif, à $S^2 \times R^3$ (figure 8) et le flot qu'elle porte peut être régularisé, ce qui rend nettement plus agréable sa description.

Ajoutant à l'infini une sphère S^2 de collisions, la régularisation plonge Σ_h dans le fibré tangent unitaire $T^1S^3 = S^3 \times S^2$ de la sphère S^3 et transforme le flot du problème de Kepler en le flot géodésique de la sphère ronde S^3 (voir J.Moser *Regularisation and the Kepler problem*, Communications on Pure and Applied Mathematics, vol. XXIII, 609-636 (1970) et J.Milnor *On the geometry of the Kepler problem*, American Mathematical Monthly, vol. 90 $n°6$, 353-365 (1983)). L'application associant à un grand cercle orienté de la sphère unité S^3 de R^4 le 2-plan orienté qu'il définit identifie l'ensemble des courbes intégrales de ce flot géodésique à la grassmannienne $\tilde{G}_{2,4}$ des 2-plans orientés de R^4. Il est bien connu que cette dernière est difféomorphe à $S^2 \times S^2$: voici une manière, que m'a communiquée A. Albouy *, de décrire directement la correspondance entre éléments de $S^2 \times S^2$ et mouvements Kepleriens (i.e. orbites du flot) dans Σ_h (figure 9) :

on commence par identifier S^2 à la sphère de R^3 de centre 0 et de diamètre égal à la valeur maximale G_h de $G = |\vec{C}|$ sur Σ_h. A un couple $(x, y) \in S^2 \times S^2$, $x \neq y$, on fait correspondre l'unique mouvement dont le moment cinétique $\vec{C}$ soit égal au vecteur $\vec{xy}$ et la direction du périhélie donnée, lorsque $x \neq y$ (orbites non circulaires), par le vecteur joignant 0 au point où le segment $[xy]$ perce le plan de l'orbite . Si $x = y$, le mouvement correspondant aboutit à une collision suivant la demi-droite

* qui a constaté par la suite qu'elle se trouvait déjà exposée en appendice dans le livre "Linear and regular celestial mechanics" de Stiefel et Scheifele.

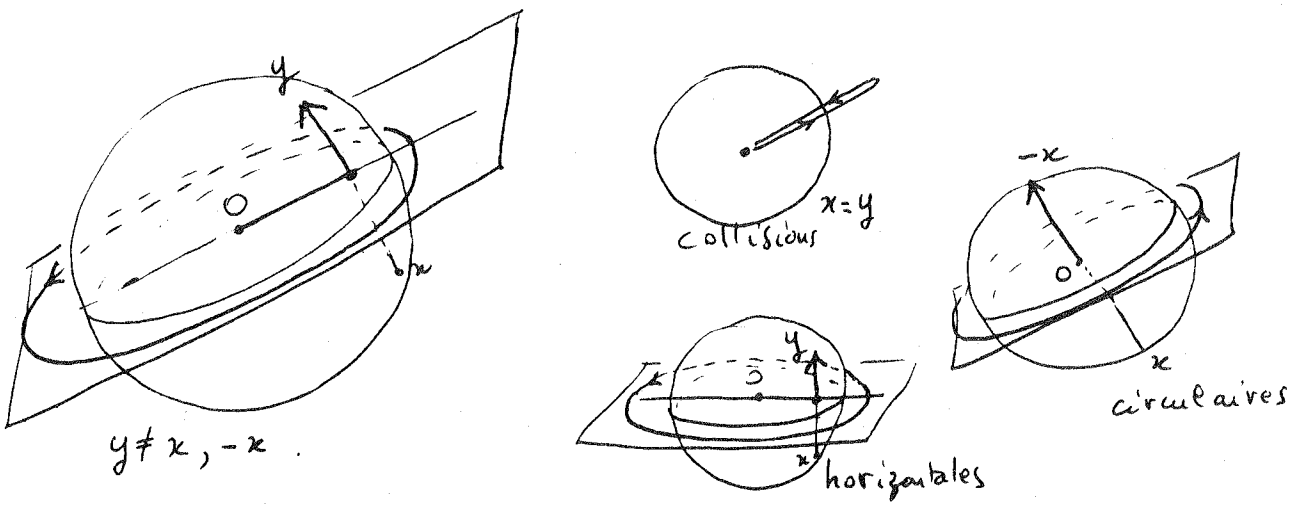

Figure 9

Ox ($\vec{C}=\vec{0}$) et sa régularisation est un aller-retour sur un segment de cette même demi-droite. On notera que l'ellipse associée au couple (x, y) s'obtient encore, à translation et rotation de $\pi/2$ près, par projection sur le plan médiateur du segment $[x, y]$, du grand cercle orthogonal à Ox dans la sphère de rayon a.

L'ensemble (D) des mouvements (orbites) descriptibles dans les coordonnées de Delaunay est difféomorphe au produit $T^2 \times \text{int}(\Delta_h)$ d'un tore de dimension deux (paramétré par les angles g et θ) par l'intérieur du triangle Δ_h image de l'application (G, Θ) de Σ_h dans R^2 (figure 10).

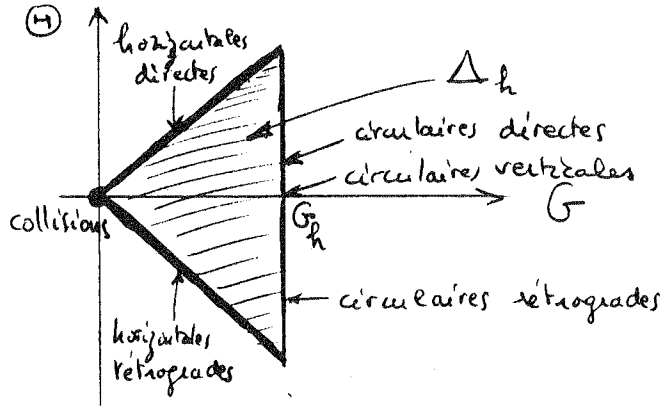

Figure 10

L'équation de Δ_h est manifestement

$$O \leq |\Theta| \leq G.$$

Quant au complémentaire de (D) dans $S^2 \times S^2$, c'est la réunion de trois sphères de dimension deux:

(i) celle des orbites circulaires

$$S^2_{cir} = \left\{(x,y) \in S^2 \times S^2,\ x = -y\right\},$$

(ii) celle des orbites horizontales

$$S^2_{hor} = \left\{(x,y) \in S^2 \times S^2,\ \overrightarrow{xy} \text{ vertical}\right\},$$

(iii) celle des collisions

$$S^2_{col} = \left\{(x,y) \in S^2 \times S^2,\ x = y\right\},$$

qui vérifient manifestement

$$S^2_{cir} \cap S^2_{col} = \emptyset,\ S^2_{cir} \cap S^2_{hor} \cong S^0,\ S^2_{hor} \cap S^2_{col} \cong S^1$$

(la sphère de dimension zéro S^0 correspond aux deux orbites circulaires horizontales et celle de dimension un S^1 au "'cercle" des orbites horizontales de collision).

Il n'est pas difficile de voir que le complémentaire de la réunion de ces trois sphères dans $S^2 \times S^2$ est difféomorphe à $T^2 \times R^2$:

1) L'application

$$\pi : S^2 \times S^2 - S^2_{cir} \rightarrow S^2$$

qui à un couple (x,y) de points non antipodaux de S^2 associe le milieu $\pi(x,y)$ de l'unique arc aigu qu'ils définissent est une fibration isomorphe au fibré tangent en boules ouvertes T_0S^2 de S^2. En effet, l'image réciproque $\pi^{-1}(z)$ d'un point z de S^2 s'identifie canoniquement à l'hémisphère ouvert centré sur z (x et $\pi(x,y)$ suffisent à définir y); enfin, cet hémisphère est en correspondance naturelle avec l'ensemble des vecteurs de longueur strictement inférieure à 1 tangents en z à S^2 (figure 11).

2) Le complémentaire de S^2_{col} dans $S^2 \times S^2 - S^2_{cir}$ s'identifie alors au complémentaire de la section nulle du fibré T_0S^2, naturellement difféomorphe au produit $T_1S^2 \times R \cong SO(3) \times R$ (T_1S^2 est le fibré tangent unitaire, sous-espace de TS^2 formé des vecteurs tangents de longueur 1.

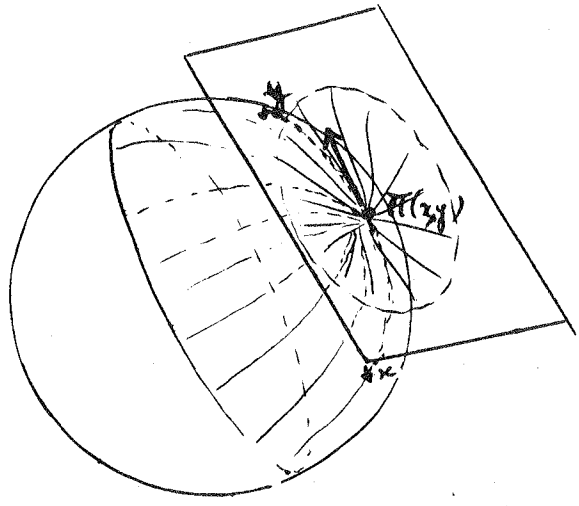

Figure 11

3) Enlever la sphère S^2_{hor}, revient alors à prendre le complémentaire, dans T_0S^2 privé de sa section nulle, de l'ensemble des vecteurs verticaux tangents à S^2 aux points du cercle horizontal, ou encore le produit par R du complémentaire dans T_1S^2 de l'ensemble des vecteurs verticaux de longueur 1 tangents à S^2 aux points du cercle horizontal. Ce dernier ensemble, complémentaire dans $SO(3)$ de deux cercles enlacés est difféomorphe au produit $T^2 \times R$: on peut le voir directement ou encore remarquer qu'après rotation de $\frac{\pi}{2}$ des vecteurs dans leurs plans tangents respectifs, il devient le complémentaire dans T_1S^2 des deux orbites du flot géodésique de la sphère ronde S^2 qui correspondent à un même grand cercle parcouru dans les deux sens - autrement dit le complémentaire des orbites circulaires dans une surface d'énergie régularisée du problème de Képler dans le plan, qu'on peut paramétrer par l'analogue plan des coordonnées de Delaunay G, l, g.

Remarque: La possibilité de choisir de manière canonique (en particulier continue) un point privilégié (périhélie ou aphélie*) sur chaque orbite non circulaire montre qu'au-dessus de $S^2 \times S^2 - S^2_{cir}$, l'application qui à un point de la surface d'énergie régularisée fait correspondre son orbite sous le flot de Képler régularisé est une fibration triviale: elle possède en effet une "section", difféomorphe à $S^2 \times S^2 - S^2_{cir} \cong T_0S^2$, qui coupe chaque fibre (orbite du flot) en un seul point. L'adhérence de cette section dans la surface d'énergie régularisée s'obtient en ajoutant la réunion (difféomorphe à $SO(3)$) de toutes les orbites circulaires: on obtient $T_\bullet S^2$, fibré en boules fermées tangent à S^2 dont le bord T_1S^2 est

* Nous faisons le choix du périhélie qui a l'avantage de conduire à une section contenant la sphère des collisions.

bien difféomorphe à $SO(3)$. C'est l'analogue de l'anneau de section de Poincaré dans le problème de Képler plan. Dans ce dernier cas, T^1S^3 est remplacé par $T^1S^2 \cong SO(3)$, et $T_\bullet S^2$ par $T_\bullet S^1 \cong S^1 \times [0,1]$. Notons que, aussi bien dans l'espace que dans le plan, l'application de premier retour sur la "surface de section" est l'identité (figure 12 dans le cas plan après passage au revêtement à deux feuillets S^3 de $SO(3)$ où elle devient la rotation de π de l'anneau $T_\bullet S^1$. Pour de plus amples détails on se reportera au cours de A. Chenciner *Le problème de la lune et la théorie des systèmes dynamiques* à l'Université Paris VII, basé sur la thèse de C. Conley).

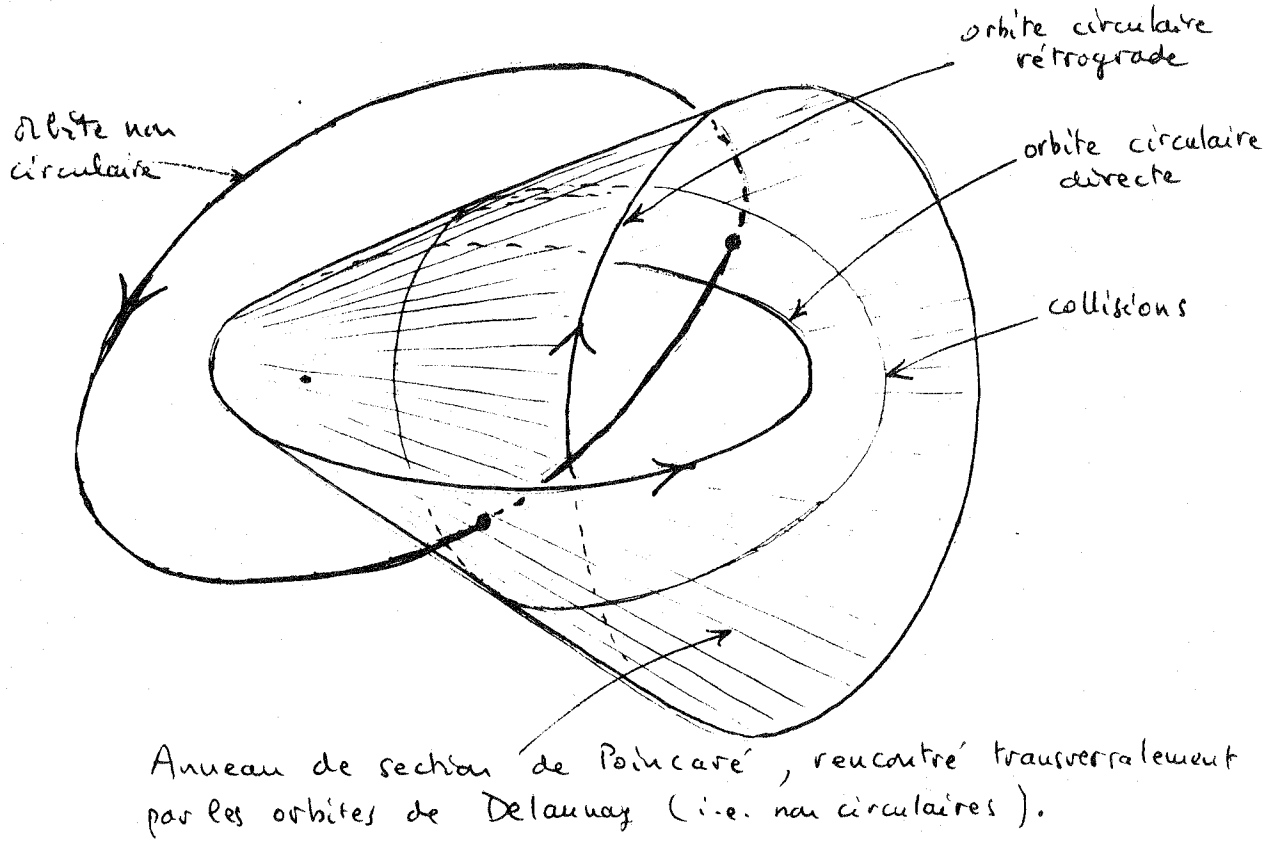

Figure 12

Remarque. G et g forment un système de coordonnées globales dans l'anneau de section du problème plan. Dans l'espace au contraire, nous avons vu que G, Θ, g, θ ne permettent de décrire qu'une partie de $T_\bullet S^2$.

Intégration du problème de Kepler par la méthode de Hamilton-Jacobi : Corrections

page 1 Dans l'introduction on note que, dans son traité de Mécanique Céleste en 1888, Tisserand utilisait la méthode de Hamilton-Jacobi pour obtenir les coordonnées de Delaunay. Il faut préciser que la thèse de Tisserand, qui date de 1868, porte le titre suivant : *Exposition, d'après les principes de Jacobi, de la méthode suivie par M. Delaunay dans sa théorie du mouvement de la lune autour de la terre; extension de cette méthode.*

page 1 La véritable justification du choix $m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ vient de l'utilisation des *coordonnées héliocentriques canoniques* dans le problème des $1 + n$ corps (voir le compte-rendu "séries de Lindstedt", début de l'appendice 2).

Remarque : afin de ne pas utiliser deux fois la lettre G, il est préférable de noter γ la constante universelle de gravitation. Si on ne désire pas l'égaler à 1, il faudra remplacer partout $m\sqrt{M}$ par $m\sqrt{M}$; en particulier, $L, G, \Theta, \Lambda, H, Z$ sont multipliés par $\sqrt{\gamma}$, et ξ, η, p, q par $\sqrt[4]{\gamma}$. $\sqrt{\gamma}$

page 7 Noter que l'inclinaison i varie de 0 à π.

Intégration du problème de Kepler par la méthode de Hamilton-Jacobi (suite) : coordonnées de Poincaré

par Alain Chenciner
Université Paris VII

On montre, en suivant le chapitre III des "Leçons de Mécanique Céleste", l'analyticité des coordonnées de Poincaré. On étudie ensuite la topologie de l'ensemble des orbites décrites par ces coordonnées.

Nous avons défini les *coordonnées de Poincaré* $(\lambda, \Lambda, \xi, \eta, p, q)$ par les formules

$$\begin{cases} \Lambda = L, \quad H = L - G, \quad Z = G - \Theta, \\ \lambda = l + g + \theta, \quad h = -g - \theta, \quad \zeta = -\theta\,, \\ \xi = \sqrt{2H}\cos h, \quad \eta = \sqrt{2H}\sin h, \\ p = \sqrt{2Z}\cos\zeta, \quad q = \sqrt{2Z}\sin\zeta\,. \end{cases}$$

Les angles $\lambda = l+g+\theta, -h = g+\theta, -\zeta = \theta$ sont appelés respectivement *longitude moyenne*, *longitude du périhélie*, *longitude du nœud*. Enfin, Poincaré qualifie d'*excentriques* les variables ξ, η et d'*obliques* les variables p, q. Cela vient bien entendu de ce qu'au voisinage des mouvements circulaires horizontaux directs ($e = i = 0$) on a

$$\begin{cases} \sqrt{\xi^2+\eta^2} = \sqrt{\Lambda}\, e\big(1 + O(e^2)\big)\,, \\ \sqrt{p^2+q^2} = \sqrt{\Lambda}\, i\big(1 + O(e^2) + O(i^2)\big)\,. \end{cases}$$

Dans le chapitre III du premier tome des *Leçons de Mécanique Céleste*, Poincaré montre en grand détail l'analyticité du passage des coordonnées $\lambda, \Lambda, \xi, \eta, p, q$ (qu'il note $\lambda, \Lambda, \xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2$) aux coordonnées cartésiennes initiales $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3$. Nous reproduisons ici cette démonstration d'une élégante simplicité.

1) On développe les formules exprimant les x_i en coordonnées polaires (page 1)* à l'aide de l'identité $\varphi = \psi + \theta$ (pages 8 et 9), et on utilise l'identité matricielle de la page 8 ($\sin\omega\cos\psi = \cos\alpha$, etc$\cdots$) pour éliminer les angles ω et ψ. Enfin, on écrit $\alpha = g + v$ (page 9) sous la forme $\alpha = g + l + v - l$. Posant

$$X = r\cos(v - l)\,, \quad Y = r\sin(v - l)\,,$$

* Les références de page concernent la première partie du texte sous-titrée "coordonnées action-angles de Delaunay".

on obtient, au changement de notations près*, les formules de la page 79 des *Leçons* :

$$\begin{cases} x_1 = & X\left[\cos(g+l)\cos\theta - \sin(g+l)\sin\theta\cos i\right] \\ & -Y\left[\sin(g+l)\cos\theta + \cos(g+l)\sin\theta\cos i\right], \\ x_2 = & X\left[\cos(g+l)\sin\theta + \sin(g+l)\cos\theta\cos i\right] \\ & +Y\left[-\sin(g+l)\sin\theta + \cos(g+l)\cos\theta\cos i\right], \\ x_3 = & X\sin(g+l)\sin i + Y\cos(g+l)\sin i\,. \end{cases}$$

2) Remplaçant $g+l$ par $\lambda-\theta$, $\cos i$ par $\cos^2\frac{i}{2}-\sin^2\frac{i}{2}$ et 1 par $\cos^2\frac{i}{2}+\sin^2\frac{i}{2}$, on obtient les formules (12 bis) de la page 80 des *Leçons*:

$$\begin{cases} x_1 = & X\left[\cos^2\frac{i}{2}\cos\lambda + \sin^2\frac{i}{2}\cos(\lambda+2\zeta)\right] \\ & -Y\left[\cos^2\frac{i}{2}\sin\lambda + \sin^2\frac{i}{2}\sin(\lambda+2\zeta)\right], \\ x_2 = & X\left[\cos^2\frac{i}{2}\sin\lambda - \sin^2\frac{i}{2}\sin(\lambda+2\zeta)\right] \\ & +Y\left[\cos^2\frac{i}{2}\cos\lambda - \sin^2\frac{i}{2}\cos(\lambda+2\zeta)\right], \\ x_3 = & X\sin i\sin(\lambda+\zeta) + Y\sin i\cos(\lambda+\zeta)\,. \end{cases}$$

On notera que les formules du cas plan s'obtiennent en faisant $\theta = i = 0$, ce qui rend naturelle la définition de X et Y.

3) On déduit des formules de la page 5 donnant r et $s = \frac{1}{r}$ en fonction des *anomalies vraie* v et *excentrique* u, les identités

$$r\cos v = a(\cos u - e)\,, \quad r\sin v = a\sqrt{1-e^2}\sin u\,;$$

Développant X et Y on obtient

$$\begin{cases} X = a(\cos u - e)\cos l + a\sin u\,\sqrt{1-e^2}\sin l\,, \\ Y = -a(\cos u - e)\sin l + a\sin u\,\sqrt{1-e^2}\cos l\,, \end{cases}$$

que Poincaré écrit, à la page 82 des *Leçons*,

$$\begin{cases} \dfrac{X}{a} = \cos(u-l)\dfrac{1+\sqrt{1-e^2}}{2} + e^2\cos(u+l)\dfrac{1-\sqrt{1-e^2}}{2e^2} - e\cos l\,, \\ \dfrac{Y}{a} = \sin(u-l)\dfrac{1+\sqrt{1-e^2}}{2} - e^2\sin(u+l)\dfrac{1-\sqrt{1-e^2}}{2e^2} + e\sin l\,. \end{cases}$$

* Poincaré note $\omega_1,\omega_2,\rho_1,\rho_2,\xi_1,\eta_1,\xi_2,\eta_2,\zeta$ ce que nous notons $h,\zeta,H,Z,\xi,\eta,p,q,\alpha$.

On en déduit qu'au voisinage de $e = 0$, X et Y s'écrivent comme séries entières convergentes en $e\cos l, e\sin l$, à coefficients analytiques en $\Lambda > 0$. En effet, on déduit de l'identité de Kepler (page 6)

$$u - l = e\sin u = e\sin(u - l + l)\,,$$

et du *Théorème des fonctions implicites*, que $u - l$ est une fonction analytique de $e\cos l$ et $e\sin l$ pour e voisin de 0. Il en est donc de même de $\cos(u - l)$ et $\sin(u - l)$, ainsi que de

$$e^2\cos(u + l) = (e^2\cos^2 l - e^2\sin^2 l)\cos(u - l) - 2e^2\sin l\cos l\sin(u - l)\,,$$

et

$$e^2\sin(u + l) = (e^2\cos^2 l - e^2\sin^2 l)\sin(u - l) + 2e^2\sin l\cos l\cos(u - l)\,.$$

On conclut en remarquant que $e^2 = e^2\cos^2 l + e^2\sin^2 l$ et $a = \dfrac{\Lambda^2}{m^2M}$.

4) On développe $e\cos l = e\cos(\lambda + h)$ et $e\sin l = e\sin(\lambda + h)$, et on écrit la définition de ξ, η sous la forme

$$e\cos h = \frac{e}{\sqrt{2H}}\xi\,, \quad e\sin h = \frac{e}{\sqrt{2H}}\eta\,.$$

Enfin, on déduit de

$$H = L - G = \Lambda\big(1 - \sqrt{1 - e^2}\big)$$

l'identité

$$\left(\frac{H}{\Lambda}\right)^2 = 2\left(\frac{H}{\Lambda}\right) - e^2\,,$$

c'est-à-dire (il y a une erreur de signe à la page 81 des *Leçons*)

$$\frac{e}{\sqrt{2H}} = \sqrt{\frac{1}{\Lambda} - \frac{H}{2\Lambda^2}} = \sqrt{\frac{1}{\Lambda} - \frac{\xi^2 + \eta^2}{4\Lambda^2}}\,.$$

X et Y s'écrivent donc, pour e petit, comme séries entières convergentes en ξ, η à coefficients analytiques en $\Lambda > 0, \lambda$.

5) Les coefficients de X, Y dans les expressions de x_1, x_2, x_3 données en 2) s'écrivent, pour $i < \pi$, comme séries entières convergentes en $\sin\frac{i}{2}\cos\zeta, \sin\frac{i}{2}\sin\zeta$ à coefficients analytiques en λ : le seul point non immédiat est que, i variant entre 0 et π, on a $\cos\frac{i}{2} = \sqrt{1 - \sin^2\frac{i}{2}}$, donc

$$\sin i\cos\zeta = \sin\frac{i}{2}\cos\zeta\sqrt{1 - \left(\sin\frac{i}{2}\cos\zeta\right)^2 - \left(\sin\frac{i}{2}\sin\zeta\right)^2}\,.$$

Pour la même raison, $\sqrt{\frac{1-\cos i}{2}} = \sin\frac{i}{2}$, d'où l'on déduit

$$\begin{cases} p = 2\sqrt{\Lambda - H}\sin\frac{i}{2}\cos\zeta\,, \\ q = 2\sqrt{\Lambda - H}\sin\frac{i}{2}\sin\zeta\,. \end{cases}$$

Puisque $H = \frac{1}{2}(\xi^2+\eta^2)$, on voit que x_1, x_2, x_3 s'écrivent pour e assez petit et $i < \pi$ comme séries entières convergentes en ξ, η, p, q à coefficients analytiques en $\Lambda > 0, \lambda$.

6) La conclusion vaut aussi pour les $y_i = m\frac{dx_i}{dt} = \frac{m^4M^2}{\Lambda^3}\frac{\partial x_i}{\partial\lambda}$.

7) On déduit facilement de ce qui précède que l'application

$$(\lambda, \Lambda, \xi, \eta, p, q) \mapsto (x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3)$$

est un difféomorphisme analytique sur son image. Son domaine de définition est le sous-ensemble $\mathcal{D}$ de $T^1 \times R_+ \times R^4$ difféomorphe à $T^1 \times R_+ \times R^4$ défini par la condition

$$2(\xi^2+\eta^2) + p^2 + q^2 < 4\Lambda\,,$$

qui ne fait que traduire les inégalités

$$0 \le e < 1\,, \quad 0 \le i < \pi\,.$$

On a en effet

$$\begin{cases} \xi^2+\eta^2 = 2\Lambda\big(1-\sqrt{1-e^2}\big)\,, \\ p^2+q^2 = 2\Lambda\sqrt{1-e^2}(1-\cos i) = \big(2\Lambda - (\xi^2+\eta^2)\big)(1-\cos i)\,. \end{cases}$$

L'image de $\mathcal{D}$ est l'ensemble des conditions initiales menant à une ellipse keplerienne qui ne soit ni de collision ni horizontale rétrograde.

Pour finir, montrons directement que, dans l'ensemble difféomorphe à $S^2 \times S^2$ des ellipses kepleriennes orientées (éventuellement dégénérées) d'énergie fixée (i.e. à Λ fixé), celles qui ne sont ni de collision ni horizontales rétrogrades forment un sous-espace $\mathcal{P}$ difféomorphe à R^4 dans lequel ξ, η, p, q sont des coordonnées globales :

1) les ellipses dégénérées (collisions) correspondent à la diagonale S^2_{col} de $S^2 \times S^2$. Le raisonnement de la page 16 montre que l'application

$$\tilde{\pi} : S^2 \times S^2 - S^2_{col} \to S^2$$

qui à $(x, y), x \neq y$, associe le milieu du petit arc de grand cercle joignant $-x$ à y, est une fibration isomorphe au fibré tangent en disques ouverts

T_0S^2 de S^2. Notons que $\tilde{\pi}(x,y)$ s'interprète encore comme l'intersection avec S^2 de la normale au plan orienté de l'ellipse associée au couple (x,y). En particulier, les ellipses horizontales et rétrogrades correspondent à la fibre $\tilde{\pi}^{-1}(S)$ du pôle Sud. L'ensemble $\mathcal{P}$ des ellipses qui nous intéressent s'identifie donc à $T_0S^2 - \tilde{\pi}^{-1}(S) = T_0(S^2 - S)$, fibré tangent en disques ouverts de $S^2 - S$. Ce dernier espace étant difféomorphe à R^2, son fibré tangent est trivial et $\mathcal{P}$ est difféomorphe à $R^2 \times intD^2$, c'est à dire à R^4.

2) Sur $S^2 - S$, identifié à l'ensemble des plans orientés de R^3 autres que le plan horizontal rétrograde, les coordonnées $i\cos\theta, i\sin\theta$ sont très naturelles. De même,

$$e\cos(g+\theta)\,,\ e\sin(g+\theta)\,,\ i\cos\theta\,,\ i\sin\theta$$

sont des coordonnées naturelles (mais non symplectiques) sur $\mathcal{P}$ et on passe de celles-ci aux coordonnées de Poincaré par un difféomorphisme analytique. La figure A représente l'application

$$(i,e) \mapsto \left(\sqrt{p^2+q^2}, \sqrt{\xi^2+\eta^2}\right).$$

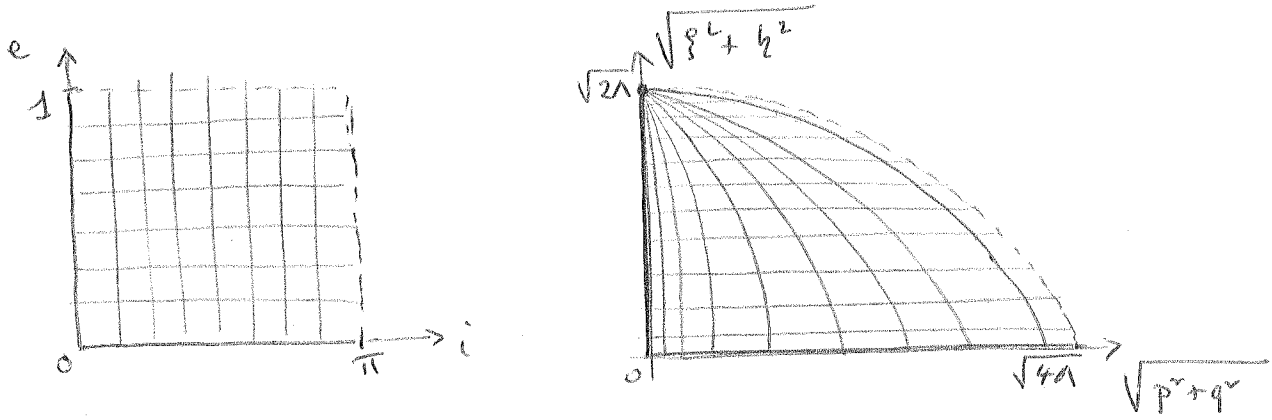

Figure A