

Éloge de Poincaré

Cimetière du Montparnasse, 9 juillet 2012

Alain Chenciner

Mesdames, Messieurs, membres de la famille d'Henri Poincaré, représentants d'institutions ou de sociétés savantes, mathématiciens, philosophes, physiciens, journalistes, passants, curieux, poètes ... C'est un homme encore jeune, 58 ans, un homme en pleine possession de son génie, je le vois, assis à sa table de travail, une main posée sur le rebord, l'autre étendue sur la jambe légèrement repliée, le regard tourné vers l'intérieur, derrière le lorgnon, les cheveux légèrement hérissés, les sourcils relevés, si proche et si lointain, ... Cet homme, c'est à lui que je m'adresse aujourd'hui en votre nom, avec à la fois le respect que commande son ombre immense et la familiarité que produit un long commerce avec sa pensée, dont la force et la nouveauté sont, aujourd'hui encore, intactes.

Henri Poincaré, permets que je te dise « tu » ; après tout, tu es encore bien jeune ; et n'avons-nous pas fréquenté la même école où il est d'usage de s'appeler « cher camarade » ? Prononcer ton éloge ! Autant passer en revue une grande partie de la mathématique et de la physique du 20^e siècle et aussi les nouvelles technologies et la philosophie des sciences. Mais aucun tableau noir ici, pas de formules, pas même de figures pour honorer le géomètre. Il me faut donc essayer avec de simples mots de faire vivre les paysages que tu nous as fait découvrir, les continents que tu nous as donnés à explorer.

Tu es né le 29 avril 1854 à Nancy, dans une famille de la grande bourgeoisie lorraine. Ton père, Léon Poincaré, est neurologue et enseigne à la faculté de médecine ; ton oncle, Antoine Poincaré, est polytechnicien, ingénieur en chef des Ponts et Chaussées ; Raymond Poincaré, qui sera Président de la République de 1913 à 1920, est un cousin ; ta femme, Louise Poulain d'Andecy, que tu épouseras en 1881, est apparentée par sa mère à Etienne Geoffroy Saint-Hilaire...

À seize ans, tu es confronté à la guerre, à l'occupation, et cela te marque profondément. Tes dons se manifestent avec un tranquille éclat dès l'adolescence. Paul Appell, ton compagnon en classe préparatoire, décrira la déjà déroutante concision des solutions que tu donnes aux problèmes proposés, allant droit au but tel un voyant, sans s'embarrasser d'explications intermédiaires. Tu choisis de rentrer à l'École Polytechnique, où tu as été reçu premier.

Heureuse époque pour les mathématiques à l'École Polytechnique, si différente d'aujourd'hui. La tradition de Monge, Lagrange, Poisson, Fourier, Cauchy, est bien vivante. Quoiqu'en tous points opposé à ta forme d'esprit, Hermite, l'anti-géomètre qui a remplacé Bertrand, t'influence profondément par son cours d'analyse, qui fait la part belle aux équations différentielles. Célèbre en particulier pour sa preuve de la transcendance du nombre e , il inspirera tes études des formes quadratiques et ternaires. Hadamard a parfaitement décrit l'opposition de vos deux natures :

« Face à une découverte d'Hermite, on est enclin à dire :

– Admirable qu'un être humain ait pu parvenir à une manière de penser si extraordinaire !

Mais, lisant un mémoire de Poincaré, on dit :

– Comment se fait-il que l'on ne soit pas arrivé beaucoup plus tôt à des choses aussi profondément naturelles et logiques ? »

Ta première publication date de cette époque. Trace plus anecdotique de ton passage à l'X, un superbe diagramme envoyé à ta mère, qui décrit avec une parfaite précision l'évolution de ton rhume.

Sorti second, tu entres en octobre 1875 à l'École des Mines et es nommé en 1878 ingénieur à Vesoul.

En 1879, tu soutiens une thèse intitulée « Sur les propriétés des fonctions définies par les équations aux différences partielles ».

L'un des lemmes de ta thèse est le début de la théorie des *formes normales*, c'est-à-dire de la recherche de changements de coordonnées locales qui rendent la plus apparente possible la géométrie de la situation.

Si la commission, composée de Jean-Claude Bouquet, Pierre-Ossian Bonnet et Gaston Darboux, est impressionnée par les résultats, elle critique cependant la rédaction, parfois obscure et imprécise. Ce sera un trait constant de tes écrits : ta pensée est trop rapide, tes intérêts trop multiples. Une fois acquis le résultat, tu n'as pas le temps de revenir sur ta rédaction pour la polir. D'autres problèmes t'occupent déjà. Darboux l'exprimera bien plus tard : « une fois au sommet, il ne revenait jamais sur ses pas ». Un bel exemple se trouve dans le paragraphe 341, chapitre XXIX, du volume 3 de tes *Méthodes nouvelles de la mécanique céleste*, paru en 1899 : « *Jusqu'ici, quand j'ai dit, telle intégrale est minimum, je me suis servi d'une façon de parler abrégée, mais incorrecte, qui ne pouvait d'ailleurs tromper personne ; je voulais dire, la variation première de cette intégrale est nulle ; cette condition est nécessaire pour qu'il y ait minimum, mais elle n'est pas suffisante* ».

Géométrie, groupe, les maîtres mots ! Tu développes la théorie des fonctions fuchsienues, vaste généralisation des fonctions elliptiques, dans le but explicite d'intégrer les équations différentielles linéaires à coefficients algébriques. Mais c'est la découverte du lien étroit avec la géométrie non-euclidienne qui te permet d'atteindre le but. Les fonctions fuchsienues te conduisent naturellement au théorème d'uniformisation. Si, en 1882, tu en annonces, ainsi que Klein, une démonstration, il faudra attendre 1907 pour que tu aies enfin, en même temps que Koebe, une démonstration complète de ce théorème qui, couronnant l'œuvre de Riemann, domine les mathématiques du 19^e siècle.

L'année 1881, celle de ton mariage, est décidément miraculeuse. Remplaçant l'étude analytique locale dans le champ complexe (celle de Briot et Bouquet) par une étude qualitative globale dans le champ réel, tu bouleverses la théorie des équations différentielles et crées ce qu'on appelle aujourd'hui la *théorie des systèmes dynamiques*. Y figure par exemple ton « théorème de l'indice » affirmant que, pour un champ de vecteurs sur la sphère, le nombre de nœuds et de foyers est égal au nombre de cols augmenté de 2. Te rappelles-tu l'introduction de ton mémoire *Sur les courbes définies par une équation différentielle ?* « *Prenons, par exemple, le problème des trois corps : ne peut-on pas se demander si l'un des corps restera toujours dans une certaine région du ciel ou bien s'il pourra s'éloigner indéfiniment ; si la distance de deux corps augmentera, ou diminuera à l'infini, ou bien si elle restera comprise entre certaines limites ? Ne peut-on pas se poser mille questions*

de ce genre, qui seront toutes résolues quand on saura construire qualitativement les trajectoires des trois corps ? Et, si l'on considère un nombre plus grand de corps, qu'est-ce que la question de l'invariabilité des éléments des planètes, sinon une véritable question de géométrie qualitative, puisque, faire voir que le grand axe n'a pas de variations séculaires, c'est montrer qu'il oscille constamment entre certaines limites. Tel est le vaste champ de découvertes qui s'ouvre devant les géomètres... » Voici donc le moment où, à 27 ans, tu comprends que la connaissance analytique explicite d'une solution d'une équation différentielle peut n'apporter que très peu d'information effective sur le comportement du système qu'elle décrit.

Mais bientôt, tout en faisant des apports décisifs à l'arithmétique (formes quadratiques, forme automorphes) et à la géométrie algébrique (fonctions abéliennes), tu fais les premières incursions dans le domaine inexploré des fonctions de deux variables complexes (fonctions méromorphes, domaines d'holomorphie). Et comme dans les autres domaines, tes contributions sont fondamentales et créent de nouveaux champs de recherches.

Continuons. Que ce soit pour les équations différentielles, les fonctions algébriques de deux variables, les sous-groupes finis des groupes de Lie, tu as besoin de développer les outils qui permettent l'étude qualitative. Et, comme avait fait Riemann, tu les crées de toutes pièces. Texte fondateur de la topologie algébrique, ton *Analysis situs* paraît en 1895 ; en environ 100 pages, tu y introduis les concepts d'homologie, de nombres de Betti, de groupe fondamental, la caractéristique d'Euler-Poincaré, la dualité de Poincaré (théorie de l'intersection) ; c'est l'évolution des mathématiques dans tous les domaines qui s'en trouvera affectée. Tu énonces d'abord de façon fautive ta fameuse conjecture, démontrée un siècle plus tard par Perelman, qui caractérise homotopiquement la sphère de dimension trois parmi toutes les « variétés différentiables » de dimension 3. Mais tu donnes rapidement le remarquable contre-exemple d'une sphère d'homologie dont le groupe fondamental est le groupe du dodécaèdre.

La même année 1885, tu publies un texte fondamental sur les figures d'équilibre d'une masse fluide, étudiant les « bifurcations » associées aux changements de stabilité : de l'ellipsoïde de révolution de Mac Laurin à l'ellipsoïde à trois axes inégaux de Jacobi et enfin aux figures piriformes que tu viens de découvrir, qui elles-mêmes pourraient se scinder en deux masses inégales. George Darwin, le fils de Charles, pensera en déduire un mécanisme de formation de la Lune mais Liapunov, puis Jeans et enfin Elie Cartan montreront l'instabilité d'un tel scénario.

Tout aussi importante, ta découverte, deux ans plus tard, du *balayage* qui, fournissant une distribution de charges sur la sphère ayant même potentiel à l'extérieur qu'une distribution donnée à l'intérieur de la boule, permet dans beaucoup de cas de justifier le *principe de Dirichlet* et donc de résoudre des problèmes aux limites pour l'équation de Laplace, fondamentale pour l'attraction newtonienne, mais aussi en électricité et en magnétisme.

J'en viens à l'une des parties les plus importantes de ton œuvre, celle en tout cas que j'ai le plus pratiquée, la *Mécanique céleste* et plus particulièrement le *Problème des trois corps*. Si ta première note sur le sujet date de 1883, c'est dans les trois volumes des *Nouvelles méthodes de la mécanique céleste*, parus entre 1892 et 1899, et totalisant près de 1300 pages, que culminent tes recherches. Dans cet ouvrage extraordinaire, dont Painlevé a dit qu'il était l'œuvre qui porte

peut-être la marque la plus profonde de ton originalité, tu développes le mémoire *Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique*, qui t'avait valu le prix du roi de Suède en 1889. Combien de notions trouvent là leur origine : existence et stabilité des *solutions périodiques*, *solutions asymptotiques*, *exposants caractéristiques*, *invariants intégraux*, *solutions homoclines*, *application de premier retour*. Tu y démontres l'existence et la divergence des *séries de Lindstedt* tout en étant conscient de la possibilité que certaines des séries à fréquences fixées convergent, ce que démontrera Kolmogorov en 1954 ; tu y présentes les *invariants intégraux* comme les ersatz infinitésimaux de ces *intégrales premières* dont tu montres qu'il ne peut y en avoir d'autres que celles classiquement déduites des symétries du problème ; tu y démontres ton célèbre *théorème de récurrence* par une manipulation virtuose de ces probabilités continues dont Joseph Bertrand avait si peur. Ce qu'on nomme aujourd'hui (bien mal à mon avis) le *chaos déterministe* vient de là et des travaux d'Hadamard sur les géodésiques des surfaces à courbure négative, si joliment décrits par Pierre Duhem qui contemple les géodésiques s'enroulant autour des deux cornes d'un taureau. Mais le problème des trois corps, plus exactement le problème restreint qui t'a surtout occupé, par exemple le cas d'une petite planète troublée par Jupiter, ressemble au problème des *géodésiques* sur une surface proche d'une sphère, donc à courbure positive, et tu sais bien que ce cas est incommensurablement plus difficile que le cas de courbure négative traité par Hadamard.

Dans le mémoire original, la question principale était celle de la *stabilité*. Ce problème, tu réussis, en introduisant l'idée d'une *surface de section*, définie par les retours au périhélie, et en utilisant les invariants intégraux, à le ramener à l'étude de l'itération d'une application conservant les aires d'un domaine du plan dans lui-même. On connaît l'histoire de ton erreur, due peut-être à une trop fine analyse qui t'avait fait prendre pour nulle une quantité dont tu savais qu'elle était nulle à tous les ordres de la théorie des perturbations (on parle aujourd'hui de *splitting exponentiellement petit des séparatrices*). Mais on sait aussi que toute la théorie moderne des systèmes dynamiques conservatifs est sortie de cette erreur, décidément fort féconde. La théorie ergodique, en particulier, précise ton théorème de récurrence qui dit que, pour presque toutes les *conditions initiales*, un système dynamique conservatif dont l'espace des phases est de volume fini va repasser au cours du temps aussi près que l'on veut de sa condition initiale, et ce de façon répétée. C'est ce que tu as appelé *Stabilité à la Poisson*, allusion à l'absence au deuxième ordre de termes purement séculaires dans les demis grands axes planétaires, pour remplacer la stabilité perdue du Mémoire.

Le dernier article que tu publies concerne les solutions périodiques, cette « *seule brèche par où nous puissions essayer de pénétrer dans une place jusqu'ici réputée inabordable* ». Tu y montres l'importance de ce qu'on appellera ton *dernier théorème géométrique*, qui sera démontré deux ans plus tard par Birkhoff et peut être considéré comme l'ancêtre de la *Topologie symplectique*.

Combien d'idées que nous tenions pour récentes se trouvent déjà dans ces trois volumes ! C'est manifestement pour toi que les oulipiens ont créé le concept de *plagiaire par anticipation*.

Avec les équations différentielles, la théorie du potentiel, le problème des trois corps, nous sommes déjà dans la physique mathématique, que tu caractérisés ainsi :

« En résumé le but de la physique mathématique n'est pas seulement de faciliter au physicien le calcul numérique de certaines constantes ou l'intégration de certaines équations différentielles. Il est encore, il est surtout de lui faire connaître l'harmonie cachée des choses en les lui faisant voir d'un nouveau biais. De toutes les parties de l'analyse, ce sont les plus élevées, les plus pures, pour ainsi dire, qui seront les plus fécondes entre les mains de ceux qui savent s'en servir. » (La valeur de la science, Chapitre 5)

Dans les quelques 15 volumes qui constituent la rédaction de tes cours de la Sorbonne, tu as passé en revue, que dis-je, tu as re-pensé l'ensemble des théories physiques de ton époque : *Thermodynamique, Électricité et optique, Théorie analytique de la propagation de la chaleur, Théorie mathématique de la lumière, Calcul des probabilités, Capillarité, Tourbillons, Figures d'équilibre d'une masse fluide, Leçons sur les hypothèses cosmogoniques...* Et de plus, tu enseignais à l'École supérieure des Télégraphes, tu vulgarisais la TSF dans un petit livre élémentaire, tu écrivais en postface à la *Monadologie* de Leibniz une note sur les principes de la mécanique dans Descartes et dans Leibniz, tu supervisais en tant que président du Bureau des longitudes l'expédition du méridien de Quito, tu participais avec Rémy Perrier et Paul Painlevé à la rédaction d'un beau livre pour les enfants intitulé *Ce que disent les choses*. Mais comment faisais-tu ?

On a beaucoup discuté pour savoir si tu avais ou non inventé avant Einstein la *théorie de la relativité*. On s'accorde aujourd'hui sur le fait que tu en avais tout l'appareil mathématique ainsi que les bases conceptuelles : impossibilité de détecter le mouvement absolu, impossibilité d'une intuition directe de la simultanéité de deux événements ayant lieu dans des endroits différents. Ce serait en quelque sorte ta tendance au nominalisme qui t'aurait empêché de faire immédiatement le pas décisif rejetant définitivement l'éther. Mais Einstein lui-même n'est-il pas revenu à une forme abstraite d'éther ? Et le *groupe de Poincaré* est bien vivant !

Et n'oublions pas la philosophie. Je ne sais si l'on peut encore dire aujourd'hui, comme Frédéric Masson lors de ta réception à l'Académie française dans le fauteuil de Sully Prudhomme, que tu as « initié aux mystères de la haute philosophie scientifique la nation entière » – il est vrai que vendre en peu de temps 16 000 exemplaires d'un livre de philosophie des sciences n'est pas chose courante – mais c'est un fait que tes quatre livres, *La science et l'hypothèse, Science et méthode, La valeur de la science, Dernières pensées*, n'ont rien perdu de leur force conceptuelle. Bien loin d'une philosophie spontanée de savant, ils forment une philosophie des sciences construite et cohérente. Le passage suivant, sur la notion de groupe des déplacements, traduction de ton article *On the foundations of geometry* paru dans *The Monist* en 1898 illustre bien ton *conventionnalisme géométrique* : « Quand l'expérience nous apprend qu'un certain phénomène ne correspond pas du tout aux lois indiquées, nous l'effaçons de la liste des déplacements. Quand elle nous apprend qu'un certain changement ne leur obéit qu'approximativement, nous considérons ce changement, par une convention artificielle, comme la résultante de deux autres changements composants. Le premier composant est regardé comme un déplacement satisfaisant rigoureusement aux lois dont je viens de parler, tandis que le second composant, qui est petit, est regardé comme une altération qualitative. Ainsi nous disons que les solides naturels ne subissent pas

seulement de grands changements de position, mais aussi de petites flexions et de petites dilatations thermiques. »

et en conclusion :

« Tout comme la catégorie de l'espace représentatif, le concept général de groupe est une forme de notre entendement et le groupe des déplacements relève d'une suite de décisions conventionnelles qui adaptent, dans un équilibre réfléchi, notre expérience à la catégorie : en résumé, les lois en question ne nous sont pas imposées par la nature, mais sont imposées par nous à la nature. Mais si nous les imposons à la nature, c'est parce qu'elle nous permet de le faire. Si elle offrait trop de résistance, nous chercherions dans notre arsenal une autre forme qui serait pour elle plus acceptable. »

Comme le résume Gerhardt Heinzmann : la construction de la réalité mathématique est à effectuer à partir de l'imagination de sensations ; cette construction doit être guidée par l'expérience ; l'expérience n'est pas suffisante, mais n'est que l'occasion de prendre conscience de certaines catégories de l'esprit avec lesquelles il faut faire concorder par décision (convention) notre expérience.

Il manque un mot ici, *beauté* ou *harmonie*, mais tu ne l'oublies pas, toi qui, dans l'introduction de *La valeur de la science*, écris

« Mais ce que nous appelons la réalité objective, c'est, en dernière analyse, ce qui est commun à plusieurs êtres pensants, et pourrait être commun à tous ; cette partie commune, comme nous le verrons, ce ne peut être que l'harmonie exprimée par des lois mathématiques.

C'est donc cette harmonie qui est la seule réalité objective, la seule vérité que nous puissions atteindre ; et si j'ajoute que l'harmonie universelle du monde est la source de toute beauté, on comprendra quel prix nous devons attacher aux lents et pénibles progrès qui nous la font peu à peu mieux connaître. »

Henri Poincaré, quel meilleur salut t'offrir que les mots que tu avais toi-même adressés à Halphen :

« Le savant digne de ce nom, le géomètre surtout, éprouve en face de son œuvre la même impression que l'artiste ; sa jouissance est aussi grande et de même nature. Si je n'écrivais pas pour un public amoureux de la Science, je n'oserais pas m'exprimer ainsi ; je redouterais l'incrédulité des profanes. Mais ici, je puis dire toute ma pensée. Si nous travaillons, c'est moins pour obtenir ces résultats positifs auxquels le vulgaire nous croit uniquement attachés, que pour ressentir cette émotion esthétique et la communiquer à ceux qui sont capables de l'éprouver. »

Cet éloge a été prononcé devant la tombe de Poincaré au cimetière du Montparnasse, le 9 juillet 2012, dans le cadre de la journée d'hommage organisée à l'observatoire de Paris <http://www.imcce.fr/poincare2012/>.

Il se trouve en ligne sur le site de l'IHP <http://www.poincare.fr/>.