En ouverture de l'expo Poisson

Alain Chenciner
Observatoire de Paris, IMCCE (UMR 8028), ASD
77, avenue Denfert-Rochereau, 75014 Paris, France
& Département de mathématique, Université Paris 7
chenciner@imcce.fr

Crochets de Poisson, noyau de Poisson, équation de Poisson, formule de Poisson, loi de Poisson, variété de Poisson, . . . ces noms sous-tendent la mathématique d'aujourd'hui ; en témoigne éloquemment le volume que vient d'éditer Yvette Kosmann-Schwarzbach. Il est cependant un autre nom, moins connu, dont j'aimerais en quelques mots vous conter l'histoire.

Le chapitre XXVI des *Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste* d'Henri Poincaré est intitulé *Stabilité à la Poisson.* Ce titre est ce que Poincaré a trouvé de plus convaincant qui lui permette de conserver le mot "stabilité" dans sa célèbre étude du "problème restreint circulaire plan des trois corps" et de rendre ainsi moins brutale la conséquence de la non moins célèbre erreur de la première version de son mémoire *Sur le problème des trois corps* qui en 1889 lui avait valu le prix du roi de Suède. Ne pouvant plus affirmer une véritable stabilité, il donne un rôle prédominant à son "théorème de récurrence", ancêtre du théorème ergodique, qui affirme que, pour presque toutes les donnés initiales, le système repassera une infinité de fois aussi près que l'on veut de son état initial, ce qu'il nomme "stabilité à la Poisson". Intitulée *Diverses définitions de la stabilité*, la section 290, qui ouvre le chapitre, explique ce nom. Je cite :

> Le mot stabilité a été entendu sous les sens les plus différents, et la différence de ces divers sens deviendra manifeste si l'on se rappelle l'histoire de la Science. Lagrange a démontré qu'en négligeant les carrés des masses, les grands axes des orbites deviennent invariables. Il voulait dire par là qu'avec ce degré d'approximation les grands axes peuvent se développer en séries dont les termes sont de la forme
>
> $$A\sin(\alpha t+\beta),$$
>
> A, α et β étant des constantes.
>
> Il en résulte que, si ces séries sont uniformément convergentes, les grands axes demeurent compris entre certaines limites ; les système des astres ne peut donc pas passer par toutes les situations compatibles avec les intégrales des forces vives et des aires, et de plus il

> repassera une infinité de fois aussi près que l'on voudra de sa situation initiale.
>
> C'est la stabilité complète.
>
> Poussant plus loin l'approximation, Poisson a annoncé ensuite que la stabilité subsiste quand on tient compte des carrés des masses et qu'on néglige les cubes.
>
> Mais cela n'avait pas le même sens.
>
> Il voulait dire que les grands axes peuvent se développer en séries contenant non seulement des termes de la forme
>
> $$A\sin(\alpha t+\beta),$$
>
> mais des termes de la forme
>
> $$At\sin(\alpha t+\beta).$$
>
> La valeur du grand axe éprouve alors de continuelles oscillations, mais rien ne prouve que l'amplitude de ces oscillations ne croît pas indéfiniment avec le temps.
>
> Nous pouvons affirmer que le système repassera toujours une infinité de fois aussi près qu'on voudra de sa situation initiale ; mais non qu'il ne s'en éloignera pas beaucoup.
>
> Le mot de *stabilité* n'a donc pas le même sens pour Lagrange et pour Poisson.

Dans le paragraphe 150 des *Méthodes Nouvelles*, Poincaré retrouve aisément les résultats de Lagrange et Poisson à l'aide du formalisme canonique et des séries de Lindstedt et ceci m'a à jamais privé du courage nécessaire à la lecture des 56 pages de l'article *Sur les Inégalités séculaires des Moyens mouvemens des Planètes* que Poisson publie en 1809 au *Journal de l'École Polytechnique*. Voici un extrait de son introduction :

> En négligeant d'abord les quantité du quatrième ordre, par rapport aux excentricités et aux inclinaisons, le résultat du calcul nous a fait voir que les termes non périodiques, qui sont en nombre infini, se détruisent tous dans l'expression du moyen mouvement. Le calcul se trouve en entier dans notre Mémoire ; il n'a d'autre difficulté que son extrême longueur, et l'attention qu'il faut y apporter pour être sûr de n'avoir omis aucun terme.

Les termes non périodiques dont Poisson affirme l'absence sont des "termes séculaires purs" de la forme At^k. Dans la deuxième partie du mémoire, Poisson met les calculs sous une forme qui "montre clairement" que le résultat vaut pour toutes les puissances des excentricités et des inclinaisons. Il peut alors conclure

> Concluons donc, en terminant ce Mémoire, que la stabilité du système planétaire est assurée par rapport aux grands axes, aux excentricités et aux inclinaisons, en ayant même égard aux carrés des forces perturbatrices.

Dans sa note de 1837 intitulée *Remarques sur l'invariabilité des grands axes des orbites, dans le mouvement des planètes en général, et dans celui de la Lune en particulier* il s'attaquera sans conclure à l'approximation suivante. C'est Spiru Haret qui, dans sa thèse *Sur l'invariabilité des grands axes des orbites planétaires*, soutenue en 1878, montrera que l'absence de termes séculaires purs ne subsiste pas si l'on tient compte des cubes des masses.

Pour plus de détails sur Poincaré et la stabilité à la Poisson, je renvoie à la belle analyse que fait Anne Robadey dans sa thèse et je termine en remarquant que dans son cours de Probabilités de la Sorbonne, Poincaré ne mentionne pas une seule fois Poisson.

Voilà, vous avez peut-être deviné que cette histoire est ce que j'ai trouvé de plus convaincant qui me permette d'accéder à la gentille demande d'Yvette, et de parler de Poisson tout en ne l'ayant pas lu.