

SEMINAIRE DE H. ROSENBERG

Orsay . 1968 - 1969

DIFFEOMORPHISMES AYANT UNE INFINITE DE POINTS PERIODIQUES

Alain CHENCINER

Centre de Mathématiques de l'Ecole Polytechnique
17, rue Descartes - Paris V - France

N° M15.469

Avril 1969

DIFFEOMORPHISMES AYANT UNE INFINITE DE POINTS PERIODIQUES

(d'après S. Smale)

Exposé d'Alain CHENCINER

1. Introduction : Dans [1] Smale conjecturait que la propriété pour un difféomorphisme d'avoir un nombre fini de points périodiques était générique. L'exemple étudié ci-dessous non seulement infirme cette conjecture, mais montre même que la propriété d'avoir un ensemble Ω de points sédentaires assez régulier (par exemple une réunion de variétés) n'est pas générique -du moins sur des variétés de dimension strictement supérieure à un-. On construira en particulier un difféomorphisme f de S^2 tel que $\Omega(f)$ soit la réunion d'un ensemble de Cantor et de deux points isolés, et on montrera que f est Ω -stable.

2. Définitions et notations : Pour tout ce qui concerne les difféomorphismes et les systèmes dynamiques (ensemble Ω , stabilité structurelle, Ω -stabilité, points périodiques, points homocliniques, ...), le lecteur se reportera à l'article de synthèse de Smale [2].

2.1. Définition de f_0 : Nous donnons tout de suite la construction du difféomorphisme f de S^2 dont on parle dans l'introduction, afin de faciliter la compréhension des notations utilisées dans le paragraphe suivant.

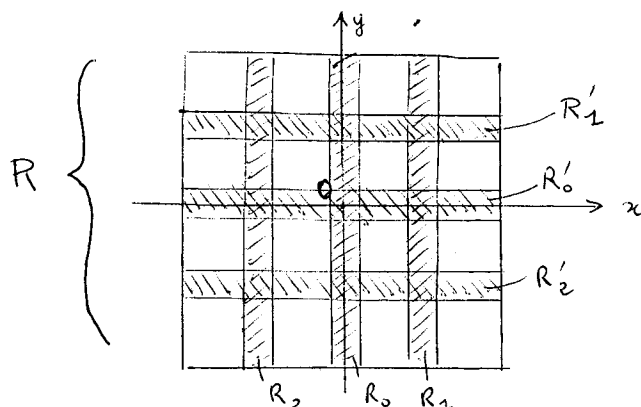
$$\text{Soit } R = I^2 = [-1, +1] \times [-1, +1] \subset \mathbb{R}^2$$

$$R_0 = \left[-\frac{1}{10}, +\frac{1}{10}\right] \times [-1, +1] \subset \mathbb{R}^2$$

$$R'_0 = [-1, +1] \times \left[-\frac{1}{10}, +\frac{1}{10}\right] \subset \mathbb{R}^2$$

Soit $r_0 : R_0 \rightarrow R'_0$ l'homéomorphisme linéaire produit de la dilatation standard $[-\frac{1}{10}, +\frac{1}{10}] \rightarrow [-1, +1]$ et de la contraction standard $[-1, +1] \rightarrow [-\frac{1}{10}, +\frac{1}{10}]$. Par des translations de $\pm \frac{1}{2}$ de R_0 et R'_0 , on définit R_1, R_2, R'_1, R'_2 (voir figure).

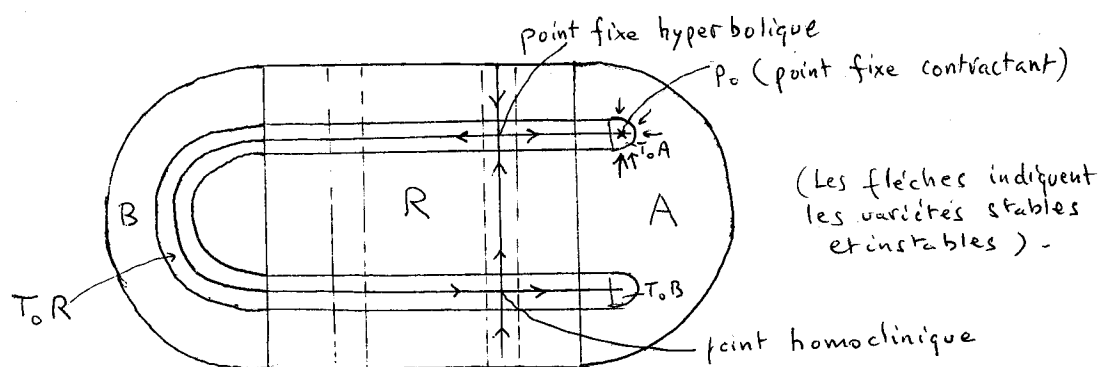
Enfin, $r_1 : R_1 \rightarrow R'_1$ est la composition de la translation $R_1 \rightarrow R_0$, de $r_0 : R_0 \rightarrow R'_0$, et de la translation $R'_0 \rightarrow R'_1$. On définit de même $r_2 : R_2 \rightarrow R'_2$, en composant de plus r_0 avec la symétrie $R'_0 \rightarrow R'_0$ par rapport à 0. Remarquons que r_1 et r_2 sont linéaires.



On définit un plongement $C^\infty T_0 : R \rightarrow R^2$ tel que :

- 1) $T_0 R \cap R = R'_1 \cup R'_2$,
- 2) $T_0^{-1} ((T_0 R) \cap R) = R_1 \cup R_2$,
- 3) $T_0|_{R_1} = r_1$; $T_0|_{R_2} = r_2$.

On obtient par exemple le "fer à cheval" :



Soit $D^2 \subset R^2$ un disque obtenu en ajoutant deux demi-disques à R . On étend T_0 en $T_0 : D^2 \rightarrow D^2$ comme sur la figure, en faisant apparaître un point fixe p_0 . Il est alors facile d'étendre T_0 en $f_0 : S^2 \rightarrow S^2$ ne contractant

faisant apparaître hors de D^2 qu'un point fixe dilatant q_0 .

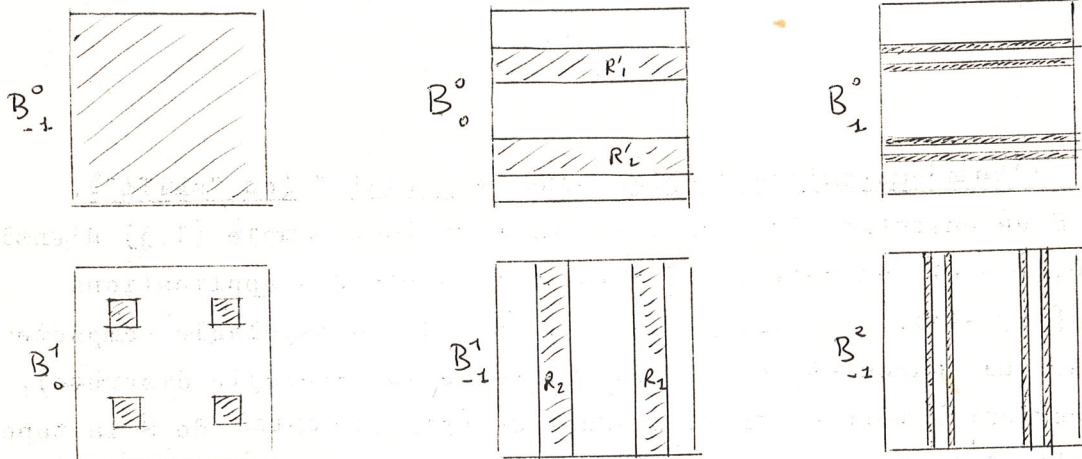
2.2. Notations : Les notations qui suivent sont valables pour une application continue $T : R \rightarrow M$, homéomorphisme sur son image, où R est compact et M séparé, mais le lecteur aura intérêt à les interpréter dans le cadre de l'exemple précédent :

$B_{-1}^0 = R$, et par induction sur j on définit $B_j^0 = T(B_{j-1}^0) \cap R$; par induction sur l , on définit $B_{-1}^1 = T^{-1}(B_{-1}^{1-1} \cap B_0^0)$; et enfin $B_j^1 = B_{-1}^1 \cap B_j^0$ ($j \geq -1, l \geq 0$). On complète ces définitions par :

$$B_j^\infty = \bigcap_{l \geq 0} B_j^l \quad ; \quad B_\infty^1 = \bigcap_{j \geq -1} B_j^1 \quad \text{et}$$

$$B_\infty^\infty = \bigcap_{\substack{j \geq -1 \\ l \geq 0}} B_j^l .$$

Dans le cas du "fer à cheval", on obtient :



Remarque importante : $x \in B_j^1$ si et seulement si $T^i(x) \in R$ pour $-(j+1) \leq i \leq 1$. Ceci permet d'appeler B_∞^∞ "ensemble des points sédentaires" de l'application $T : R \rightarrow M$. En particulier, on vérifie facilement que pour le "fer à cheval", $\Omega(f_0) = B_\infty^\infty(T_0) \cup \{p_0, q_0\}$.

2.3. Premières propriétés.

Lemme 1 : si $l_0 \leq l, j_0 \leq j$, on a $B_j^l \subset B_{j_0}^{l_0}$. Evident.

Lemme 2 : la restriction de T à B_j^1 est un homéomorphisme de B_j^1 sur B_{j+1}^{1-1} .

Donnons un aperçu de la démonstration : il est évident que

$$T(B_j^0) \subset B_{j+1}^0 \quad \text{et} \quad T^{-1}(B_{-1}^1) \subset B_{-1}^{1-1} . \text{ On montre alors par récurrence que}$$

$$T(B_j^1) \subset B_{j+1}^{1-1} \quad \text{et que} \quad T^{-1}(B_{j+1}^{1-1}) \subset B_j^1 .$$

C. Q. F. D.

Définition : on note C_j^1 l'ensemble des composantes connexes de B_j^1 . Les lemmes 1 et 2 permettent de définir des applications :

$$r : C_j^1 \rightarrow C_{j_0}^{1_0} \quad (\text{pour } j_0 \leq j, 1_0 \leq 1) , \quad \text{et}$$

$$t : C_j^1 \rightarrow C_{j+1}^{1-1} \quad (t \text{ est une bijection}) ,$$

rendant manifestement commutatif le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} C_j^1 & \xrightarrow{t} & C_{j+1}^{1-1} \\ \downarrow r & & \downarrow r \\ C_{j_0}^{1_0} & \xrightarrow{t} & C_{j_0+1}^{1_0-1} \end{array}$$

2.4. L'homéomorphisme "déplacement de virgule" (ou "shift").

Soit S un ensemble fini, $\text{card } S = m$. Pour tout couple (l, j) d'entiers $l \geq 0, j \geq -1$, on définit A_j^l comme l'ensemble des applications α de $\{-1, -1+1, \dots, j-1, j\}$ dans S , muni de la topologie compacte ouverte. (La source et le but sont munis de la topologie discrète), ce qui revient à mettre sur le produit de $(j+1+1)$ copies de S la topologie produit. A_j^l est donc compact (discret si l et j sont finis).

Pour tout couple (l, j) , on a un homéomorphisme $\tau : A_j^l \rightarrow A_{j+1}^{l-1}$ défini par $[\tau(\alpha)](i) = \alpha(i-1)$; si on représente $\alpha \in A_j^l$ par une suite $\alpha(-1) \dots \alpha(0), \alpha(1) \dots \alpha(j)$ dans laquelle une virgule sépare $\alpha(0)$ de $\alpha(1)$, τ n'est autre que le déplacement de la virgule d'un cran vers la gauche.

Par définition, l'homéomorphisme de "déplacement de virgule sur un symbole" est $\tau : A_\infty^\infty \rightarrow A_\infty^\infty$. On remarquera que A_∞^∞ est homéomorphe à un ensemble de Cantor. Pour plus de détails sur cet homéomorphisme, on consultera [3].

Lemme : le nombre de points périodiques de période k de $\tau = A_{\infty}^{\infty} \rightarrow A_{\infty}^{\infty}$ est m^k ; les points périodiques de τ sont denses dans A_{∞}^{∞} .

Démonstration : la première assertion est évidente ; la seconde découle de l'existence d'approximations périodiques d'une suite aussi bonnes que l'on veut.

Remarquons, pour faire le parallèle avec le paragraphe 2.3., que pour $l_0 \leq l$ et $j_0 \leq j$, on a une restriction évidente $\rho = A_j^l \rightarrow A_{j_0}^{l_0}$ rendant commutatif le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} A_j^l & \xrightarrow{\tau} & A_{j+1}^{l-1} \\ \rho \downarrow & & \downarrow \rho \\ A_{j_0}^{l_0} & \xrightarrow{\tau} & A_{j_0+1}^{l_0-1} \end{array} .$$

D'autre part, on a un homéomorphisme

$$\delta = A_{-1}^1 \times A_j^0 \rightarrow A_j^1$$

défini de façon évidente en accolant deux suites. L'homéomorphisme inverse n'est autre que la restriction à la diagonale de $A_j^1 \times A_j^1$ du produit $\rho_1 \times \rho_2$ des restrictions de A_j^1 respectivement à A_{-1}^1 et A_j^0 .

3. Enoncé des théorèmes et plan de la démonstration.

3.1. Théorème A : le difféomorphisme f_0 de S^2 défini au paragraphe 2.1. a pour ensemble Ω de points sédentaires la réunion d'un ensemble de Cantor $\mathbb{C}$ invariant par f_0 et de deux points isolés p_0 et q_0 .

La restriction de f_0 à $\mathbb{C}$ est topologiquement conjuguée de "l'homéomorphisme de déplacement de virgule sur deux symboles" ; enfin, f_0 est Ω -stable.

Plus généralement, on a le

Théorème B : sur toute variété M de classe C^{∞} de dimension strictement supérieure à un, il existe un ouvert U de l'espace des difféomorphismes de M muni de la topologie C^1 , ayant la propriété suivante :

Si $T \in U$, il existe un ensemble $\mathbb{C} \subset M$, invariant par T , tel que la

restriction de T à $\mathbb{C}$ soit topologiquement conjuguée de "l'homéomorphisme de déplacement de virgule sur deux symboles".

Corollaire : sur toute variété M de classe C^∞ de dimension strictement supérieure à un, il existe un ouvert U de l'espace des difféomorphismes de M muni de la topologie C^1 , tel que chaque élément de U possède un nombre infini de points périodiques.

3.2. Plan de la démonstration : tout d'abord, le lecteur courageux peut démontrer que dans le cas du "fer à cheval" B_∞^∞ est homéomorphe à un ensemble de Cantor, et démontrer ainsi la partie facile du théorème A, c'est-à-dire celle qui ne concerne pas la Ω -stabilité de f_0 . La démonstration de la Ω -stabilité se fait en deux temps : on caractérise d'abord par deux axiomes (trivialement vérifiés par la restriction T_0 de f_0 au carré $R = I^2$) les applications continues $T : R \rightarrow M$, homéomorphismes sur leur image, telles que B_∞^∞ soit homéomorphe à un A_∞^∞ par un homéomorphisme transportant la restriction de T à B_∞^∞ sur $\tau : A_\infty^\infty \rightarrow A_\infty^\infty$. Ensuite, il reste à montrer que pour tout difféomorphisme C^1 -proche de f_0 , sa restriction à R vérifie les deux axiomes ; la relation de conjugaison topologique étant transitive, cela assurera non pas encore la Ω -stabilité, mais la $\mathbb{C}$ -stabilité dans le sens suivant : tout difféomorphisme f proche de f_0 vérifiera :

$$\Omega(f) = \mathbb{C}(f) \cup \{p, q\}$$

où $\mathbb{C}(f)$ est homéomorphe à A_∞^∞ , et les restrictions $f_0|_{\mathbb{C}(f_0)}$ et

$f|_{\mathbb{C}(f)}$ seront topologiquement conjuguées. La fin de la démonstration n'utilise alors que les propriétés des points hyperboliques (voir [2]) et nous ne la ferons pas ici.

Quant au théorème B, on l'obtient par la même démonstration en généralisant l'exemple du "fer à cheval" de la manière suivante : on prend $R = D^k \times D^{n-k} \subset R^n$, où D^i est le disque unité de R^i . On définit $R_0 = \delta^k \times D^{n-k}$ et $R'_0 = D^k \times \delta^{n-k}$, où δ^i est le disque de rayon $1/10$ de R^i , et on construit de la même manière qu'au paragraphe 2.1. les sous-espaces R_1, R_2, R'_1, R'_2 , et le plongement $C^\infty : T_0 : R \rightarrow R^n$.

Par des méthodes standard on étend T_0 en un difféomorphisme à support compact de R^n , ce qui permet, en prenant une carte locale

d'une variété M de définir $f \in \text{Diff}(M)$ comme étant T_0 dans la carte, et l'identité à l'extérieur. On démontre alors (ce qui est évident) que T_0 vérifie les axiomes 1 et 2, et que (ce qui est moins évident) pour $f \in C^1$ proche de f_0 , $f|_R$ vérifie encore les axiomes 1 et 2, d'où le théorème. Le corollaire s'en déduit évidemment à cause des propriétés de $\tau : A_\infty^\infty \rightarrow A_\infty^\infty$.

4. Les deux axiomes :

Axiome 1 : R est connexe, $\text{card } C_0^0 = m \text{ fini} > 1$. Si $\beta_1 \in C_{-1}^1$ (β_1 est une composante connexe de B_{-1}^1) et si $\beta_2 \in C_j^0$, $1, j < \infty$, alors $\beta_1 \cap \beta_2$ est connexe.

Axiome 2 : dimension $B_\infty^\infty = 0$.

Théorème 1 : si $T : R \rightarrow M$ est un homéomorphisme sur son image d'un compact R dans un espace topologique séparé M , et si T vérifie l'axiome 1, il existe pour tout couple (l, j) $0 \leq l \leq \infty$, $-1 \leq j \leq \infty$, une bijection $\Phi : A_j^l \rightarrow C_j^l$ rendant commutatifs les diagrammes suivants (l'ensemble S de définition de A_j^l a un cardinal égal à m) :

$$\begin{array}{ccc} A_j^l & \xrightarrow{\Phi} & C_j^l \\ \rho \downarrow & & \downarrow r \\ A_j^{l-1} & \xrightarrow{\Phi} & C_j^{l-1} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} A_j^l & \xrightarrow{\Phi} & C_j^l \\ \tau \downarrow & & \downarrow t \\ A_{j+1}^{l-1} & \xrightarrow{\Phi} & C_{j+1}^{l-1} \end{array}$$

Théorème 2 : dans les conditions du théorème 1, si de plus T vérifie l'axiome 2, il existe un ensemble de Cantor $\mathcal{C} \subset R$, invariant par T , tel que la restriction de T à $\mathcal{C}$ soit topologiquement conjuguée de "l'homéomorphisme de déplacement de virgule sur m symboles" (où m est celui de l'axiome 1).

Esquisse de la démonstration du théorème 1 : Dans ce qui suit A_j^l est défini à l'aide d'un ensemble S de cardinal m .

Remarquons que la commutativité du premier diagramme du théorème 1 ramène la démonstration au cas où l et j sont finis.

L'axiome 1 permet de définir une bijection

$$d : C_{-1}^1 \times C_j^0 \rightarrow C_j^1$$

par $d(\beta_1, \beta_2) = \beta_1 \cap \beta_2$, qui est à comparer à la bijection

$\delta : A_{-1}^1 \times A_j^0 \rightarrow A_j^1$ définie au paragraphe 2.4. L'inverse de d est (comme pour δ) la restriction à la diagonale de $C_j^1 \times C_j^1$ du produit $r_1 \times r_2$ des restrictions de C_j^1 respectivement à C_{-1}^1 et à C_j^0 .

L'existence de d nous permet de ne définir Φ que sur A_{-1}^1 (resp. A_j^0); montrons par exemple comment on définit $\Phi : A_j^0 \rightarrow C_j^0$: on procède par récurrence en utilisant le lemme suivant :

Lemme fondamental : considérons le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} C_{j+1}^0 & \xrightarrow{r_{j+1}} & C_j^0 \\ s_{j+1} \downarrow & & \downarrow s_j \\ C_j^0 & \xrightarrow{r_j} & C_{j-1}^0 \end{array}$$

où $r_j : C_j^0 \rightarrow C_{j-1}^0$ est la restriction, et où s_j est la composition $C_j^0 \xrightarrow{t^{-1}} C_{j-1}^1 \xrightarrow{\tau} C_{j-1}^0$.

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'étant donnés $\beta_1, \beta_2 \in C_j^0$ on ait

$$r_{j+1}^{-1}(\beta_2) \cap s_{j+1}^{-1}(\beta_1) = \{1 \text{ élément}\}$$

est que

$$s_j(\beta_2) = r_j(\beta_1)$$

Remarquons avant tout que ce lemme est évident si l'on remplace C_j^0 par A_j^0 , r_j par la restriction $\rho_j : A_j^0 \rightarrow A_{j-1}^0$ et s_j par la composition τ_j :

$$A_j^0 \xrightarrow{\tau^{-1}} A_{j-1}^1 \xrightarrow{\rho} A_{j-1}^0$$

(σ_j n'est autre que la restriction supprimant le premier terme de la suite $\alpha(0), \dots, \alpha(j)$ alors que ρ_j supprime le dernier).

Nous ne donnerons pas ici la démonstration détaillée de ce lemme; on la trouvera dans l'article original de Smale [4] qui est très explicite : lorsque $s_j(\beta_2) = r_j(\beta_1)$ l'élément unique $\alpha \in r_{j+1}^{-1}(\beta_2) \cap s_{j+1}^{-1}(\beta_1)$ est donné en fonction de β_1 et β_2 par la formule $\alpha = t_{j+1}[d(\beta_1, r_o t_j^{-1} \beta_2)]$ où

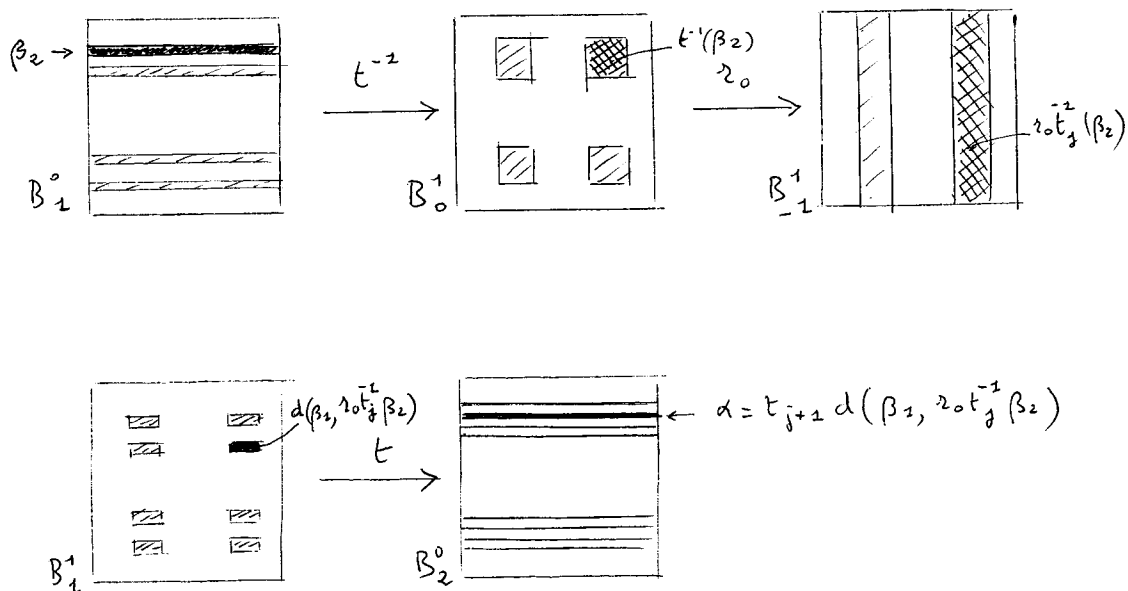
$$d : C_j^0 \times C_{-1}^1 \rightarrow C_j^1$$

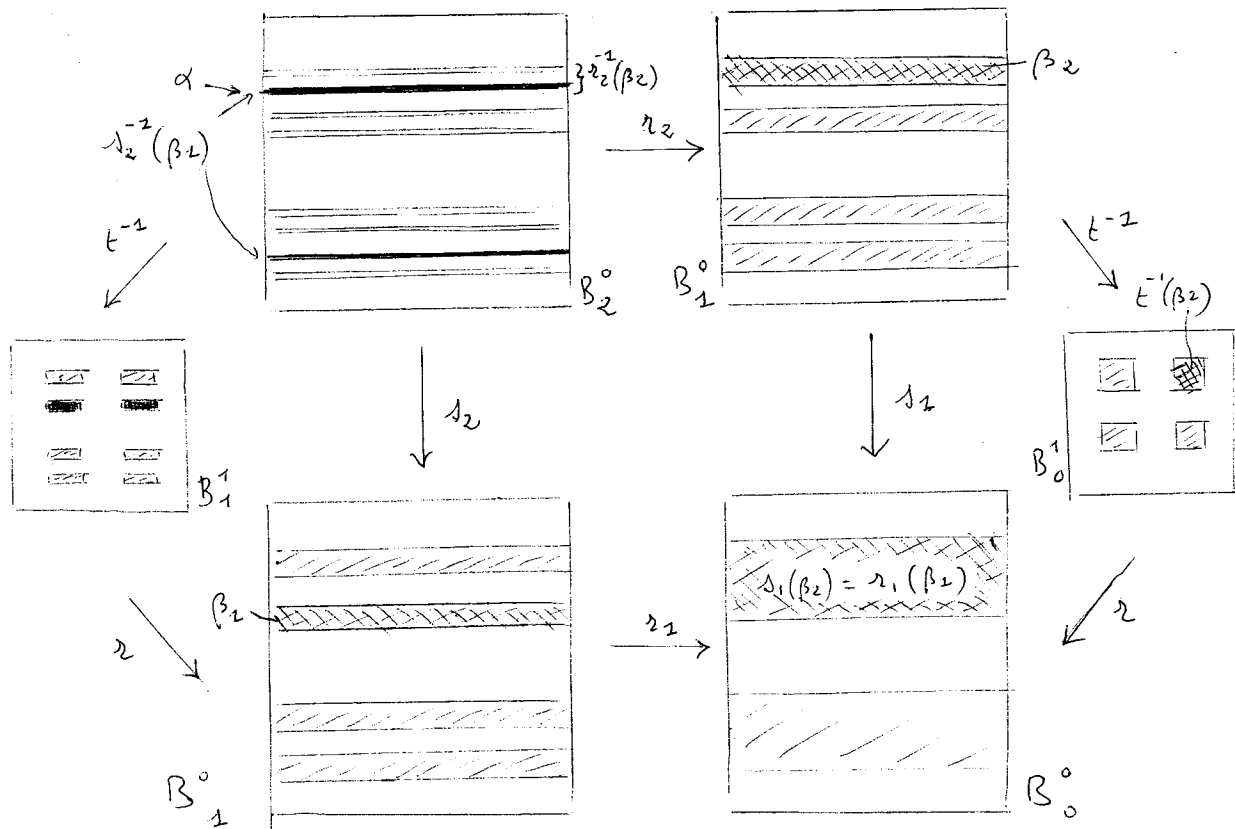
$$r_o : C_{j-1}^1 \rightarrow C_{-1}^1 \text{ est la restriction}$$

$$t_j : C_{j-1}^1 \rightarrow C_j^0$$

$$t_{j+1} : C_j^1 \rightarrow C_{j+1}^0$$

Pour comprendre ce lemme, regardons un moment l'exemple du fer à cheval dans le cas $j = 1$:





On voit sur cet exemple que $s_2^{-1}(\beta_1)$ (qui est égal à $t(r^{-1}(\beta_1))$) contient deux éléments, l'un dans R_1' l'autre dans R_2' , à savoir :

$$t[r^{-1}(\beta_1) \cap R_1] \quad \text{et} \quad t[r^{-1}(\beta_1) \cap R_2]$$

Or R_1 et R_2 sont les deux éléments qui constituent C_{-1}^1 d'où l'idée de la définition de α .

Nous passons maintenant à la définition de Φ :

$\Phi : A_{-1}^0 \rightarrow C_{-1}^0$ est déterminée.

On se donne arbitrairement une bijection $A_0^0 \rightarrow C_0^0$ ce qui est possible car $\text{card } C_0^0 = \text{card } A_0^0 = m$, et on suppose avoir défini une bijection

$\Phi : A_{j-1}^0 \rightarrow C_{j-1}^0$ rendant commutatifs les diagrammes :

$$\begin{array}{ccc} A_{j-1}^0 & \xrightarrow{\Phi} & C_{j-1}^0 \\ \rho_{j-1} \downarrow & & \downarrow r_{j-1} \\ A_{j-2}^0 & \xrightarrow{\Phi} & C_{j-2}^0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} A_{j-1}^0 & \xrightarrow{\Phi} & C_{j-1}^0 \\ \sigma_{j-1} \downarrow & & \downarrow s_{j-1} \\ A_{j-2}^0 & \xrightarrow{\Phi} & C_{j-2}^0 \end{array}$$

Si $\alpha \in A_j^0$ on définit

$$\Phi(\alpha) = r_j^{-1}(\Phi \rho_j \alpha) \cap s_j^{-1}(\Phi \sigma_j \alpha)$$

$\Phi(\alpha)$ est bien défini en vertu du lemme fondamental car il est immédiat que :

$$s_{j-1}(\Phi \rho_j \alpha) = \Phi \sigma_{j-1} \rho_j \alpha = \Phi \rho_{j-1} \sigma_j \alpha = r_{j-1} \Phi \sigma_j \alpha$$

Le fait que le lemme fondamental "abstrait" (i.e. pour A_j^0, ρ_j, σ_j) soit vrai permet de montrer par récurrence que $\Phi : A_j^0 \rightarrow C_j^0$ est bijectif.

Il existe alors une bijection $\Phi : A_1^1 \rightarrow C_{-1}^1$ unique rendant commutatif le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} A_{-1}^1 & \xrightarrow{\Phi} & C_{-1}^1 \\ \tau \downarrow & & \downarrow t \\ A_0^0 & \xrightarrow{\Phi} & C_0^0 \end{array}$$

On définit par récurrence une bijection $\Phi : A_{-1}^1 \rightarrow C_{-1}^1$, et enfin $\Phi : A_j^1 \rightarrow C_j^1$ par le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} A_{-1}^1 \times A_j^0 & \xrightarrow{\Phi \times \Phi} & C_{-1}^1 \times C_j^0 \\ \delta \downarrow \cong & & \cong \downarrow d \\ A_j^1 & \xrightarrow{\Phi} & C_j^1 \end{array}$$

Il reste à voir que Φ est bijective et que les deux diagrammes du théorème 1 commutent, ce qui ne représente pas de grosse difficulté. (Cf. [4]).

Ceci clôt la démonstration du théorème 1.

La démonstration du théorème 2 est une simple formalité : l'axiome 2 permet d'identifier les ensembles B_∞^∞ et C_∞^∞ . On pose $\mathfrak{C} = B_\infty^\infty$, d'où une bijection $\Phi : A_\infty^\infty \rightarrow B_\infty^\infty = \mathfrak{C}$. Cette bijection est continue car chaque $\Phi : A_1^1 \rightarrow C_1^1$ est continue, et B_∞^∞ (resp. A_∞^∞) est une limite projective des (C_1^1, r) (resp. (A_1^1, ρ)).

cqfd

5. Démonstration des théorèmes A et B :

Soit $T_0 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ le difféomorphisme à support compact défini à la fin du paragraphe 3.2 par extension de $T_0 : R = D^k \times D^{n-k} \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Soit, U un voisinage ouvert de R dans $\mathbb{R}^n$. Les théorèmes A et B découlent (comme on l'a vu au paragraphe 3.2) du théorème suivant :

Théorème 3 : il existe un nombre $\varepsilon > 0$ ayant la propriété suivante : si $T : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ vérifie

$$(a) \quad \|T(x) - T_0(x)\| < \varepsilon \text{ pour } x \in U$$

$$(b) \quad \|T_*(x) - T_{0*}(x)\| < \varepsilon \text{ pour } x \in U$$

alors la restriction de T à R vérifie les axiomes 1 et 2 (ici T_{*x}

désigne l'application dérivée au point x).

Pour montrer que $T|_R$ vérifie l'axiome 1, on montre un peu plus :

Lemme : soit $\beta_1 \in C_j^0$, $\beta_2 \in C_{-1}^1$ $1, j < \infty$ (ici C_j^1 , etc .. sont relatifs à $T|_R$)

Soit $\beta = \beta_1 \cap \beta_2$; si le ε du théorème 3 est assez petit, il existe un difféomorphisme $\Psi_\beta : \beta \rightarrow D^k \times D^{n-k}$ donné par la composition :

$$\begin{array}{c} \beta \quad \Delta \quad \beta \times \beta \quad \pi_1 T^1 \times \pi_2 T^{-(j+1)} \\ \text{diagonale} \quad \quad \quad D^k \times D^{n-k} \end{array}$$

où $\pi_1 : R \rightarrow D^k$ et $\pi_2 : R \rightarrow D^{n-k}$ sont les projections, et où la différentiabilité de Ψ_β s'entend par rapport à la structure induite sur β par R .

Démonstration : tout d'abord, Ψ_β est bien définie à cause de la remarque importante de la fin du paragraphe 2.2, et est manifestement différentiable. Pour montrer que Ψ_β possède un inverse, Smale montre que si $x \in D^k$ et si $y \in D^{n-k}$, alors

$$[\beta_2 \cap (\pi_1 T^1)^{-1}(x)] \cap [\beta_1 \cap (\pi_2 T^{-(j+1)})^{-1}(y)]$$

est réduit à un point.

Montrons enfin que Ψ_β est de rang maximum, ce qui est la partie la plus intéressante de la démonstration :

Soit $L_1 = \text{Ker } (\pi_1 T^1)_{*x} \subset T_x R$

$$L_2 = \text{Ker } (\pi_2 T^{-(j+1)})_{*x} \subset T_x R$$

On a par exemple :

$$v \in L_2 \Leftrightarrow T^{-(j+1)}_{*x}(v) \in \mathbb{R}^k \times 0,$$

c'est-à-dire

$$v \in T^{(j+1)}_{*y}(\mathbb{R}^k \times 0), \quad \text{où } y = T^{-(j+1)}(x)$$

Donc $v \in L_1 \cap L_2$ signifie :

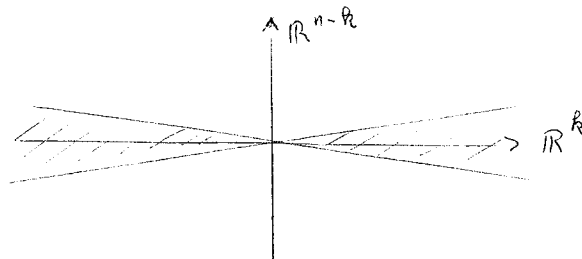
$$v \in T_{*y}^{(j+1)} (\mathbb{R}^k \times 0) \cap T_{*z}^{-1} (0 \times \mathbb{R}^{n-k}),$$

où $z = T^1(x)$.

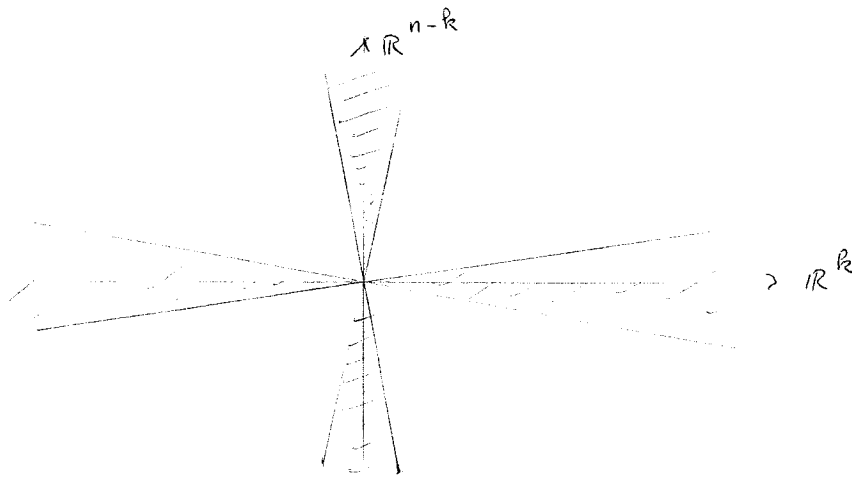
Remarquons que T_0 est linéaire sur β , avec pour matrice représentative dans $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$:

$$\begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & \frac{1}{10} \end{pmatrix}$$

Smale montre précisément que si une transformation linéaire A de $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ s'écrit comme un produit de transformations linéaires assez proches de T_0 , alors $A(\mathbb{R}^k \times 0)$ est contenu dans un secteur d'angle aussi petit que l'on veut centré sur $\mathbb{R}^k \times 0$



On en déduit qu'en prenant ε assez petit pour que les secteurs considérés ne se rencontrent qu'au point 0, on peut s'arranger pour que $T_{*y}^{(j+1)} (\mathbb{R}^k \times 0) \cap T_{*z}^{-1} (0 \times \mathbb{R}^{n-k})$ soit réduit à 0, ce qui montre que Ψ_β est de rang maximum.



cqfd

Il ne reste plus qu'à montrer que $T|_R$ vérifie l'axiome 2, ce qui découle des deux lemmes suivants :

Lemme (i) : soit $\alpha \subset \mathbb{R}$ un compact tel que pour tout $x \in D^k$, on ait :
diamètre $[(x \times D^{n-k}) \cap \alpha] < K$.

Alors si α_1 est une composante connexe de T_α , on a pour tout $x \in D^k$, diamètre $[(x \times D^{n-k}) \cap \alpha_1] < \frac{K}{2}$.

La démonstration est évidente si on remarque que la propriété est vraie pour T_0 (regarder en particulier le "fer à cheval") et que T est aussi proche qu'on veut de T_0 .

Lemme (ii) : si $\beta_1 \in C_\infty^0$ et $\beta_2 \in C_{-1}^\infty$, alors $\beta_1 \cap \beta_2$ est réduit à un point

Démonstration : écrivons

$$\beta_1 = \bigcap_{i=1}^{\infty} \alpha_i, \quad \alpha_i \in C_i^0, \quad \alpha_i \supset \alpha_{i-1}$$

$$\beta_2 = \bigcap_{i=1}^{\infty} \alpha^i, \quad \alpha^i \in C_{-1}^i, \quad \alpha^i \supset \alpha^{i-1}$$

Alors $\alpha_i \cap \alpha^i \supset \alpha_{i-1} \cap \alpha^{i-1}$, et donc à cause du lemme suivant le théorème 3, $\beta_1 \cap \beta_2$ n'est pas vide.

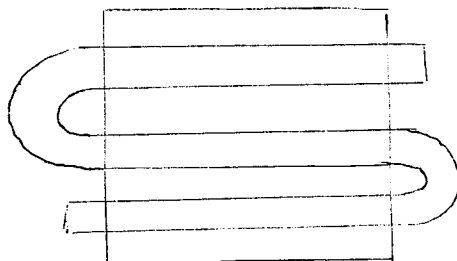
On déduit du lemme (i) (et d'un analogue pour T^{-1}) que
diamètre $(\beta_1 \cap \beta_2) = 0$

cqfd

6. Remarques et compléments :

(i) On peut en variant l'exemple du "fer à cheval" obtenir n'importe quel cardinal pour l'ensemble S de définition de A_∞^∞

Exemple :



(ii) Le "fer à cheval" donne une très bonne idée de ce qui se passe au voisinage d'un point homoclinique transversal. Plus précisément, Smale démontre dans la même papier le théorème suivant :

Théorème c : soit $D(M)$ l'espace des difféomorphismes de M muni de la topologie C^r ($r \geq 1$). Il existe une partie D_0 , intersection d'ouverts denses dans $D(M)$, telle que si $x \in M$ est un point homoclinique de $T \in D_0$, il existe un ensemble de Cantor $\mathcal{S} \subset M$, $x \in \mathcal{S}$, et un entier p tels que $T^p(\mathcal{S}) = \mathcal{S}$, et la restriction à $\mathcal{S}$ de T^p est topologiquement conjuguée d'un homéomorphisme de décalage.

Corollaire : si $T \in D_0$, dans chaque voisinage d'un point homoclinique de T , il existe une infinité de points périodiques de T .

(iii) Le problème de la stabilité structurelle de f_0 reste ouvert.

REFERENCES

- [1] S. Smale, Morse inequalities for a dynamical system, Bull. Amer. Math. Soc. 66 (1960), p. 43-49
 - [2] S. Smale, differentiable dynamical systems, Bull. Amer. Math. Soc. (1967), p. 747-817
 - [3] Gottschalk and Hedlund, Topological dynamics Amer. Math. Soc., Colloquium Publications, Vol. 36, Providence, 1955.
 - [4] S. Smale, Diffeomorphisms with many periodic points, Differential and combinatorial topology, Princeton Univ. Press Princeton N.J. 1965, p. 63-80
-