

La forme de n corps

Alain Chenciner

Astronomie et Systèmes Dynamiques, IMCCE, UMR 8028 du CNRS,
77, avenue Denfert-Rochereau, 75014 Paris, France

et

Département de Mathématiques, Université Paris VII-Denis Diderot
16, rue Clisson, 75013 Paris, France

Cher Gilles,

Le jeu de mots dans le titre t'aurait peut être amusé. Quelle forme ? quels corps ? La forme est quadratique et les corps sont des points même si d'origine céleste.

Au début, il y a la formule de Héron d'Alexandrie [H] pour l'aire $|\Delta|$ d'un triangle dont les côtés ont pour longueurs α, β, γ :

$$16|\Delta|^2 = (\alpha + \beta + \gamma)(-\alpha + \beta + \gamma)(\alpha - \beta + \gamma)(\alpha + \beta - \gamma). \quad (H)$$

Les trois derniers facteurs s'entendent intuitivement puisqu'ils s'annulent lorsque le triangle est aplati (le deuxième si la longueur du plus grand côté est α , le troisième si c'est β , le quatrième si c'est γ). Si l'on note

$$a = \alpha^2, \quad b = \beta^2, \quad c = \gamma^2,$$

la formule devient

$$16|\Delta|^2 = 2ab + 2bc + 2ca - a^2 - b^2 - c^2.$$

Les surfaces et les déterminants ont beaucoup d'affinités et l'on ne s'étonne pas trop de découvrir que cette formule prend la forme du *déterminant de Cayley-Menger*

$$-16|\Delta|^2 = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & c & b \\ 1 & c & 0 & a \\ 1 & b & a & 0 \end{pmatrix}. \quad (C.M.)$$

Pas trop, mais un peu quand même, car un déterminant 2×2 semblerait plus naturel* qu'un déterminant 4×4 . D'où ce qui suit, fruit d'un travail ([AC], voir également [A2]) effectué avec Alain Albouy sur les *symétries* du *Problème des n corps* et leur *réduction* dans lequel nous généralisons à plus de trois corps le mémoire fondamental de Lagrange [L]. On y découvre que le déterminant ci-dessus n'est qu'un moyen de calculer un déterminant plus subtil, celui d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension deux qui, contrairement au modèle du plan cartésien $\mathbb{R}^2$, ne possède aucune base privilégiée. On peut penser au plan d'équation $x + y + z = 0$ dans $\mathbb{R}^3$. Ce plan est naturellement muni des trois droites suivant lesquelles il coupe les plans de coordonnées $x = 0$, $y = 0$ et $z = 0$ mais certainement pas d'une base *canonique*. Calculer dans un tel plan nécessite des choix ou des artifices.

* en effet, si X est la matrice dont les colonnes sont les composantes des deux vecteurs $\vec{V}, \vec{W} \in \mathbb{R}^2$, $\det X$ est l'aire orientée du parallélogramme engendré par les deux vecteurs et $\det^t X X$ est le carré de cette aire.

1 - Les “dispositions” et la réduction des translations

Considérons un triangle dans le plan $\mathbb{R}^2$ ou l'espace $\mathbb{R}^3$ (excuse-moi, Gilles, je sais avec quelle condescendance tu considérais le “pauvre” espace des mathématiciens). Son aire n'est pas affectée par un déplacement rigide ou par une symétrie. C'est cette propriété fondamentale qu'il s'agit d'exploiter. Elle explique que l'aire ne dépende que des longueurs des côtés et non de la position absolue des sommets.

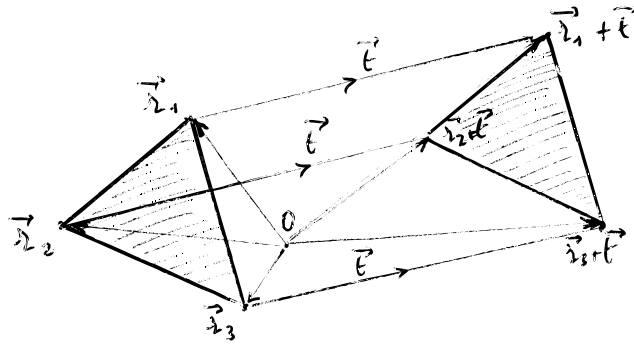


Figure 1 (Invariance de l'aire par translation)

La façon de calculer “à translation près” remonte aux travaux de Jacobi sur le *Problème des n corps* [J]. Ce qui suit en est essentiellement une formalisation. La donnée de n points $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n$ dans l’“espace” $E \equiv \mathbb{R}^k, k = 1, 2, 3, \dots$ (la pauvreté de la notion mathématique d'espace a quand même l'avantage de permettre une facile généralisation à des dimensions quelconques) équivaut à celle de l'application linéaire $X : \mathbb{R}^n \rightarrow E$ définie par $X(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = \sum_{i=1}^n \xi_i \vec{r}_i$. Autrement dit, on représente la “configuration” des n points (corps) dans l'espace E par la matrice à k lignes et n colonnes, dont la $i^{\text{ème}}$ colonne est formée des coordonnées dans $E \equiv \mathbb{R}^k$ du vecteur $\vec{r}_i$. Cette représentation a été introduite par Alain Albouy dans sa thèse [A1].

La source $\mathbb{R}^n$ de l'application X représente le “côté des corps”, le but E celui de l'espace. Soit maintenant $\mathcal{D}^*$ le sous-espace de $\mathbb{R}^n$ formé des n -uples $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ de somme nulle :

$$\mathcal{D}^* = \left\{ (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n, \sum_{i=1}^n \xi_i = 0 \right\}.$$

Quels que soient $\vec{t} \in E$ et $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in \mathcal{D}^*$, on a

$$\sum_{i=1}^n \xi_i (\vec{r}_i + \vec{t}) = \sum_{i=1}^n \xi_i \vec{r}_i.$$

La restriction x de X à $\mathcal{D}^*$ ne distingue donc plus entre les deux n -uples $(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n)$ et $(\vec{r}_1 + \vec{t}, \vec{r}_2 + \vec{t}, \dots, \vec{r}_n + \vec{t})$. Par contre, elle fournit les différences $\vec{r}_i - \vec{r}_j$ et donc la position des corps, une fois fixée celle de l'un d'eux. On en déduit que la donnée de n points à translation près dans E équivaut à celle d'une application x de $\mathcal{D}^*$ dans E .

Une telle application peut être “représentée” par la matrice $k \times n$ dont les colonnes sont les composantes des $\vec{r}_i \in \mathbb{R}^k$ mais aussi par n'importe laquelle des matrices dont les colonnes sont les composantes des $\vec{r}_i + \vec{t}$, où $\vec{t} \in \mathbb{R}^k$. Ce n'est que par le choix d'une base de $\mathcal{D}^*$ qu'on en obtient une représentation par une matrice $(k-1) \times n$.

Mais d'où vient $\mathcal{D}^*$? Le sous-espace $\mathcal{D}^*$ doit être interprété comme le dual de l'espace $\mathcal{D}$ des n -uples de points sur la droite à translation près. Ce dernier, appelé *espace des dispositions*, est le quotient de $\mathbb{R}^n$ par la droite engendrée par le vecteur $(1, 1, \dots, 1)$: quel que soit $t \in \mathbb{R}$, les n -uples $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ et $(x_1 + t, x_2 + t, \dots, x_n + t)$ “représentent” le même élément de $\mathcal{D}$. La dualité est celle qui à $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in \mathcal{D}^*$ et $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ représentant un élément de $\mathcal{D}$, associe $\sum \xi_i x_i = \sum \xi_i (x_i + t)$. Un homomorphisme $x : \mathcal{D}^* \rightarrow E$ peut alors être interprété comme un élément du produit tensoriel $\mathcal{D} \otimes E$. La représentation de x par une classe d'équivalence de matrices $k \times n$ correspond à celle de $\mathcal{D} \otimes E$ comme quotient de $\mathbb{R}^n \otimes E \equiv E^n$ par l'action diagonale des translations de E .

2 - Du “côté de l'espace” au “côté des corps” : la réduction des rotations et des symétries

L'invariance de l'aire par translation signifie que S ne dépend que de x ; son invariance par isométrie linéaire (i.e. rotations et symétries par rapport à un sous espace vectoriel) signifie qu'elle ne dépend en fait que de la “matrice de Gram” dont les coefficients sont les produits scalaires $\langle \vec{r}_i, \vec{r}_j \rangle_E$, c'est-à-dire de la $n \times n$ matrice ${}^t X X$ si x est représenté par la $k \times n$ matrice X dont les colonnes sont les composantes des $\vec{r}_i \in E \equiv \mathbb{R}^k$. La matrice de Gram doit être interprétée comme celle d'une forme quadratique β non sur $\mathbb{R}^n$ mais sur $\mathcal{D}^*$. Cette forme quadratique, qui code entièrement pour la forme à isométrie près définie par les n points, s'écrit :

$$\beta(\xi, \eta) = \sum_{i,j} \langle \vec{r}_i, \vec{r}_j \rangle_E \xi_i \eta_j = \sum_{i,j} \left(-\frac{1}{2} r_{ij}^2 \right) \xi_i \eta_j,$$

où $r_{ij} = \|\vec{r}_i - \vec{r}_j\|$ est la distance entre les corps i et j . Notons que la dernière égalité ne vaut que sur $\mathcal{D}^*$ et non sur $\mathbb{R}^n$.

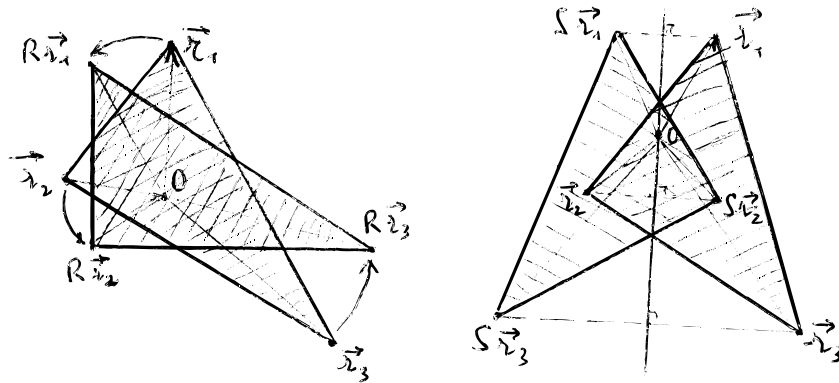


Figure 2 (Invariance de l'aire par rotation et symétrie)

Remarque. On peut montrer que les distances mutuelles r_{ij} sont les coordonnées de β dans une base naturelle de l'espace vectoriel des formes quadratiques sur $\mathcal{D}^*$. Ainsi, leur donnée est équivalente à celle de β qui ne fait donc plus intervenir l'espace ambiant E . Nous sommes passés du “côté de l'espace” au “côté des corps”.

On déduit de la définition de β que $\beta(\xi, \xi) = \|\sum_i \xi_i \vec{r}_i\|_E^2 \geq 0$. Le théorème suivant affirme que cette propriété est caractéristique (voir [B], [AC]) :

Théorème (Borchart 1866). *Les nombres réels r_{ij} sont les distances mutuelles de n points plongés dans un espace euclidien E (dont on ne précise pas la dimension) si et seulement si la forme quadratique $\beta = \sum_{i,j} (-\frac{1}{2}r_{ij}^2) \xi_i \eta_j$ sur $\mathcal{D}^*$ est positive. De plus, on peut choisir E de dimension p si et seulement si le rang de β est inférieur ou égal à p .*

3 - Masses et volumes.

Attribuons des masses positives m_i aux points $\vec{r}_i$, qui deviennent des “corps”, éventuellement célestes. Un moyen classique de “réduire” la symétrie de translation est de fixer à l’origine de $\mathbb{R}^n$ le *centre de gravité* $x_G = (1/\sum m_i) \sum m_i x_i$ d’un n -uple $(x_1, x_2, \dots, x_n)$. On identifie ainsi $\mathcal{D}$ à l’hyperplan vectoriel de $\mathbb{R}^n$ d’équation $\sum m_i x_i = 0$. En restreignant à cet hyperplan le *produit scalaire des masses* défini sur $\mathbb{R}^n$ par la formule

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \cdot (y_1, y_2, \dots, y_n) = \sum_{i=1}^n m_i x_i y_i,$$

on fait de $\mathcal{D}$ un *espace euclidien* dont le produit scalaire s’écrit

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \cdot (y_1, y_2, \dots, y_n) = \sum_{i=1}^n m_i (x_i - x_G)(y_i - y_G).$$

A cette structure euclidienne est associé l’isomorphisme

$$\mu : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}^*, \quad \mu(x_1, x_2, \dots, x_n) = (m_1(x_1 - x_G), m_2(x_2 - x_G), \dots, m_n(x_n - x_G))$$

qui munit $\mathcal{D}^*$ du produit scalaire euclidien

$$(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \cdot (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{m_i} \xi_i \eta_i$$

et transforme la forme quadratique β en un endomorphisme symétrique B de l’espace euclidien $\mathcal{D}^*$, défini par

$$\beta(\xi, \eta) = B(\xi) \cdot \eta = \xi \cdot B(\eta).$$

Revenant au cas de 3 corps, pour lequel $\dim \mathcal{D}^* = 2$, nous sommes en mesure d’interpréter le déterminant 4×4 de la formule (C.M.) comme un artefact de calcul du déterminant d’un endomorphisme d’un espace de dimension 2 dépourvu d’une base privilégiée.

Proposition. *La formule (C.M.) exprimant le carré de l’aire S du triangle de sommets $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3$ au moyen d’un déterminant de Cayley-Menger équivaut à l’équation*

$$\det B = \frac{m_1 m_2 m_3}{m_1 + m_2 + m_3} (2S)^2.$$

Démonstration. C'est une suite d'exercices élémentaires d'algèbre linéaire : les artifices annoncés dans l'introduction. Après une éventuelle translation, *on peut supposer que le centre de gravité des $\vec{r}_i$ est à l'origine de $\mathbb{R}^2$.*

1) On définit l'extension $\hat{B}$ de B en un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ par la condition que B prenne la valeur 0 sur le vecteur (m_1, m_2, m_3) , qui engendre l'orthogonal de $\mathcal{D}^*$ pour le produit scalaire dual de celui des masses sur $(\mathbb{R}^3)^* \equiv \mathbb{R}^3$. Montrer que la matrice de $\hat{B}$ (dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$) est

$$\hat{B} = (\hat{b}_{ij})_{1 \leq i, j \leq 3}, \quad \hat{b}_{ij} = m_i \langle \vec{r}_i, \vec{r}_j \rangle.$$

2) En se plaçant dans la base de $\mathbb{R}^4 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ formée de $(1, 0, 0, 0), (0, m_1, m_2, m_3), (0, a_1, b_1, c_1), (0, a_2, b_2, c_2)$, où les (a_i, b_i, c_i) , $i = 1, 2$, engendrent $\mathcal{D}^*$, montrer que l'on a

$$\det B = -\frac{1}{M} \det \tilde{B},$$

où $M = \sum_{i=1}^n m_i$ est la somme des masses et $\tilde{B}$ est la matrice 4×4 obtenue à partir de $\hat{B}$ en la bordant en haut par la ligne $(0 \ 1 \ 1 \ 1)$ et à gauche par la colonne $(0 \ m_1 \ m_2 \ m_3)$.

3) Utiliser les identités

$$\begin{aligned} \langle \vec{r}_i, \vec{r}_j \rangle - \langle \vec{r}_1, \vec{r}_j \rangle - \langle \vec{r}_{i1}, \vec{r}_1 \rangle &= \langle \vec{r}_{i1}, \vec{r}_{j1} \rangle, \\ \langle \vec{r}_i, \vec{r}_j \rangle - \frac{1}{2} \|\vec{r}_i\|^2 - \frac{1}{2} \|\vec{r}_j\|^2 &= -\frac{1}{2} r_{ij}^2, \end{aligned}$$

pour conclure, à l'aide d'opérations de lignes et de colonnes que, d'une part,

$$\det \tilde{B} = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ m_1 & 0 & 0 & 0 \\ m_2 & 0 & m_2 \langle \vec{r}_{21}, \vec{r}_{21} \rangle & m_2 \langle \vec{r}_{21}, \vec{r}_{31} \rangle \\ m_3 & 0 & m_3 \langle \vec{r}_{31}, \vec{r}_{21} \rangle & m_3 \langle \vec{r}_{31}, \vec{r}_{31} \rangle \end{pmatrix}$$

est le produit par $-m_1 m_2 m_3$ du carré de l'aire du parallélogramme engendré par les vecteurs $\vec{r}_{21}, \vec{r}_{31}$, et que, d'autre part,

$$\det \tilde{B} = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ m_1 & 0 & -\frac{1}{2} m_1 r_{12}^2 & -\frac{1}{2} m_1 r_{13}^2 \\ m_2 & -\frac{1}{2} m_2 r_{21}^2 & 0 & -\frac{1}{2} m_2 r_{23}^2 \\ m_3 & -\frac{1}{2} m_3 r_{31}^2 & -\frac{1}{2} m_3 r_{32}^2 & 0 \end{pmatrix}$$

est égal au produit par $\frac{1}{4} m_1 m_2 m_3$ du déterminant présent dans la formule (C.M.).

4) En déduire la proposition en se rappelant que l'aire de n'importe lequel des parallélogrammes engendrés par les $\vec{r}_i$ est égale à 2 fois celle du triangle qu'ils définissent.

5) Plus généralement, montrer que

$$\det(\text{Id}_{\mathcal{D}^*} - \lambda B) = 1 - I\lambda + \frac{m_1 m_2 m_3}{m_1 + m_2 + m_3} 4|\Delta|^2 \lambda^2,$$

où $I = \text{trace} B = \frac{1}{M} (m_2 m_3 r_{23}^2 + m_3 m_1 r_{31}^2 + m_1 m_2 r_{12}^2) = \frac{1}{M} (m_2 m_3 a + m_3 m_1 b + m_1 m_2 c)$ est le moment d'inertie des trois masses par rapport à leur centre de gravité.

Remarque. Tout ceci se généralise avec la même démonstration au cas de n corps dans un espace euclidien de dimension finie (exercice) et le polynôme caractéristique de B est donné par la formule

$$\det(\text{Id}_{\mathcal{D}^*} - \lambda B) = 1 - \eta_1 \lambda + \cdots + (-1)^{n-1} \eta_{n-1} \lambda^{n-1},$$

$$\eta_{k-1} = \frac{1}{M} \sum_{i_1 < \cdots < i_k} m_{i_1} \cdots m_{i_k} [(k-1)! \text{vol}_{i_1 \dots i_k}]^2, \quad M = \sum_{i=1}^n m_i,$$

où $\text{vol}_{i_1 \dots i_k}$ est le volume $(k-1)$ -dimensionnel du simplexe dont les corps $\vec{r}_{i_1}, \dots, \vec{r}_{i_k}$ sont les sommets. En particulier, le carré du volume $(n-1)$ -dimensionnel V du simplexe dont les sommets sont les n points est donné par la formule

$$\det B = \frac{m_1 \cdots m_n}{M} ((n-1)!V)^2, \text{ ou } (-1)^n 2^{n-1} (n-1)!^2 V^2 = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & . & . & . & 1 \\ 1 & 0 & . & . & . & . \\ . & . & . & . & r_{ij}^2 & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & r_{ji}^2 & . & 0 & . \\ 1 & . & . & . & . & 0 \end{pmatrix}.$$

4 - Retour à l'espace ambiant : inerties.

L'application x qui représente une configuration des n corps $(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n)$ à translation près est la restriction à l'hyperplan $\mathcal{D}^*$ de l'application linéaire $X : \mathbb{R}^n \rightarrow E$ définie par $X(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = \sum_{i=1}^n \xi_i \vec{r}_i$. La transposée de x applique le dual E^* de E dans le dual de $\mathcal{D}^*$, qui s'identifie canoniquement à $\mathcal{D}$. Mais les structures euclidiennes de $E = \mathbb{R}^k$ et $\mathcal{D}$ nous permettent d'identifier chacun de ces espaces avec son dual. Finalement, la transposée ${}^t x : E \rightarrow \mathcal{D}^*$ de x peut être définie par la formule :

$$\forall e \in E, \forall \xi \in \mathcal{D}^*, \quad e \cdot x(\xi) = {}^t x(e) \cdot \xi,$$

dans laquelle les produits scalaires $\cdot$ sont pris respectivement dans E et dans $\mathcal{D}^*$.

L'endomorphisme $B : \mathcal{D}^* \rightarrow \mathcal{D}^*$ s'écrit alors $B = {}^t x \circ x$. Mais l'endomorphisme $\mathcal{I} = x \circ {}^t x : E \rightarrow E$ est lui bien connu des mécaniciens, au moins en dimension trois où les bivecteurs s'identifient à des vecteurs une fois l'orientation fixée (excuse-moi, Gilles, toi qui admirait tant Grassmann, d'épargner aux lecteurs le langage de l'algèbre extérieure qui est pourtant bien celui des moments cinétiques et des rotations instantanées). C'est la *forme d'inertie duale* de la configuration formée par les n masses ponctuelles. En effet, si $n = k = 3$, $\vec{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$ et $\sum_i m_i \vec{r}_i = 0$, x et ${}^t x$ peuvent être représentées respectivement par les matrices

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad {}^t X = \begin{pmatrix} m_1 x_1 & m_1 y_1 & m_1 z_1 \\ m_2 x_2 & m_2 y_2 & m_2 z_2 \\ m_3 x_3 & m_3 y_3 & m_3 z_3 \end{pmatrix},$$

et l'extension $\hat{B}$ de B à $\mathbb{R}^3$ introduite dans le paragraphe 3 devient $\hat{B} = {}^t X X$ alors que

$$\mathcal{I} = X {}^t X = \begin{pmatrix} \sum_k m_k x_k^2 & \sum_k m_k x_k y_k & \sum_k m_k x_k z_k \\ \sum_k m_k y_k x_k & \sum_k m_k y_k^2 & \sum_k m_k y_k z_k \\ \sum_k m_k z_k x_k & \sum_k m_k z_k y_k & \sum_k m_k z_k^2 \end{pmatrix}.$$

L'opérateur d'inertie $\mathcal{J} : \wedge^2 E^* \rightarrow \wedge^2 E$, qui transforme la rotation instantanée d'un mouvement de corps solide de la configuration x en son moment cinétique, est quant à lui représenté après identification à E de la source et du but, par la matrice :

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} \sum_k m_k (y_k^2 + z_k^2) & -\sum_k m_k x_k y_k & -\sum_k m_k x_k z_k \\ -\sum_k m_k y_k x_k & \sum_k m_k (z_k^2 + x_k^2) & -\sum_k m_k y_k z_k \\ -\sum_k m_k z_k x_k & -\sum_k m_k z_k y_k & \sum_k m_k (x_k^2 + y_k^2) \end{pmatrix} = (\text{trace } \mathcal{I}) \text{Id} - \mathcal{I}.$$

En particulier, la connaissance du spectre de l'un quelconque des trois opérateurs $B, \mathcal{I}, \mathcal{J}$ implique celle des deux autres. Fixer B équivaut donc à fixer à rotation près l'ellipsoïde d'inertie de la configuration, ce qui justifie le nom d'*inertie intrinsèque* que nous lui avons donné. Définie du côté des corps et non plus du côté de l'espace ambiant, elle est invariante par le groupe $O(\mathbb{R}^k)$ des isométries linéaires de $E = \mathbb{R}^k$ et covariante par le groupe $O(\mathcal{D})$ des isométries linéaires de $\mathcal{D}$ (le “*democracy group*” des physiciens) alors que l'inertie des mécaniciens (celle, $\mathcal{I}$ ou $\mathcal{J}$, qui définit l'ellipsoïde d'inertie dans $\mathbb{R}^k$) est invariante par $O(\mathcal{D})$ et covariante par $O(\mathbb{R}^k)$.

Remarque. Le potentiel newtonien $U(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n) = \sum_{i < j} \frac{m_i m_j}{r_{ij}}$ ne dépend, une fois les masses données, que des r_{ij} , c'est-à-dire de β . Appelons *sous-variété isospectrale* l'ensemble des formes quadratiques β sur $\mathcal{D}^*$ dont le spectre de l'endomorphisme B associé est fixé; une telle variété consiste en l'ensemble des formes dont l'ellipsoïde d'inertie est fixé à isométrie de E près. On définit dans [AC] les *configurations équilibrées* de n masses positives comme les points critiques de la restriction de U à une sous-variété isospectrale. On montre que ce sont exactement les configurations qui admettent un *mouvement homographique* (i.e. un mouvement au cours duquel la forme ne change pas à similitude près) dans un espace E dont on ne précise pas la dimension (toujours l'“oubli” de l'espace ambiant). Ces configurations généralisent les classiques *configurations centrales* qui possèdent la même propriété mais dans un espace E de dimension inférieure ou égale à 3. Ces dernières sont en effet les points critiques de la restriction de U à l'ensemble des configurations dont le moment d'inertie $I = \text{trace } B$ par rapport au centre de gravité est fixé.

5 - Le problème des trois corps dans le plan : de l'aire à l'aire orientée et de la formule de Héron à la théorie des invariants.

Dans le quadrant $\mathbb{R}_+^3$ des triplets (a, b, c) de nombres réels positifs ou nuls, les triplets qui représentent les carrés des longueurs des côtés d'un triangle sont ceux qui appartiennent au cône plein d'équation $2ab + 2bc + 2ca - a^2 - b^2 - c^2 \geq 0$. Il suffit en effet, d'après le théorème de Schoenberg, que la forme quadratique β définie sur $\mathcal{D}^*$ par

$$\beta(\xi, \eta) = -\frac{1}{2}(a\xi_2\eta_3 + b\xi_3\eta_1 + c\xi_1\eta_2)$$

soit non négative. Fixant des masses positives quelconques, cela revient à la non négativité de la trace et du déterminant de l'endomorphisme B associé, c'est-à-dire, puisque $a, b, c \geq 0$, à la condition annoncée. On peut dire que *la positivité du second membre de la formule donnant le carré de l'aire d'un triangle en fonction des carrés des longueurs de ses côtés subsume les trois inégalités triangulaires.*

Fixons maintenant la taille des triangles en leur imposant d'avoir un *moment d'inertie par rapport à leur centre de gravité* égal à 1 :

$$I = \text{trace} B = m_2 m_3 a + m_3 m_1 b + m_1 m_2 c = 1.$$

L'intersection de ce plan affine avec le cône plein est un domaine elliptique (un disque si les trois masses sont égales) qui paramètre l'ensemble des triangles d'inertie fixée à isométrie près. Le bord de ce domaine correspond aux triangles aplatis, dont l'aire est nulle. Il contient trois points particuliers, les *points de collision* correspondant à des triangles dégénérés dont deux sommets sont confondus.

Lorsque l'espace ambiant E est de dimension 2, ne passer au quotient que par les rotations (i.e. par les isométries linéaires préservant l'orientation) conduit à l'espace des triangles *orientés* d'inertie fixée : c'est une sphère $\mathcal{S}$ (*the shape sphere* en anglais), formée du recollement le long de leurs bords de deux exemplaires de $\mathcal{T}$ correspondant respectivement aux triangles orientés positivement et à ceux orientés négativement (figure 3). Dans ce qui suit, on indique une manière plus conceptuelle d'obtenir cette sphère et les structures qui lui sont naturellement associées.

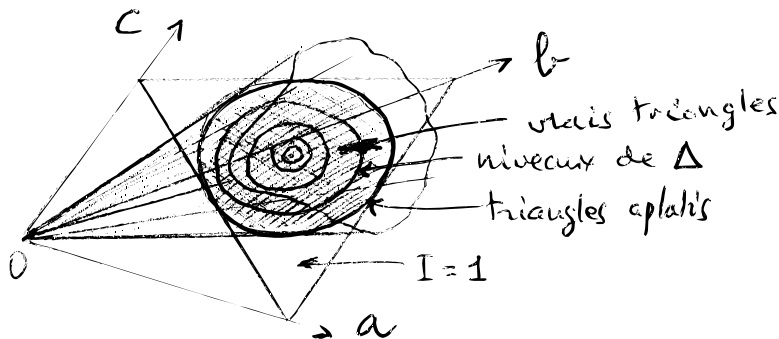


Figure 3 (dans $\mathbb{R}^3$)

La première remarque est que l'on peut maintenant enrichir la notion d'aire en lui donnant un signe dépendant de l'orientation du triangle. Nous noterons Δ cette *aire orientée*. Analytiquement, $\Delta = \frac{1}{2} \vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2$, où $\vec{u}_1$ est le vecteur d'origine le premier corps et d'extrémité le second et $\vec{u}_2$ est n'importe quel vecteur dont l'origine est sur la droite joignant les deux premiers corps et dont l'extrémité est le troisième corps (si des masses sont attribuées aux corps et si l'origine de $\vec{u}_2$ est le centre de gravité des deux premiers corps, $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ sont les *coordonnées de Jacobi* dans l'espace $\text{Hom}(\mathcal{D}^*, \mathbb{R}^2) \equiv \mathcal{D} \otimes \mathbb{R}^2 \equiv \mathcal{D}^2$ des configurations de trois corps dans le plan modulo translation; ces coordonnées sont obtenues en choisissant une base orthogonale de $\mathcal{D}^*$).

L'équation (C.M.), qui exprime Δ^2 comme fonction des carrés $a = r_{23}^2, b = r_{31}^2, c = r_{12}^2$ des distances mutuelles, définit un cône quadratique dans $\mathbb{R}^4$ (coordonnées a, b, c, Δ) et même un demi-cône $\mathcal{C}$ si l'on ne s'intéresse qu'au quadrant $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0$. La *shape sphere* $\mathcal{S}$ s'identifie à l'ensemble des génératrices de $\mathcal{C}$, c'est-à-dire au quotient de $\mathcal{C} \setminus \{0\}$ par les homothéties (figure 4).

$\mathcal{D}^2 \rightarrow \mathcal{Q}(\mathcal{D}^2)^*$ qui à $v \in \mathcal{D}^2$ associe la forme linéaire $q \mapsto q(v)$. Mais l'image de cette application est facile à déterminer : une fois choisie une base de $\mathcal{D}^2$ dont les coordonnées sont notées z_1, z_2 , $\mathcal{Q}(\mathcal{D}^2)$ est engendré par $|z_1|^2, |z_2|^2, \text{Re}\bar{z}_1 z_2, \text{Im}\bar{z}_1 z_2$, et l'image $\mathcal{C}$ de $\mathcal{D}^2$ est définie par la seule relation quadratique $|\text{Re}\bar{z}_1 z_2|^2 + |\text{Im}\bar{z}_1 z_2|^2 = |z_1|^2 |z_2|^2$, assortie des inégalités $|z_1|^2 \geq 0, |z_2|^2 \geq 0$. Il est en fait plus agréable de remplacer ces dernières coordonnées par

$$w_0 = |z_1|^2 + |z_2|^2, w_1 = |z_1|^2 - |z_2|^2, w_2 = 2\text{Re}(\bar{z}_1 z_2), w_3 = 2\text{Im}(\bar{z}_1 z_2),$$

car le demi-cône $\mathcal{C}$, défini par les équations $-w_0^2 + w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 = 0, w_0 \geq 0$, apparaît comme le *cône de lumière* dans l'espace de Minkowski. Pour l'identifier au demi-cône défini par (C.M.), il suffit de remarquer que a, b, c, Δ forment une base de $\mathcal{Q}(\mathcal{D}^2)$: la formule de Héron ne fait donc qu'exprimer la relation quadratique qui existe entre les éléments de cette base.

Remarques. 1) Nous venons de voir que l'application $\mathcal{H} : \mathcal{C}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ définie par

$$(z_1, z_2) \mapsto (|z_1|^2 + |z_2|^2, |z_1|^2 - |z_2|^2, 2\text{Re}(\bar{z}_1 z_2), 2\text{Im}(\bar{z}_1 z_2))$$

a pour image le demi-cône d'équations $-w_0^2 + w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 = 0, w_0 \geq 0$; sa composition $H = \pi_0 \circ \mathcal{H} : \mathcal{C}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ avec la projection π_0 parallèlement à w_0 sur le sous-espace $\mathbb{R}^3$ engendré par w_1, w_2, w_3 est la classique *application de Hopf*, qui applique la sphère unité de $\mathcal{C}^2$ sur la sphère unité de $\mathbb{R} \times \mathcal{C}$ par la classique *fibration de Hopf*.

2) L'espace des génératrices du demi-cône ci-dessus est la définition intrinsèque (en particulier indépendante d'un choix de masses) de la sphère des triangles orientés ou *shape sphere*. On montre classiquement (voir [M]) qu'elle hérite d'une *structure conforme* bien définie en remarquant que l'on peut y définir, indépendamment de tout choix de coordonnées, la notion de cercle comme ensemble des génératrices du demi-cône contenues dans un sous-espace vectoriel de dimension trois (si l'on connaît les cercles, on connaît en particulier les cercles infinitésimaux et on en déduit une notion d'angle, c'est-à-dire une structure conforme). Des métriques riemanniennes dans cette classe conforme (i.e. définissant la même notion d'angle) sont obtenues en la considérant comme l'ensemble des classes d'isométrie orientée de triangles dont le moment d'inertie par rapport à leur centre de gravité est égal à 1. Il suffit pour le voir de choisir, une fois les masses fixées, une base sur $\mathcal{C}$ de $\mathcal{D}^2$ qui soit une base orthogonale de $\mathcal{D}^*$ (*coordonnées de type Jacobi*). Par exemple, pour la métrique correspondant à des masses égales, on peut prendre $z_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$ et $z_2 = \sqrt{\frac{2}{3}}(\vec{r}_3 - \frac{1}{2}(\vec{r}_1 + \vec{r}_2))$. Dans tous les cas, si la base choisie est orthonormée, la métrique sur $\mathcal{D}^2 \equiv \mathcal{C}^2 \equiv \mathbb{R}^4$ est la métrique euclidienne standard.

3) Topologiquement, la situation orientée est bien plus riche que la situation non orientée : la sphère des triangle orientés possède un groupe de symétrie à douze éléments (le groupe diédral D_6 , qui est aussi le groupe de symétrie de l'hexagone régulier) et, privée des trois points de collision, son groupe fondamental devient le groupe libre à deux générateurs. Des travaux récents ont montré qu'une partie de cette richesse se retrouve dans les solutions périodiques du problème des 3 corps, mais ceci est une autre histoire.

Bibliographie

- [A1] Albouy A. *Integral manifolds of the N-body problem*, Inventiones Mathematicæ, 114, p. 463-488 (1993)
- [A2] Albouy A. *Mutual distances in Celestial Mechanics*, preprint aout 2004
- [AC] Albouy A. et Chenciner A. *le problème des n corps et les distances mutuelles*, Inventiones Mathematicæ, 131, p. 151-184 (1998)
- [B] Borchart C.W. *Ueber die Aufgabe des Maximum, welche der Bestimmung des Tetraeders von grösstem Volumen bei gegebenem Flächeninhalt der Seitenflächen für mehr als drei Dimensionen entspricht*, Mémoires de l'académie de Berlin, p. 121-155, Werke p. 201-232 (19 février 1866) *le théorème est formulé à la page 207.*
- [H] Héron d'Alexandrie *Metrica*, (-124). Voir Heath, *Greek mathematics* p. 420-422. *La formule y est présentée sous la forme $S^2 = s(s-\alpha)(s-\beta)(s-\gamma)$, où s est la demie-somme des longueurs des côtés : $2s = \alpha + \beta + \gamma$.*
- [J] Jacobi
- [L] Lagrange J.L. *Essai sur le problème des trois corps*, œuvres vol. 6, p.229-324 (1772)
- [M] Montgomery R. *Infinitely Many Syzygies*, Arch. Rational Mech. Anal. 164, p. 311-340 (2002)

Merci à Alain Albouy pour la référence [B].