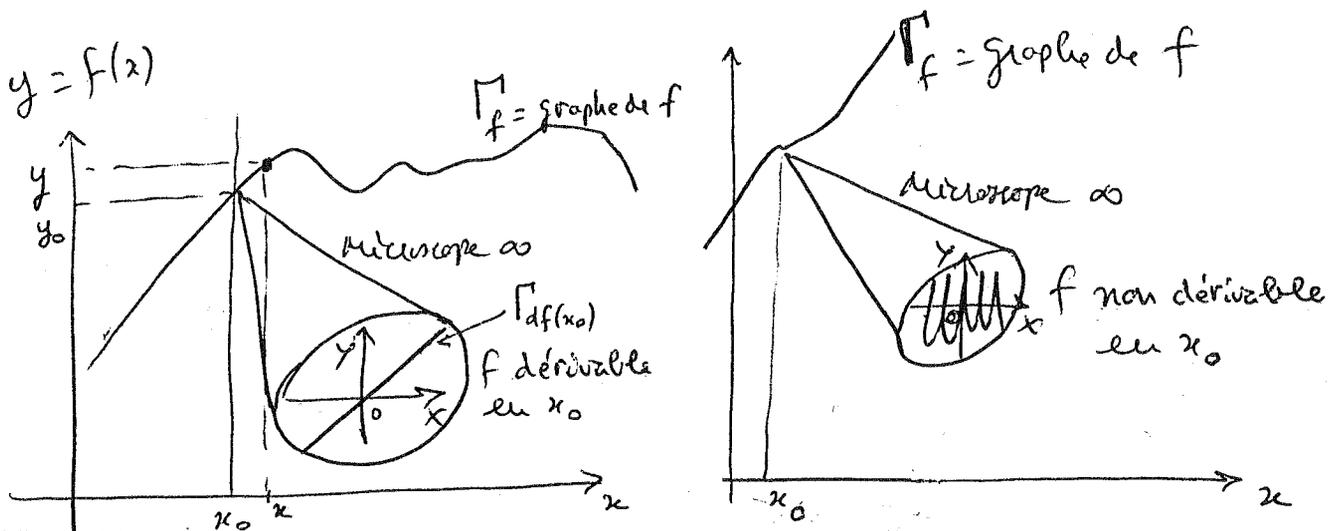


Résumés du Cours de A. Chenciner

CALCUL DIFFÉRENTIEL DANS \mathbb{R}^n



$$\begin{cases} x = x_0 + \varepsilon X \\ y = y_0 + \varepsilon Y \end{cases}$$

$$Y = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} [f(x_0 + \varepsilon X) - f(x_0)]$$

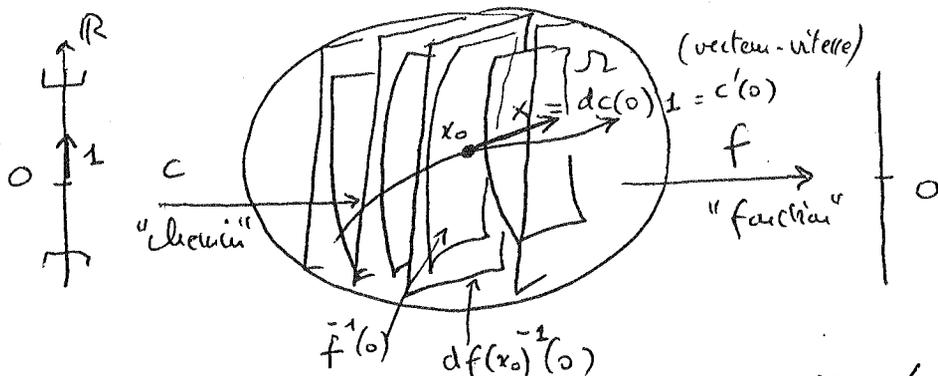
Si la limite existe et est linéaire en X , on dit que f est dérivable en x_0 et que sa dérivée $df(x_0)$ en x_0 est l'application linéaire

$$X \longmapsto Y = df(x_0)X$$

(on trouve aussi les notations $D_{x_0}f \cdot X$, $Df(x_0)X$, $f'(x_0)X$, etc...).

②

Vecteurs et covecteurs tangents en x_0 à $\Omega \subset \mathbb{R}^n$:



espace tangent en x_0 à Ω : $T_{x_0} \Omega = \left\{ \begin{array}{l} \text{applications} \\ \text{locales} \end{array} c: (\mathbb{R}, 0) \rightarrow (\Omega, x_0) \in C^\infty \right. / \left. \begin{array}{l} c_1 \sim c_2 \\ \Downarrow \\ (c_1 - c_2)(t) = O(t^2) \end{array} \right\}$
 (la classe d'équivalence est le vecteur-unitaire commun)

espace covecteur en x_0 à Ω : $T_{x_0}^* \Omega = \left\{ \begin{array}{l} \text{applications} \\ \text{locales} \end{array} f: (\Omega, x_0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0) \in C^\infty \right. / \left. \begin{array}{l} f_1 \sim f_2 \\ \Downarrow \\ (f_1 - f_2)(x) = O(\|x - x_0\|^2) \end{array} \right\}$
 (la classe d'équivalence est la dérivée $df(x_0)$)

$X \in T_{x_0} \Omega$ est un vecteur tangent en x_0 à Ω
 $l \in T_{x_0}^* \Omega$ est un covecteur tangent en x_0 à Ω

Les opérations de somme et de multiplication par un scalaire sur les applications locales passent au quotient par les relations d'équivalence et définissent donc des structures d'espaces vectoriels sur $T_{x_0} \Omega$ et $T_{x_0}^* \Omega$.

L'Accompagnement: $T_{x_0} \Omega \times T_{x_0}^* \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est une doubleté
 $(\langle c \rangle, \langle f \rangle) \mapsto (f \circ c)'(0)$
 et identifie donc $T_{x_0}^* \Omega$ au dual de $T_{x_0} \Omega$.

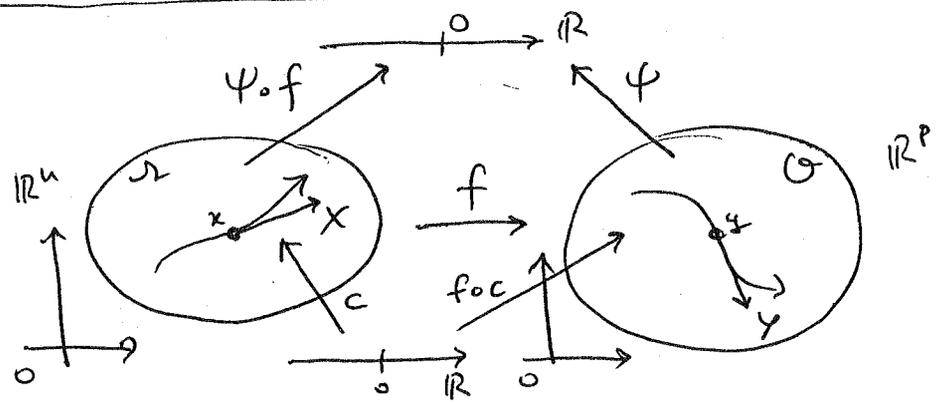
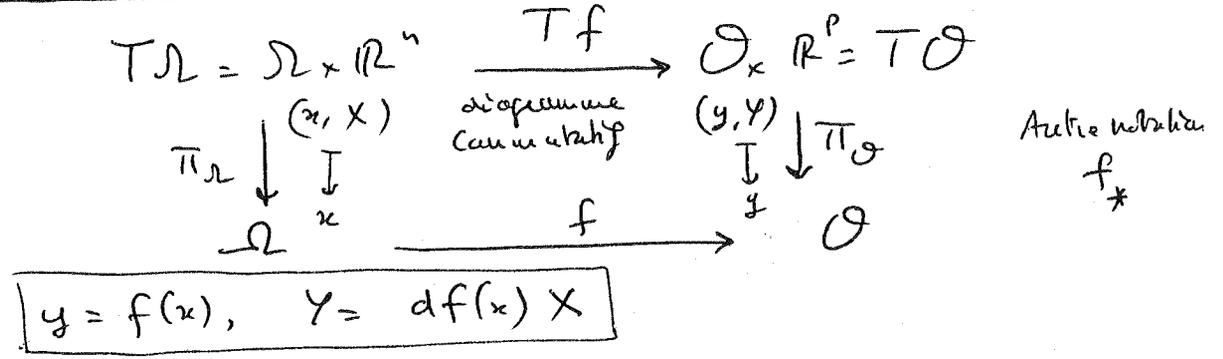
Fibre tangente : $T\Omega = \{(x, X), X \in T_x\Omega\}$

Fibre cotangente : $T^*\Omega = \{(x, \ell), \ell \in T_x^*\Omega\}$

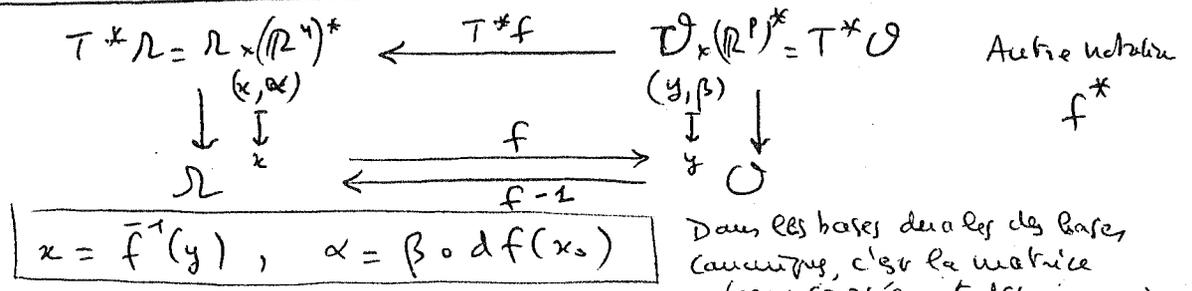
La translation T_x identifie canoniquement $T_x\mathbb{R}^n$,
 et donc $T_x^*\Omega$ à $(\mathbb{R}^n)^* \cong \mathbb{R}^n$ (dualité canonique
 donnée par le produit scalaire euclidien).

Donc $T\Omega \cong \Omega \times \mathbb{R}^n \cong T^*\Omega$.

Application tangente (f dérivable quelconque)



Application cotangente (f dérivable bijection)



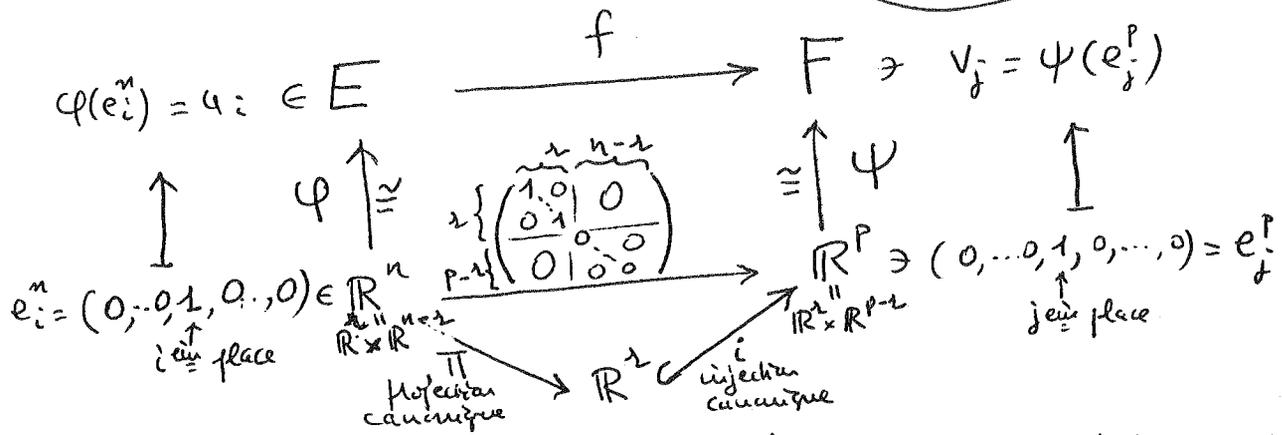
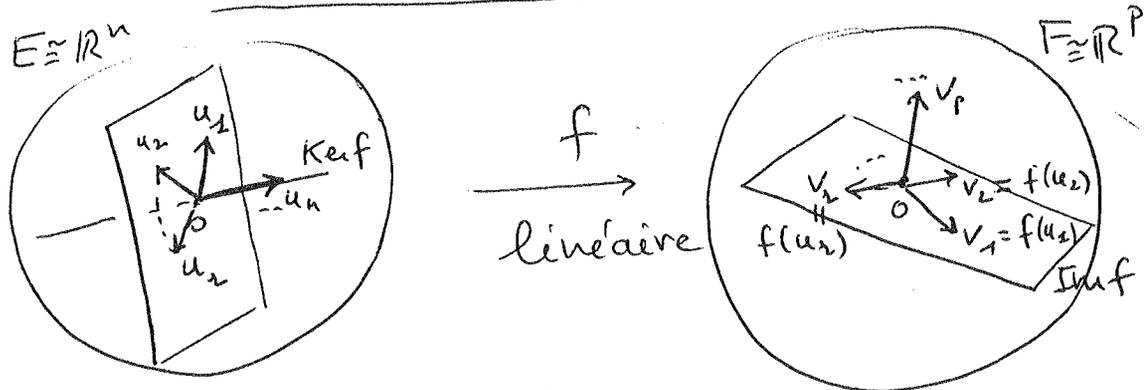
Dans les bases duales des bases canoniques, c'est la matrice transposée ${}^t df(x_0)$ qui représente $\beta \mapsto \alpha$

Composition : De $(g \circ f) \circ c = g \circ (f \circ c)$, on déduit

"Chain rule" : $T(g \circ f) = Tg \circ Tf \iff d(g \circ f)(x) = dg(Ax) \circ df(x)$

(4)

Formes normales de applications linéaires



Donc $\forall f = \underbrace{\psi \circ i}_{\text{immersion linéaire}} \circ \underbrace{\pi \circ \varphi^{-1}}_{\text{submersion linéaire}}$ est une subimmersion linéaire

Si f est injective (= immersion linéaire), on peut choisir $u_i = e_i^n \forall i$, c'est-à-dire $\varphi = \text{Id}$ et $f = \psi \circ i \quad (r=n)$

Si f est surjective (= submersion linéaire), on peut choisir $v_j = e_j^p \forall j$, c'est-à-dire $\psi = \text{Id}$ et $f = \pi \circ \varphi^{-1} \quad (r=p)$

Le Théorème d'inversion locale et ses conséquences (5)

Notation : $f : (\mathbb{R}^n, x_0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, y_0)$ signifie que f est définie sur un voisinage de x_0 dans \mathbb{R}^n et vérifie $f(x_0) = y_0$.

THÉORÈME. Soit $f : (\mathbb{R}^n, x_0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, y_0)$ de classe C^k .

$df(x_0)$ inversible $\Leftrightarrow \left(\begin{array}{l} \exists U \text{ voisinage de } x_0 \text{ dans } \mathbb{R}^n, V \text{ voisinage} \\ \text{de } y_0 \text{ dans } \mathbb{R}^p \text{ et } g : V \xrightarrow{C^k} U \text{ tels que} \\ g \circ f = \text{Id}_U \text{ et } f \circ g = \text{Id}_V. \end{array} \right)$

Modèle
Id

Si de plus f est $C^{k \geq 1}$, g l'est également.
On dit que $f|_U : U \rightarrow V$ est un diffeomorphisme local de classe C^k d'inverse g . On dit alors que f est un diffeomorphisme local (de classe C^k) en x_0 .

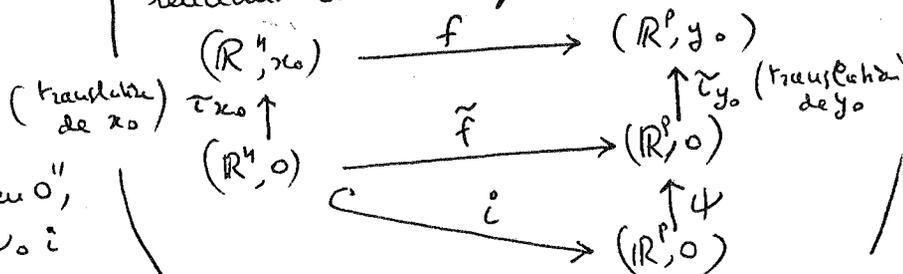
Corollaire 1 (Théorème des immersions)

Soit $f : (\mathbb{R}^n, x_0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, y_0)$ de classe $C^{k \geq 1}$

$df(x_0)$ injective $\Leftrightarrow \left(\begin{array}{l} \exists \text{ difféo local } \psi : (\mathbb{R}^p, 0) \xrightarrow{C^k} (\mathbb{R}^p, 0) \\ \text{rendant commutatif le diagramme} \end{array} \right)$

Modèle
i

i.e. "après translation en 0",
 f devient $\tilde{f} = \psi \circ i$



On dit que f est une immersion en x_0

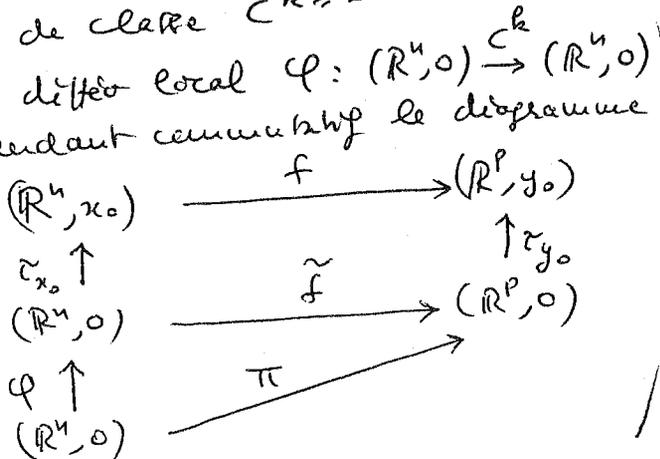
Corollaire 2 (Théorème des submersions)

Soit $f : (\mathbb{R}^n, x_0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, y_0)$ de classe $C^{k \geq 1}$

$df(x_0)$ surjective $\Leftrightarrow \left(\begin{array}{l} \exists \text{ difféo local } \varphi : (\mathbb{R}^n, 0) \xrightarrow{C^k} (\mathbb{R}^n, 0) \\ \text{rendant commutatif le diagramme} \end{array} \right)$

Modèle
 π

i.e. "après translation en 0",
 f devient $\tilde{f} = \pi \circ \varphi^{-1}$



On dit que f est une submersion en x_0

⑥ Corollaire 3 (Théorème des submersions = Théorème du rang constant).
 Soit $f: (\mathbb{R}^n, x_0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, y_0)$ de classe $C^{k \geq 1}$. Soit Ω un
 voisinage ouvert de x_0 sur lequel f est définie.

$$\left(\begin{array}{l} \text{rang } df(x) = r \\ \text{pour tout } x \in \Omega \end{array} \right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \forall x \in \Omega, \exists \text{ diffeos locaux} \\ \varphi: (\mathbb{R}^n, 0) \xrightarrow{C^k} (\mathbb{R}^n, 0) \text{ et } \psi: (\mathbb{R}^p, 0) \xrightarrow{C^k} (\mathbb{R}^p, 0) \\ \text{rendant commutatif le diagramme} \\ \begin{array}{ccc} (\mathbb{R}^n, x) & \xrightarrow{f} & (\mathbb{R}^p, y=f(x)) \\ \tilde{\varphi}_x \uparrow & & \uparrow \tilde{\psi} \\ (\mathbb{R}^n, 0) & \xrightarrow{\tilde{f}} & (\mathbb{R}^p, 0) \\ \varphi \uparrow & & \uparrow \psi \\ (\mathbb{R}^n, 0) & \xrightarrow{\pi} & \mathbb{R}^n, 0 \end{array} \end{array} \right]$$

Modèle
 $\circ \pi$

i.e. "après translation en 0",
 f devient $\tilde{f} = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$

Remarque: Puisqu'il existe un unique modèle d'application
 linéaire de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^p de rang r donné, on peut énoncer
 les trois corollaires comme l'existence de diffeos locaux
 $\varphi: (\mathbb{R}^n, x_0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, x_0)$ dans le Corollaire 1, $\psi: (\mathbb{R}^p, y_0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, y_0)$
 dans le Corollaire 2, $\psi: (\mathbb{R}^p, y) \rightarrow (\mathbb{R}^p, y)$ et $\varphi: (\mathbb{R}^n, x) \rightarrow (\mathbb{R}^n, x)$
 dans le Corollaire 3, qui transforment f en la partie
affine de son développement de Taylor en x_0 (resp. en x)
pour le Corollaire 3): $z \mapsto f(x_0) + df(x_0)(z - x_0)$.

GRAPHE: à la fois image d'une immersion et image réciproque
 de 0 par une submersion

$$\Gamma_f = \{ (x, y) \in (\mathbb{R}^n, x_0) \times (\mathbb{R}^p, y_0), y = f(x) \}$$

$$= \text{image de } x \mapsto (x, f(x))$$

$$= \text{image réciproque de } 0 \text{ par } (x, y) \mapsto y - f(x)$$

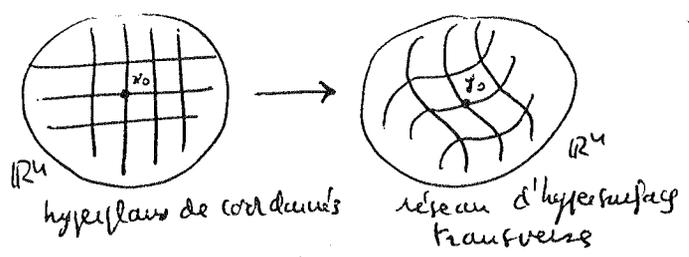
Corollaire 4 (Théorème des fonctions implicites)

Soit $f: (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, (x_0, y_0)) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ de classe $C^{k \geq 1}$
 Si $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ est un isomorphisme linéaire de \mathbb{R}^p , il
 existe $\alpha: (\mathbb{R}^n, x_0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, y_0)$ de classe C^k telle que
au voisinage de (x_0, y_0) , $(f(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = \alpha(x))$.

Modèle
 graphe

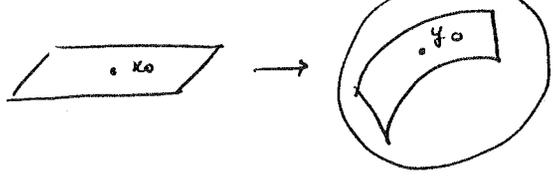
Figures

Difféomorphisme local

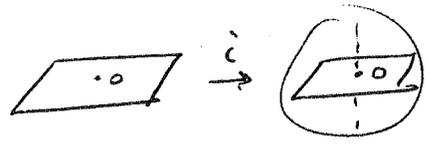


Modèle : Identité

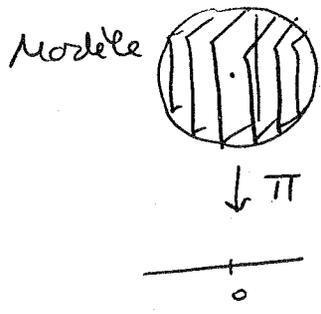
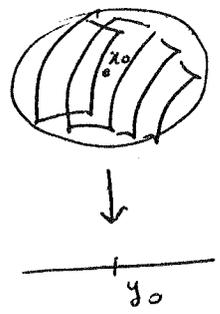
Immersion



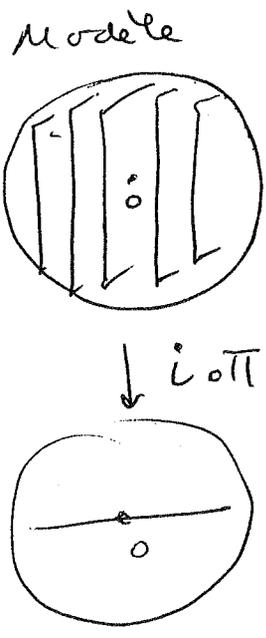
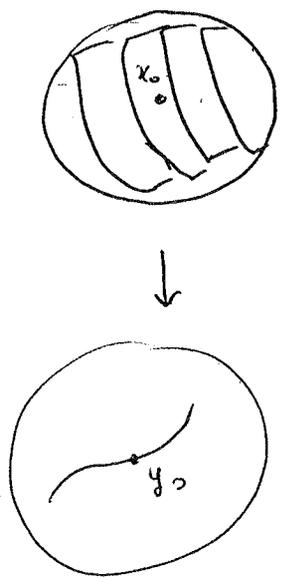
Modèle



Submersion



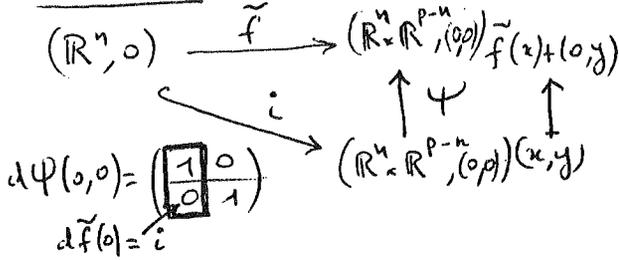
Subimmersion



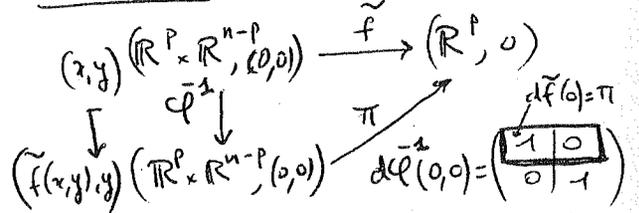
8

Démonstration des Collocaire 1, 2, 3 : par des transformations linéaires on commence par transformer $d\tilde{f}(0)$ en un modèle i, π ou $i \circ \pi$ suivant le cas (page 3).

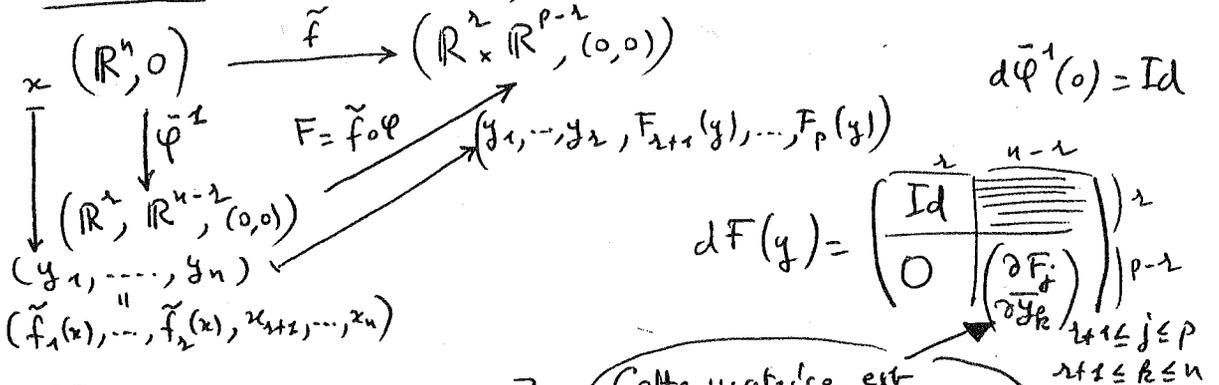
Collocaire 1 (immersés)



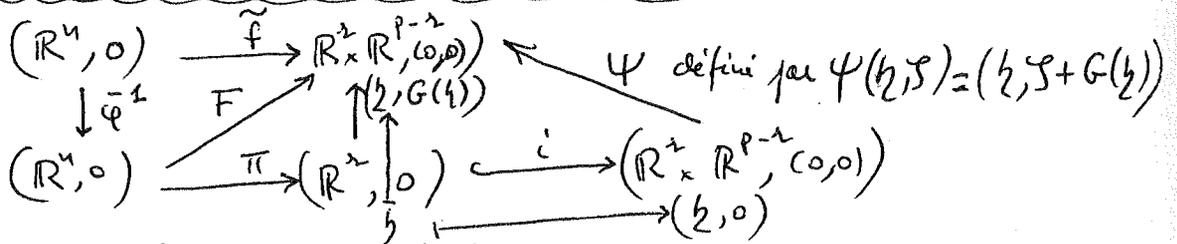
Collocaire 2 (submersés)



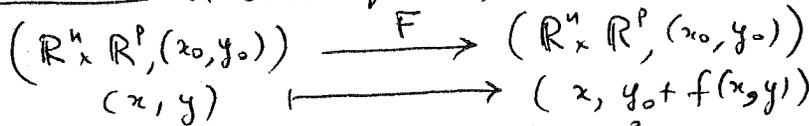
Collocaire 3 (sub-immersés)



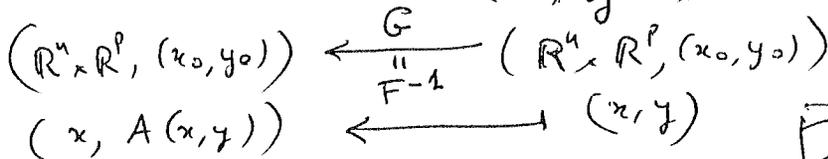
$\left[\forall j=2+1, \dots, p, F_j \text{ ne dépend que de } y_1, \dots, y_2 \right]$
 Cette matrice est idéalement nulle car le rang de $dF(y)$ est $= 2$
 On note $z = (y_1, \dots, y_2)$ et $G = (F_{2+1}, \dots, F_p)$



Collocaire 4 (fonctas implicites)

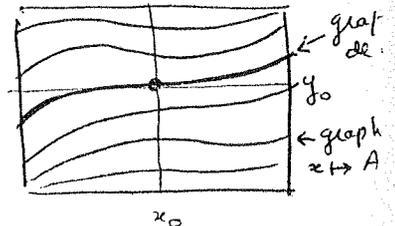


$$\det dF(x_0, y_0) = \det \begin{pmatrix} Id & 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix} = \det \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$$

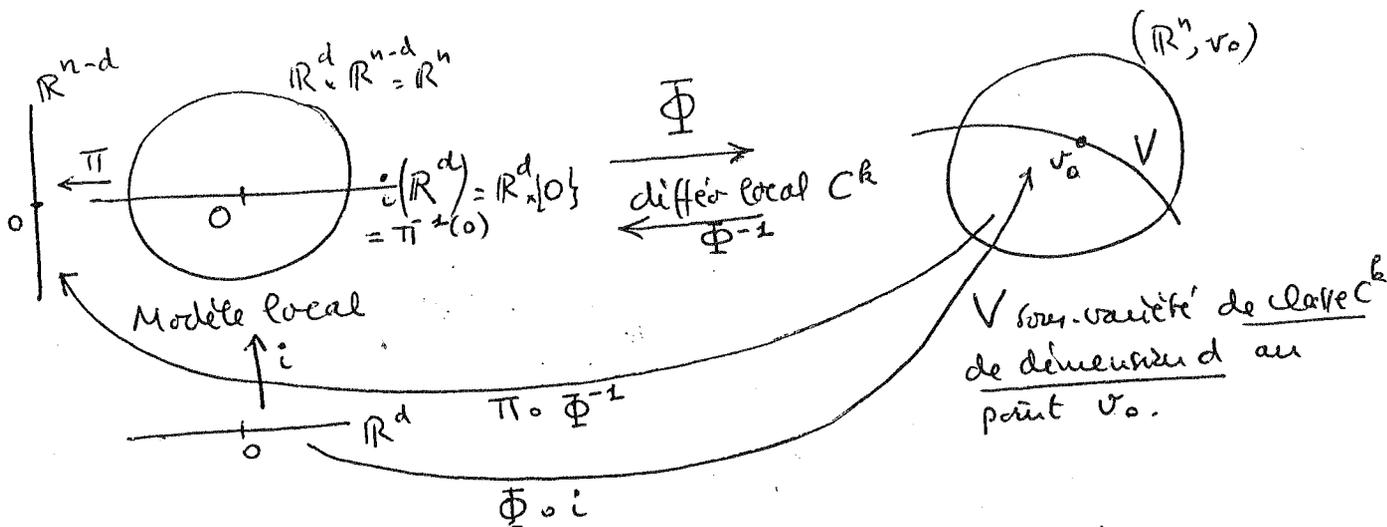


$$F \circ G = Id \iff f(x, A(x, y)) = y - y_0$$

donc $f(x, \underbrace{A(x, y_0)}_{\text{def. } x(x)}) = 0$



Sous-variétés de \mathbb{R}^n

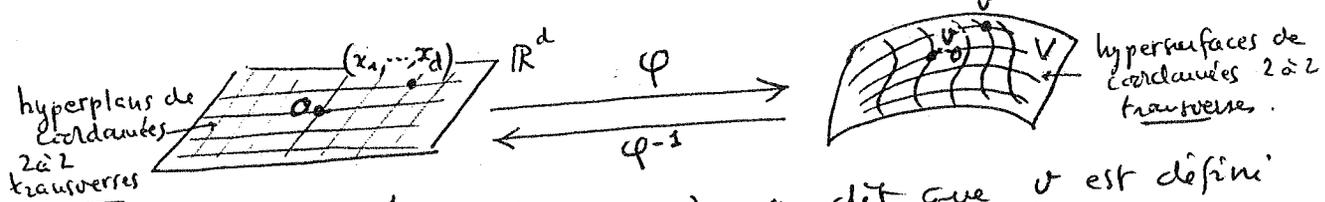


C'est la même application, mais considérée comme à valeurs dans V et non dans \mathbb{R}^n

$$(V, v_0) = (\Phi \circ i)(\mathbb{R}^d, 0) = \left(\underbrace{(\pi \circ \Phi^{-1})^{-1}}_{\text{submersion}}(0), v_0 \right)$$

immersion

$\varphi = \Phi \circ i : \mathbb{R}^d, 0 \rightarrow V, v_0$ est un paramétrage local de V
 $\varphi^{-1} : V, v_0 \rightarrow \mathbb{R}^d, 0$ est un système de coordonnées locales de V

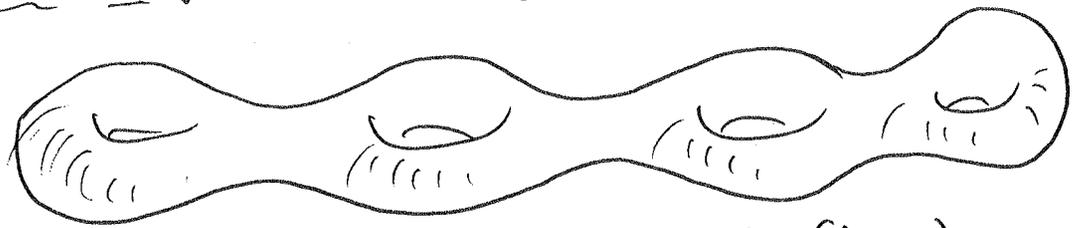


Si $\varphi^{-1}(v) = (x_1, \dots, x_d)$, on dit que v est défini par les coordonnées (courbes) locales x_1, \dots, x_d .

Pratique : Une sous-variété sera définie localement ou bien comme image de $(\mathbb{R}^d, 0)$ par une immersion ou bien comme image réciproque de 0 par une submersion (i.e. "par $n-d$ équations indépendantes en v_0 "). Plus rarement (orbites d'actions de groupe par ex.) elle sera définie comme image d'une subimmersion locale.

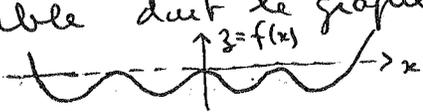
(10)

Exemple : les surfaces orientables de genre
quelconque g ("tores à g trous")



($g=4$ dans la figure)

Affirmation : $\forall g, \exists P(x, y, z)$ polynôme,
 $P: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $t=g$. P est une submersion
en chaque point de $V = P^{-1}(0)$ et me V est
un "torus à g trous".

Ide'e de preuve : On part d'un polynôme $f(x)$
1 variable dont le graphe a $(g-1)$ maxima locaux de même
niveau 0.  . L'équation $y^2 + f(x) = 0$
définit une courbe plane de la forme 
avec g lobes.

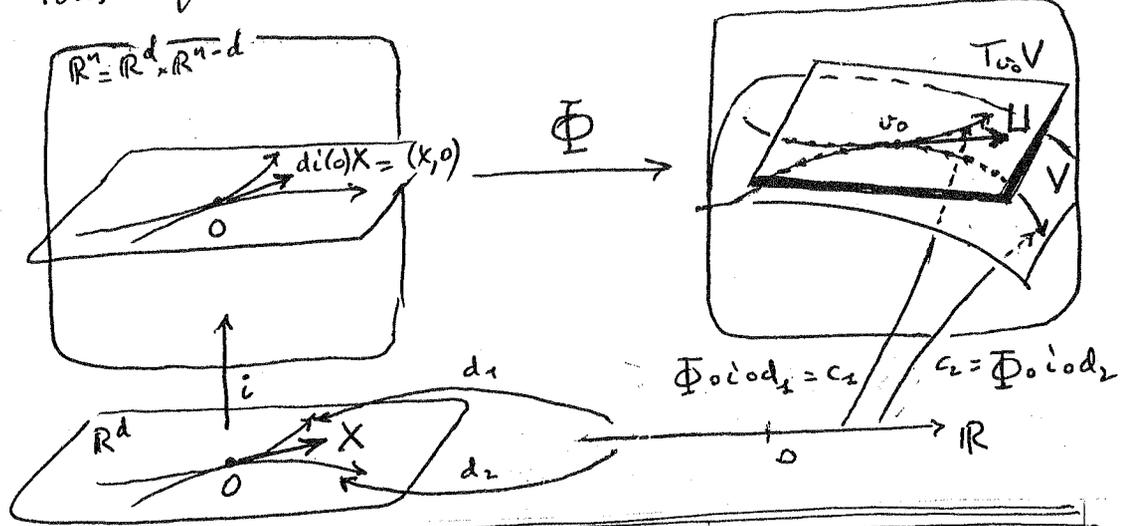
On montre alors que l'équation $(y^2 + f(x))^2 + z^2 = \varepsilon^2$ peut
définir la surface cherchée. Autrement dit, on
peut choisir $P(x, y, z) = (y^2 + f(x))^2 + z^2 - \varepsilon^2$.

Remarque importante : L'image d'une sous-variété de \mathbb{R}^n
par un difféomorphisme est une sous-variété de \mathbb{R}^n (on peut localiser).
Autrement dit, si V est une sous-variété de \mathbb{R}^n en v_0 , (\mathbb{R}^n, V, v_0)
peut servir de modèle local pour définir d'autres sous-variétés.

Sous-espace tangent à une sous-variété en un point:

$$T_{v_0} V = \left\{ U \in T_{v_0} \mathbb{R}^n, U \text{ est représentée par un chemin } c: (\mathbb{R}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, v_0) \text{ à valeurs dans } V \right\}$$

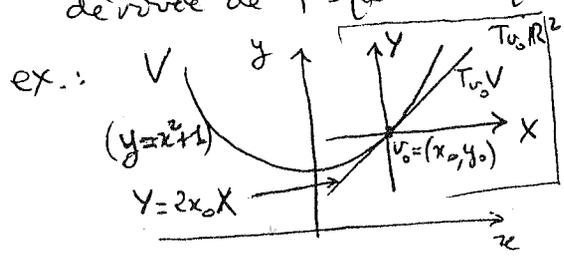
Exercice: $T_{v_0} V = d\Phi(0)(\mathbb{R}^d \setminus \{0\}) \subset T_{v_0} \mathbb{R}^n$, et ceci quel que soit le difféomorphisme local $\Phi: (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, v_0)$ envoyant $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ dans V . En particulier, $T_{v_0} V$ est un sous-espace vectoriel de $T_{v_0} \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n$.



RETENIR:

(V, v_0) définie par	$f: (\mathbb{R}^d, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, v_0)$ immersion	$\text{Im } df(0)$	$T_{v_0} V$ défini
	$f^{-1}: (\mathbb{R}^n, v_0) \rightarrow (\mathbb{R}^d, 0)$ submersion	$\text{Ker } df(v_0)$	
	$\Gamma_f = \text{graphe de } f: (\mathbb{R}^d, x_0) \rightarrow (\mathbb{R}^{n-d}, y_0)$ ($v_0 = (x_0, y_0)$)	$\Gamma_{df(x_0)}$	

Exercice: montrer que remplacer $T_{v_0} V$ par le sous-espace affine tangent (contenu dans \mathbb{R}^n et non pas dans $T_{v_0} \mathbb{R}^n$) revient à remplacer la dérivée de f par la partie affine de son dév. de Taylor.



$y = x^2 + 1 + 2x_0(x - x_0)$
 $y - y_0 = 2x_0(x - x_0)$
 ← droite affine tangente

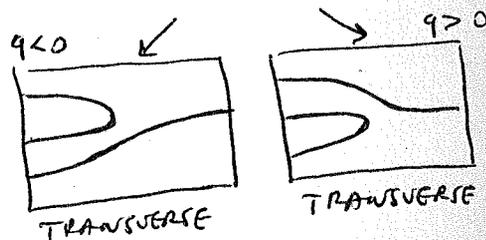
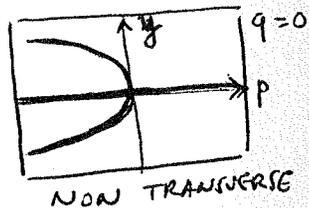
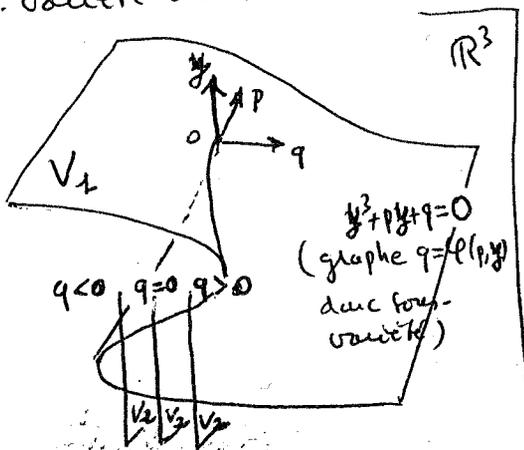
TRANSVERSALITÉ

(12)

Definition: Deux sous-variétés V_1, V_2 de \mathbb{R}^n , de dimensions respectivement d_1 et d_2 , sont dites transverses en $v \in V_1 \cap V_2$, si on a $T_v V_1 + T_v V_2 = T_v \mathbb{R}^n$. (Notation $V_1 \pitchfork_v V_2$)

Théorème: Si V_1 et V_2 sont transverses en v , elles le font également au voisinage de v (propriété ouverte) et $V_1 \cap V_2$ est une sous-variété de \mathbb{R}^n (de dimension $d_1 + d_2 - n$) au voisinage de v .

SLOGAN:
TRANSVERSALITÉ
↓
STABILITÉ DE
L'INTERSECTION



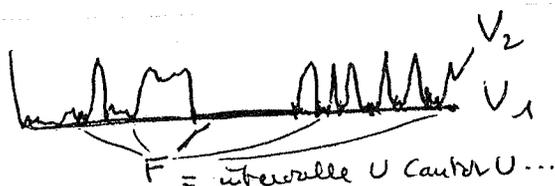
Démonstration du théorème

On choisit des équations locales pour (V_1, v_0) et (V_2, v_0) , i.e. de submersions $f_1: (\mathbb{R}^n, v_0) \rightarrow (\mathbb{R}^{n-d_1}, 0)$ et $f_2: (\mathbb{R}^n, v_0) \rightarrow (\mathbb{R}^{n-d_2}, 0)$ telles que $f_1^{-1}(0) = (V_1, v_0)$ et $f_2^{-1}(0) = (V_2, v_0)$.

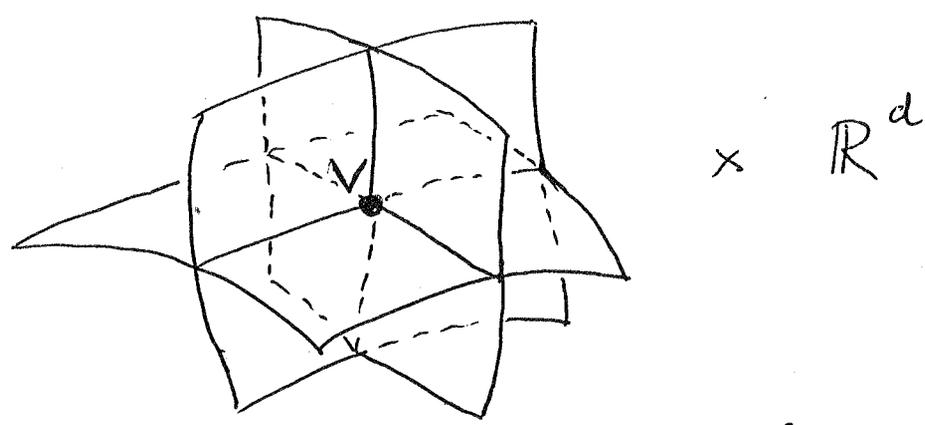
On a $(V_1 \cap V_2, v_0) = (f_1, f_2)^{-1}(0)$ et tout revient à montrer que $(f_1, f_2): (\mathbb{R}^n, v_0) \rightarrow (\mathbb{R}^{n-d_1} \times \mathbb{R}^{n-d_2}, (0,0))$ est une submersion, ce qui est un exercice d'algèbre linéaire.

Remarque 1: L'intersection de deux sous-variétés C^∞ de \mathbb{R}^n peut être n'importe quel fermé $F \subset \mathbb{R}$. Impossible de faire de la géométrie avec ça!

Ex: le théorème de Borel montre que tout fermé F de \mathbb{R} est l'ensemble des zéros d'une fonction C^∞ , $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Donc si $V_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y=0\}$, $V_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y=f(x)\}$, $V_1 \cap V_2 = F \times \{0\}$



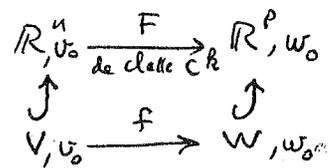
Remarque 2 : Définir (V, v_0) par une submersion $f = (f_1, \dots, f_{n-d})$,
 c'est donc définir cette sous-variété comme intersection complète
 d'hyperplans $f_i^{-1}(0) = (\xi_i, v_0)$: cela s'ajoute par exemple par
 $(\dots ((\xi_1 \wedge \xi_2) \wedge \xi_3) \wedge \xi_4 \dots) \wedge \xi_n$
 (Pensez au modèle $\pi = f$, où les ξ_i sont des hyperplans de coordonnées



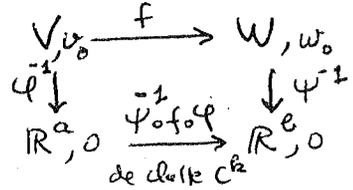
Applications de classe C^k

Definitions : Soient V une sous-variété de \mathbb{R}^n , W une
 sous-variété de \mathbb{R}^p , toutes deux de classe C^k . Les propriétés suivantes
 sont équivalentes et définissent la notion d'application $f: V \rightarrow W$ de classe C^k en v_0

EXTRINSÈQUE (1) f est la restriction de $F: \mathbb{R}^n, v_0 \rightarrow \mathbb{R}^p, w_0$, de
 classe C^k en v_0 :



INTRINSÈQUE (2) Il existe des coordonnées locales (x_1, \dots, x_a) au
 voisinage de v_0 dans V et des coordonnées locales (y_1, \dots, y_b)
 au voisinage de w_0 dans W , telles que, dans ces coordonnées
 f soit de classe C^k en 0 :



Il en est ainsi de même, quelles que soient les
 coordonnées locales choisies.

(14)

Exemple fondamental: un paramétrage local $\varphi: \mathbb{R}^d, 0 \rightarrow V, v_0$ d'une sous-variété de classe C^k et le système de coordonnées locaux $\varphi^{-1}: V, v_0 \rightarrow \mathbb{R}^d, 0$ associé sont des difféomorphismes locaux de classe C^k inverses l'un de l'autre.

Un paramétrage local sera encore appelé une CARTE LOCALE de V .
C'est l'analogie naïf-élévaire d'une base d'un espace vectoriel.

Exercices: 1) La composition d'applications de classe C^k entre sous-variétés de classe C^k est encore de classe C^k .

"changement de carte" (En particulier, si $\varphi = \Phi \circ i$ et $\psi = \Psi \circ i$ sont deux cartes locales de V ayant même image, $\psi^{-1} \circ \varphi$ est un difféomorphisme C^k de $\mathbb{R}^d, 0$ (On peut aussi le voir directement comme restriction à $i(\mathbb{R}^d, 0)$ de $\Psi^{-1} \circ \Phi$.)

2) (point de vue "fonctionnel") : montrer que $f: V \rightarrow W$ est de classe C^k si et seulement si l'application

$$f^*: C^0(W, \mathbb{R}) \rightarrow C^0(V, \mathbb{R}) \text{ définie par}$$

$$g \longmapsto f^*(g) = g \circ f$$

applique $C^k(W, \mathbb{R})$ dans $C^k(V, \mathbb{R})$.

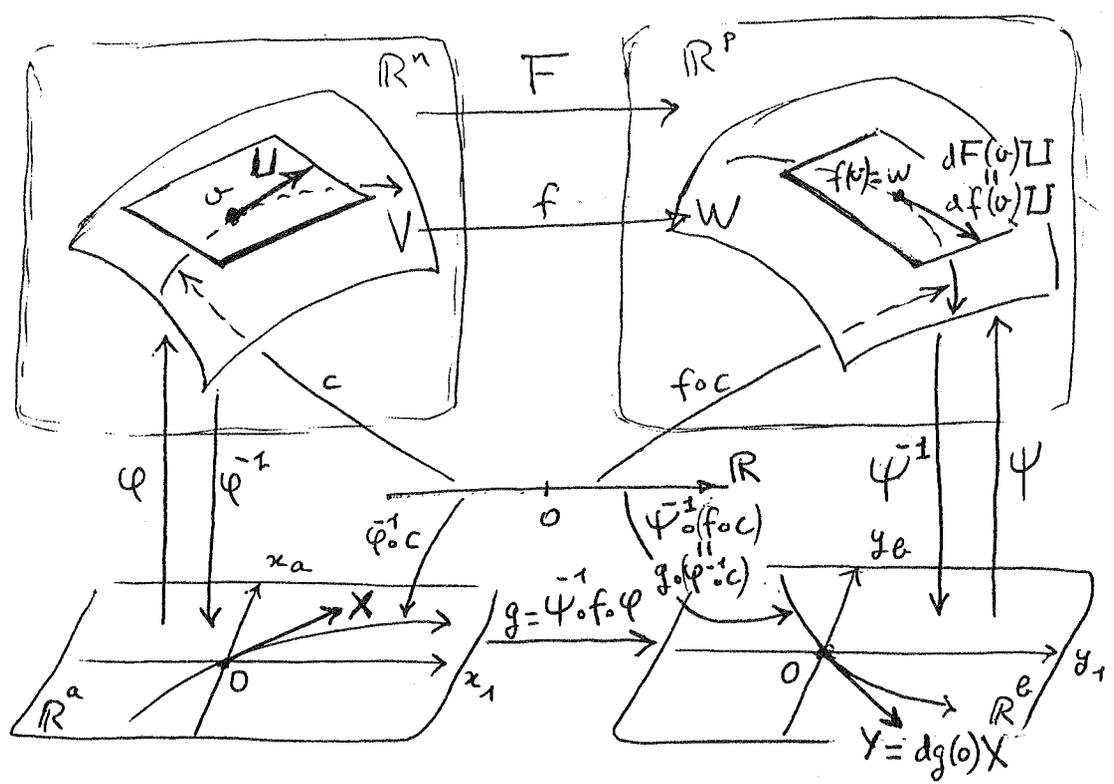
Dérivée

Définition: $f: (V, v_0) \rightarrow (W, w_0)$ de classe C^1

$$df(v_0): T_{v_0}V \rightarrow T_{w_0}W \text{ linéaire, applique}$$

la classe d'équivalence du chemin c sur celle du chemin $f \circ c$.

Exercice: 1) Comprendre ceci dans des cartes locales,
2) Montrer que, si f est la restriction à V de $F: (\mathbb{R}^d, v_0) \rightarrow (\mathbb{R}^d, w_0)$, $df(v_0)$ est la restriction à $T_{v_0}V \subset T_{v_0}\mathbb{R}^d$ de $dF(v_0)$, considérée comme à valeurs dans $T_{w_0}W \subset T_{w_0}\mathbb{R}^d$
3) Définir immersions, submersions, subimmersions et montrer que le théorème d'inversion locale et ses corollaires se transposent ^(sans) changement au monde des sous-variétés



$$\begin{aligned}
 U &= d\phi(0)X, \\
 d\psi(0)Y &= d\psi(0)dg(0)X = d(\psi \circ g)(0)X = d(f \circ \phi)(0)X \\
 &= df(0)d\phi(0)X = df(0)U.
 \end{aligned}$$

Remarque: Si l'on prend $V=W$ et $f = \text{Idemite}$, on lit sur la figure ci-dessus la propriété de différentiel un vecteur tangent en v à V comme la donnée, par chaque carte locale d'un vecteur tangent $X \in T_0 \mathbb{R}^d \cong \mathbb{R}^d$ avec la condition que X dans la carte ϕ et Y dans la carte ψ soient image directe et l'un de l'autre par l'application de changement de carte:

$$Y = d(\psi^{-1} \circ \phi)(0)X.$$

Fibré tangent et application tangente

$$TV = \coprod_{v \in V} T_v V \subset V \times \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \cong T\mathbb{R}^n$$

Exercice: TV est une sous-variété de $T\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$ (ex: $V=S^1$, on retrouve le cylindre, espace des plans du pendule, c'est large dans \mathbb{R}^4 !).

Application tangente: $TV \xrightarrow{Tf} TW$

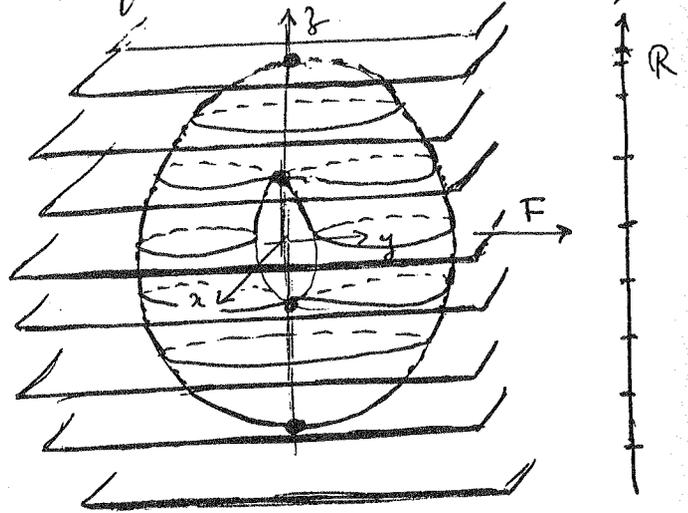
$$\begin{array}{ccc}
 TV & \xrightarrow{Tf} & TW \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 V & \xrightarrow{f} & W
 \end{array}$$

Comme à la p. 2, $Tf(v, U) = (f(v), df(v)U)$
 de classe C^{k-1} si f est C^k

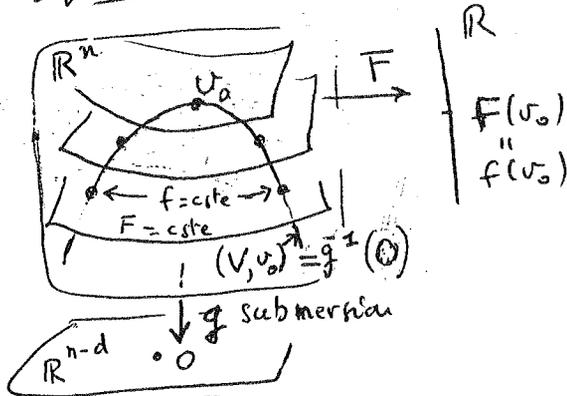
(16)

Exercice : Soit V une sous-variété de \mathbb{R}^n , $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une submersion, $f = F|_V$ la restriction de f à V .
 Les "points critiques" de f , sont à la dérivée de f s'annule
 soit les points v où V n'est pas transverse à $F^{-1}(F(v))$.

Exemple : $V \subset \mathbb{R}^3$
 est le tôle défini par $x^2 + (y^2 + z^2 - 1)^2 = \varepsilon^2$
 (au ck. $\frac{1}{4}$) ;
 $F(x, y, z) = z$
 (fonction "hauteur")



Recherche pratique des points critiques d'une fonction sur une sous-variété (i.e. des "extrema liés") : multiplicateurs de Lagrange.



$g = (g_1, \dots, g_{n-d})$
 est l'ensemble des "contraintes"

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^n, v_0 &\xrightarrow{F} \mathbb{R}, f(v_0) \\ \downarrow &\nearrow f \\ V & \\ v_0 &\text{ point critique (ou singularité) de } f \\ &\Downarrow \\ &df(v_0) = 0 \\ &\Downarrow \\ &dF(v_0)|_{T_{v_0}V} = 0 \\ &\Downarrow \\ &dF(v_0)|_{\text{Ker } dg(v_0)} = 0 \\ &\Downarrow \\ &\text{Ker } dg(v_0) \subset \text{Ker } dF(v_0) \end{aligned}$$

$$\exists \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_{n-d}) \in \mathbb{R}^{n-d}, \quad dF(v_0) + \sum_{j=1}^{n-d} \lambda_j dg_j(v_0) = 0$$

les "multiplicateurs de Lagrange"

Démonstration : se ramener à $dg(v_0)(x_1, \dots, x_n) = (x_{d+1}, \dots, x_n)$.

Espace cotangent

Puisque $T_{v_0} V$ est un sous e.v. de $T_{v_0} \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n$, son dual $T_{v_0}^* V$ est de façon naturelle un e.v. quotient de $T_{v_0}^* \mathbb{R}^n \cong (\mathbb{R}^n)^*$.

On peut le définir directement comme

$$T_{v_0}^* V = \left\{ F : (\mathbb{R}^n, v_0) \xrightarrow{c_F} (\mathbb{R}, 0) \right\} / \left(\begin{array}{l} F_1 \sim F_2 \\ \text{\textcircled{D}} \\ d(F_1 - F_2)(v_0) | T_{v_0} V = 0 \end{array} \right)$$

$$= \left\{ f : (V, v_0) \xrightarrow{c_f} (\mathbb{R}, 0) \right\} / \left(\begin{array}{l} f_1 \sim f_2 \\ \text{\textcircled{D}} \\ d(f_1 - f_2)(v_0) = 0 \end{array} \right)$$

Exercices: 1) $f_1 \sim f_2$ signifie que dans une carte locale \mathcal{Q} , et donc dans toutes, $(f_1 \circ \mathcal{Q} - f_2 \circ \mathcal{Q})(x) = O(|x|^2)$.

2) Définir "intrinsèquement" un élément de $T_{v_0}^* V$ comme la donnée, pour chaque carte locale \mathcal{Q} , d'un élément $\alpha \in T_{v_0}^* \mathbb{R}^d \cong (\mathbb{R}^d)^*$, avec la condition que α dans la carte \mathcal{Q} et β dans la carte \mathcal{P} soient image réciproque l'un de l'autre par l'application de changement de carte:

$$\alpha = \beta \circ d(\mathcal{P}^{-1} \circ \mathcal{Q})(0).$$

3) Définir, comme à la page 2, l'application cotangente d'un difféomorphisme $f : V \rightarrow W$.

4) Définir l'accouplement entre $T_{v_0}^* V$ et $T_{v_0} V$ comme à la page 1 = si L est représenté par c , et $l \in T_{v_0}^* V$ par f , $l(L) = (f \circ c)'(0)$. Remarque que si \mathcal{Q} est une carte locale, ceci s'écrit encore

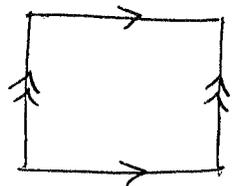
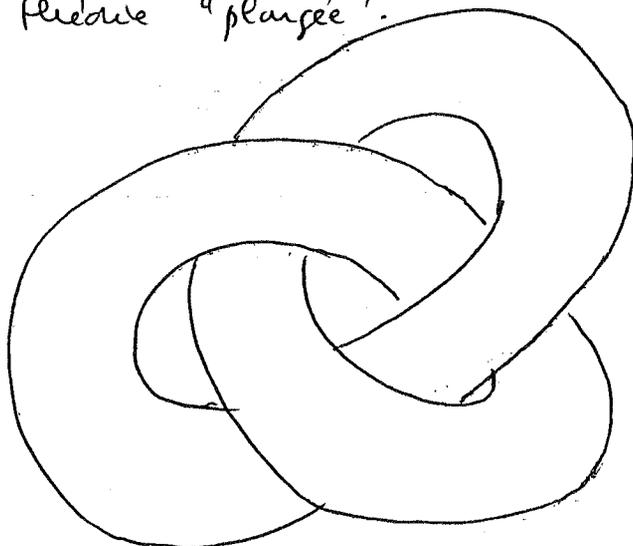
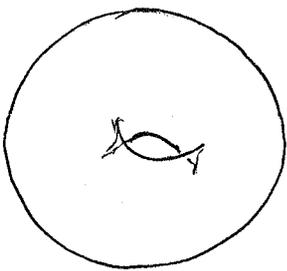
$$l(L) = ((f \circ \mathcal{Q}) \circ (\mathcal{Q}^{-1} \circ c))'(0)$$

et en déduire que si X correspond à L dans la carte, et α à l , on a $l(L) = \alpha(X)$.

(18)

Fibre cotangent : Définir T^*V est un peu plus difficile que définir TV . Ce n'est pas une sous-variété de $T^*\mathbb{R}^n$ de manière naturelle ! On peut tricher en identifiant T^*V à TV par le choix d'un produit scalaire non dégénéré "dépendant de manière C^k de v " (métrique riemannienne) mais on peut le besoin d'une notion plus abstraite de variété de classe C^k qui ne soit pas définie comme sous-variété d'un \mathbb{R}^N , mais puisse par ex. être définie comme projet (comme aux espaces projectifs).

Finalement, on n'aura rien gagné en généralité, car un théorème de Whitney affirme que toute variété abstraite peut être plongée dans \mathbb{R}^N (est difféomorphe à une sous-variété de \mathbb{R}^N) dès que N est assez grand par rapport à sa dimension ($N \geq 2d$ suffit). Mais un tel plongement n'a rien de canonique (essayer avec les projectifs ou avec T^*V) et la théorie abstraite se révélera beaucoup plus simple que la théorie "plongée".



Variétés

(17)
(= 19)
etc...

Variété topologique ($= C^0$) : espace topologique raisonnable (désais dénombrable à l'infini) localement homéomorphe à \mathbb{R}^n .

Théorème de l'unicité du dimension (non trivial) : la dimension n est bien définie.

Exercice : \mathbb{R}^2 n'est pas homéomorphe à \mathbb{R} (enlever un point)
 \mathbb{R}^3 n'est pas homéomorphe à \mathbb{R}^2 ?
 etc...

Atlas C^k sur une variété topologique V :

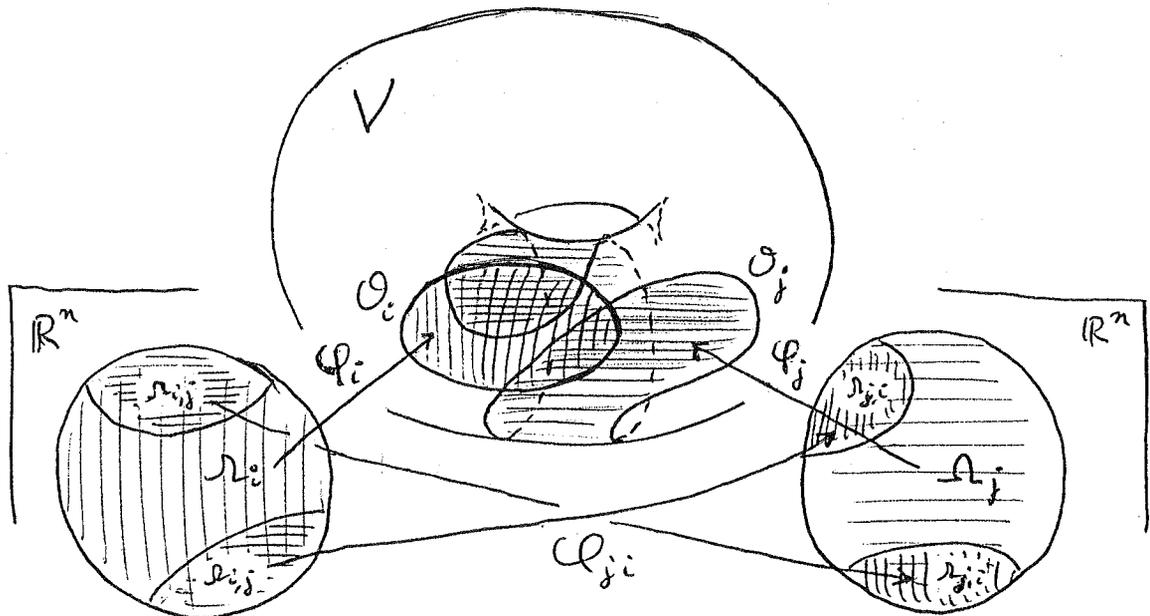
Collection de cartes $(\varphi_i = \mathbb{R}^n \xrightarrow[\text{ouvert}]{\text{homéo}} \Omega_i \xrightarrow[\text{ouvert}]{} \mathcal{O}_i \subset V)_{i \in I}$

telle que

$$V = \bigcup_{i \in I} \mathcal{O}_i$$

$$\forall i \neq j, \quad \begin{array}{ccc} \Omega_{i,j} & \xrightarrow{\varphi_{j,i} = \varphi_j^{-1} \circ \varphi_i} & \Omega_{j,i} \text{ est } C^k \\ \parallel & & \parallel \\ \varphi_i^{-1}(\mathcal{O}_i \cap \mathcal{O}_j) & & \varphi_j^{-1}(\mathcal{O}_i \cap \mathcal{O}_j) \end{array}$$

(ce qui que les cartes font C^k -compatibles)



Les φ_i^{-1} sont encore appelés des (systèmes de) coordonnées locales.

(18)

Une structure C^k sur V est un atlas C^k maximal

Exercice: les cartes locales d'une sous-variété C^k , V , forment une structure C^k sur l'espace topologique V

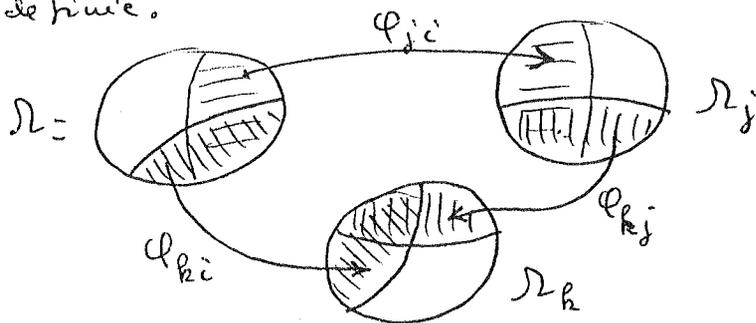
Atlas C^k sur un ensemble V :

Collection de cartes $(\varphi_i: \mathbb{R}^n \supset \Omega_i \xrightarrow{\text{bijection}} \mathcal{O}_i \subset V)_{i \in I}$
 telle que
 $V = \bigcup_{i \in I} \mathcal{O}_i$
 $\forall i, j \quad \Omega_{ij} = \varphi_i^{-1}(\mathcal{O}_i \cap \mathcal{O}_j)$ est ouvert dans Ω_i
 (et donc dans \mathbb{R}^n)
 $\forall i \neq j, \quad \Omega_{ij} \xrightarrow{\varphi_{ji} = \varphi_j^{-1} \circ \varphi_i} \Omega_{ji}$ est C^k

Lemme: il existe une unique topologie sur V telle que les \mathcal{O}_i soient ouverts et les φ_i homéomorphismes.

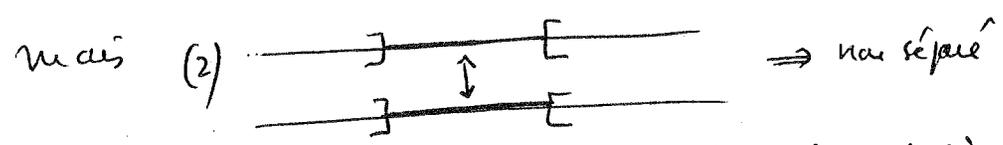
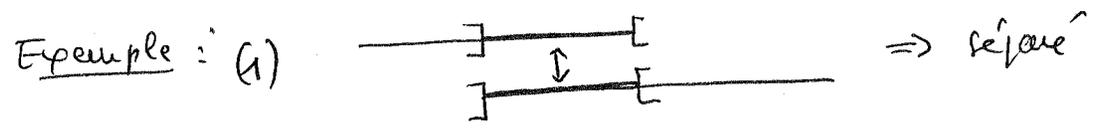
Atlas C^k sur "rien du tout":

Collection $(\Omega_i)_{i \in I}$ d'ouverts de \mathbb{R}^n , de tous-ouverts
 $(\Omega_{ij} \subset \Omega_i)_{j \in I}$ et de changements de carte
 $(\varphi_{ji}: \Omega_{ij} \rightarrow \Omega_{ji})_{(i,j) \in I^2}$ de classe C^k , telle que
 $\forall i \in I, \quad \Omega_{i,i} = \Omega_i$ et $\varphi_{i,i} = \text{Identité}$,
 $\forall i, j, k \in I, \quad \varphi_{ki} = \varphi_{kj} \circ \varphi_{ji}$ (à ce la composition est définie).

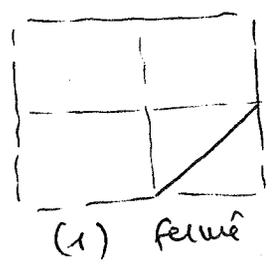


Lemme : Soit V le quotient de la réunion disjointe des Ω_i par la relation d'équivalence $\Omega_i \ni x \sim y \in \Omega_j$ si $y = \varphi_{ji}(x)$. L'atlas ci-dessus définit un atlas C^k sur l'ensemble V (prendre pour φ_i l'application naturelle dans (\mathbb{R}^n / \sim))

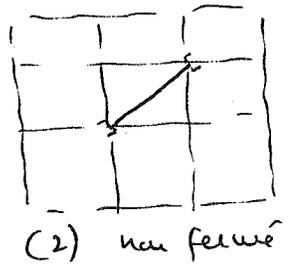
Z L'espace topologique V ainsi défini par recollément n'est pas nécessairement séparé !



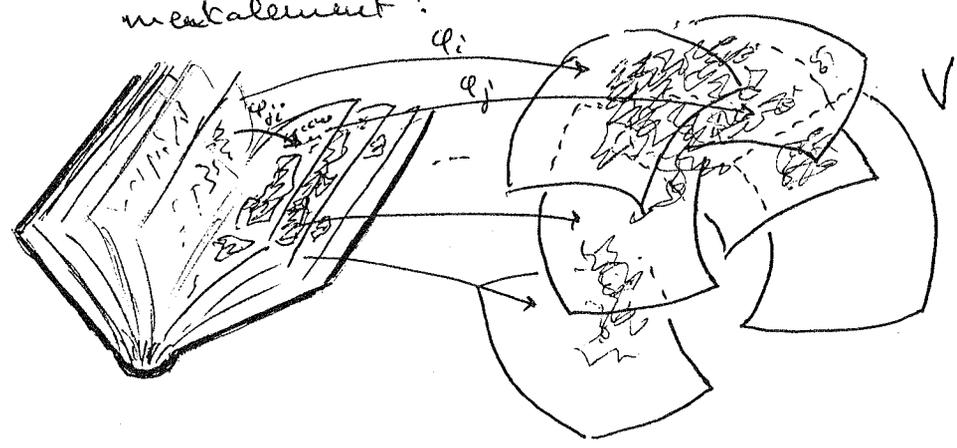
Exercice : le recollément est séparé si et seulement si le graphe de la relation d'équivalence est fermé.



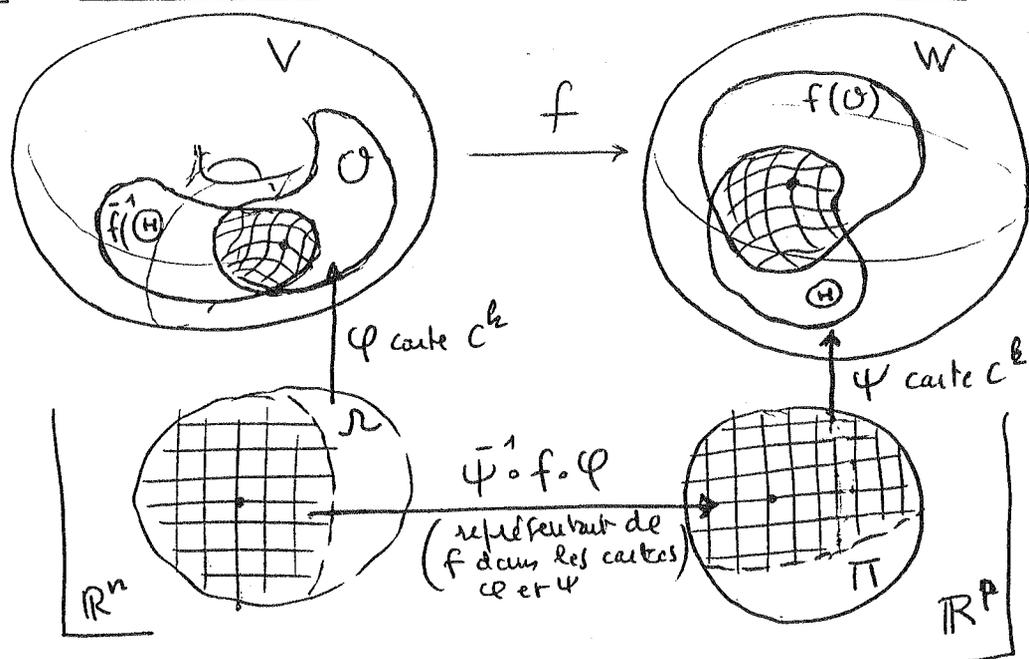
mais



Remarque : Bien qu'étant la plus abstraite, la définition 3 est celle qui se rapproche le plus de la notion usuelle d'atlas. Nul besoin d'avoir une réalisation de la terre pour s'en servir : le recollément des cartes est fait mentalement !



Applications de classe C^k entre variétés C^k



Définition: L'application f est dite de classe C^k en v_0 si il existe des cartes φ et ψ telles que $\psi \circ f \circ \varphi$ soit de classe C^k en x_0 . Il en est alors de même (exercice) quel que soit le choix des cartes φ et ψ .

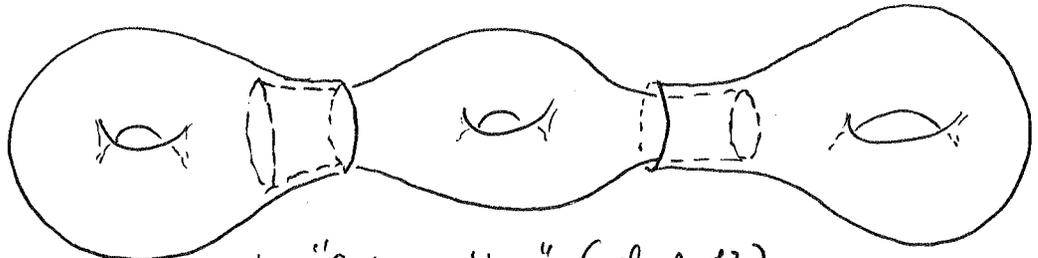
Autrement dit, f est de classe C^k en v_0 si elle l'est au point correspondant lorsqu'on la représente en coordonnées locales.

REtenir: Les cartes φ_i d'un atlas C^k sont des diffeomorphismes de classe C^k d'un ouvert de \mathbb{R}^n sur un ouvert de V .

Enfin, une structure C^k sur V est la donnée d'une famille d'applications φ_i dont on décide qu'elles sont des diffeomorphismes de classe C^k . Les conditions mises dans les définitions ne sont là que pour assurer la cohérence de cette décision.

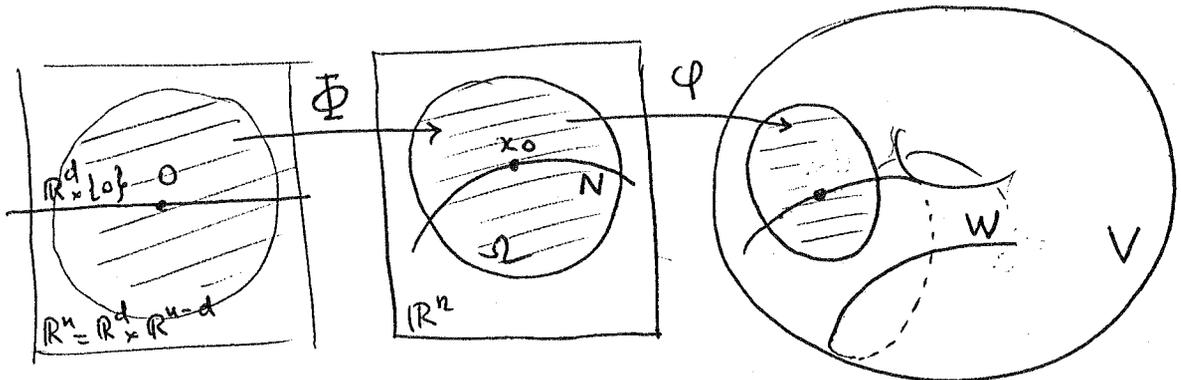
Remarque importante (comparez à celle au top de la page 8):
Dès qu'on connaît une variété, elle peut servir de modèle. Autrement dit, on peut dans les 3 définitions, remplacer les \mathcal{U}_i par des (ouverts de) variétés de classe C^k et de dimension n déjà connue.

La définition 3 conduit alors à la construction de variétés par recollement



Exercice: Définition "fauteuil" (cf p. 12)

Sous-variétés de classe C^k d'une variété de classe C^k



Définition: $W \subset V$ sous-variété en v_0 si il existe une carte dans laquelle W soit représentée par une sous-variété N au point correspondant x_0 (Exercice: c'est alors vrai dans toute carte).

Exercice: Dans un difféomorphisme C^k d'une variété sur une autre, les sous-variétés sont transférées en des sous-variétés.

Se reporter aux documents de cours concernant les espaces projectifs pour voir que les coniques régulières réelles (resp. complexes) fournissent de très beaux exemples de sous-variétés de dimension 1 (resp. 2) de $P_2(\mathbb{R})$ (resp. $P_2(\mathbb{C})$).

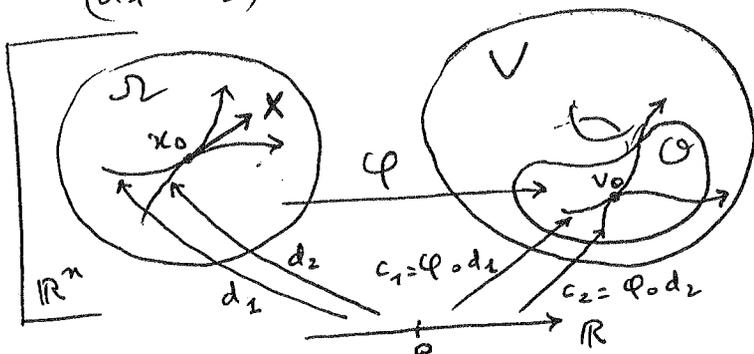
Espace tangent en un point et dérivée

Définition de $T_{v_0} V$ par les chemins (comparer à la p. 9)

$$T_{v_0} V = \left\{ (\mathbb{R}, 0) \xrightarrow[\text{de classe } C^1]{c} (V, v_0) \right\} / \sim$$

$c_1 \sim c_2$ si dans une carte (ouverte : et donc dans toutes),

$(d_1 - d_2)(t) = O(|t|^2)$ (i.e. si d_1 et d_2 ont même vecteur vitesse en x_0)



On dira que c_1 et c_2 coïncident à l'ordre 2 près en 0, ou encore qu'ils ont même jet d'ordre 1 en 0.

Dérivée de $f : (V, v_0) \rightarrow (W, w_0)$ de classe C^1

(comparer à la page 12)

On remarque (exercice) que $(c_1 \sim c_2) \Rightarrow (f \circ c_1 \sim f \circ c_2)$

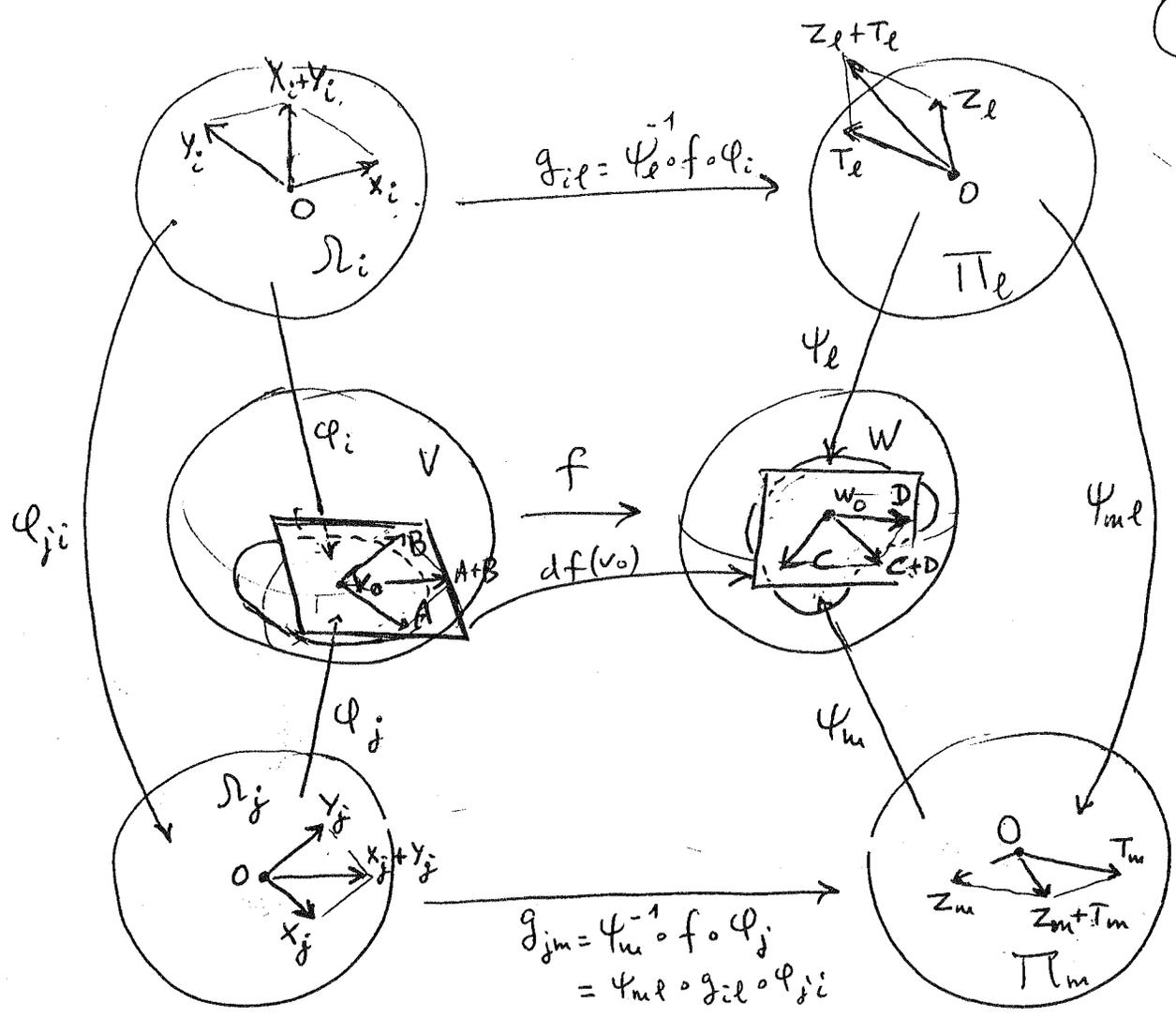
et on définit $df(v_0) : T_{v_0} V \rightarrow T_{w_0} W$

par $df(v_0)(\text{classe d}'\sim \text{ de } c) = (\text{classe d}'\sim \text{ de } f \circ c)$

De l'associativité de la composition, on déduit immédiatement la formule de dérivée de composition composés :

$$\begin{array}{ccccc} V, v_0 & \xrightarrow{f} & W, w_0 & \xrightarrow{g} & Z, z_0 \\ T_{v_0} V & \xrightarrow{df(v_0)} & T_{w_0} W & \xrightarrow{dg(w_0)} & T_{z_0} Z \\ & & & \searrow & \\ & & & & d(g \circ f)(v_0) \end{array}$$

* Reste à montrer que $T_{v_0} V$ est un espace vectoriel (naturellement) et que $df(v_0)$ est linéaire. On le fait en analysant les effets d'un changement de carte :



(On a choisi les cartes de façon à ce que les compositions soient toujours définies et on les a centrées à l'origine ; on le ramène sans peine à ce cas).

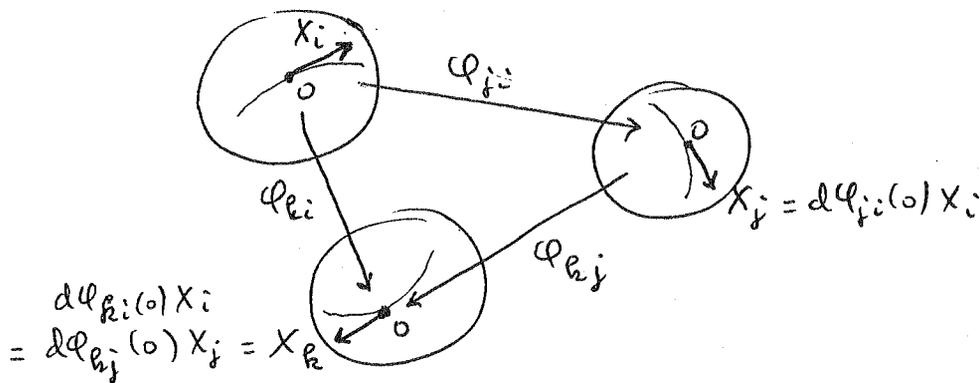
f est respectivement représentée par g_{il} et g_{jm} ,
 $df(v_0)$ ————— $dg_{il}(0)$ et $dg_{jm}(0)$,
 $(A, B, A+B)$ ————— (x_i, y_i, x_i+y_i) et (x_j, y_j, x_j+y_j) ,
 $\left. \begin{aligned} C &= df(v_0)A \\ D &= df(v_0)B \\ C+D &= df(v_0)A + df(v_0)B \\ &= df(v_0)(A+B) \end{aligned} \right\} \text{ ————— } \left\{ \begin{aligned} z_l &= dg_{il}(0)x_i \\ T_l &= dg_{il}(0)y_i \\ z_l + T_l &= dg_{il}(0)(x_i + y_i) \end{aligned} \right. \text{ et } \left\{ \begin{aligned} z_m &= dg_{jm}(0)x_j \\ T_m &= dg_{jm}(0)y_j \\ z_m + T_m &= dg_{jm}(0)(x_j + y_j) \end{aligned} \right.$
 Que ceci soit cohérent vient de ce que $d\phi_i^{-1}(0)$ appelle (x_i, y_i, x_i+y_i) sur (x_j, y_j, x_j+y_j) et $d\psi_m^{-1}(0)$ appelle (z_l, T_l, z_l+T_l) sur (z_m, T_m, z_m+T_m) .

(24)

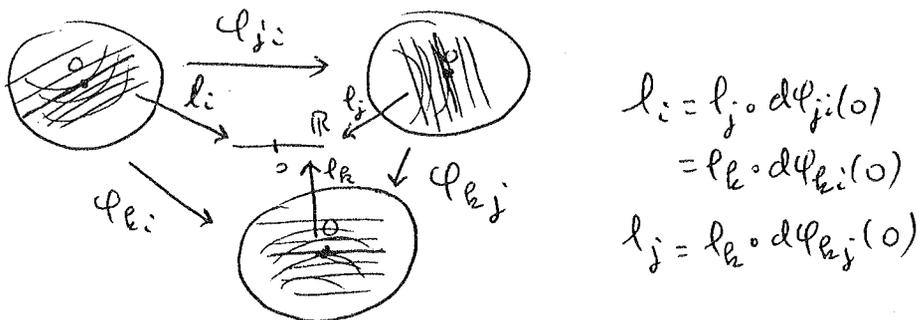
Une fois ceci établi, il suffit de revenir :

1) le représentant dans la carte $\varphi : (\Omega, x_0) \rightarrow (V, v_0)$ du vecteur tangent $A \in T_{v_0} V$ est le vecteur tangent $X \in T_{x_0} \Omega \cong T_{x_0} \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n$ défini par $d\varphi(x_0)X = A$.

\Leftrightarrow 2) Se donner un vecteur tangent $A \in T_{v_0} V$, c'est se donner pour chaque carte $\varphi : (\Omega, x_0) \rightarrow (V, v_0)$ un vecteur tangent $X \in T_{x_0} \Omega$, de façon que deux quelconques de ces vecteurs soient image directe l'un de l'autre par (la dérivée $d\varphi(x_0)$ en x_0 de) l'application de changement de carte.



Exercice : Refaire ce qui précède pour les vecteurs cotangents et caractériser $\ell \in T_{v_0}^* V$ par la donnée dans chaque carte $\varphi : (\Omega, x_0) \rightarrow (V, v_0)$ d'un vecteur cotangent $l \in T_{x_0}^* \Omega \cong T_{x_0}^* \mathbb{R}^n \cong (\mathbb{R}^n)^*$ de façon que deux quelconques de ces covecteurs soient image réciproque l'un de l'autre par l'application de changement de carte.



Exercice 1: Étant de nature locale, le (25)
théorème des fonctions inverses et ses collatéraux se
transposent sans changement au monde des variétés C^k :

Soit $f : (V, v_0) \rightarrow (W, w_0)$ de classe $C^{k \geq 1}$

- DIFF. $df(v_0)$ isomorphisme $\Rightarrow f$ diff' local C^k
 SUBM. $df(v_0)$ surjective $\Rightarrow f^{-1}(w_0)$ sous-variété de V en v_0
 IMM. $df(v_0)$ injective $\Rightarrow \exists$ voisinage ouvert \mathcal{O} de v_0
 dans V tel que $f(\mathcal{O})$ soit une
 sous-variété de W en w_0 .

Soit $f : (V \times W, (x_0, y_0)) \rightarrow (Z, z_0)$ de classe $C^{k \geq 1}$

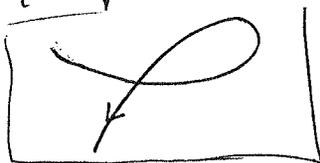
$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) : T_{y_0} W \rightarrow T_{z_0} Z$ isomorphisme

$\Rightarrow \exists \alpha : (V, x_0) \rightarrow (W, y_0)$ de classe C^k t.q.
au voisinage de (x_0, y_0) , $(f(x, y) = z_0) \Leftrightarrow y = \alpha(x)$.

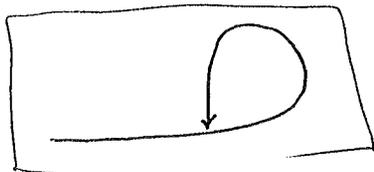
Exercice:
 définir cette
 dentelle
 jacobin!

Exercice 2 : Définition et propriétés de la transversalité
 de deux sous-variétés d'une variété.

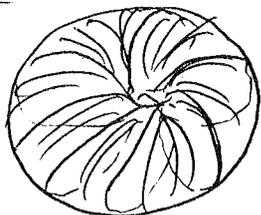
IMMERSIONS INJECTIVES ET MONOGAMIES :
 (passage du local au global)



immersion non injective de \mathbb{R} dans \mathbb{R}^2



immersion injective de \mathbb{R} dans \mathbb{R}^2
 dont l'image n'est pas une sous-variété

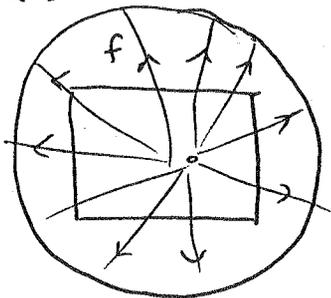


voix dense dans le cercle (image de \mathbb{R}
 dans $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ par $t \mapsto (at, bt)$, $\frac{a}{b} \notin \mathbb{Q}$) =
 immersion injective dont l'image n'est pas
 une sous-variété.

Définition : $f: V \rightarrow W$ de classe C^k est un plagement si c'est une immersion injective et si de plus la topologie de V coïncide avec celle induite par W via f .

Exercice : 1) Une immersion injective propre ($f^{-1}(\text{compact}) = \text{compact}$) est un plagement.
2) Si f est un plagement, $f(V)$ est une sous-variété de W .

Exercice : Montrer qu'on définit une structure de variété analytique sur le bord du carré en déclarant que l'homeomorphisme f décrit sur la figure ci-dessous est un difféomorphisme analytique sur le cercle.



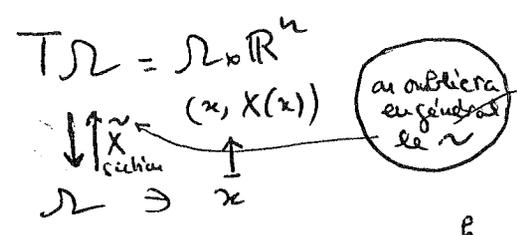
Variétés à bord : même définition que pour les variétés en prenant comme modèle les ouverts de $\mathbb{R}_+^n = \{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, x_n \geq 0 \}$

Exercice : Démontrer de un la caractérisation des variétés à coins.

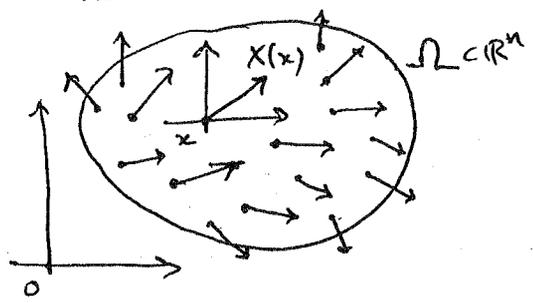
Taichans, 1-formes, champs de vecteurs, de classe C^k , sur une variété de classe C^k définie par un atlas abstrait:

MODÈLES : Taichans C^k de Ω dans \mathbb{R}^n , et :

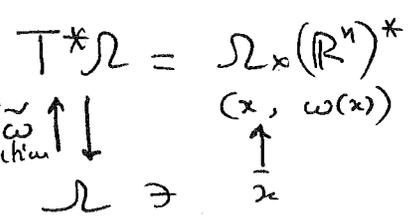
Champs de vecteurs C^k sur Ω



$X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^k

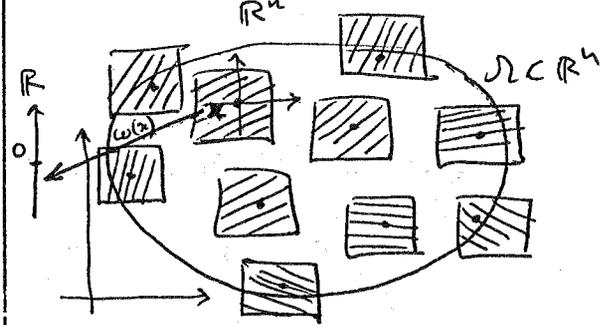


1-formes diff. C^k sur Ω



$\omega: \Omega \rightarrow (\mathbb{R}^n)^*$ de classe C^k

\mathbb{R}^n



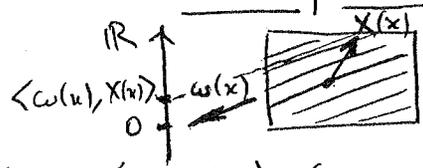
NOTATIONS : $\frac{\partial}{\partial x_i}$ = champ constant (ie vecteur par translation)
 t.q. $\forall x, \frac{\partial}{\partial x_i}(x) = e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$
 (au ne le notera pas) \uparrow \uparrow \uparrow
 place

dx_i = 1-forme constante = dérivée de $(x_1, \dots, x_n) \mapsto x_i$
 $\forall x, dx_i(x) = e_i^* =$

$$X(x) = \sum_{i=1}^n X_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

$$\omega(x) = \sum_{i=1}^n \omega_i(x) dx_i$$

Accouplement



$$\langle X, \omega \rangle(x) = \langle \omega, X \rangle(x) = \omega(X)(x) = \langle \omega(x), X(x) \rangle$$

$(\mathbb{R}^n)^* \quad \mathbb{R}^n$

est une fonction C^k sur Ω :

$$\langle X, \omega \rangle(x) = (\omega_1(x), \dots, \omega_n(x)) \begin{pmatrix} X_1(x) \\ \vdots \\ X_n(x) \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n \omega_i(x) X_i(x)$$

En particulier, $\langle \frac{\partial}{\partial x_j}, dx_k \rangle = \delta_{jk}$.

Métrique riemannienne C^k sur Ω

$$\otimes_{s,t}^2 T^* \Omega = \Omega \times \text{Bil}_{\text{sym}}^+(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \leftarrow \begin{cases} \text{formes bilinéaires} \\ \text{symétriques définies} \\ \text{positives} \end{cases}$$

$\begin{matrix} \uparrow \tilde{g} \\ \downarrow \text{section} \end{matrix} \quad (x, g(x)) \quad \begin{matrix} \uparrow \\ \downarrow \end{matrix}$
 $\Omega \quad \ni \quad x$

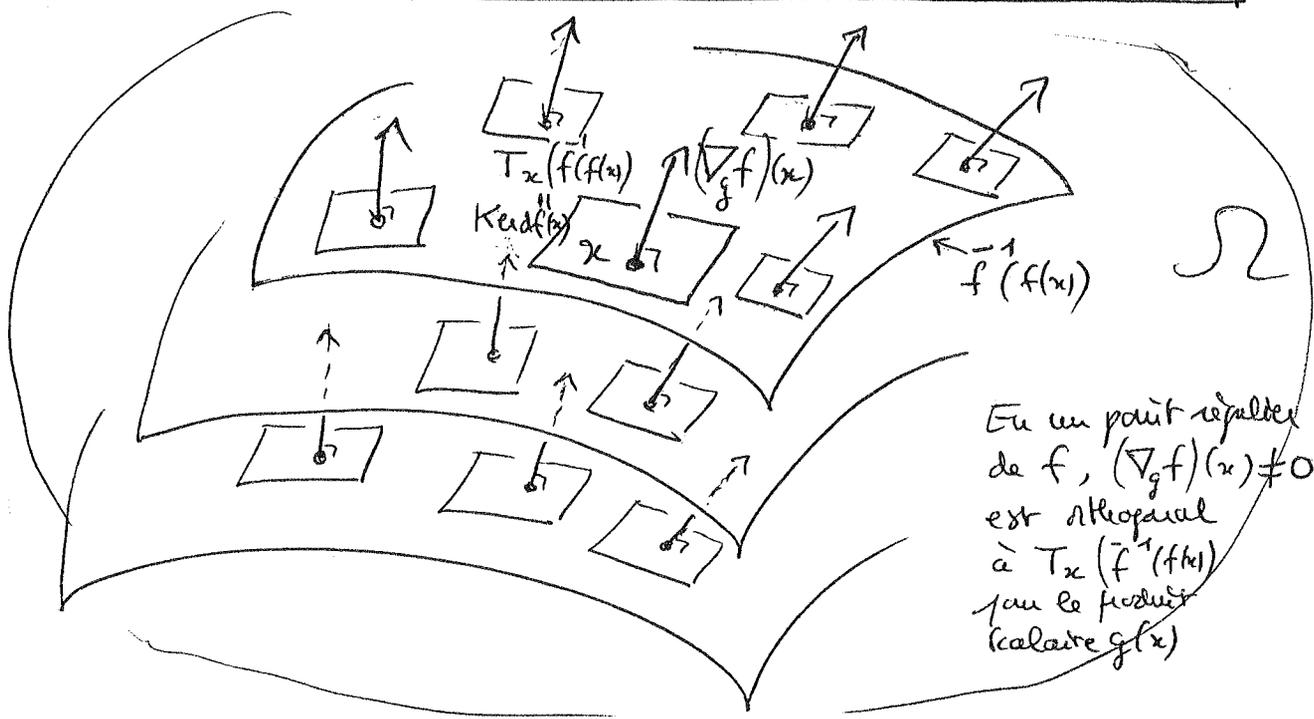
Si on remplace $\text{Bil}_{\text{sym}}^+$ par les formes bilinéaires non dégénérées de signature $(+ + \dots + -)$, on obtient une métrique lorentzienne (celles de la relativité).

A une fonction f de classe C^k sur Ω , on associe :

<p>[en présence d'une métrique riemannienne], son <u>gradient</u></p> <p>$(\text{grad}_g f)(x) = (\nabla_g f)(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \frac{\partial}{\partial x_i}$</p>	<p>[sans structure riemannienne], sa <u>dérivée</u></p> <p>$df(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) dx_i$</p>
--	--

liés par la relation (définissant le gradient)

$\langle df, X \rangle = g(\nabla_g f, X)$



sur V , définie par l'atlas C^k sur "rien du tout"

$$(\Omega_i \supset \Omega_{ij} \xrightarrow{\varphi_{ji}} \Omega_{ij} \subset \Omega_j)_{(i,j) \in I^2},$$

X champ de vecteurs C^k

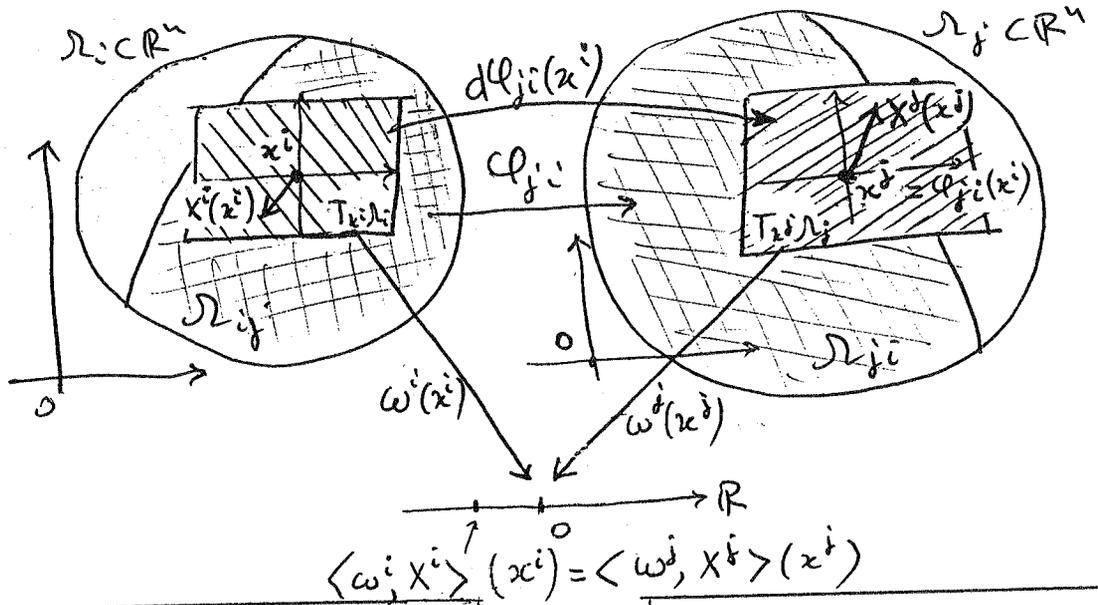
ω 1-forme différentielle C^k

||

||

Collection $(X^i)_{i \in I}$ de champs C^k sur les Ω_i
images directes les uns des autres par les φ_{ji}

Collection $(\omega^i)_{i \in I}$ de 1-formes diff. C^k sur les Ω_i
images réciproques les uns des autres par les φ_{ji}



$$X^j|_{\Omega_{ji}} = (\varphi_{ji})_* X^i|_{\Omega_{ij}}$$

⇕ def.

$$X^j(x^j) = d\varphi_{ji}(x^i) X^i(x^i)$$

(où $x^i = \varphi_{ji}^{-1}(x^j)$)

$$\omega^i|_{\Omega_{ij}} = (\varphi_{ji})^* \omega^j|_{\Omega_{ji}}$$

⇕ def.

$$\omega^i(x^i) = \omega^j(x^j) \circ d\varphi_{ji}(x^i)$$

(où $x^j = \varphi_{ji}(x^i)$)

Par ailleurs, une fonction C^k (= 0-forme diff. C^k) est une collection de fonctions $f_i : \Omega_i \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^k , images réciproques les uns des autres par les φ_{ji} (i.e. $f_i = f_j \circ \varphi_{ji}$, note $f_i = \varphi_{ji}^* f_j$)

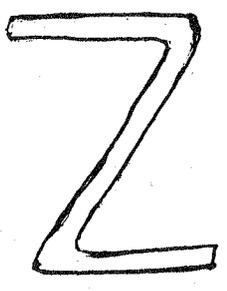
Exercice : l'accouplement est compatible avec les opérations d'image directe et d'image réciproque :

$$\langle \omega^i, X^i \rangle (x^i) = \langle \omega^j, X^j \rangle (x^j),$$

c'est-à-dire

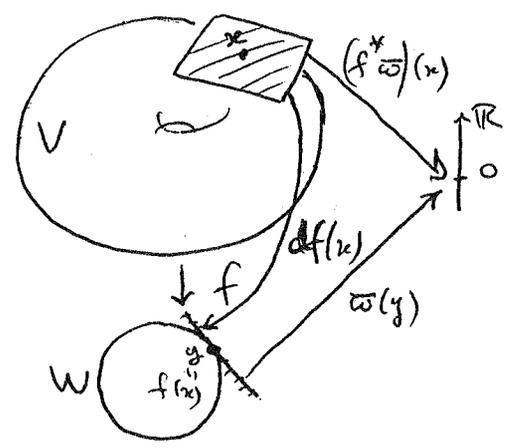
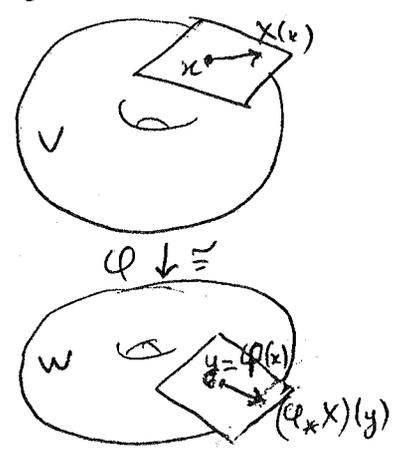
$$\langle \varphi_{j,i}^* \omega^j, X^i \rangle = \varphi_{j,i}^* \langle \omega^j, (\varphi_{j,i})_* X^j \rangle$$

Remarque : l'image réciproque d'une 1-forme par une application n'est que rien d'autre de l'application que d'être de classe $C^k \geq 1$. La source et le but peuvent en particulier avoir des dimensions différentes.



Au contraire, l'image directe d'un champ n'est définie que pour un difféomorphisme !

Exercice : définir l'image directe d'un champ par un difféomorphisme $\varphi: V \rightarrow W$ d'une variété sur une autre, et l'image réciproque d'une 1-forme par une application $f: V \rightarrow W$ d'une variété dans une autre (pas nécessairement de même dimension).



Interprétation en termes de formes différentielles
de la définition des opérateurs composés :

$$\text{Si } f = \varphi^* g \stackrel{\text{d'ôt}}{=} g \circ \varphi, \quad df = \varphi^* dg$$

Ceci équivaut à la "naturalité" de la 1-forme différentielle df , intrinsèquement associée à une fonction $f: V \rightarrow \mathbb{R}$ sur une variété quelconque.

Calcul en coordonnées locales : beaucoup plus

simple que les formes différentielles que pour les champs de vecteurs : pour calculer l'image réciproque $\varphi^* \omega$ d'une 1-forme différentielle $\omega = \sum_{i=1}^p \omega_i(y) dy_i$ sur un ouvert \mathcal{O} de \mathbb{R}^p par une application $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_p): \mathbb{R}^n \supset \Omega \rightarrow \mathcal{O} \subset \mathbb{R}^p$, on remplace simplement y_i par $\varphi_i(x)$ et dy_i par $d\varphi_i(x) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(x) dx_j$.

Fibrés tangent et cotangent d'une variété V définie par un atlas : voir du fait :

$$V: \mathbb{R}^n \supset \Omega = \cup \Omega_{ij} \xrightarrow{\varphi_{ij}} \Omega_{ij} \subset \Omega_j \subset \mathbb{R}^n$$

$$TV: \mathbb{R}^{2n} \supset \Omega \times \mathbb{R}^n \equiv T\Omega = \cup T\Omega_{ij} \xrightarrow{T\varphi_{ij}} T\Omega_{ij} \subset T\Omega_j \equiv \Omega_j \times \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{2n}$$

$$T^*V: \mathbb{R}^{2n} \supset \Omega \times \mathbb{R}^n \equiv \Omega \times (\mathbb{R}^n)^* = T^*\Omega = \cup T^*\Omega_{ij} \xrightarrow{(T^*\varphi_{ij})^{-1}} T^*\Omega_{ij} \subset T^*\Omega_j \equiv \Omega_j \times (\mathbb{R}^n)^* \equiv \Omega_j \times \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{2n}$$

Rappelons que $T\varphi(x, X) = (\varphi(x), d\varphi(x)X)$ et qu'après avoir identifié $(\mathbb{R}^n)^*$ à \mathbb{R}^n par le produit scalaire euclidien canonique,

$$(T^*\varphi)^{-1}(x, X) = (\varphi(x), {}^t d\varphi(x)^{-1} X)$$

(comparer à la page 2) ...

Exercices ① Retrouver les cylindres TS^1 et T^*S^1 à partir de cette définition en recollant les cartes de l'atlas.

② Retrouver la définition p. 24 de vecteurs et covecteurs tangents à une variété V .

(32)

③ Définir les projections canoniques

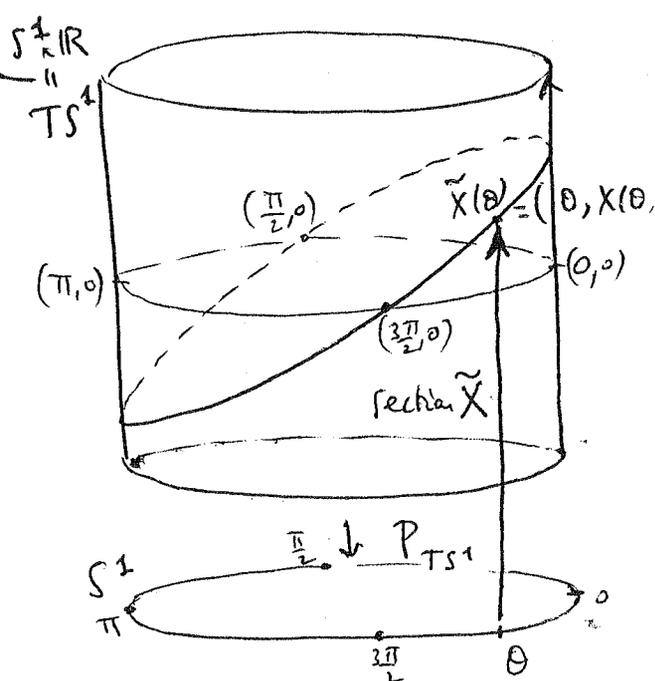
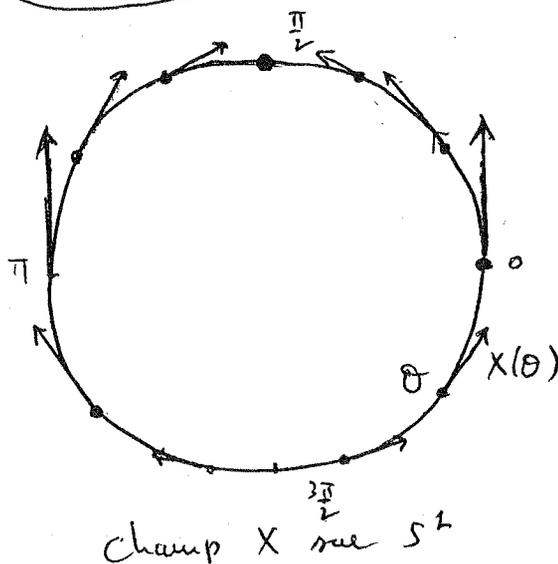
$$P_{TV}: TV \rightarrow V, \quad P_{T^*V}: T^*V \rightarrow V$$

et vérifier qu'un champ de vecteurs (resp. une 1-forme différentielle) sur V n'est autre qu'une section C^∞ de P_{TV} (resp. P_{T^*V}).

④ Vérifier que la donnée d'une métrique riemannienne sur V fournit un difféomorphisme de TV sur T^*V .

Remarque : Bien que difféomorphes, fibré tangent et fibré cotangent portent des structures géométriques très différentes. En mécanique, le fibré tangent de l'espace de configurations est l'espace des "positions-vitesses" sur lequel est défini le Lagrangien du problème, alors que son fibré cotangent est "l'espace des phases" sur lequel est défini le hamiltonien du problème. Une bonne référence est le livre de V.I. Arnold : Méthodes mathématiques de la mécanique classique, Ed. Mir.

Z en général, $TV \neq V \times \mathbb{R}^n$ et exemple est trop simple!



APPENDICE 1

Extrait d'un livre à paraître

A. Cleucine :

Extrémaux et Géométrie

Appendice 1. Champs de vecteurs sur un ouvert de R^n et équations différentielles associées.

1. Notations

Un champ de vecteurs sur un ouvert Ω de R^n est la donnée pour chaque x dans Ω d'un élément $X(x)$ de $T_x\Omega$ "variant différentiablement avec x ". Que cette phrase ait un sens vient de ce qu'on se permet d'identifier (canoniquement) à R^n par translation chaque espace vectoriel tangent $T_x\Omega$. Un champ de vecteurs X de classe C^r sur Ω devient alors une application de classe C^r de Ω dans R^n . On note en général $\frac{\partial}{\partial x_i}$ le champ correspondant à l'application constante d'image le i ème élément e_i de la base canonique de R^n . Le champ correspondant à l'application $x \mapsto (X_1(x), \dots, X_n(x))$ s'écrit alors

$$X = \sum_{i=1}^n X_i \frac{\partial}{\partial x_i},$$

et l'équation différentielle $\frac{dx}{dt} = X(x)$ qu'il définit est le "système de n équations différentielles couplées

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, \dots, x_n), \quad i = 1, \dots, n.$$

2. Le flot d'un champ de vecteurs

On sait que dès que $r \geq 1$, l'équation différentielle

$$\frac{dx}{dt} = X(x)$$

admet localement une solution (courbe intégrale) unique et que celle-ci dépend différentiablement des conditions initiales. Plus précisément, supposant pour simplifier que $r = \infty$, on a la

Proposition. Quel que soit x_0 dans Ω , il existe un nombre réel positif ϵ , un voisinage \mathcal{O} de x_0 dans Ω , et une unique application Φ de classe C^∞

$$(t, x) \mapsto \Phi(t, x) = \varphi_t(x)$$

de $] - \epsilon, \epsilon[\times \mathcal{O}$ dans Ω , tels que

$$\frac{d\varphi_t}{dt}(x) = X(\varphi_t(x)), \quad \varphi_0(x) = x.$$

On appelle Φ le *flot local* de l'équation différentielle au voisinage de x_0 . Pour x fixé dans \mathcal{O} , $t \mapsto \varphi_t(x)$ est la *courbe intégrale locale* passant par x au temps 0. Pour t fixé dans $] - \epsilon, \epsilon[$, $x \mapsto \varphi_t(x)$ est un difféomorphisme local de Ω dont l'inverse est φ_{-t} . Plus généralement, l'équation différentielle que l'on considère étant autonome (X ne dépend pas du temps t), l'égalité

$$\varphi_t \circ \varphi_s(x) = \varphi_{t+s}(x)$$

est vérifiée dès que les deux membres sont définis. On dit encore que l'application $t \mapsto \varphi_t$ est le *groupe local de difféomorphismes locaux de Ω engendré par X au voisinage de x_0* . L'exemple le plus simple est celui du champ $\frac{\partial}{\partial x_i}$ dont le flot associé, global en temps et en espace, est celui des

translations parallèlement au i ème axe de coordonnées : $\varphi_t(x) = x + te_i$. Rappelons qu'un flot global existe toujours lorsque le champ X est à support compact (i.e. s'annule en dehors d'un compact).

Ne résistons pas au plaisir d'esquisser la très simple démonstration qu'a donnée J. Robbin (*Proceedings A.M.S.* 19, 1968, pages 1005-1006) de cette proposition fondamentale. Le lecteur la comparera à la démonstration classique, plus quantitative, en consultant par exemple le beau livre *Calcul infinitésimal* de J. Dieudonné).

Esquisse de démonstration. Cherchons le flot local $\varphi_t(x)$ sous la forme

$$\varphi_t(x) = x + \delta \left(\frac{t}{\epsilon} \right),$$

où $\delta(\tau)$ est un élément de l'espace $C_0^1([-1, 1], \Omega)$ des applications de classe C^1 nulles en 0 de $[-1, 1]$ dans Ω . Muni de la norme C^1 (sup des normes C^0 de $\delta(\tau)$ et de sa dérivée $\dot{\delta}(\tau)$ par rapport à τ), l'espace $C_0^1([-1, 1], \mathbb{R}^n)$ est un espace de Banach (espace vectoriel normé complet); l'espace que nous considérons est un ouvert de ce dernier.

C'est dans le choix de cet espace que réside la nouveauté de la démonstration de Robbin : le remplacement de t par t/ϵ (effet de loupe), au prix d'un statut de variable accordé à ϵ , permet en effet de travailler

dans un espace fixe d'applications (le domaine de définition est toujours l'intervalle $[-1, 1]$). Trouver la fonction δ revient à expliciter une solution $\delta = \delta(\epsilon, x)$ de l'équation implicite $F(\epsilon, x, \delta) = 0$ au voisinage de $(0, x_0, 0)$, où l'application

$$F : R \times \mathcal{O} \times C_0^1([-1, 1], \Omega) \mapsto C^0([-1, 1], R^n),$$

est définie par

$$F(\epsilon, x, \delta)(\tau) = \dot{\delta}(\tau) - \epsilon X(x + \delta(\tau)).$$

Mais la dérivée partielle $\frac{\partial F}{\partial \delta}(0, x_0, 0)$ n'est autre que l'isomorphisme de dérivation $\varphi \mapsto \dot{\varphi}$ entre les deux espaces de Banach $C_0^1([-1, 1], R^n)$ et $C^0([-1, 1], R^n)$ (ce dernier étant muni de la norme C^0), d'où l'existence et l'unicité locales en classe C^1 . Le résultat en classe C^k est une conséquence de l'unicité.

Remarques. 1) Cette démonstration implique immédiatement que le flot local dépend différentiablement de tous paramètres dont X dépend différentiablement.

2) La même démonstration peut être faite dans le cas où X dépend du temps. On peut aussi considérer l'équation différentielle autonome (i.e. indépendante du temps τ)

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\tau} = X(x, t), \\ \frac{dt}{d\tau} = 1, \end{cases}$$

qui a les mêmes solutions que l'équation $\frac{dx}{dt} = X(x, t)$ aux translations près en t . Le groupe local à un paramètre défini par la nouvelle équation est de la forme

$$\tau \mapsto \Phi_\tau(x, t) = (\varphi_\tau(x, t), t + \tau);$$

il est commode de noter, pour $t_0 \leq t$,

$$\varphi_{t_0}^t(x) = \varphi_{t-t_0}(x, t_0).$$

Remarquons que le flot local $(t, x) \mapsto \varphi_0^t(x)$ que donne la démonstration de Robbin définit encore une famille à un paramètre de difféomorphismes locaux mais ce n'est plus en général un groupe à un paramètre. Nous utiliserons également le terme de *flot local* pour la famille à 2 paramètres $\varphi_{t_0}^t$ de difféomorphismes locaux.

3) L'existence du flot local d'un champ de vecteurs reste vraie en analytique. C'est d'ailleurs dans ce cadre qu'elle fut d'abord démontrée. L'analyticité permet de "passer en complexe" où les courbes intégrales deviennent des surfaces réelles. Une application de cette remarque se trouve dans l'appendice 2.

4) L'unicité pour chaque donnée initiale de la solution d'une équation différentielle suffisamment régulière est à la base de l'expression mathématique de l'idée de *déterminisme*. On ne confondra pas l'absence de déterminisme liée à la non unicité de la solution pour des équations peu régulières (non lipschitziennes) et mise en avant par Boussinesq, avec l'impossibilité de prédire l'évolution asymptotique de la solution si l'on ne dispose pas d'une précision infinie et donc non physique sur la donnée initiale. On rencontrera au chapitre 5 ce dernier phénomène qui, parfaitement compatible avec un strict déterminisme, a été étudié par Hadamard, Poincaré, Duhem au début du siècle, et médiatisé de nos jours sous le nom regrettable de *chaos* par des chercheurs en mal d'un nouveau paradigme.

3- Image directe par un difféomorphisme d'un champ de vecteurs sur un ouvert de R^n , théorème du "flow-box".

Définition. Soient \mathcal{O} et Ω deux ouverts de R^n , $\varphi : \mathcal{O} \rightarrow \Omega$ un difféomorphisme, X un champ de vecteurs indépendant du temps sur \mathcal{O} . L'image directe $Y = \varphi_* X$ de X par φ est l'unique champ de vecteurs sur Ω dont les courbes intégrales soient les images par φ des courbes intégrales du champ X .

Le lecteur vérifiera qu'une définition équivalente est

$$Y(\varphi(x)) = d\varphi(x)X(x).$$

La structure locale d'un champ de vecteurs au voisinage d'un point où il ne s'annule pas est très simple. C'est ce qu'affirme le théorème suivant, dit "du flow-box" :

Théorème. Au voisinage d'un point x_0 où le champ de vecteurs X ne s'annule pas, il existe des coordonnées locales y_1, \dots, y_n dans lesquelles X devienne le champ constant $\frac{\partial}{\partial x_1}$. Autrement dit, il existe un difféomorphisme local $y \mapsto x = \Phi(y)$ d'un ouvert de R^n sur un voisinage de x_0 tel que

$$\Phi_* \frac{\partial}{\partial x_1} = X.$$

Démonstration. Soit $(y_2, \dots, y_n) \mapsto \Sigma(y_2, \dots, y_n)$ un paramétrage d'une hypersurface transverse en x_0 à la courbe intégrale issue de x_0 . Si φ_t est le flot local de X au voisinage de x_0 , il suffit de poser

$$\Phi(y_1, \dots, y_n) = \varphi_{y_1}(y_2, \dots, y_n).$$

4- Crochet.

Au champ de vecteurs $X = \sum_{i=1}^n X_i \frac{\partial}{\partial q_i}$ sur l'ouvert Ω de R^n est associé l'opérateur différentiel du premier ordre sur les fonctions $f \in C^\infty(\Omega, R)$:

$$f \mapsto \partial_X f = df.X = \sum_{i=1}^n X_i \frac{\partial f}{\partial q_i}.$$

Un tel opérateur est une *dérivation* de l'algèbre $C^\infty(\Omega, R)$. Autrement dit, $\partial_X f$ est $C^\infty(\Omega, R)$ -linéaire en X , R -linéaire en f , et vérifie

$$\partial_X(fg) = (\partial_X f)g + (\partial_X g)f.$$

De plus, il est *local* : la valeur de $\partial_X f$ en un point q ne dépend que des valeurs de f sur un voisinage arbitrairement petit de q . Réciproquement, on montre que toute dérivation locale de l'algèbre $C^\infty(\Omega, R)$ est définie par un champ de vecteurs. Ceci donne un sens à la

Définition. Le crochet de deux champs de vecteurs X, Y sur Ω est l'unique champ de vecteurs $[X, Y]$ sur Ω tel que, quelle que soit la fonction $f : \Omega \rightarrow R$ de classe C^∞ , on ait

$$\partial_{[X, Y]} f = \partial_X(\partial_Y f) - \partial_Y(\partial_X f).$$

Exercices. 1) Montrer que si $X = \sum_{i=1}^n X_i \frac{\partial}{\partial q_i}$ et $Y = \sum_{i=1}^n Y_i \frac{\partial}{\partial q_i}$,

$$[X, Y] = \sum_{i=1}^n Z_i \frac{\partial}{\partial q_i} \text{ avec } Z_i = \sum_{j=1}^n \left(X_j \frac{\partial Y_i}{\partial q_j} - Y_j \frac{\partial X_i}{\partial q_j} \right).$$

2) Montrer que le crochet commute aux images directes : si φ est un difféomorphisme, on a $[\varphi_* X, \varphi_* Y] = \varphi_* [X, Y]$.

3) Prouver l'identité de Jacobi

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0.$$

Jointe à la bilinéarité et l'antisymétrie, cette identité fait du crochet une structure d'algèbre de Lie sur l'ensemble des champs de vecteurs C^∞ sur Ω .

On trouvera dans tous les livres de géométrie différentielle, par exemple celui de Spivak, l'interprétation du crochet de deux champs de vecteurs X et Y comme *dérivée de Lie* $L_X Y$ de Y suivant X :

$$[X, Y] = L_X Y = \left. \frac{d}{dt} (\varphi_t^* Y) \right|_{t=0} = - \left. \frac{d}{dt} ((\varphi_t)_* Y) \right|_{t=0}$$

(l'image réciproque $\varphi_t^* Y$ de Y par le flot de X est définie comme son image directe $(\varphi_{-t})_* Y$ par l'inverse de ce flot). La dérivée de Lie - dérivée

suivant le flot d'un champ de vecteurs X – se définit pour tout “champ de tenseurs” (appendice 1 du chapitre 2 pour les formes différentielles, appendice 1 du chapitre 7 pour les tenseurs généraux). Pour les fonctions, elle coïncide avec ∂_X :

$$L_X f = \left. \frac{d}{dt} (\varphi_t^* f) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} (f \circ \varphi_t) \right|_{t=0} = df \cdot X = \partial_X f.$$

On déduira de cette interprétation du crochet qu'il est une obstruction à la commutation des flots φ_t et ψ_s engendrés par les deux champs : $[X, Y] = 0$ si et seulement si $\varphi_s \circ \psi_t = \psi_t \circ \varphi_s$ (Exercice : interpréter en ces termes l'invariance par rotation autour de Oz du flot géodésique d'un tore de révolution). Ceci implique la généralisation suivante du *Théorème du flow-box* :

Théorème. *Etant donnés k champs de vecteurs X_1, \dots, X_k sur Ω dont les crochets deux à deux sont tous nuls, il existe au voisinage de tout point de Ω en lequel aucun des X_i ne s'annule des coordonnées locales x_1, \dots, x_n dans lesquelles les X_i deviennent les champs constants $\frac{\partial}{\partial x_i}$.*

En particulier, le champ des k -plans tangents à Ω engendrés en chaque point par les X_i (supposés ne pas s'annuler) est *intégrable* : il existe un feuilletage de Ω par des sous-variétés de dimension k tangentes en chaque point au k -plan correspondant. Une conséquence de ceci est le

Théorème de Frobenius (version champs). *Un champ de k -plans tangents à Ω est intégrable si et seulement si le crochet de deux champs de vecteurs tangents à ce champ est également tangent à ce champ.*

La démonstration est un simple choix de base : l'hypothèse permet en effet de choisir k champs de vecteurs qui engendrent en chaque point le k -plan donné et vérifient l'hypothèse du Théorème précédent.

CHAMPS DE VECTEURS sur une variété

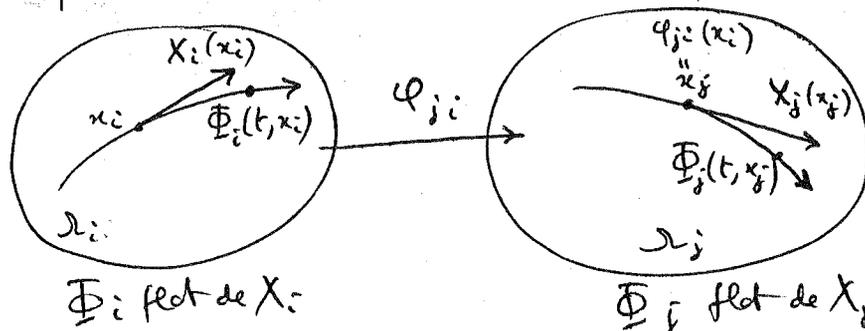
1. Flot local dans \mathbb{R}^n : cf. "Appendice 1"

2. Flot local dans V : X champ de vect. sur V ,

$\forall x_0 \in V, \exists \varepsilon > 0$, un voisinage \mathcal{O} de x_0 dans V
et un flot local $\Phi:]-\varepsilon, \varepsilon[\times \mathcal{O} \rightarrow V$ t-q.

$\Phi(0, x) = x$ et $\frac{d}{dt} \Phi(t, x) = X(\Phi(t, x)) \in T_{\Phi(t, x)} V$.

Démonstration : on montre que les flots locaux des représentants de X dans les cartes d'un atlas de V représentent un objet intrinsèque i.e. $\Phi_j(t, \varphi_j(x_i)) = \varphi_j \circ \Phi_i(t, x_i)$



C'est un cocycle de l'unicité des flots locaux car

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\varphi_{ji} \circ \Phi_i)(t, x_i) &= d\varphi_{ji}(\Phi_i(t, x_i)) \frac{d\Phi_i}{dt}(t, x_i) = d\varphi_{ji}(\Phi_i(t, x_i)) X_i(\Phi_i(t, x_i)) \\ &= X_j(\varphi_{ji} \circ \Phi_i(t, x_i)) \end{aligned}$$

3. Flot global lorsque X est à support compact

(i) On peut définir un ε uniforme en recouvrant la variété par le complémentaire du support de X et un nombre fini d'ouverts \mathcal{O} du type ci-dessus. Les flots locaux se recollent (unicité) en une application $\Phi:]-\varepsilon_0, \varepsilon_0[\times V \rightarrow V$ (ε_0 est le inf des nombres finis d' ε intervenant. Sur le complémentaire du support, ε_0 est infini et $\Phi(t, x) = x$ quel que soit t).

(ii) Si $t \in \mathbb{R}$ est quelconque, on l'écrit $t = n \frac{\varepsilon_0}{2} + t'$ avec $n \in \mathbb{Z}$ et $|t'| < \frac{\varepsilon_0}{2}$.

On définit alors le flot global de X , $\Phi : \mathbb{R} \times V \longrightarrow V$,

par $\Phi(t, x) = \varphi_t(x) = \varphi_{t'} \circ \varphi_{\frac{\varepsilon_0}{2}}^n(x)$, et

on vérifie que $\frac{d}{dt} \Phi(t, x) = X(\Phi(t, x))$. On conclut par unicité que c'est le flot global de X .

Propriété fondamentale ($X \in C^\infty$):

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \text{Diff}^\infty(V) \\ t & \longmapsto & \varphi_t \end{array}$$

est un homomorphisme du groupe additif \mathbb{R} dans le groupe, pour la composition, de difféomorphismes C^∞ de V . On dit que

$(\varphi_t)_{t \in \mathbb{R}}$ est un groupe à 1 paramètre de difféomorphismes

ou encore un système dynamique (à temps continu).

En "stroboscopant", on obtient un homomorphisme

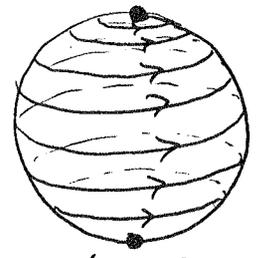
$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \text{Diff}^\infty(V) \\ n & \longmapsto & \varphi_{nt_0} = (\varphi_{t_0})^n \end{array}$$

qu'on appelle un système dynamique à temps discret.

Z Pour un difféomorphisme $\varphi : V \rightarrow V$, il n'existe en général pas de groupe à 1 paramètre $(\varphi_t)_{t \in \mathbb{R}}$ tel que $\varphi = \varphi_{t_0}$. Si c'était vrai, $(\varphi_{t_0})^n$ serait égal à φ ; d'un difféo φ ne possède en général pas de racine carrée pour la composition!

Exemple où il n'y a pas de flot global: $X = \frac{\partial}{\partial x}$ sur $\mathbb{R} - \{0\}$.

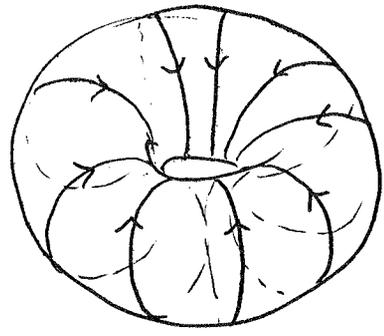
Quelques flots globaux



$$V = S^2$$

$\varphi_t =$ rotation d'axe Oz et d'angle ωt

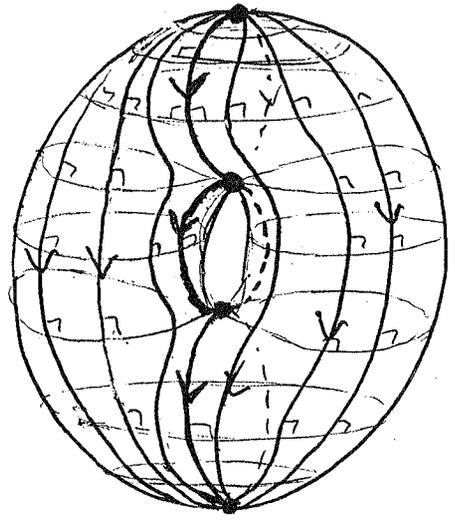
Tout flot sur S^2 a au moins un pt fixe (zéro du champ)!



$$V = T^2$$

$$\varphi_t(\theta_1, \theta_2) = (\theta_1, \theta_2 + \omega t)$$

Ici, pas de pt fixe!



$V = T^2$ muni de la métrique induite par \mathbb{R}^3

$$X = -\text{grad } f, \text{ où}$$

$$f(x, y, z) = z.$$

(X est orthogonal aux lignes de niveau). Il y a 4 pts fixes.

Exercice : 1) Décrire les champs de vecteurs dans les deux premiers exemples. 2) Étudier le flot du pendule.

Les champs de vecteurs comme opérateurs différentiels

V variété, X champ sur V , $f: V \rightarrow \mathbb{R}$

$L_X f = \partial_X f = X \cdot f = \langle df, X \rangle$ est par définition la fonction $x \mapsto df(x)X(x)$ sur V .

C'est la dérivée de f suivant le champ de vecteurs X
(ou dérivée de Lie de f suivant X).

Exercice :

$(L_X f)(x) =$ valeur en $t=0$ de la dérivée $\frac{d}{dt}[f(c(t))]$, où $c: (\mathbb{R}, 0) \rightarrow (V, x)$ est un chemin de classe C^1 représentant le vecteur $X(x) \in T_x V$ (voir p. 22).

En particulier, si φ_t est le flot local de X au voisinage de x ,

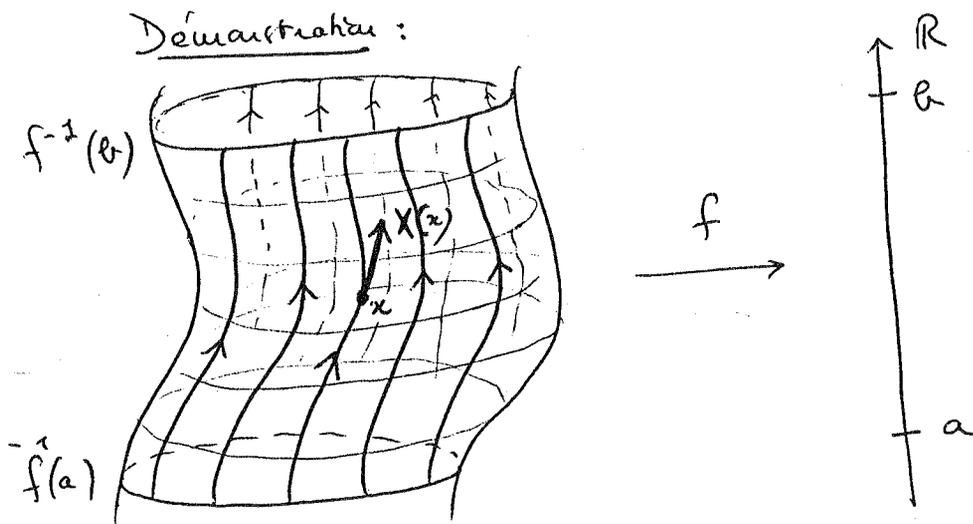
$$(L_X f)(x) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (f \circ \varphi_t)(x).$$

IMPORTANT : la valeur en x de $L_X f$ ne dépend que de la valeur de X en x (et bien sûr de f au voisinage de x).

Une preuve appliquée du th. d'I des solutions d'équations différentielles :

THÉOREME : Soit V une variété C^∞ et $f: V \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction C^∞ , propre. On suppose que $f^{-1}([a, b])$ ne contient aucun point critique de f . Il existe alors un difféomorphisme de $f^{-1}([a, b])$ sur $f^{-1}(a) \times [0, 1]$. En particulier, les sous-variétés $f^{-1}(a)$ et $f^{-1}(b)$ sont difféomorphes.

Démonstration :



Soit g une métrique riemannienne sur V (on peut penser à la métrique induite par un plongement de V dans \mathbb{R}^N , N assez grand).

Rappelons que $\text{grad}_g f$ est le champ de vecteurs sur V défini par $g(\text{grad}_g f, Y) = \langle df, Y \rangle$ pour tout champ de vecteurs Y sur V .

Soit $\tilde{X} = \frac{b-a}{\|\text{grad}_g f\|_g^2} \text{grad}_g f$. On a

$$L_{\tilde{X}} f = \frac{b-a}{\|\text{grad}_g f\|_g^2} \langle df, \text{grad}_g f \rangle \equiv b-a.$$

Remplaçant \tilde{X} par un champ X égal à \tilde{X} sur un voisinage compact de $f^{-1}([a, b])$ et à support compact (c'est possible en utilisant une fonction de l'unité), appelons $(\varphi_t)_{t \in \mathbb{R}}$ le flot global de X .

(38)

Sur $\tilde{f}^{-1}([a, b])$, on a $X = \tilde{X}$, donc

$$L_X f \equiv b - a.$$

On en déduit que

$$\frac{d}{dt}(f \circ \varphi_t)(x) = df(\varphi_t(x)) \frac{d\varphi_t(x)}{dt} = \langle df, X \rangle(\varphi_t(x)) = b - a,$$

et donc que

$$(f \circ \varphi_t)(x) - f(x) = (b - a)t.$$

En particulier, $(f \circ \varphi_1)(a) - f(a) = b - a$,
c'est-à-dire $\varphi_1(a) \in f^{-1}(b)$.

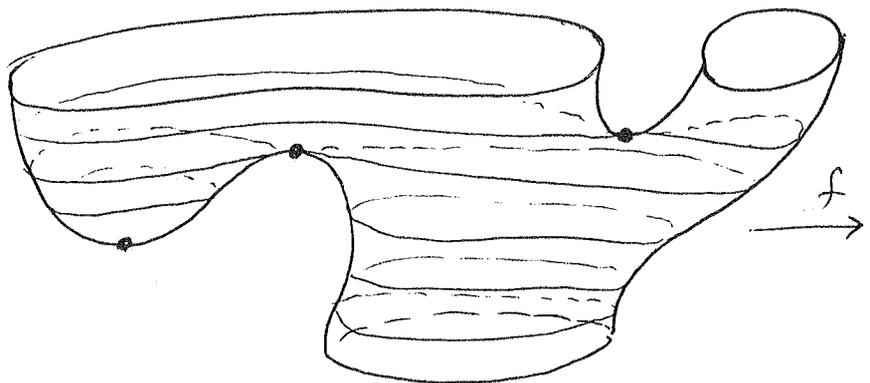
Le difféomorphisme cherché est

$$\begin{array}{ccc} f^{-1}([a, b]) & \longleftarrow & \tilde{f}^{-1}(a) \times [0, 1] \\ \varphi_t(x) & \longleftarrow & (x, t) \end{array}$$

En particulier, φ_1 induit un difféomorphisme de $f^{-1}(a)$ sur $f^{-1}(b)$.

Remarque : on s'est en quelque sorte ramené au modèle $f(x_1, \dots, x_n) = x_n$.

Ce qui se passe lorsque existent des points critiques de f entre $f^{-1}(a)$ et $f^{-1}(b)$ est l'objet de la théorie de Morse (voir p. 51)



Etude locale des fonctions sur une variété

(39)

voir p. 31

$[d(f \circ \varphi) = \varphi^* df] \Rightarrow$ La dérivée dF d'une fonction $F: V \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ sur une variété C^∞ est une 1-forme différentielle intrinsèquement définie sur V .

Par contre, la formule de Faà di Bruno à l'ordre 2

$$d^2(f \circ \varphi) = d^2 f(\varphi)(d\varphi, d\varphi) + df(\varphi) \circ d^2 \varphi$$

montre qu'on ne peut définir intrinsèquement $d^2 F(v)$ comme forme bilinéaire sur $T_v V$ qu'à la condition que v soit un point critique (= point singulier) de F , i.e. que $dF(v) = 0$.

Cependant, la même formule de Faà di Bruno à un ordre quelconque :

$$d^k(f \circ \varphi) = \sum_{\substack{i_1, \dots, i_q \geq 1 \\ i_1 + \dots + i_q = k}} \sigma_{i_1, \dots, i_q} d^q f(\varphi)(d^{i_1} \varphi, \dots, d^{i_q} \varphi)$$

↑
coefficients universels

montre que la notion de "contact d'ordre k " en un point x entre deux fonctions $F, G: V \rightarrow \mathbb{R}$, a un sens intrinsèque ! C'est le génie de Charles Ehresmann que d'en avoir abstrait la notion de "jet", médiateur privilégié entre analyse et géométrie :

(40)

Notation: $F \underset{v}{\sim}^k G$ signifie que F et G ont en x un contact d'ordre k , c.à.e. que dans une carte locale $\varphi: (\mathbb{R}, 0) \rightarrow (V, v)$, et donc dans toutes (Exercice!)

$$(F \circ \varphi - G \circ \varphi)(x) = O(\|x\|^{k+1}).$$

Définition: La classe d'équivalence de F par la relation d'équivalence (Exercice!) $\underset{v}{\sim}^k$, est appelée jet d'ordre k de F en v et notée $j_v^k F$

Donc $F \underset{v}{\sim}^k G$ s'écrit encore $j_v^k F = j_v^k G$.

Dans la carte locale φ , on peut représenter $j_v^k F$ par le polynôme de Taylor à l'ordre k de $F \circ \varphi$ en 0 mais ce polynôme ne représente pas une fonction intrinsèquement définie sur V

(un jet est vraiment une classe d'équivalence!)

Notation: $J^k(V, \mathbb{R}) = \{ j_v^k F, v \in V, F: V \xrightarrow{C^\infty} \mathbb{R} \}$

$$\begin{array}{c} \pi \downarrow \uparrow j_v^k F \\ V \end{array} \text{ défini par } j_v^k F(v) = j_v^k F$$

Exercice pour les curieux: montrer que $J^k(V, \mathbb{R})$ peut être naturellement muni d'une structure de variété C^∞ pour laquelle π et $j_v^k F$ sont de classe C^∞ .

Cas particuliers: $J^0(V, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R} \times V$



$$J^1(V, \mathbb{R}) \equiv \mathbb{R} \times T^*V$$

$$\begin{array}{ccc}
 & & (F(v), (v, \underbrace{dF(v)}_{T_v^*V})) \\
 & \swarrow \pi & \nearrow \\
 J^1 F & & V \\
 & \searrow & \swarrow \\
 & & V
 \end{array}$$

Dans une carte locale,

polynômes de degré $\leq k$ en n indéterminées

$$J^k(\Omega, \mathbb{R}) \equiv \Omega \times P_n^k$$

$$j_{x_0}^k f \longmapsto \left(x_0, \sum_{\substack{\alpha_1, \dots, \alpha_n \geq 0 \\ \alpha_1 + \dots + \alpha_n = k}} \frac{\partial^k f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}(x_0) X_1^{\alpha_1} \dots X_n^{\alpha_n} \right)$$

polynôme de Taylor à l'ordre k en x_0 si on remplace X par $X - x_0$

Puisqu'un polynôme est déterminé par ses coefficients, $\Omega \times P_n^k$ est un ouvert de \mathbb{R}^N (exercice: calculer N), qui est le domaine naturel d'une carte de $J^k(V, \mathbb{R})$...

En résumé : si $F: V \rightarrow \mathbb{R}$, $v \in V$, $F(v)$, $dF(v)$ sont toujours définis, $d^2F(v_0)$ n'est définie que si $dF(v_0) = 0$, $j^k F(v)$ est toujours défini $\forall k \in \mathbb{N}$,

certains résultats de ce chapitre sont à revoir.

Exercice ① montrer que $d^{k+1}F(v_0)$ ne peut être défini intrinsèquement comme application k -linéaire symétrique sur $T_{v_0}V$ que si $j_{v_0}^k(F - F(v_0)) = j_{v_0}^k 0$.

Définition : Une intégrabilité aux dérivées partielles d'ordre k sur V est un sous-ensemble Σ de $J^k(V, \mathbb{R})$. Une solution de cette intégrabilité est une fonction $F: V \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $(j^k F)(V) \subset \Sigma$.
 (on parle d'épave si Σ est une hypersurface, d'inégalité si l'intérieur de Σ est non vide).

Germe : $F, G : V \xrightarrow{C^\infty} \mathbb{R}$ définissent le même germe en $v \in V$ s'il existe un voisinage ouvert \mathcal{O} de v dans V sur lequel $F|_{\mathcal{O}} = G|_{\mathcal{O}}$:

$$\exists \mathcal{O}, \quad F|_{\mathcal{O}} = G|_{\mathcal{O}} .$$

Exercice. ① c'est bien une relation d'équivalence

② si F et G ont même germe en v ,
on a pour tout $k \in \mathbb{N}$, $j_v^k F = j_v^k G$.

Le passage des fonctions aux germes en un point permet d'oublier les ouverts de définition des fonctions. On peut de même parler de germe de différentielle

$\varphi : (V, v) \rightarrow (W, w)$ en identifiant φ et ψ s'ils coïncident sur un voisinage ouvert de v dans V .

On se permettra de parler du germe f ou du germe φ en confondant classe d'eq et représentant. Cela signifie qu'on se permet éventuellement de restreindre les domaines de définition.

La structure d'anneau de $C^\infty(V, \mathbb{R})$, héritée de celle de \mathbb{R} , passe au quotient et définit une structure d'anneau sur l'ensemble $C_{(v)}^\infty(V, \mathbb{R})$ de germes en v .

$C_{(v)}^\infty(V, \mathbb{R})$ est un anneau local : il possède un unique idéal maximal $\mathcal{M}_{(v)} = \{ \text{germes de fonctions nuls en } 0 \} = \{ \text{éléments non-inversibles pour la multiplication} \}$.

Plus généralement, on définit la suite d'idéaux :

$$C_{(v)}^{\infty}(V, \mathbb{R}) \supset \mathcal{M}_{(v)} \supset \mathcal{M}_{(v)}^2 \supset \dots \supset \mathcal{M}_{(v)}^k \supset \dots \supset \mathcal{M}_{(v)}^{\infty}$$

par

$$\mathcal{M}_{(v)}^k = \{ \text{germes de fonctions } F \text{ telles que } j_v^{k-1} F = j_v^{k-1} 0 \}$$

$\mathcal{M}_{(v)}^k$ est donc l'ensemble des germes de fonctions nulles à l'ordre $k-1$ en v et $\mathcal{M}_{(v)}^{\infty} = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{M}_{(v)}^k$ est l'ensemble des germes de fonctions plates en v (dans toute carte locale $\varphi: (\mathbb{R}, 0) \rightarrow (V, v)$, toutes les dérivées partielles à tous les ordres de $f = F \circ \varphi$ sont nulles en 0; l'ex. typique est $f: \mathbb{R}, 0 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(0) = 0$ et pour $x \neq 0$, $f(x) = e^{-1/x^2}$).

IMPORTANT La formule de Taylor avec reste intégral

$$f(x) = f(0) + \sum_{i=1}^n x_i \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx) dt$$

(où $f: (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow \mathbb{R}$), montre que $\mathcal{M}_{(0)} \subset C_{(0)}^{\infty}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ est engendré par les fonctions coordonnées $x \mapsto x_i$:

$$f \in \mathcal{M}_{(0)} \iff \left(\exists \text{ germes } C^{\infty} g_i, i=1, \dots, n, \text{ tels que } f(x) = \sum_{i=1}^n x_i g_i(x) \right)$$

Exercices : ① montrer de même que $f \in \mathcal{M}_{(0)}^k \subset C_{(0)}^{\infty}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$

$\mathcal{M}_{(0)}^k$ est engendré par les monômes de degré k

si et seulement s'il existe des germes $C^{\infty} g_{i_1, \dots, i_n}$ tels que

$$f(x) = \sum_{\substack{i_1 \geq 0, \dots, i_n \geq 0 \\ i_1 + \dots + i_n = k}} x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n} g_{i_1, \dots, i_n}(x)$$

En particulier, $\mathcal{M}_{(0)}^k$ est bien la puissance k ème de $\mathcal{M}_{(0)}$: chaque élément de $\mathcal{M}_{(0)}^k$ est une somme finie d'éléments qui s'écrivent comme le produit de k éléments de $\mathcal{M}_{(0)}$ chacun.

(44)

(2) Passer de $(\mathbb{R}^n, 0)$ à (V, v) en remarquant que $F \in \mathcal{M}_{(v)}^k \subset C_{(v)}^\infty(V, \mathbb{R})$ si et seulement si F est représenté dans une carte (et donc dans toutes) par un élément f de $\mathcal{M}_{(0)}^k \subset C_{(0)}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.

Par exemple, $\mathcal{M}_{(v)}$ est engendré par les fonctions coordonnées dans une carte quelconque au voisinage de v .

Problème général des "fonctions normales" (ou "modèles") :

Quand un germe $F \in C_{(v)}^\infty(V, \mathbb{R})$ est-il déterminé par son jet $j_v^k F$ à un (certain) ordre k ? Autrement dit, à quelles conditions existe-t-il un autre G tel que

$$\left(j_v^k F = j_v^k G \right) \Rightarrow \left(\exists \text{ germe } \varphi \text{ de diff. } (V, v) \rightarrow (V, v) \right. \\ \left. \text{tel que } G = F \circ \varphi \in C_{(v)}^\infty(V, \mathbb{R}) \right)$$

Exercice important!

Le théorème des submersions implique qu'un germe régulier $F \in C_{(v)}^\infty(V, \mathbb{R})$ (i.e. un germe dont un représentant - et donc tous! - vérifie $dF(v) \neq 0$) est déterminé par son jet d'ordre 1.

Nous allons donner une démonstration nouvelle de ce fait, qui se généralisera au cas singulier.

Remarque : Un germe de fonction analytique F sur une variété analytique V est déterminé par son jet d'ordre ∞ dans un sens très fort puisque alors $(j_v^\infty F = j_v^\infty G)$ implique $(F \equiv G)$ (i.e. on peut prendre $\varphi = \text{Id}$).

Définition : A $F \in C_{(v)}^{\infty}(V, \mathbb{R})$, on associe son

idéal jacobien $J_{(v)}(F) \subset C_{(v)}^{\infty}(V, \mathbb{R})$, défini par

$$J_{(v)}(F) = \left\{ H \in C_{(v)}^{\infty}(V, \mathbb{R}), \exists X, \text{ germe de champ de } \right. \\ \left. \text{vecteurs } C^{\infty} \text{ sur } V, \text{ tel que } H = dF \cdot X \right\}$$

Exercice : c'est un idéal.

Si $(V, v) = (\mathbb{R}^n, 0)$ et $f \in C_{(0)}^{\infty}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$,

cela signifie que $J_{(0)}(f)$ est l'idéal engendré

par les germes de dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, $i=1, \dots, n$:

$$h \in J_{(0)}(f) \Leftrightarrow \left(\exists \xi_i \in C_{(0)}^{\infty}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}), \text{ tels que } \right. \\ \left. h(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \xi_i(x) \right).$$

Exercice : vérifier directement que, dans un

changement de carte, les idéaux jacobiens

des représentants f_1 et f_2 de F se correspondent
bien par l'application $\varphi_{21}^* : C_{(0)}^{\infty}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \rightarrow C_{(0)}^{\infty}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$
 $g \mapsto g \circ \varphi_{21}$

Lemme : Un germe $F \in C_{(v)}^{\infty}(V, \mathbb{R})$ est régulier

si et seulement si $J_{(v)}(F) = C_{(v)}^{\infty}(V, \mathbb{R})$

Démonstration :

Le germe F est régulier si et seulement s'il existe
un germe de champ de vecteurs X tel que $dF \cdot X$ ne
s'annule pas en v (en coordonnées locales, il existe
une dérivée partielle qui ne s'annule pas en 0). L'idéal
 $J_{(v)}(F)$ contient donc un élément inversible. C.Q.F.D.

Définition : Une forme quadratique F est dite "de Morse" (ou "non dégénérée") si $J_{(0)}(F) = \mathcal{M}_{(0)}$.

C'est donc le cas où $J_{(0)}(F)$ est le plus gros possible sans coïncider avec l'anneau tout entier.

Autre caractérisation des formes de Morse :

$F \in C_{(0)}^{\infty}(V, \mathbb{R})$ est de Morse si et seulement si $d^2F(0) \in \mathcal{L}_1^2(TV \times TV, \mathbb{R})$ (qui est bien définie car $dF(0) = 0$, cf p. 33) est non-dégénérée.

Démonstration : on raisonne dans une carte, i.e. avec $f \in C_{(0)}^{\infty}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. On veut montrer que

$$\left(J_{(0)}(f) = \mathcal{M}_{(0)} \right) \Leftrightarrow \left(\text{la matrice } \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(0) \right)_{\substack{1 \leq i, j \leq n}} \text{ est inversible} \right)$$

Mais l'inversibilité de la matrice équivaut (théorème d'inversion locale) à ce que l'application

$$\Phi : (x_1, \dots, x_n) = x \mapsto \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \right)$$

de $(\mathbb{R}^n, 0)$ dans $(\mathbb{R}^n, 0)$ soit un difféomorphisme local.
 car $df(0) = 0$

$$\text{Donc } \forall i, x_i = (\Phi^{-1})_i \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \right) \in C_{(0)}^{\infty}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}).$$

Mais $\Phi^{-1}(0) = 0$, donc $(\Phi^{-1})_i(y) \in \mathcal{M}_{(0)}$, c'est-à-dire

$$(\Phi^{-1})_i(y) = \sum_{j=1}^n y_j g_{ij}(y) \quad (\text{résultat important p. 43}). \text{ Finalement}$$

$$x_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) \underbrace{g_{ij}(x)}_{h_{ij}(x)} \in J_{(0)}(f)$$

Donc $\mathcal{M}_{(0)} \subset J_{(0)}(f)$, d'où l'égalité puisque l'inclusion dans l'autre résulterait de $df(0) = 0$.

Réciproquement, si $\mathcal{M}_{(0)} \subset J_{(0)}(f)$, on a $x_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) h_{ij}(x)$.
 On dérive en 0 et on voit que $(h_{ij}(0))_{\substack{1 \leq i, j \leq n}}$ est un inverse de $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(0) \right)_{\substack{1 \leq i, j \leq n}}$.

Théorème : Soit $F : (V, \nu) \rightarrow \mathbb{R}$ un germe de fonction C^∞ sur la variété V .

(47)

- ① Si F est régulier, il est déterminé par son jet d'ordre 1.
- ② Si F est de Morse, il est déterminé par son jet d'ordre 2.

Démonstration : il s'agit de montrer que, quel que soit le germe H de fonction C^∞ sur V appartenant à $\mathcal{M}_{(v)}^2$ dans le cas ①, à $\mathcal{M}_{(v)}^3$ dans le cas ②, il existe un germe de difféomorphisme $\Phi : (V, \nu) \rightarrow (V, \nu)$ tel que $(F + H) \circ \Phi = F$.
(on choisit en effet $-H =$ le reste du développement de Taylor de F à l'ordre 1 ou 2 suivant les cas).



Idee du chemin

on cherche Φ_t , FAMILLE de germes de difféomorphismes,
t.g. $\forall t \in [0, 1]$, $(F + tH) \circ \Phi_t = F$, et
ON DÉRIVE PAR RAPPORT AU PARAMÈTRE t

Je veut :

$$\frac{d}{dt} (F + tH) \circ \Phi_t + d(F + tH) \circ \Phi_t \cdot \frac{d\Phi_t}{dt} = 0$$

(Pour dériver, on considère les fonctions comme définies sur $V \times \mathbb{R}$; on a noté d la dérivée par rapport à V).

→ Au lieu de chercher directement les Φ_t , cherchons un (germe en ν de) champ de vecteurs dépendant du temps X_t sur V tel que

$$\frac{d\Phi_t}{dt} = X_t \circ \Phi_t.$$

Après compensation avec le germe de difféomorphisme Φ_t^{-1} , l'équation devient

$$H + d(F+tH) \cdot X_t = 0$$

et le problème est ramené à

- 1) Montrer que, pour $t \in [0, 1]$, l'hypothèse sur H implique que $H \in \mathcal{J}_{(0)}^1(F+tH)$ et que l'on peut choisir X_t de classe C^∞ par rapport à t et x .
- 2) Montrer que, si l'on se restreint à un voisinage assez petit de v dans V , le flot $\Phi_t = \Phi_0^t$ de X_t est défini pour $t \in [0, 1]$ (on peut "intégrer" jusqu'au temps 1 des données initiales assez proches de v).

Choisissant une carte locale $\varphi: (U, 0) \rightarrow (V, v)$, nous appellerons f, h, ξ_t, φ_t les représentants de F, H, X_t, Φ_t . On notera $f_t = f + th$

Cas ① $\exists i_0, \frac{\partial f}{\partial x_{i_0}}(0) \neq 0$

Puisque $h \in \mathcal{M}_{(0)}^2$, $\frac{\partial h}{\partial x_{i_0}}(0) = 0$, donc $\frac{\partial f_t}{\partial x_{i_0}}(0) \neq 0$ quel que soit t . On en déduit que, si x est assez proche de 0, $\frac{\partial f_t}{\partial x_{i_0}}(x) \neq 0$ pour $t \in [0, 1]$.

On peut donc résoudre l'équation $h + df_t \cdot \xi_t = 0$ en posant $\xi_t(x) = \left(0, \dots, \frac{-h}{\frac{\partial f_t}{\partial x_{i_0}}(x)}, 0, \dots, 0 \right)$

(le seul terme non nul est à la place i_0).

Le champ $\xi_t(x)$ dépend du couple (t, x) de manière C^∞ ; il possède donc un flot local $\varphi_t(x)$ de classe C^∞ . Puisque $\xi_t(0) = 0$ quel que soit $t \in [0, 1]$, on a $\varphi_t(0) = 0$ et $\varphi_t(x)$ est défini sur un voisinage de $[0, 1] \times \{0\}$ dans $[0, 1] \times \mathbb{R}^n$, donc sur un voisinage voisin de x .

Exercice - Remarquer que chaque composante de \mathcal{F}_t appartient à $\mathcal{M}_{(0)}^2$ et en déduire que quel que soit $t \in [0, 1]$, $d\mathcal{F}_t(0) = \text{Identité}$.

Cas 2 L'hypothèse est que $J_{(0)}(f) = \mathcal{M}_{(0)}$ et $h \in \mathcal{M}_{(0)}^3$.

Lemme : l'idéal $J_{(0)}(f_t)$ est égal à $\mathcal{M}_{(0)}$ quel que soit t .
 (Remarquer que dans le cas 1 $J_{(0)}(f_t)$ était également indépendant de t puisqu'il est égal à $C_{(0)}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$).

Démonstration: $\frac{\partial f_t}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} + t \frac{\partial h}{\partial x_i}$ et $\frac{\partial h}{\partial x_i} \in \mathcal{M}_{(0)}^2 = \mathcal{M}_{(0)} J_{(0)}(f)$

autrement dit $\frac{\partial h}{\partial x_i} = \sum_{j,k} \alpha_{ijk}(x) x_j \frac{\partial f}{\partial x_k}(x)$. Donc

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_t}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_t}{\partial x_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + t \sum_j \alpha_{1j1}(x) x_j & \dots \\ \vdots & \ddots \\ \vdots & \dots & 1 + t \sum_j \alpha_{njn}(x) x_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

La matrice carrée $M(t, x)$ du 2^{ème} membre est de la forme $\text{Id} + t (m_{ik}(x))_{1 \leq i, k \leq n}$ où les $m_{ik} \in \mathcal{M}_{(0)}$.

Elle est donc inversible pour tout $t \in [0, 1]$ pourvu que x soit assez proche de 0 et son inverse $M^{-1}(t, x)$ est également à coefficients de classe C^∞ en t et x , ce qui montre l'égalité des idéaux $J_{(0)}(f)$ et $J_{(0)}(f_t)$ pour tout $t \in [0, 1]$.

On déduit du lemme que $h \in \mathcal{M}_{(0)}^{(3)} = \mathcal{M}_{(0)}^{(2)} J_{(0)}(f)$ c'est

$$h(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \right) \begin{pmatrix} x_1(x) \\ \vdots \\ x_n(x) \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial f_t}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial f_t}{\partial x_n}(x) \right) M^{-1}(t, x) \begin{pmatrix} x_1(x) \\ \vdots \\ x_n(x) \end{pmatrix}$$

$= - \sum_{i=1}^n \xi_i(t, x) \frac{\partial f_t}{\partial x_i}(x)$ où les ξ_i sont C^∞ en t et x ,
 et vérifient $\forall t \in [0, 1], \xi_i(t, x) \in \mathcal{M}_{(0)}^{(2)}$.

(50)

Il ne reste plus qu'à poser

$$\xi_t(x) = (\xi_1(t, x), \dots, \xi_n(t, x))$$

Puisque $\xi_t(0) = 0$ quel que soit t , on voit comme dans le cas (1) qu'on peut intégrer jusqu'à $t=1$ pourvu que x soit assez proche de 0. (Q.F.D.)

* Généralisations (exercice) : montrer que si F est un germe singulier et si $H \in \mathcal{M}_{(r)} \mathcal{J}_{(r)}(F)^2$ (i.e. en coordonnées locales $h(x) = \sum_{i,j,k} \alpha_{ij,k}(x) x_i \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) \frac{\partial f}{\partial x_k}(x)$) on a encore $\mathcal{J}_{(r)}(F_t)$ indépendant de t ; en déduire l'existence d'un germe de difféomorphisme $\Phi: (V, \nu) \rightarrow (V, \nu)$ tel que $(F+H) \circ \Phi = F$.

Application : On dit que F est un germe à

singularité algébriquement isolée s'il existe un entier positif k tel que $\mathcal{J}_{(r)}(F) \supset \mathcal{M}_{(r)}^k$.

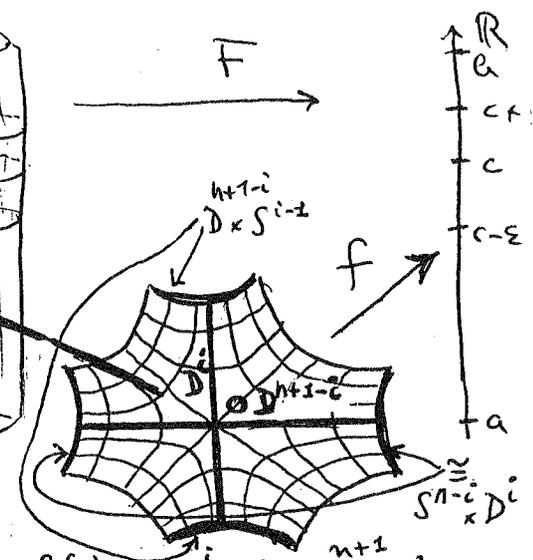
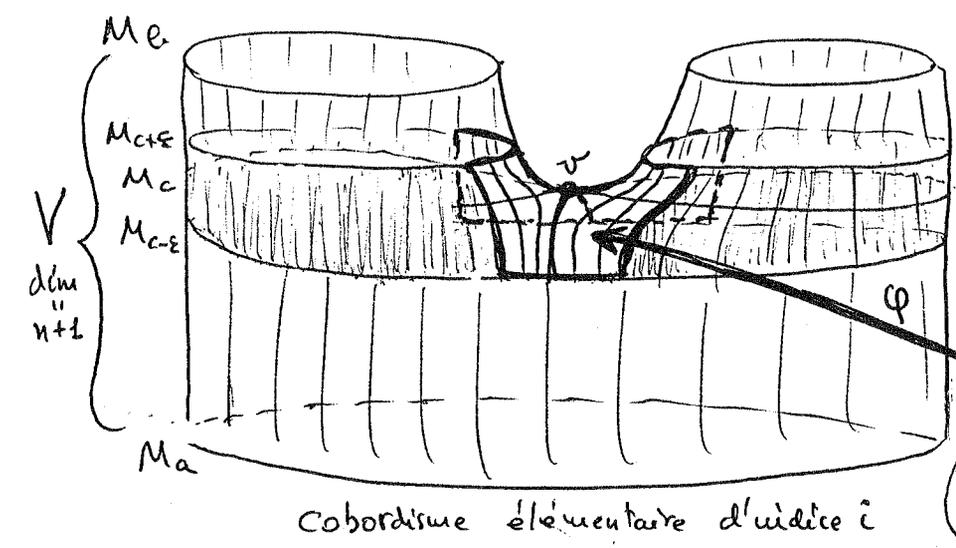
Montrer qu'un germe à singularité isolée est déterminé par son jet à l'ordre $2k+1$ (remarque qu'on peut choisir $H \in \mathcal{M}_{(r)}^{2k+1} \subset \mathcal{M}_{(r)} \mathcal{J}_{(r)}(F)^2$).

en fait, \mathcal{J} dans la suite dans laquelle F est représenté par un polynôme de degré $2k+1$

Cette étude, avec celle de l'op. 37-38 montre la force du théorème d'existence des solutions d'équations différentielles. Bien sûr on ne sache pas en général intégrer explicitement un champ de vecteurs, la seule existence d'une solution est un remarquable outil de démonstration !

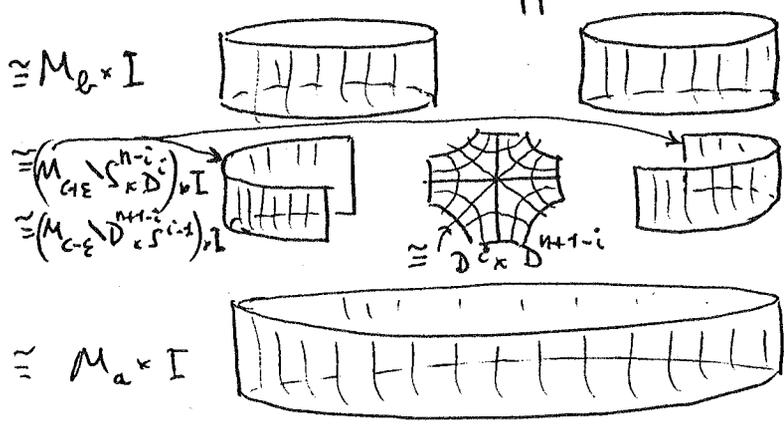
La théorie de Morse par l'image

(pour plus sentencieux, voir le livre de Milnor aux presses de Princeton University)



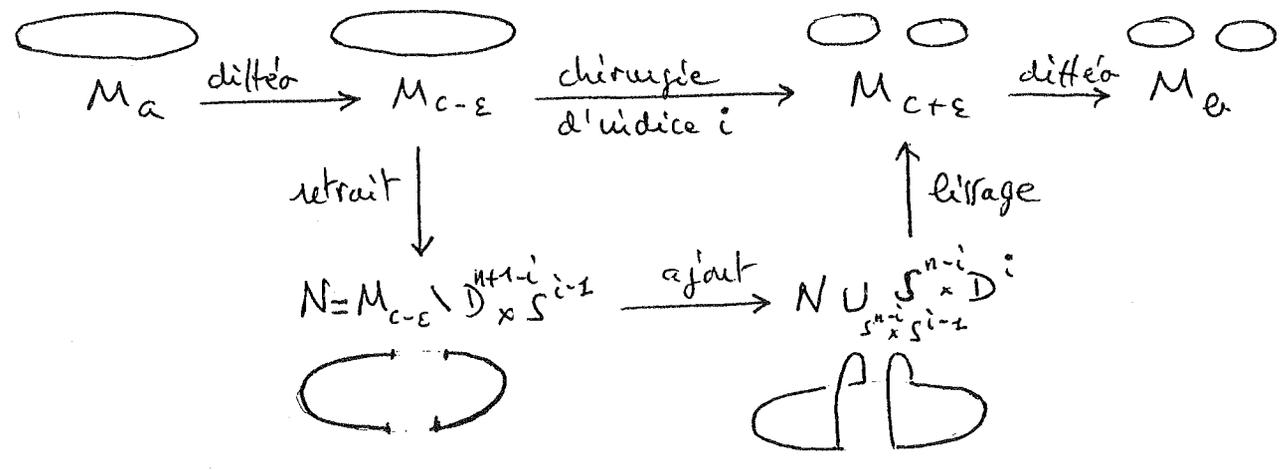
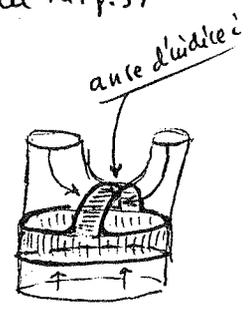
$$f(x) = c - \sum_{\alpha=1}^i x_\alpha^2 + \sum_{\beta=i+1}^{n+1} x_\beta^2$$

(lignes de niveau et de gradient)



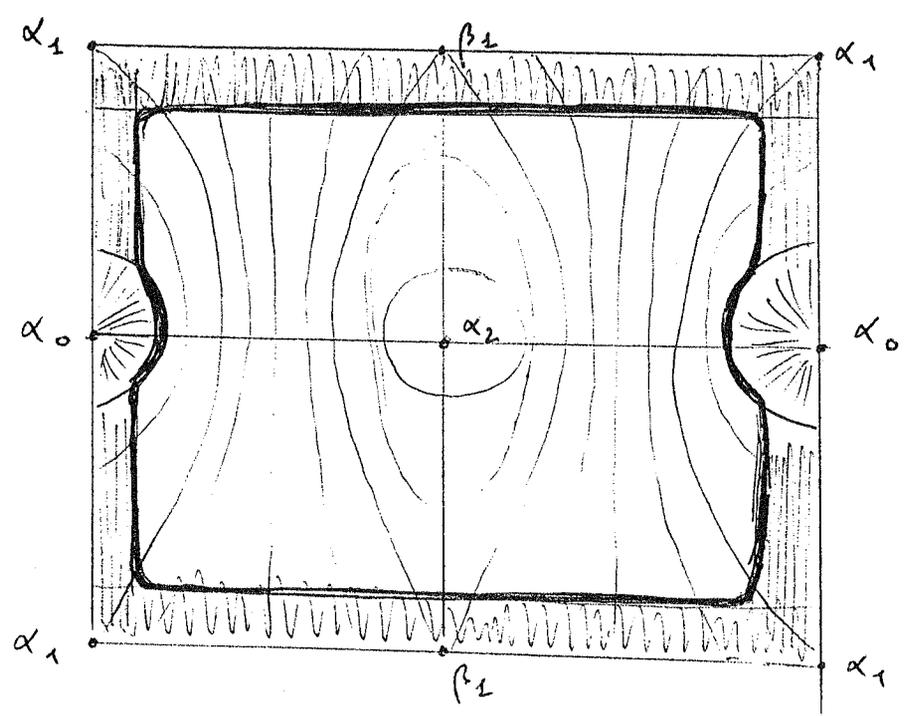
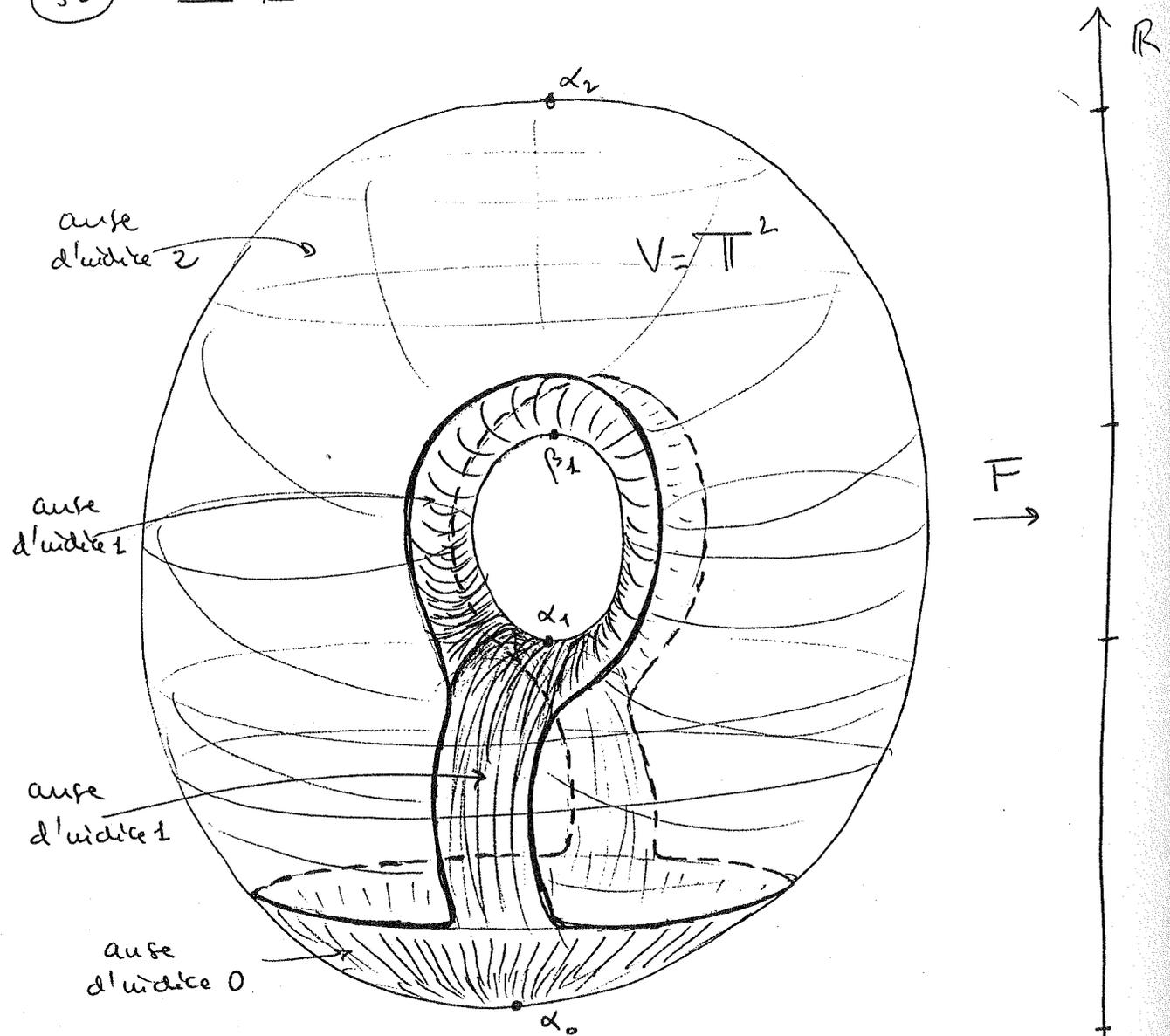
la voisinage du pt critique est justifiable du th. p. 47, les autres pièces du th. p. 37

Passage de M_a à M_b
(chirurgie d'indice i)



(52)

Exemple : Reconstitution du tore à partir de la fonction "hauteur".



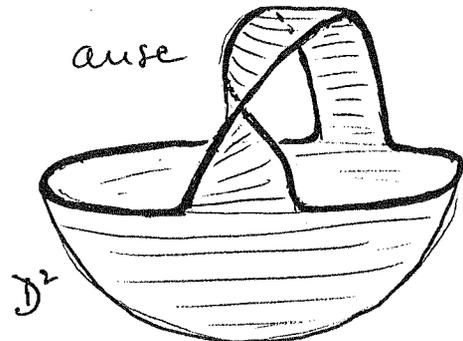
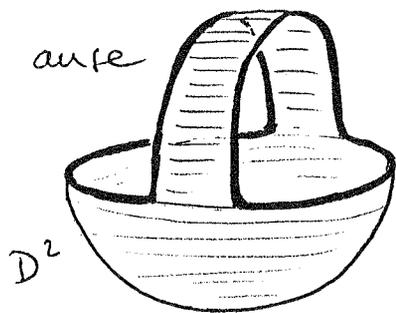
EXERCICE D'ASSOUPLISSEMENT

52 bis

Les 2 manières d'attacher une anse d'indice 1 à un disque ou comment la connaissance des points critiques et de leurs indices ne suffit pas à déterminer la topologie.

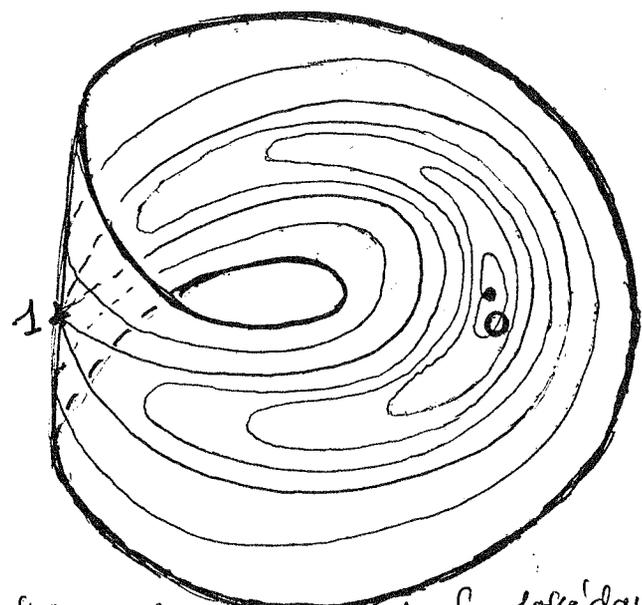
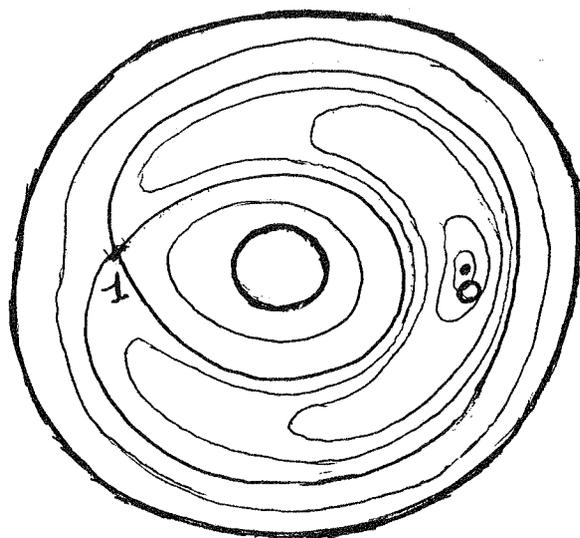
ORIENTABLE

NON ORIENTABLE



est homéomorphe à un anneau

est homéomorphe à un ruban de Moebius



lignes de niveau de f possèdent un pt critique d'indice 0 et un pt critique d'indice 1. La ligne de niveau supérieure est le bord de l'anneau, formé de 2 cercles.

lignes de niveau de f possèdent un pt critique d'indice 0 et un pt critique d'indice 1. La ligne de niveau supérieure est le bord du ruban de Moebius, formé d'un unique cercle.

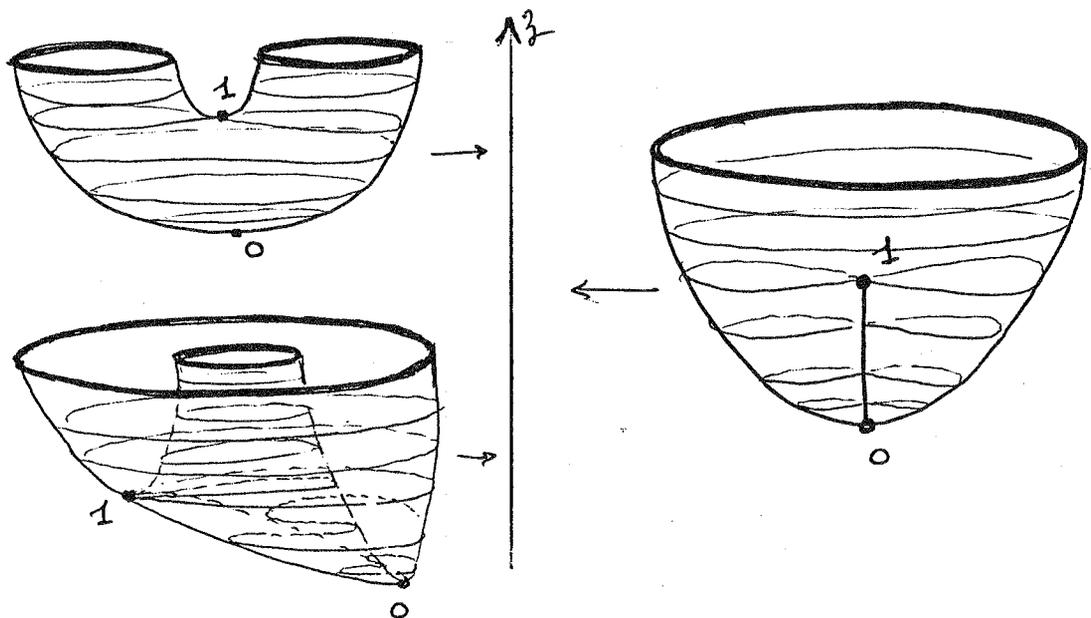
(Comparer à la fig. 1.3 p. 2 du document 1 : le pendule ...).

(Comparer à la fig 2.9 p. 7 du document 2 : L'espace projectif).

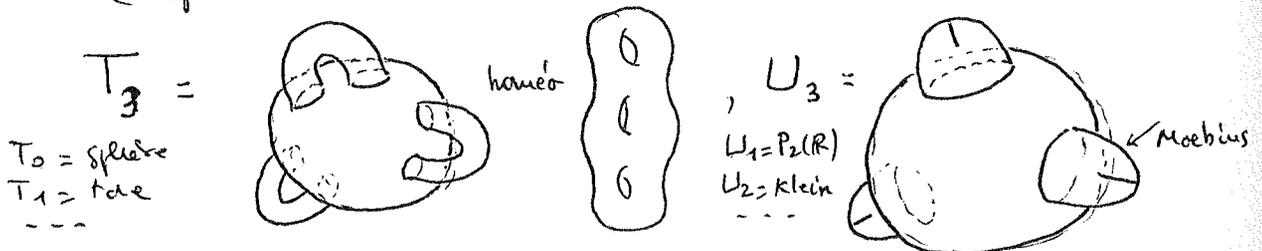
52 ter)

EXERCICE D'AGROUPEMENT
(suite)

Où les fonctions f de la page précédente font représentées comme fonctions "hauteur" (i.e. restriction à la surface de la projection $(x, y, z) \mapsto z$) au fixe, dans le cas non-déformable, d'une représentation très singulière de la surface dans \mathbb{R}^3 (crosscap déjà rencontrée dans la complexification du pendule).



LECTURE: la classification des surfaces, chapitre V du livre d'André Gramain "Topologie des surfaces" (PUF 1971), où l'on verra que toute surface (compacte, sans bord) orientable (resp. non orientable) est homéomorphe à T_p , $p \geq 0$ (resp. U_q , $q \geq 1$), où

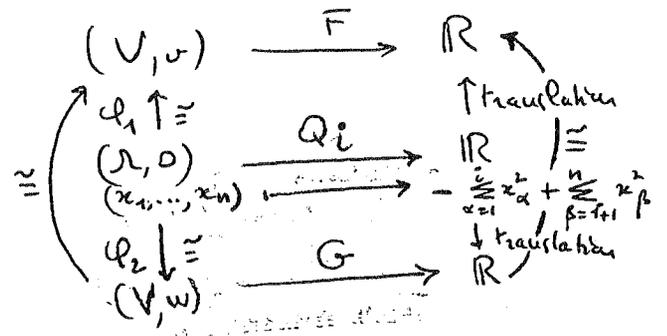
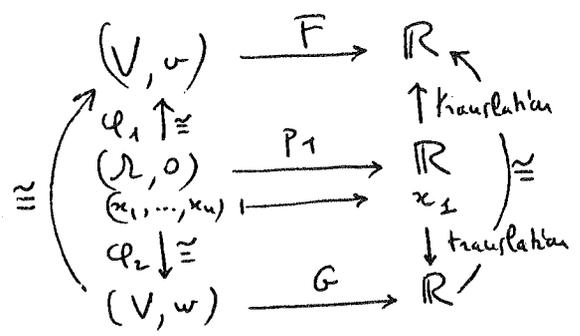


Début de la démonstration: On commence par montrer l'existence d'une fonction $f: V \rightarrow \mathbb{R}$ de Morse (i.e. dont tous les pts critiques sont non-dégénérés) et on analyse la topologie niveau par niveau en découplant par des courbes $f = \text{constante} \dots$

Stabilité des germes réguliers et des germes de Morse

① $F: (V, v) \rightarrow \mathbb{R}$
 $dF(v) \neq 0$

② $F: (V, v) \rightarrow \mathbb{R}$
 $dF(v) = 0, d^2F(v)$ non-dépendante



$\forall G \in C^1$ proche de F au voisinage de v ,
 $\forall w$ proche de v

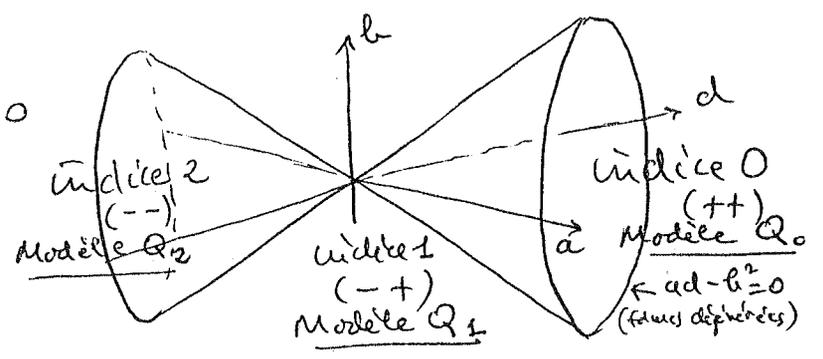
$\forall G \in C^2$ proche de F au voisinage de v ,
 $\exists ! w$ proche de v t.q. $dG(w) = 0$.

Démonstration (dans 1 carte): On applique le th. de fonctions implicites à l'application $(C^2(K, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n, (f, 0)) \xrightarrow{A} (\mathbb{R}^n, 0)$,
 $(g, x) \mapsto \left(\frac{\partial g}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial g}{\partial x_n}(x) \right)$

où K est un voisinage compact de 0 dans \mathbb{R}^n . En effet, $\frac{\partial A}{\partial x}(f, 0) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(0) \right)$ est inversible et $C^2(K, \mathbb{R})$ est un espace de Banach.

Il reste à remarquer que si $d^2G(w)$ est assez proche de $d^2F(v)$, $d^2G(w)$ est non-dépendante et de même indice que $d^2F(v)$.
En effet, les formes quadratiques non-dépendantes d'indice fixé forment un ouvert.

Ex. ($n=2$)
 $\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \quad ad - b^2 \neq 0$



(54)

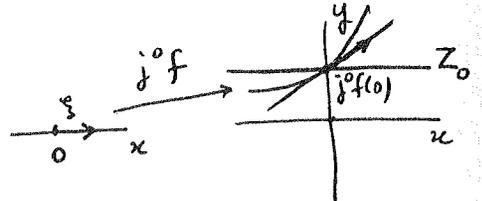
La transversalité à l'origine de la trivialité

(1) germe régulier $(\mathbb{R}^n, 0) \xrightarrow{f} \mathbb{R}$

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow{j^0 f} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \supset Z_0 = \{(x, y), y = f(x)\}$$
$$x \longmapsto (x, f(x))$$

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow{d(j^0 f)(0)} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$$
$$\xi \longmapsto (\xi, df(0)\xi)$$

$$\boxed{j^0 f(\mathbb{R}^n) \pitchfork_{j^0 f(0)} Z_0}$$

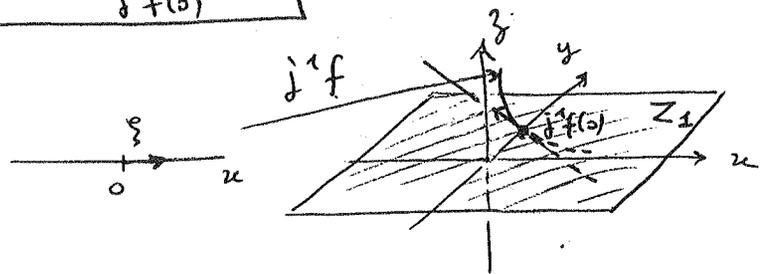


(2) germe de Morse $(\mathbb{R}^n, 0) \xrightarrow{f} \mathbb{R}$

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow{j^1 f} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \supset Z_1 = \{(x, y, z), z = 0\}$$
$$x \longmapsto (x, f(x), \frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x))$$

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow{d(j^1 f)(0)} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$$
$$\xi \longmapsto (\xi, \frac{\partial f}{\partial x_j}(0)\xi, (\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(0))\xi)$$

$$\boxed{j^1 f(\mathbb{R}^n) \pitchfork_{j^1 f(0)} Z_1}$$



Exercice: Faire ceci en termes intrinsèques.

(55)

Les champs de vecteurs comme "dérivations"
de l'algèbre des fonctions C^∞ . Crochet de Lie.
Modèles locaux (flow-box). Intégrabilité (Frobenius).

Rappel (p. 36): dérivée de Lie d'une fonction suivant un champ

$$\left\{ \begin{aligned} L_X f &= \partial_X f = X \cdot f = \langle df, X \rangle = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\varphi_t^* f), \\ \text{où } \varphi_t &\text{ est le flot local de } X \text{ et } \varphi_t^* f = f \circ \varphi_t \text{ est} \\ &\text{l'image réciproque de la fonction (= 0-forme diff.) } f. \end{aligned} \right.$$

L'ensemble $C^\infty(V, \mathbb{R})$ des fonctions C^∞ sur V est
une \mathbb{R} -algèbre: c'est un \mathbb{R} e.v. $(\lambda f + \mu g)(v) = \lambda f(v) + \mu g(v)$,
muni d'un produit associatif et commutatif $(fg)(v) = f(v)g(v)$,
compatible avec la structure d'e.v. $(f+g)h = fh + gh$ etc...

Dérivation: $D: A \rightarrow A$ est une dérivation de la
 \mathbb{R} -algèbre A si D est une opération linéaire t.-s.,
 $D(fg) = (Df) \cdot g + f \cdot (Dg)$.

* Proposition: $X^\infty(V) = \left\{ \begin{array}{l} \text{champs de} \\ \text{vecteurs } C^\infty \\ \text{sur } V \end{array} \right\} \longrightarrow \text{Der}(C^\infty(V, \mathbb{R}))$
 $X \longmapsto L_X$
est un isomorphisme linéaire.

Dém.: Que L_X soit une dérivation se voit sur l'une
quelconque des dérivées ou dans une carte locale.

L'injectivité est claire dans une carte locale
Par la surjectivité, on commence par montrer que
 $(Df)(v)$ ne dépend que du jet de f en v puis on raisonne
dans une carte en utilisant la formule de Taylor avec reste exact.

56

Crochet :

$$\begin{array}{ccc}
 X & \longmapsto & L_X \\
 Y & \longmapsto & L_Y \\
 [X, Y] & \longmapsto & L_X L_Y - L_Y L_X = [L_X, L_Y]
 \end{array}$$

exacte: un commutateur de dérivées est une dérivée

Autrement dit, $[X, Y]$ est défini par

$$\forall f, \quad L_{[X, Y]} f = L_X L_Y f - L_Y L_X f$$

On en déduit qu'en coordonnées locales,

$$[X, Y] = \sum_{i=1}^n Z_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad \text{où } Z_i = \sum_{j=1}^n (X_j \frac{\partial Y_i}{\partial x_j} - Y_j \frac{\partial X_i}{\partial x_j}).$$

Propriétés : $[X, Y] = -[Y, X]$ et $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$ (Jacobi).
 on dit que le crochet définit une structure d'algèbre de Lie sur $X^\infty(V)$.

Naturalité : si $\varphi : V \rightarrow W$ est un difféomorphisme, $\varphi_* [X, Y] = [\varphi_* X, \varphi_* Y]$ (utilisez l'ex. en haut de la page)

$$\mathbb{Z} \quad [fX, gY] = fg[X, Y] + f(L_X g)Y - g(L_Y f)X,$$

donc

$$1) \quad X(v) = 0 \not\Rightarrow [X, Y](v) = 0;$$

$$2) \quad [X, Y] = 0 \not\Rightarrow [fX, gY] = 0 !$$

Dérivée de Lie :

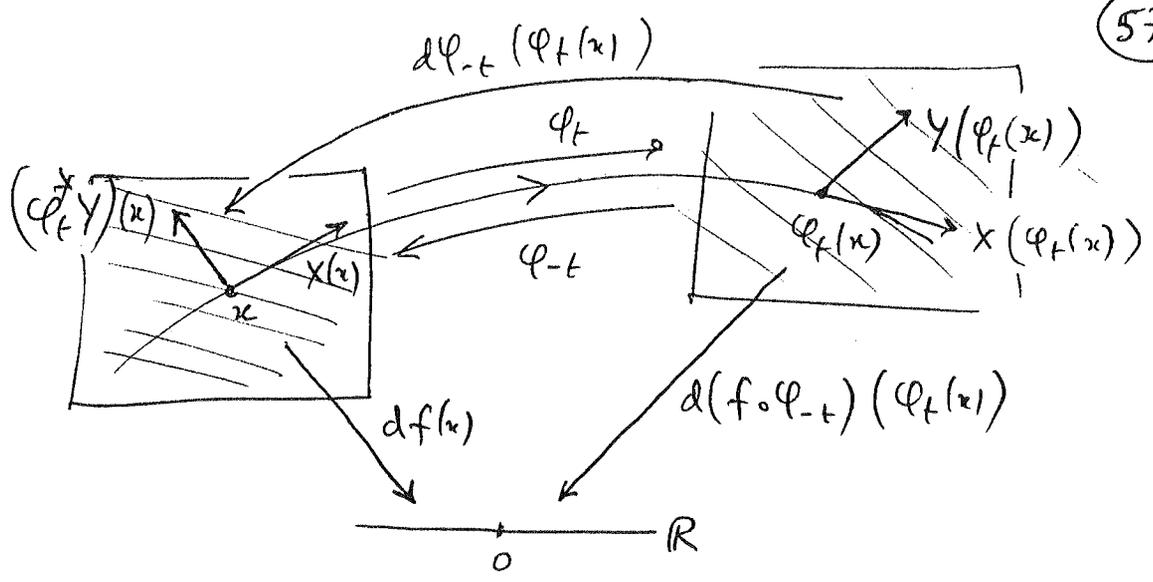
$$X \rightsquigarrow \text{fld local } \varphi_t$$

Y

$$L_X Y = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\varphi_t^* Y), \quad \text{où}$$

$$\varphi_t^* Y = (\varphi_{-t})_* Y, \quad \text{c'est-à-dire}$$

$$(\varphi_t^* Y)(x) = d\varphi_{-t}(\varphi_t(x)) Y(\varphi_t(x)) \quad (\text{figure})$$



Proposition: $L_X Y = [X, Y]$

Démonstration:

$$L_{L_X Y} f = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (L_{\varphi_t^* Y} f)$$

mais

$$\begin{aligned} L_{\varphi_t^* Y} f &= \langle df, (d\varphi_{-t} \circ \varphi_t) \cdot Y \circ \varphi_t \rangle \\ &\stackrel{(t=0)}{=} \langle d(f \circ \varphi_{-t}) \circ \varphi_t, Y \circ \varphi_t \rangle \\ &= \langle d(f \circ \varphi_{-t}), Y \rangle \circ \varphi_t \\ &= (L_Y (f \circ \varphi_{-t})) \circ \varphi_t ; \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} L_{L_X Y} f &= \left(\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} L_Y (f \circ \varphi_{-t}) \right) \circ \varphi_0 + \left(d(L_Y (f \circ \varphi_0)) \right) \circ \varphi_0 \cdot \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \varphi_t \\ &= L_Y L_X f + L_X L_Y f \\ &= (-L_Y L_X + L_X L_Y) \cdot f. \quad \text{c q f d} \end{aligned}$$

58

On dit encore que X et Y commutent

Théorème : $[X, Y] = 0 \iff$ les flots de X et Y commutent

i.e. si $X \rightsquigarrow$ flot local φ_t
 $Y \rightsquigarrow$ ——— ψ_s ,

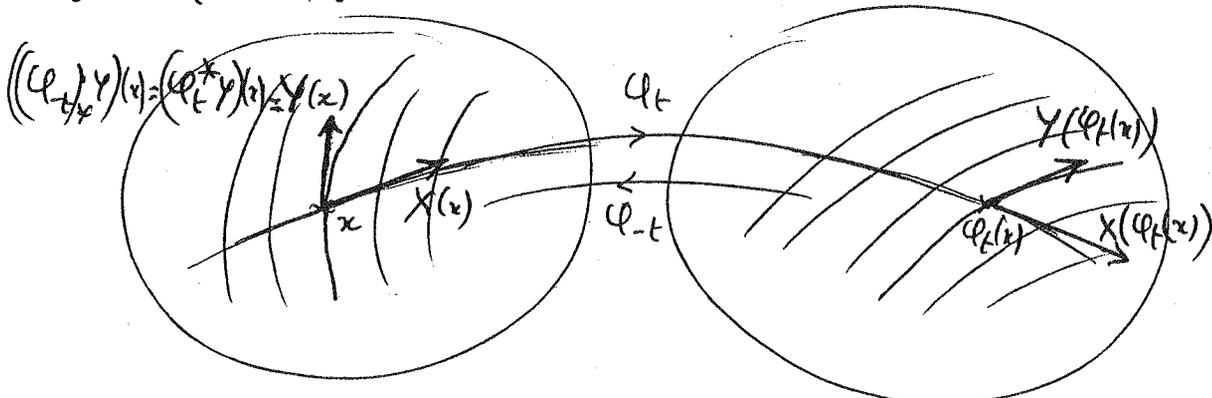
alors on a en tout au a $\varphi_t \circ \psi_s = \psi_s \circ \varphi_t$.

Démonstration : On commence par calculer $\frac{d}{dt}(\varphi_t^* Y)$ en un point t quelconque. Puisque φ_t est un groupe local à 1 paramètre ($\varphi_{t+t_0} = \varphi_{t_0} \circ \varphi_t = \varphi_t \circ \varphi_{t_0}$),

on a $\boxed{\frac{d}{dt} \Big|_{t=t_0} (\varphi_t^* Y) = \varphi_{t_0}^* \frac{d}{dt} \Big|_{t=t_0} (\varphi_t^* Y)}$

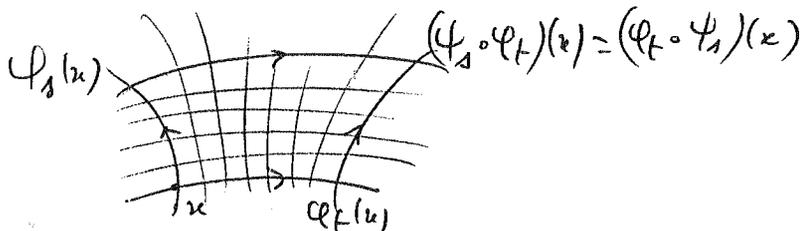
Donc $[X, Y] = 0 \iff \varphi_t^* Y$ indep. de t (donc $= Y$)

Malgras, malgras, ceci équivaut à la commutation de φ_t et ψ_s car



φ_{-t} envoie Y sur Y , donc envoie ψ_s sur ψ_s , i.e.

$\varphi_{-t}(\psi_s(x)) = \psi_s(\varphi_{-t}(x))$ c q f d.



Modèle de k champs indépendants qui commutent
(Théorème de flow, box):

X_1, \dots, X_k linéairement indépendants en
un point v (et donc également au voisinage)

$$[X_i, X_j] = 0 \quad \text{quels que soient } i \text{ et } j.$$

Alors \exists carte locale dans laquelle X_i est
représenté par $\frac{\partial}{\partial x_i}$ ($i=1, \dots, k$).

Démonstration: $X_i \rightarrow$ flot local φ_t^i

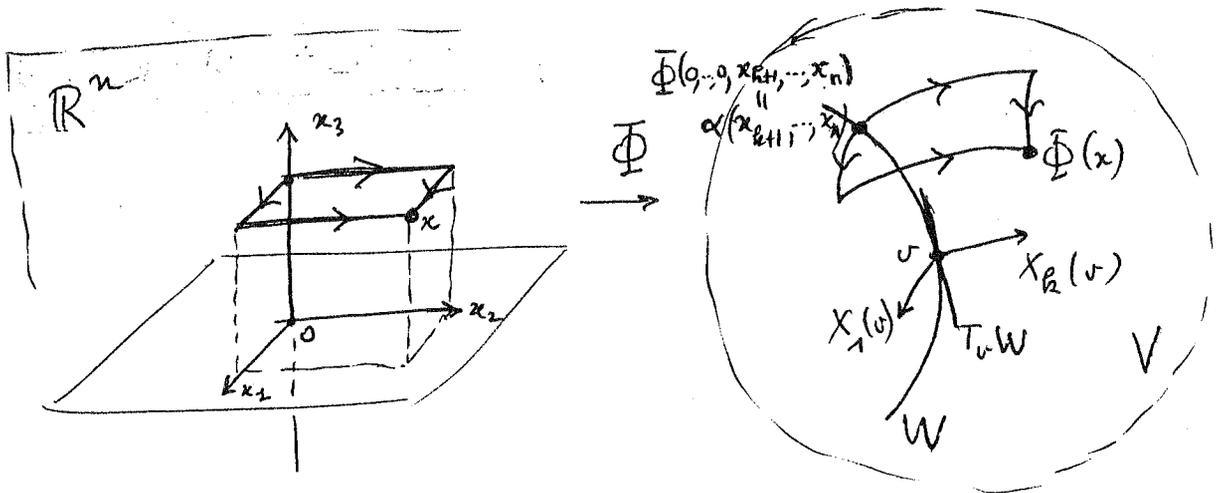
On définit $\Phi: (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (V, v)$ par

$$\Phi(x_1, \dots, x_n) = \varphi_{x_1}^1 \circ \varphi_{x_2}^2 \circ \dots \circ \varphi_{x_k}^k \circ \alpha(x_{k+1}, \dots, x_n),$$

où $\alpha: \mathbb{R}^{n-k}, 0 \rightarrow W, v$ est une carte locale de W , pour une v de V de dimension $n-k$.

On vérifie que Φ est une carte locale au
voisinage de v dès que $T_v W$ et les $X_i(v)$ engendrent $T_v V$; de plus

$$\forall i=1, \dots, k, \quad \Phi_* \frac{\partial}{\partial x_i} = X_i.$$



(60)

Le théorème de Frobenius

Soient $X_1, \dots, X_k \in \mathcal{X}^\infty(V)$ k champs de vecteurs sur (tangents à) V .

Soit $\Pi(v)$ le sous e.v. de $T_v V$ engendré par $X_1(v), \dots, X_k(v)$. On dira que $\Pi(v)$ est un champ C^∞ de sous e.v. sur (tangents à) V .

Si les vecteurs $X_1(v), \dots, X_k(v) \in T_v V$ sont linéairement indépendants en chaque point v , on parlera de champ C^∞ de k -plans (ou k sous-e.v.).

Exercice pour les curieux : définir le "fibré" en plans tangents $G_k(TV)$ associé au fibré tangent TV par l'atlas (généralisé : voir la remarque importante à la fin de la page 20)

$$G_k(T\Omega_j) = \Omega_j \times G_k(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \Omega_j \times G_k(\mathbb{R}^n) = G_k(T\Omega_j)$$
$$(x_i, \Pi_i) \longmapsto (x_j, \Pi_j)$$

$$n = \dim V, \quad x_j = \varphi_{ji}(x_i), \quad \Pi_j = d\varphi_{ji}(x_i) \Pi_i,$$

où $(\varphi_i : \mathbb{R}^n \supset \Omega_i \rightarrow \mathcal{O}_i \subset V)$ est un atlas C^∞ de V .

Même qu'un champ C^∞ de k -plans tangents à V s'identifie à une section de $G_k(TV)$.

Définition : Une variété intégrale d'un champ Π de sous e.v. tangents à V est une sous-variété W de V qui vérifie

$$\forall v \in W, \quad T_v W \subset \Pi(v).$$

Lemme. Soit Π un champ de sous-e.v. tangents à V engendré par les champs X_1, \dots, X_k .
 Si W est une sous-variété intégrale de Π telle que $\forall v \in W, T_v W = \Pi(v)$, on a nécessairement
 $\forall v \in W, \forall i, j, [X_i, X_j](v) \in \Pi(v)$.

Démonstration 1: on utilise la normalité du corchet (page 56) pour se ramener à une carte locale dans laquelle $W = \mathbb{R}^l \times \{0\} \cap \Omega \subset \Omega \subset \mathbb{R}^n$ et $v=0$. ($l \leq k$ est la dimension de $\Pi(v)$) et on vérifie la conclusion sur la formule explicite du corchet

Démonstration 2: on utilise la définition du corchet par dérivate de Lie en remarquant que les courbes intégrales des champs X_i qui rencontrent W sont contenues dans W (unicité). Tout le calcul se fait dans W .

Ce lemme admet une réciproque. En voici la forme la plus simple dans laquelle on suppose les champs de vecteurs indépendants en chaque point :

Théorème de Frobenius: Si les k champs de vecteurs $X_1, \dots, X_k \in X^\infty(V)$ engendrent un champ Π de k -plans tangent à V et vérifient
 $\forall i, j, \forall v \in V, [X_i, X_j](v) \in \Pi(v)$,
 il passe par chaque point v de V une (unique) variété intégrale de dimension k de Π .

Démonstration : le problème étant local, on se place dans une carte locale dans laquelle (on garde la même notation pour un objet et son représentant)

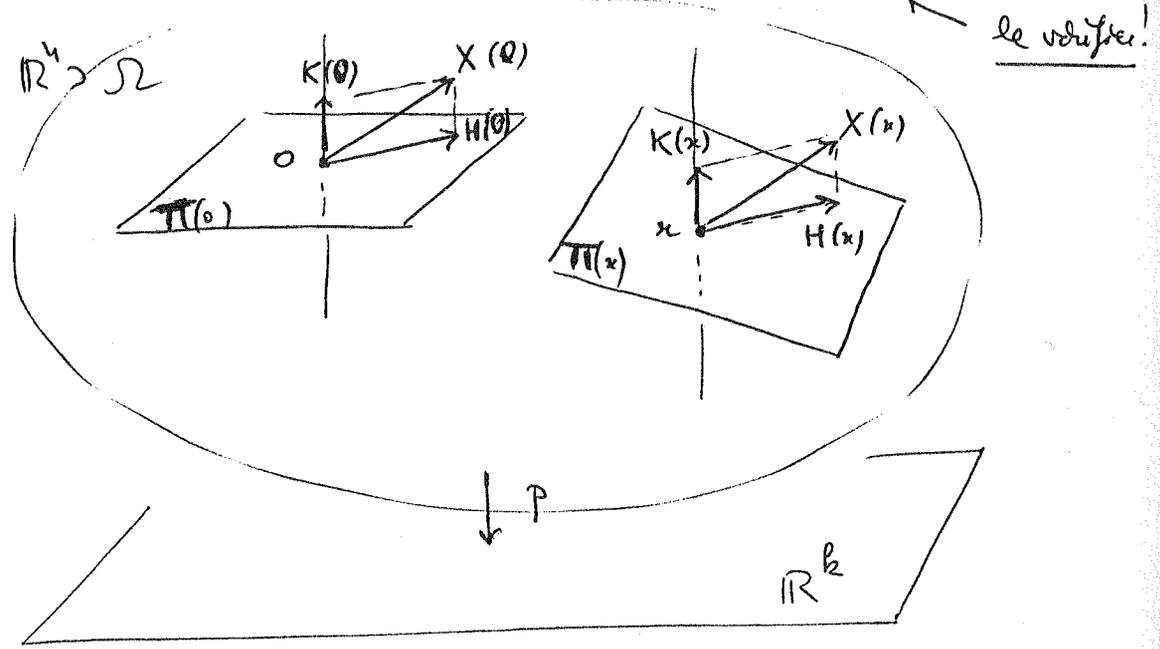
$$\Pi(0) = \mathbb{R}^k \times \{0\} \subset \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{u-k} = \mathbb{R}^u = T_0 \Omega$$

Si x est assez voisin de 0 , la restriction à $\Pi(x) \subset T_x \Omega = \mathbb{R}^u$ de la projection canonique de $\mathbb{R}^u = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{u-k}$ sur premier facteur \mathbb{R}^k est de rang maximum, i.e. $\Pi(x)$ est le graphe d'une application linéaire de \mathbb{R}^k dans \mathbb{R}^{u-k}

Chaque champ de vecteurs X tangent à Ω s'écrit donc de façon unique au voisinage de 0

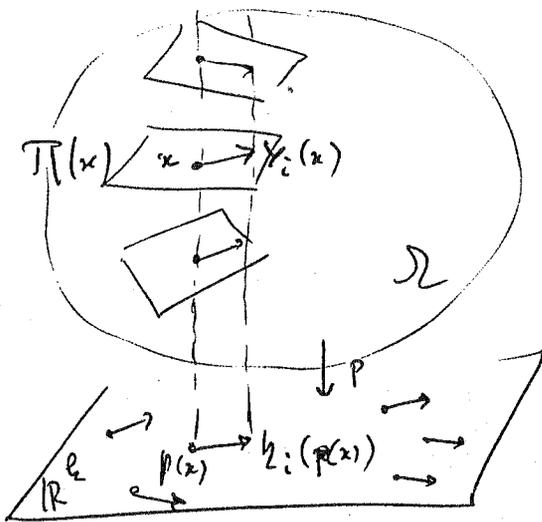
$$X = H + K, \quad H(x) \in \Pi(x), \quad K(x) \in \mathbb{R}^{k-n},$$

avec H et K champs de vecteurs C^∞ au voisinage de 0



Idée : on va montrer que l'hypothèse de théorème permet de trouver d'autres générateurs Y_1, \dots, Y_k de Π qui commutent ! Il suffira alors d'appliquer le théorème de flux, voir p. 59 pour conclure.

On construit les Y_i de façon à ce qu'ils aient une image directe par la projection $p: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$, et ce bien que cette projection ne soit pas injective: il suffit de se donner des champs C^∞ h_i sur \mathbb{R}^k et de poser

$$Y_i(x) = \text{!} \text{ l'élément de } \mathbb{T}(x) \text{ tel que } dp(x)Y_i(x) = h_i(p(x)).$$


Notons que, si les $h_i(p(x))$ sont indépendants, il en est de même des $Y_i(x)$.

De plus, les crochets

$$[Y_i, Y_j] = \sum_{\alpha=1}^n z_{\alpha}^{ij} \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}}$$

vérifient

$$dp(x)[Y_i, Y_j](x) = (z_1^{ij}(x), \dots, z_k^{ij}(x)) = [h_i, h_j](p(x))$$

(Exercice sur la formule explicite ou, plus conceptuellement sur le fait que les h_i sont les images directes par p des Y_i).

Si on choisit les h_i commutant Z à Z , par exemple $h_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$, $i=1, \dots, k$, les $[Y_i, Y_j](x)$ sont "vanilleux" (i.e. dans le noyau de $dp(x)$).

Mais, du fait que les X_i sont C^∞ et engendrent en chaque point x le plan $\mathbb{T}(x)$, on déduit l'existence de fonctions $a_{ij} \in C^\infty$ telles que $\forall i, j, Y_i = \sum a_{ij} X_j$ (au voisinage de 0).

En particulier, l'hypothèse nulle (via les formules du milieu de la p. 56) que $\forall i, j, [Y_i, Y_j](x) \in \mathbb{T}(x)$.

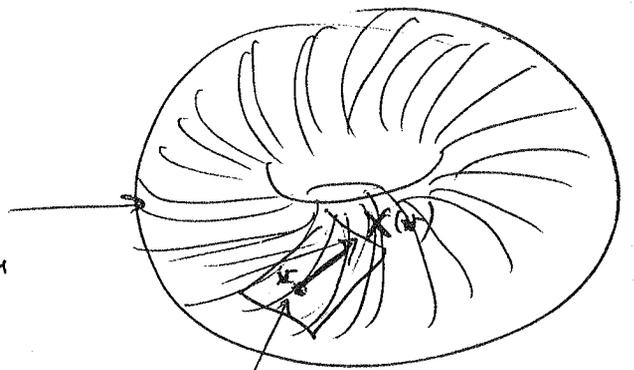
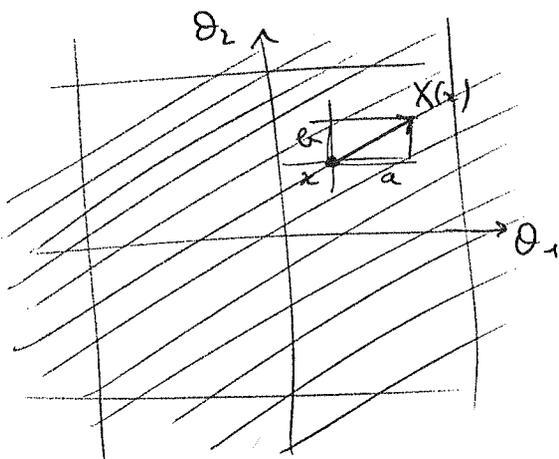
On en déduit que $[Y_i, Y_j](x) \in (\ker dp(x)) \cap \mathbb{T}(x) = \{0\}$, i.e. que \mathbb{T} est engendré par le champ qui commutent. c.f.d.

Remarque 1. On a démontré plus : dans le modèle donné par le théorème des flow-box, les variétés intégrales sont les k -plans affines parallèles à $\mathbb{R}^k \times \{0\}$, c'est-à-dire les variétés de niveau de la submersion $p_k : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n-k}$
 $x \longmapsto (x_{k+1}, \dots, x_n)$

On dit alors que l'ensemble des variétés intégrales forme un feuilletage de V . Globalement, la situation peut être très complexe, les "feuilles" (variétés intégrales globales) peuvent revêtir dans un voisinage arbitrairement petit d'elles-mêmes une infinité de fois. C'est le phénomène de la résonance, déjà rencontré à propos des "dents de scie" dans le tore (page 25) :

$$V = T^2 = \mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2, \quad k=1, \quad X(\theta_1, \theta_2) = (a, b),$$

$$\frac{b}{a} \notin \mathbb{Q}.$$



(Chaque courbe intégrale est dense).

Remarque 2. Lorsque $k=1$, le th. d'∃ de variétés intégrales inclut le cas où dim $\Pi(x)$ n'est pas constant (singularités). De tels exemples existent également lorsque $k > 1$, mais de nombreux exemples également.

La "structure de contact" de $J^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$
comme modèle d'un champ d'hyperplans non-intégrable

Rappel (cf p. 41)

$$J^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^{2n+1}$$
$$(x, y, z)$$

$$P_1 \downarrow \uparrow j^1 f \quad f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \quad P_1(x, y, z) = x$$
$$\mathbb{R}^n \quad j^1 f(x) = (x, f(x), \frac{\partial f}{\partial x}(x))$$

Π_n est le champ d'hyperplans sur $J^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{2n+1}$
défini par $\Pi_n(x, y, z) = \text{Ker } \alpha(x, y, z) \subset T_{(x, y, z)} \mathbb{R}^{2n+1}$,

où α est la 1-forme

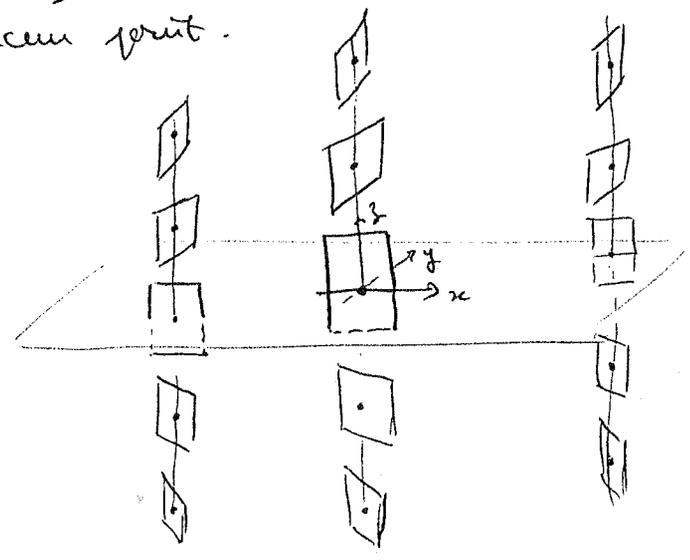
$$\alpha = dy - \sum_{i=1}^n z_i dx_i$$

(si $n=1$, $\alpha=0$ est une manière sophistiquée
d'écrire $z = \frac{dy}{dx}$).

Exercice : 1) on peut engendrer Π_n par les $2n$ champs
de vecteurs $[0, 0, (0, p, 1, 0, \dots, 0)]$ et $[(0, 0, 1, 0, \dots, 0), z_i, 0]$,

2) Montrer que Π_n n'est intégrable au voisinage
d'aucun point.

$n=1$



66

Propriété fondamentale

Quelle que soit $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, l'image $(j^1 f)(\mathbb{R}^n)$ est une sous-variété intégrale (de dim. n) de Π .
(On peut montrer qu'il n'y a pas de sous-variété intégrale de dimension supérieure à n).

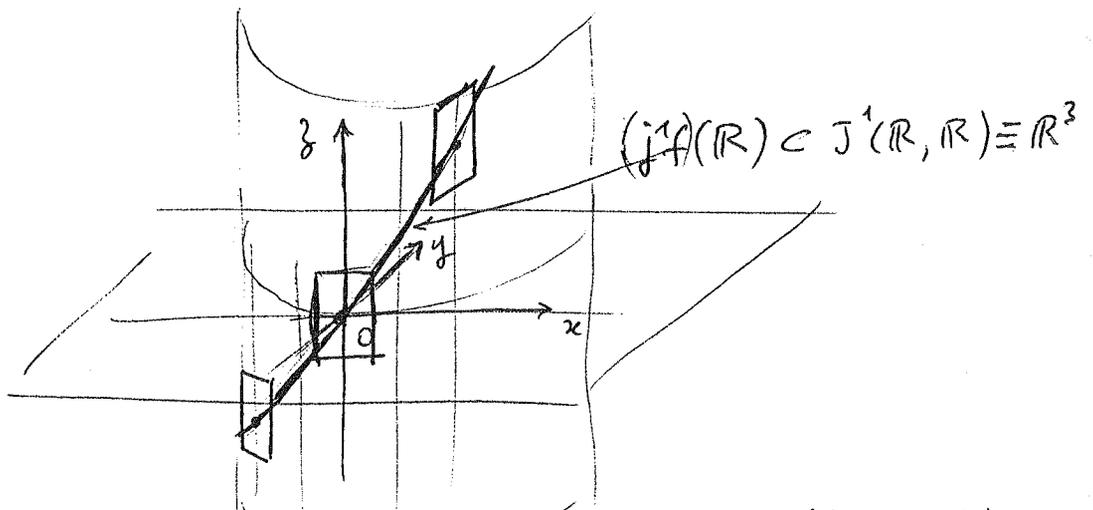
Démonstration: l'affirmation équivaut (exercice) à

$$(j^1 f)^* \alpha \equiv 0. \quad \text{mais}$$

$$(j^1 f)^* \alpha = df(x) - \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) dx_i \equiv 0. \quad \text{c.q.f.d.}$$

Exemple: $n=1$, $f(x) = x^2$ (comparez à la p. 54)

$$j^1 f(x) = (x, x^2, 2x).$$



Remarque: Si Π était intégrable, il existerait au voisinage de chaque point (x_0, y_0, z_0) une sous-variété $F: (J^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}), (x_0, y_0, z_0)) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ (voir p. 64) telle que $\forall f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \in C^\infty$ t.q. $(j^1 f)(x_0) = (x_0, y_0, z_0)$, on ait $F \circ j^1 f \equiv \text{cte}$ (dépend de f) i.e. $F(x, f(x), \frac{\partial f}{\partial x}(x)) \equiv \text{cte}$.
 F serait donc une opération aux dérivées généralisée d'ordre 1

(p. 41) universellement vérifiée (à une constante près si on permet d'ajouter une constante supplémentaire). C'est comme les formules de 18 mètres, si ça existait, ça se saurait !!!

Solution générale d'une edp d'ordre 1 :
l'exemple de l'équation de Burgers

Au début, on cherche $u(x, t)$ telle que

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0 & \text{(équation de Burgers)} \\ u(x, 0) = f(x) \text{ donnée.} \end{cases}$$

Lemme Une solution u est nécessairement égale à la constante $f(x_0)$ le long de la droite $x = x_0 + f(x_0)t$.

Démonstration Posons $\sigma(t) = u(x_0 + f(x_0)t, t)$.

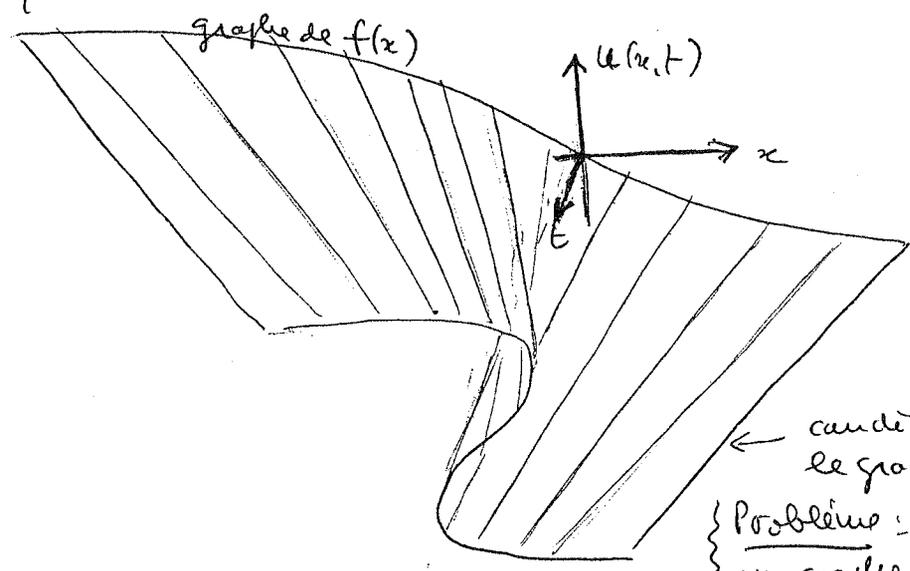
Il vient $\sigma'(t) = f(x_0) \cdot \frac{\partial u}{\partial x}(x_0 + f(x_0)t, t) + \frac{\partial u}{\partial t}(\text{---})$,

et en soustrayant $0 = \sigma(t) \frac{\partial u}{\partial x}(\text{---}) + \frac{\partial u}{\partial t}(\text{---})$,

$\sigma(t)$ vérifie $\sigma'(t) = (f(x_0) - \sigma(t)) \tau(t)$ et $\sigma(0) = f(x_0)$,

où $\tau(t) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0 + f(x_0)t, t)$.

Une solution est évidemment $\sigma(t) \equiv f(x_0)$. On conclut par l'unicité des solutions d'équations différentielles.



← candidat à être le graphe de u
 { Problème : ce n'est pas un graphe en général !! ("fronce").

On obtient donc le graphe de $u(x, t)$ comme réunion des droites horizontales de \mathbb{R}^3 menées à partir de chaque point $(x, f(x))$ du graphe de f (dans $t=0$) avec la pente $f'(x)$.
 MAIS EN GÉNÉRAL CE N'EST PAS UN GRAPHE !!

C'est cependant une sous-variété de \mathbb{R}^3 , image de \mathbb{R}^2 par l'immersion :

$$(\xi, t) \mapsto (\xi + f(\xi)t, t, f(\xi))$$

Pour obtenir une fonction $u(x, t)$ qui soit une solution globale (c'est-à-dire pour t assez grand), il faut accepter des débranchures (des choses) : le graphe d'une telle solution sera contenu dans la sous-variété ci-dessus.

Considérons maintenant l'équation

$$(*) \quad \begin{cases} \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 = 0, \\ S(x, 0) = F(x) \text{ donnée.} \end{cases}$$

Si $f(x) = F'(x)$, * Exercice : \mathcal{J} l'image V de \mathbb{R}^2 par l'immersion

$$(\xi, t) \xrightarrow{A} (\xi + f(\xi)t, t, F(\xi) + \frac{1}{2} f(\xi)^2 t, f(\xi), -\frac{1}{2} f(\xi)^2)$$

est une solution géométrique de (*). Cela signifie que

- 1) V est une sous-variété intégrale du champ $\overline{\Pi}_2$ canoniquement défini (p. 65) sur $\mathcal{J}^1(\mathbb{R}^1, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^5$ (coordonnées x, t, y, X, T).
- 2) V est contenue dans l'hypersurface d'équation $T + \frac{1}{2} X^2 = 0$.

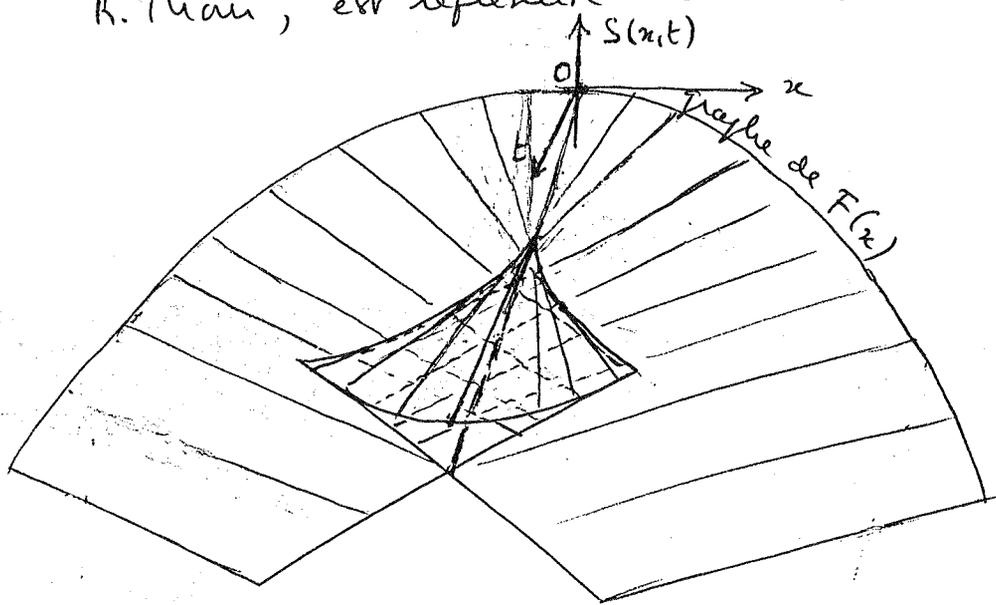
Indication : $u = \frac{\partial S}{\partial x}$ est solution de l'équation de Burgers

$$\text{et } \frac{d}{dt} [S(\xi + f(\xi)t, t)] = \frac{1}{2} f(\xi)^2.$$

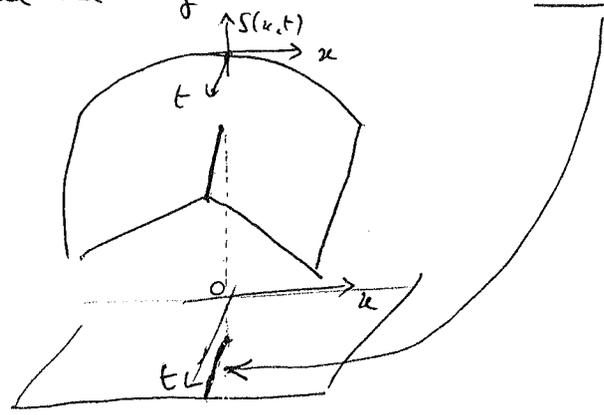
On peut aussi calculer $A^*(dy - Xdx - Tdt) = 0$.

La seule chose qui manque à V pour être de la forme $(j^1 S)(\mathbb{R}^2)$ pour une solution S de $(*)$, est l'injectivité de sa projection sur \mathbb{R}^2 (coord. x, t).

On peut considérer V comme le jet d'ordre 1 d'une fonction S multivaluée dans le graphe, une "feuille d'arête" dans la terminologie de A. Thom, est représentée ci-dessous :



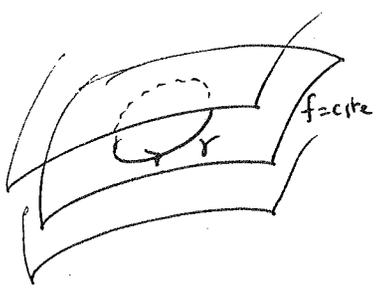
En enlevant la queue, on obtient ^{le graphe d'} une solution (uniforme) partout continue, dont la dérivée $u = \frac{\partial S}{\partial x}$ est discontinue le long d'une courbe de choc.



70

Une autre démonstration de la non-intégrabilité
du champ Π_1 sur $J^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

On intègre la 1-forme $\alpha = dy - z dx$ sur
un lacet contenu dans une feuilletée surface intégrale:



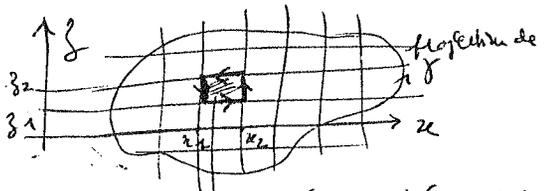
localement, $\Pi_1 = \text{Ker } \alpha = \text{Ker } df$,
où les variétés intégrales sont les $f = \text{cste}$,
d'où $\alpha = g df$ et
 $\int_\gamma \alpha = \int_\gamma g df = 0$.

Explication: Si $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ est un paramétrage de γ ,
on définit $\int_\gamma \alpha = \int_{[a, b]} \varphi^* \alpha = \int_a^b a(t) dt$, où $\varphi^* \alpha = a(t) dt$.

La formule du changement de variable montre que le
résultat ne dépend pas du paramétrage choisi, pourvu qu'il
soit admissible de γ . Plus tard, on démontrera l'intégrabilité
d'une 2-forme différentielle sur une variété orientée de dimension 2.

D'autre part, $\int_\gamma (dy - z dx) = \int_\gamma dy - \int_\gamma z dx = - \int_\gamma z dx$
est l'aire algébrique de la projection de γ sur le plan (y, x) .
Or une surface intégrale a pour plan tangent le noyau de α ;
elle se projette donc avec rang maximum sur le plan (x, y) .
Si γ est fermé dans cette surface, l'aire de cette projection
ne peut être nulle, d'où une contradiction.

Dém. intuitive qui découle d'une conséquence de la
formule de Stokes après
qu'on aura défini le bord
de α .



$$\begin{aligned} \text{aire} &= (z_2 - z_1)(x_2 - x_1) \\ &= z_2(x_2 - x_1) + 0 - z_1(x_2 - x_1) + 0 = - \int z dx. \end{aligned}$$

Formes différentielles

1) Algèbre extérieure:

E e.v. de dimension n sur \mathbb{R}

$$\Lambda^p E^* = \{ f: \underbrace{E \times \dots \times E}_{p \text{ facteurs}} \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ p-linéaire alternée} \}$$

i.e. $f \in \Lambda^p E^*$ ssi

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall X_1, \dots, X_{i-1}, X_{i+1}, \dots, X_p, \quad X_i \mapsto f(X_1, \dots, X_p) \text{ est linéaire,} \\ \forall \sigma \in \mathfrak{S}_p, \quad f(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(p)}) = \underbrace{\varepsilon(\sigma)}_{\substack{\text{signature} \\ \text{de } \sigma}} f(X_1, \dots, X_p). \end{array} \right.$$

↑
ce det est la
p-forme extérieure

Si $\{e_1, \dots, e_n\}$ est une base de E ,

$$X_i = \sum_{j=1}^n X_i^j e_j,$$

$$\begin{aligned} f(X_1, \dots, X_p) &= \sum_{1 \leq j_1, \dots, j_p \leq n} X_1^{j_1} \dots X_p^{j_p} f(e_{j_1}, \dots, e_{j_p}) \\ &= \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_p \leq n} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_p} X_1^{\sigma(j_1)} \dots X_p^{\sigma(j_p)} f(e_{\sigma(j_1)}, \dots, e_{\sigma(j_p)}) \\ &= \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_p \leq n} \det \begin{vmatrix} X_1^{j_1} & \dots & X_1^{j_p} \\ \vdots & & \vdots \\ X_p^{j_1} & \dots & X_p^{j_p} \end{vmatrix} f(e_{j_1}, \dots, e_{j_p}) \\ &= \frac{1}{p!} \sum_{1 \leq j_1, \dots, j_p \leq n} \det \begin{vmatrix} X_1^{j_1} & \dots & X_p^{j_1} \\ \vdots & & \vdots \\ X_p^{j_1} & \dots & X_p^{j_p} \end{vmatrix} f(e_{j_1}, \dots, e_{j_p}) \end{aligned}$$

Une fois E identifiée à \mathbb{R}^n par le choix d'une base, une p-forme extérieure a donc une interprétation unique comme combinaison linéaire des volumes euclidiens orientés des parallélépipèdes engendrés par les projections de X_1, \dots, X_p sur les C_n^p p-plans de coordonnées.

Définition Le produit extérieur des 1-formes linéaires

$l_1, \dots, l_p \in \Lambda^1 E^* = E^*$ est la p -forme $l_1 \wedge \dots \wedge l_p$ définie par

$$(l_1 \wedge \dots \wedge l_p)(X_1, \dots, X_p) = \det \begin{pmatrix} l_1(X_1) & \dots & l_1(X_p) \\ \dots & \dots & \dots \\ l_p(X_1) & \dots & l_p(X_p) \end{pmatrix}$$

Le calcul de la $p \times p$ matrice que, si $\{e_1^*, \dots, e_n^*\}$ est la base de $\{e_1, \dots, e_n\}$, les C_n^p formes

$$e_{j_1}^* \wedge \dots \wedge e_{j_p}^*, \quad 1 \leq j_1 < \dots < j_p \leq n,$$

forment une base de $\Lambda^p E^*$.

Exercice Montrer qu'il existe une unique opération

$$\Lambda^p E^* \times \Lambda^q E^* \xrightarrow{\wedge} \Lambda^{p+q} E^*$$

le produit extérieur d'une p -forme et d'une q -forme, qui possède les propriétés suivantes :

- $(\omega_1 \wedge \omega_2) \wedge \omega_3 = \omega_1 \wedge (\omega_2 \wedge \omega_3)$ (associativité)
- $\omega_1 \wedge \omega_2 = (-1)^{pq} \omega_2 \wedge \omega_1$ si $\begin{pmatrix} \omega_1 & \text{est une } p\text{-forme} \\ \omega_2 & \text{est une } q\text{-forme} \end{pmatrix}$
- $(\lambda \omega_1 + \lambda_2 \omega_2) \wedge \omega_3 = \lambda_1 \omega_1 \wedge \omega_3 + \lambda_2 \omega_2 \wedge \omega_3$ (distributivité)
- $(l_1 \wedge \dots \wedge l_p) \wedge (l_{p+1} \wedge \dots \wedge l_{p+q}) = l_1 \wedge \dots \wedge l_{p+q}$
 \wedge au sens défini par les 1-formes

Vérifier que

$$\begin{aligned} (\alpha \wedge \omega)(X_1, \dots, X_{p+q}) &= \sum_{\substack{\sigma \in \mathfrak{S}_{p+q} \\ \sigma(1) < \dots < \sigma(p) \\ \sigma(p+1) < \dots < \sigma(p+q)}} \varepsilon(\sigma) \alpha(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(p)}) \omega(X_{\sigma(p+1)}, \dots, X_{\sigma(p+q)}) \\ \text{"(p,q)-ballages"} &\rightarrow \\ &= \frac{1}{p! q!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{p+q}} \varepsilon(\sigma) \alpha(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(p)}) \omega(X_{\sigma(p+1)}, \dots, X_{\sigma(p+q)}) \end{aligned}$$

Orientations d'un ev. sur \mathbb{R}

Si $\dim E = n$, $\dim \Lambda^n E^* = 1$.

Déf : Orienter E , c'est choisir $\Lambda^n E^*$, i.e. choisir l'une des deux composantes connexes de $\Lambda^n E^* \setminus \{0\}$ (que l'on appellera positive).

Une base ordonnée $\{e_1, \dots, e_n\}$ est dite positive (ou orientée positivement) si $e_1^* \wedge \dots \wedge e_n^* > 0$. Cela revient à dire que $\forall \omega \in \Lambda^n E^* \setminus \{0\}$ positive, $\omega(e_1, \dots, e_n) > 0$.

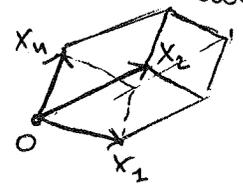
Si $\{e_1, \dots, e_n\}$ et $\{e'_1, \dots, e'_n\}$ sont deux bases,

$e'_i = \sum \xi_{ij} e_j$, on a $\omega(e'_1, \dots, e'_n) = \det \begin{pmatrix} \xi_{11} & \dots & \xi_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \xi_{n1} & \dots & \xi_{nn} \end{pmatrix} \omega(e_1, \dots, e_n)$

Deux bases ont donc la même orientation si et seulement si le déterminant de la matrice de changement de base est > 0 .

Choisir un isomorphisme $\varphi : \mathbb{R} \xrightarrow{\cong} \Lambda^n E^*$,

i.e. une base $\sigma = \varphi(1)$ de $\Lambda^n E^*$, c'est choisir une mesure orientée des volumes des parallélépipèdes :



$(x_1, \dots, x_n) \mapsto \sigma(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}$.

Une fois choisie une telle mesure, on peut mettre en dualité les espaces vectoriels $\Lambda^p E^*$ et $\Lambda^{n-p} E^*$ par le produit extérieur : $\Lambda^p E^* \times \Lambda^{n-p} E^* \rightarrow \Lambda^n E^* \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}$.

Exercice : c'est bien une dualité (non dégénérée).

(74)

Exemple. le choix d'une mesure de volume ω des volumes équivale $\Lambda^{n-1} E^*$ à $E^{**} \cong E$.

Chaque $(n-1)$ -forme extérieure s'écrit

$$(X_2, \dots, X_n) \mapsto \omega(X, X_2, \dots, X_n), \text{ où}$$

X est un élément de E . On note $i_X \omega$ cette forme et on l'appelle "produit intérieur" de ω et X , ou "flux" de X à travers l'hyperplan engendré par X_2, \dots, X_n .

Notons que le produit intérieur d'une p -forme par un vecteur peut être défini quel que soit $p \geq 1$. Le résultat est une $(p-1)$ -forme.

2) Formes différentielles C^∞ sur un ouvert Ω de \mathbb{R}^n :

0-forme

$$\Lambda^0(T^*\Omega) \cong \Omega \times \mathbb{R}$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow \uparrow \text{section} & (x, f(x)) & \\ \Omega & \uparrow & x \end{array}$$

$$f: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ fonction } C^\infty;$$

1-forme

$$T^*\Omega \cong \Omega \times (\mathbb{R}^n)^*$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow \uparrow \text{section} & (x, f(x)) & \\ \Omega & \uparrow & x \end{array}$$

$$f: \Omega \rightarrow (\mathbb{R}^n)^*, \text{ fonction } C^\infty, \quad f(x) = \sum_{j=1}^n a_j(x) dx_j$$

[voir page 27:]
[$\forall x, dx_j(x) = e_j^*$]

p-forme

$$\Lambda^p(T^*\Omega) \cong \Omega \times \Lambda^p(\mathbb{R}^n)^*$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow \uparrow \text{section} & (x, f(x)) & \\ \Omega & \uparrow & x \end{array}$$

$$f: \Omega \rightarrow \Lambda^p(\mathbb{R}^n)^*,$$

$$f(x) = \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_p \leq n} a_{j_1 \dots j_p}(x) dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_p}$$

fonction C^∞

(76)

3) p -formes différentielles sur une variété V
(comparer à la p. 29)

Une p -forme ω sur V est la donnée d'une collection $(\omega^i)_{i \in I}$ de p -formes différentielles C^∞ sur les \mathcal{R}_i d'un atlas, images réciproques les uns des autres par les applications φ_{ji} de changement de carte :

$$\omega^i|_{\mathcal{R}_{ij}} = (\varphi_{ji}^*)^* \omega^j|_{\mathcal{R}_{ji}}$$

Exercices: ① Construire à l'aide d'un atlas sur V un "espace fibré" $\Lambda^p T^*V$ dont les p -formes sont les sections C^∞ .

Solution: $\Lambda^p T^* \mathcal{R}_{ij} \equiv \mathcal{R}_{ij} \times \Lambda^p(\mathbb{R}^n)^*$ \rightarrow $\mathcal{R}_{ji} \times \Lambda^p(\mathbb{R}^n)^* \equiv \Lambda^p T^* \mathcal{R}_{ji}$
 $(x_i, f_i) \mapsto (x_j, f_j)$

$$x_j = \varphi_{ji}(x_i), \quad f_j(\xi_1, \dots, \xi_p) = f_i(d\varphi_{ji}^{-1}(x_j)\xi_1, \dots, d\varphi_{ji}^{-1}(x_j)\xi_p)$$

② Définir une p -forme différentielle sur V

comme une application

$$\begin{aligned} \mathcal{X}^\infty(V)^p &\longrightarrow C^\infty(V, \mathbb{R}) \\ (X_1, \dots, X_p) &\longmapsto \omega(X_1, \dots, X_p) \end{aligned}$$

associant à p champs de vecteurs sur V une fonction C^∞ sur V de façon $C^\infty(V, \mathbb{R})$ p -linéaire et alternée (comparer à la p. 75).

Les opérations \wedge et i_X (X champ de vecteurs sur V) se définissent naturellement (comme à la p. 75).

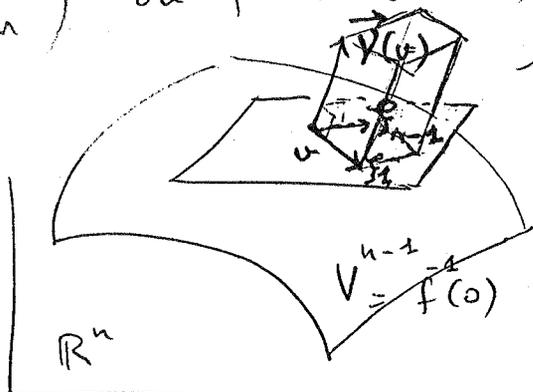
L'image réciproque d'une p. forme ω sur W par une application $C^\infty f: V \rightarrow W$ se définit, comme à la page 75, par la formule

$$(f^* \omega)(v)(\xi_1, \dots, \xi_p) = \omega(f(v))(df(v)\xi_1, \dots, df(v)\xi_p).$$

Exercice : $f^*(\omega_1 \wedge \omega_2) = (f^* \omega_1) \wedge (f^* \omega_2)$.

utiliser l'unité pour n

Un exemple : la "forme de surface" (ou forme d'aire ou forme-volume) d'une hypersurface V de \mathbb{R}^n définie par une submersion $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.



Soit $\vec{V}(v) = (v_1, \dots, v_n)$ la normale unitaire à V telle que $df(v)\vec{V}(v) > 0$ ($\in T_f(v)\mathbb{R} \cong \mathbb{R}$)

\vec{V} peut être définie en chaque point de \mathbb{R}^n (remplacer V par $f^{-1}(f(v))$).

C'est donc un champ de vecteurs C^∞ sur \mathbb{R}^n . On définit $\omega_f = i_{\vec{V}}(dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} v_i dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx}_i \wedge \dots \wedge dx_n$.

Si $\xi_1, \dots, \xi_{n-1} \in T_v V$, $\omega_f(v)(\xi_1, \dots, \xi_{n-1})$ est le volume n -dimensionnel déduit du parallélepède engendré par $(\vec{V}(v), \xi_1, \dots, \xi_{n-1})$, c'est-à-dire le volume $(n-1)$ -dimensionnel du parallélepède engendré par $(\xi_1, \dots, \xi_{n-1})$. Si $n=3$, c'est bien la "forme d'aire" de la surface V^2 . Notons que seule unité $i^* \omega_f = \omega_V$, où $i: V \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ est l'injection canonique, et que celle-ci ne dépend pas du champ \vec{V} en dehors de V .

4) Orientabilité et orientabilité d'une variété (Cours)

Définition 1 Une variété V est orientable si elle possède un atlas dont tous les changements de carte φ_{ji} vérifient $\forall x \in \Omega_{ij}, \det(d\varphi_{ji}(x)) > 0$.

Orienter V , c'est choisir un tel atlas. On peut alors définir sans ambiguïté une orientation de chaque espace tangent $T_x V$ en décidant d'appeler favorite une base de la forme $\{d\varphi_i(x)e_1, \dots, d\varphi_i(x)e_n\}$, où φ_i est une carte de l'atlas telle que $\varphi_i(x) = v$ et $\{e_1, \dots, e_n\}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n \cong T_x \Omega_i$. Toutes ces orientations sont "cohérentes" et "varient continuellement avec v ".

Définition 2 Une variété V est déorientable si elle possède une n -forme différentielle ω partout non nulle (n est la dimension de V).

Orienter V , c'est choisir une classe de telles formes (choisir une telle forme ω , c'est choisir une norme de volume orienté plus précisément).

Équivalence des deux définitions :

$2 \Rightarrow 1$ La donnée de ω permet d'orienter "de façon cohérente" chacun des espaces tangents $T_x V$. On choisit alors un atlas $\tau = \{\varphi_i\}$, $\forall x \in \Omega_i$, $\{d\varphi_i(x)e_1, \dots, d\varphi_i(x)e_n\}$ soit une base favorite de $T_{\varphi_i(x)} V$ où $\{e_1, \dots, e_n\}$ est la base canonique de $T_x \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n$.

$1 \Rightarrow 2$ L'orientation de chacun des $T_x V$ permet de définir une composante connexe privilégiée de $\wedge^n T_x^* V \setminus \{0\} \cong \mathbb{R} \setminus \{0\}$. On en déduit que $\wedge^n T_x^* V \cong V \times \mathbb{R}$, ce qui permet de choisir ω .

Exemple : Une hypersurface V de \mathbb{R}^n définie par une submersion de \mathbb{R}^n (ou d'un voisinage de V) sur \mathbb{R} est naturellement orientée (cf p. 77).

Définition 1 : $f : V^n \rightarrow W^n$ différentiable, préserve l'orientation si $\forall v \in V$, l'image par $df(v)$ d'une base positive de $T_x V$ est une base positive de $T_{f(x)} W$.

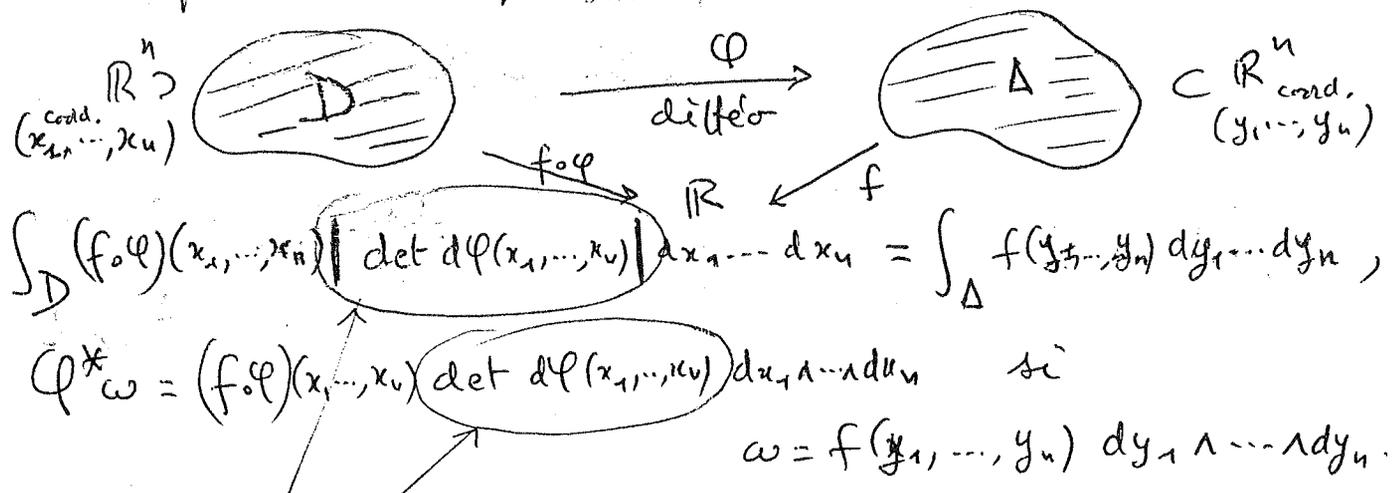
clairement équivalente à

Définition 2 : $f : V^n \rightarrow W^n$ différentiable, préserve l'orientation si f^* (forme d'orientation de W) est une forme d'orientation de V .

Exemple : L'orientation de la sphère S^n conserve l'orientation si et seulement si $(-1)^{n+1} > 0$, c'est-à-dire si n est impair.

5) Intégration d'une n-forme différentielle sur une variété orientée de dimension n.

Comparaons \int formule de change de variables dans les intégrales multiples image réciproque de formes différentielles de degré maximum



C'est la même formule à la valeur absolue près, d'où la nécessité de l'orientation.

Définition 1: Si ω est une n -forme différentielle à support compact dans un ouvert Ω de \mathbb{R}^n ,

$$\omega(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n,$$
 on pose

$$\int_{\Omega} \omega = \int_{\Omega} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n.$$

Définition 2: Si ω est une n -forme différentielle sur V^m orientée, à support compact dans le domaine \mathcal{O} d'une carte $\varphi: \Omega \rightarrow \mathcal{O}$ appartenant à un atlas orienté de V , on pose

$$\int_V \omega = \int_{\Omega} \varphi^* \omega$$

La formule de changement de variables dans les intégrales multiples rappelle p. 79 mentionner que le résultat ne dépend pas du choix de la carte φ pourvu qu'elle appartienne à l'atlas orienté et que son domaine contienne le support de ω .

Définition 3: Si ω est une n -forme différentielle sur V^m orientée, à support compact, on pose

$$\int_V \omega = \sum_{i \in I} \int_V \alpha_i \omega, \quad \text{où}$$

$\{\alpha_i\}_{i \in I}$ est une partition de l'unité sur V

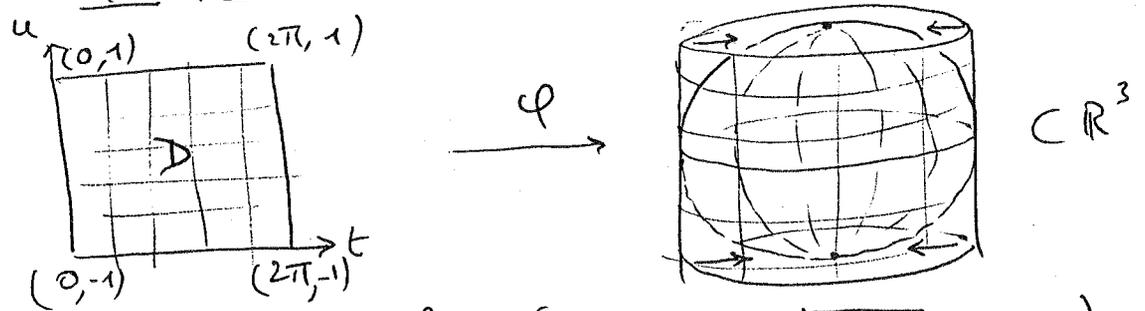
associée à un atlas orienté $(\varphi_i: \Omega_i \rightarrow \mathcal{O}_i)_{i \in I}$

(i.e. $\alpha_i: V \rightarrow \mathbb{R}^{C^\infty}$, support $\alpha_i \subset \mathcal{O}_i$, $\sum_{i \in I} \alpha_i = 1$, la somme étant localement finie).

L'indépendance du choix de la partition de l'unité vient de ce que $1 = \left(\sum_{i \in I} \alpha_i \right) \left(\sum_{j \in J} \beta_j \right) = \sum_{(i,j) \in I \times J} \alpha_i \beta_j$.

Remarque : les fonctions de l'aute' C^∞ sont un luxe inutile en th'orie de la mesure : on peut d'couper sauvagement V et ad'jouter les int'grals sur les morceaux en oubliant les ensembles de mesure nulle (bords des morceaux...), La m'eme remarque vaut dans l'exemple suivant o' on oublie qu'une seule carte d'oit couvrir le domaine, on oublie les 2 p'oles.

Exemple : Calcul de l'aire de la sphere S^2



$$D = [0, 2\pi] \times [-1, 1] \ni (t, u) \xrightarrow{\varphi} (\sqrt{1-u^2} \cos t, \sqrt{1-u^2} \sin t, u) \in S^2 \subset \mathbb{R}^3$$

ω_{S^2} = restriction a' S^2 de $x dy \wedge dz + y dz \wedge dx + z dx \wedge dy$

$$\varphi^* \omega_{S^2} = dt \wedge du,$$

$$\text{d'ou aire } S^2 = \int_{S^2} \omega = \int_D \varphi^* \omega = 2 \times 2\pi = 4\pi,$$

Exercice : Soient $\omega_{\mathbb{R}^{d+1}} = dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{d+1}$ et

$$\omega_{S^d} = \sum_{i=1}^{d+1} (-1)^i x_i dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \dots \wedge dx_{d+1}$$
 les

formes-volume canoniques de \mathbb{R}^{d+1} et S^d .

Soit $f: \mathbb{R}_+^* \times S^d \rightarrow \mathbb{R}^{d+1} \setminus \{0\}$ l'applic. "coordonn'es sph'riques" d'finie par $f(t, x) = tx$.

82

1) Montrer que $f^* \omega_{\mathbb{R}^{d+1}} = t^d dt \wedge \omega_{S^d}$ (avec l'abus de notation qui identifie dt à $p_1^* dt$ et ω_{S^d} à $p_2^* \omega_{S^d}$, où p_1, p_2 sont les projections canoniques de $\mathbb{R}_+^* \times S^d$ sur ses facteurs).

2) Remarque que, si $g: \mathbb{R}^{d+1} \rightarrow \mathbb{R}$ est définie par $g(y) = e^{-\|y\|^2}$, on a $(g \circ f)(t, x) = e^{-t^2}$ et donc

$\omega = \omega_{\mathbb{R}^{d+1}}$

$$\int_{\mathbb{R}^{d+1}} g \omega = \int_{\mathbb{R}_+^* \times S^d} f^*(g \omega) = \int_{\mathbb{R}_+^* \times S^d} e^{-t^2} f^* \omega$$

f^{*} forme d'orientation

3) En déduire que $\text{Volume}(S^d) = 2^{d+1} \frac{\left(\int_0^\infty e^{-t^2} dt\right)^{d+1}}{\int_0^\infty t^d e^{-t^2} dt}$, puis que

$$\text{Volume}(S^{2d}) = \frac{2^{d+1} \pi^d}{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2d-1)}$$

$$\text{Volume}(S^{2d+1}) = \frac{2 \pi^{d+1}}{d!}$$

6) Cobord

C'est l'"adjoint du bord" dans la "dualité" entre p -variétés orientées et p formes d'orientation par l'intégration. Autrement dit, c'est une opération qui à une $(n-1)$ forme ω associe une n -forme de façon que, si V est une n -variété orientée et ∂V son bord (une $(n-1)$ -variété orientée), on ait

$$\int_{\partial V} \omega = \int_V d\omega \quad (\text{formule de Stokes}),$$

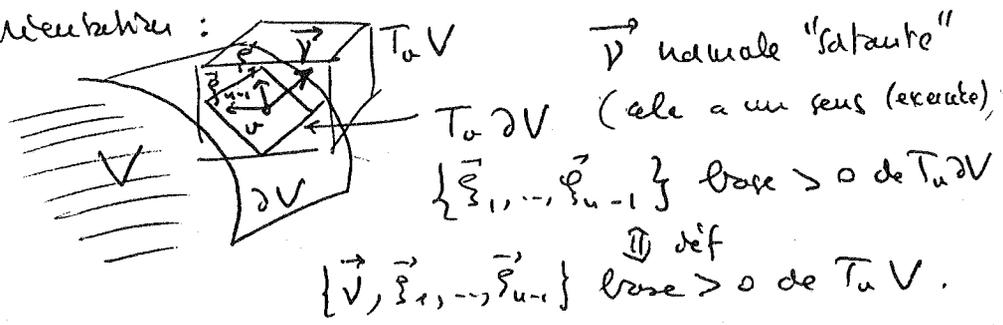
qui on peut encore écrire de manière un peu mieux en espérant la "dualité":

$$\langle \partial V, \omega \rangle = \langle V, d\omega \rangle$$

↑
"opérateurs adjoints"

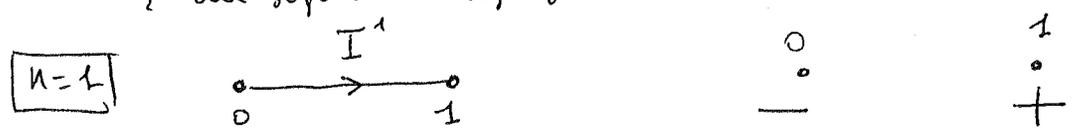
Pour découvrir l'expression de d , on examine le cas où V est le cube $[0,1]^n = I^n$. C'est un cas régulier, puisque d a non seulement un bord mais des arêtes, des coins et autres choses, bizarres... Cependant, conformément à la remarque faite p. 81, ces singularités jouent un rôle de mesure nulle qui n'intervient pas dans l'intégration.

Le bord ^(orienté) du cube, ∂I^n : si V est une variété à bord orientée, son bord est naturellement muni d'une orientation:

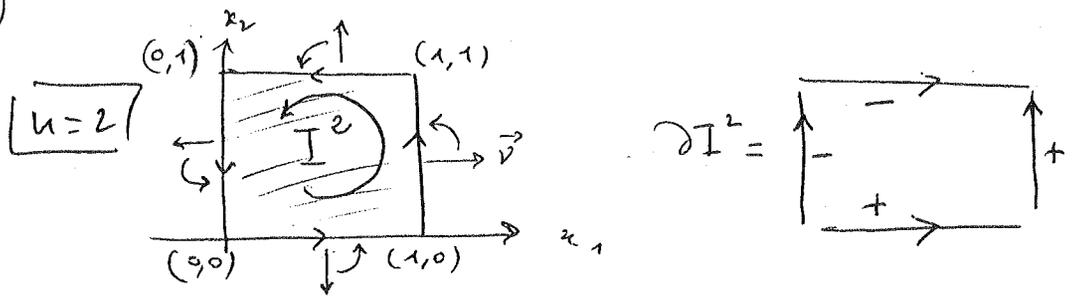


Il en est de même pour l'intérieur de chaque face du cube. On considère donc le bord du cube comme une "somme" abstraite de faces orientées (cubes de dim. $n-1$) et on définit l'intégrale d'une $(n-1)$ -forme sur ∂I^n comme la somme des intégrales de ω sur les faces orientées.

Chaque face orientée sera munie d'un "atlas" (au moins) formé d'une unique carte et s'identifiant à I^{n-1} .
 Un signe - signifie l'orientation opposée.



on notera $\partial I^1 = (-1)^1 (\theta_{1,0}(I^0) - \theta_{1,1}(I^0))$
 où I^0 est un point et $\theta_{1,0} = 0, \theta_{1,1} = 1$.



$$\partial I^2 = (-1)^1 [b_{1,0}(I^1) - b_{1,1}(I^1)] + (-1)^2 [b_{2,0}(I^1) - b_{2,1}(I^1)]$$

où $b_{1,0}(x) = (0, x)$, $b_{1,1}(x) = (1, x)$,
 $b_{2,0}(x) = (x, 0)$, $b_{2,1}(x) = (x, 1)$.

n quelconque

$$\partial I^n = \sum_{i=1}^n (-1)^i [b_{i,0}(I^{n-1}) - b_{i,1}(I^{n-1})]$$

où $b_{i,0}(x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n)$
 $b_{i,1}(x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_n)$

Étendons linéairement ∂ aux sommes formelles de faces (avec des signes); on vérifie immédiatement la propriété fondamentale de la bordure algébrique :

$$\partial^2 = 0 \quad (\text{le bord d'un bord est nul}).$$

Exercice : faire la même étude avec des simplexes :



$$\Delta^n = \{ (x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}, x_i \geq 0 \forall i, \sum x_i = 1 \}$$

$$\partial \Delta^n = \sum_{i=0}^n (-1)^i b_i(\Delta^{n-1}), \text{ où } b_i = \Delta^{n-1} \rightarrow \Delta^n \text{ est défini par } b_i(x_0, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_n) = (x_0, \dots, 0, \dots, x_n).$$

Calcul fondamental :

Soit ω une $(n-1)$ -forme sur \mathbb{R}^n . Il est naturel de définir $\int_{\partial I^n} \omega$ par la formule

$$\int_{\partial I^n} \omega = \sum_{i=1}^n (-1)^i \int_{I^{n-1}} (b_{i,0}^* \omega - b_{i,1}^* \omega)$$

Notons $\omega = \sum_{j=1}^n \omega_j$, où

$$\omega_j = f_j(x_1, \dots, x_n) dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \dots \wedge dx_n.$$

Si $\varepsilon = 0$ ou 1 , il vient

$$(b_{i,\varepsilon}^* \omega_j)(x_1, \dots, \widehat{x_i}, \dots, x_n) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ f_i(x_1, \dots, \varepsilon, \dots, x_n) dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_n & \text{si } i=j \end{cases}$$

Donc

$$\int_{\partial I^n} \omega = \sum_{i=1}^n (-1)^i \int_{I^{n-1}} [f_i(x_1, \dots, 0, \dots, x_n) - f_i(x_1, \dots, 1, \dots, x_n)] dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_n$$

$$= \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \int_{I^{n-1}} \left(\int_0^1 \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n) dx_i \right) dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_n$$

$$= \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \int_{I^{n-1}} \left(\int_0^1 \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n) dx_i \right) dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_n$$

$$= \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \int_{I^n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$$

$$= \int_{I^n} \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$$

Autrement dit, $\int_{\partial I^n} \omega = \int_{I^n} d\omega$, où

$$d\omega = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n.$$

(86)

On appelle $d\omega$ le cobord de ω , notons qu'il est encore défini par la formule

$$d\left(\sum_{i=1}^n f_i dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_n\right) = \sum_{i=1}^n df_i \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_n.$$

On peut alors définir la dérivée générale du cobord d'une p -forme sur un ouvert Ω de \mathbb{R}^n :

$$\text{si } \omega = \sum_{j_1 < \dots < j_p} \omega_{j_1 \dots j_p} dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_p},$$
$$d\omega = \sum_{j_1 < \dots < j_p} d\omega_{j_1 \dots j_p} \wedge dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_p}.$$

Exemples :

$$d\left(\sum_{i=1}^n \omega_i dx_i\right) = \sum_{j < i} \left(\frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \omega_j}{\partial x_i}\right) dx_j \wedge dx_i,$$
$$d(\omega_1 dx_2 \wedge dx_3 + \omega_2 dx_3 \wedge dx_1 + \omega_3 dx_1 \wedge dx_2) = \left(\frac{\partial \omega_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \omega_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \omega_3}{\partial x_3}\right) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$$

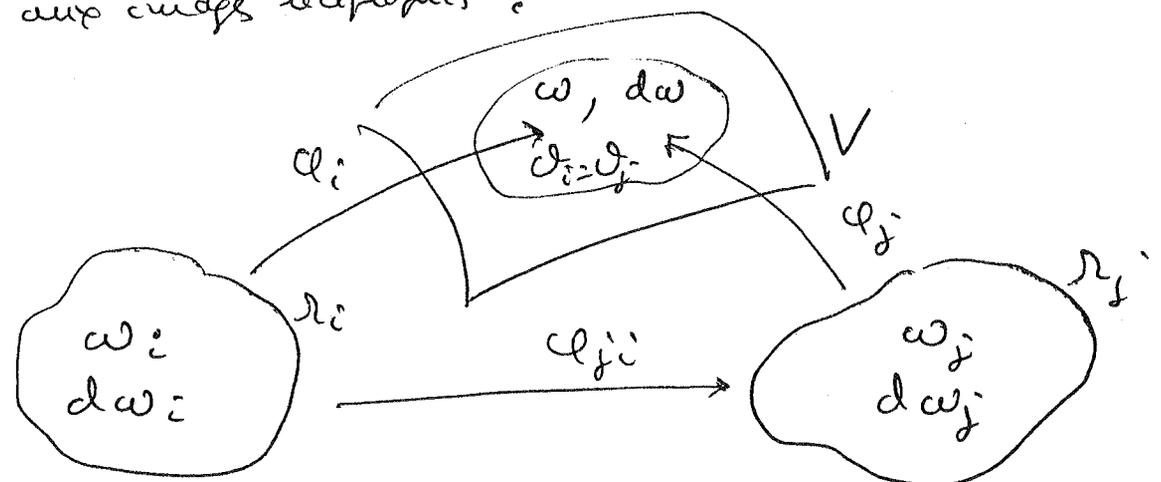
Propriétés de d (caractérisant d) :

- (i) $d(\lambda_1 \omega_1 + \lambda_2 \omega_2) = \lambda_1 d\omega_1 + \lambda_2 d\omega_2$ ($\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$)
- (ii) $df =$ dérivée de la fonction f
- (iii) $d(\omega_1 \wedge \omega_2) = d\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^p \omega_1 \wedge d\omega_2$
si ω_1 est une p -forme.
- (iv) $d^2 = 0$
- (v) $\varphi^* d = d \varphi^*$ quelle que soit l'application φ .

Les démonstrations sont de calcul direct. La propriété (v), fondamentale pour la globalisation, repose sur le th. de dérivation des applications composées, qui s'écrit $\varphi^* df = d(\varphi^* f)$ (voir p. 31).

Déformation cotangente du cobord sur une variété

Que le cobord puisse être défini intrinsèquement est une conséquence immédiate de sa compatibilité aux images réciproques :



$$\omega_i = \phi_{ji}^* \omega_j, \quad d\omega_i = d(\phi_{ji}^* \omega_j) = \phi_{ji}^*(d\omega_j)$$

Il reste à comprendre l'action de $d\omega$ sur un $(p+1)$ -uplet de champs de vecteurs (si ω est de degré p). On utilise pour cela le cadre donné au bas de la page 76.

1.°) Cas des 1-formes :

On cherche l'interprétation dans le calcul en coordonnées locales : si $\omega = \sum_{j=1}^n \omega_j dx_j$,

$$d\left(\sum_{j=1}^n \omega_j dx_j\right) = \sum_{i < j} \left(\frac{\partial \omega_j}{\partial x_i} - \frac{\partial \omega_i}{\partial x_j}\right) dx_i \wedge dx_j,$$

$$\text{donc } d\omega\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial \omega_j}{\partial x_i} - \frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} = L_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \omega_j - L_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \omega_i.$$

Finalement,

$$d\omega\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right) = L_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \omega\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right) - L_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \omega\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right).$$

88

Soit maintenant ω une 1-forme sur V et X, Y deux champs de vecteurs sur V . Posons

$$(\delta\omega)(X, Y) = L_X \omega(Y) - L_Y \omega(X).$$

On calcule successivement (f, g fonctions C^∞ sur V):

$$(\delta\omega)(fX, gY) = fg(\delta\omega)(X, Y) + \underbrace{(f(L_X g)\omega(Y) - g(L_Y f)\omega(X))}_{\text{parasite} \Rightarrow \text{pas } C^\infty(V)\text{-bilinéaire!}}$$

$$\omega([fX, gY]) = fg\omega([X, Y]) + \underbrace{(f(L_X g)\omega(Y) - g(L_Y f)\omega(X))}_{\text{même parasite!}}$$

et par différence

$$(\delta\omega)(fX, gY) - \omega([fX, gY]) = fg((\delta\omega)(X, Y) - \omega([X, Y])).$$

L'application de $\mathcal{X}^\infty(V) \times \mathcal{X}^\infty(V)$ dans $C^\infty(V)$ définie par $(X, Y) \mapsto (\delta\omega)(X, Y) - \omega([X, Y])$ est donc $C^\infty(V)$ -bilinéaire. Elle est évidemment alternée et définit donc une 2-forme sur V .

En coordonnées locales, cette 2-forme coïncide avec la 2-forme $d\omega$ (dont on sait par ailleurs qu'elle est intrinsèquement définie). En effet, il suffit de prendre pour X, Y des champs $\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}$.

On en déduit que les deux formes coïncident et donc que

$$\boxed{d\omega(X, Y) = L_X \omega(Y) - L_Y \omega(X) - \omega([X, Y])}$$

Remarque : il ne fallait pas être grand clerc pour deviner le rôle du crochet $[X, Y]$. S'il est nul, le théorème du flow-box pour les champs qui commutent (p. 59) nous ramène à la situation locale.

2) La généralisation de la formule itérienne

aux p-formes est facile à vérifier et pas trop difficile à dériver :

$$d\omega(X_1, \dots, X_{p+1}) = \sum_{i=1}^{p+1} (-1)^{i+1} L_{X_i} \overset{\text{enlevé}}{\omega}(X_1, \dots, \widehat{X_i}, \dots, X_{p+1})$$

$$+ \sum_{1 \leq i < j \leq p+1} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], X_1, \dots, \widehat{X_i}, \dots, \widehat{X_j}, \dots, X_{p+1})$$

Théorème de Frobenius (version formes différentielles) :

1) Champ de plans dans \mathbb{R}^3 . Soit ω une 1-forme sur \mathbb{R}^3 .

Propriétés: Les propriétés suivantes sont équivalentes à l'intégrabilité du champ des noyaux de ω :

- 0) $\forall X, Y \in \text{Ker } \omega, [X, Y] \in \text{Ker } \omega$;
- 1) $d\omega|_{\text{Ker } \omega} = 0$;
- 2) $\omega \wedge d\omega = 0$;
- 3) $\exists f, d\omega = f \wedge \omega$;
- 4) $\omega = g df$.

Démonstration :

0) \Leftrightarrow 1) est une conséquence directe de la définition itérienne du cobord : si $\omega(X) = 0$ et $\omega(Y) = 0$, $d\omega(X, Y) = -\omega([X, Y])$.

1) \Leftrightarrow 2) est une conséquence directe de la définition du produit extérieur :

$$(\omega \wedge d\omega)(X, Y, Z) = \omega(X)d\omega(Y, Z) - \omega(Y)d\omega(Z, X) + \omega(Z)d\omega(X, Y)$$

En effet, il suffit de prendre 3 champs de vecteurs, qui au voisinage d'un point choisi de \mathbb{R}^3 forment en chaque point une base de \mathbb{R}^3 , avec X, Y formant une base de $\text{Ker } \omega$.

(90)

2) \Leftrightarrow 3) : on écrit les équations que doit vérifier ζ en choisissant X, Y, Z comme précédemment.

On vérifie facilement directement $\zeta(X)$ et $\zeta(Y)$ mais pas $\zeta(Z)$. C'est très naturel presque, si ζ est une solution, le en est de même de $\zeta + \lambda \omega$.

3) \Leftrightarrow 4) traduit simplement l'existence d'un feuilletage par des variétés intégrales (p. 64).

Exemple standard : la forme des courbes canonique

$$\omega = dy - z \wedge dx$$

de l'espace des jets $J^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^3$ (voir p. 65) :

$$\omega \wedge d\omega = - dx \wedge dy \wedge dz \text{ est partout non nulle.}$$

2^e) généralisation :

Proposition : le champ de $(n-p)$ -plans défini sur la variété V^n par l'intersection de noyaux des 1-formes $\omega_1, \dots, \omega_p$ (resp. engendré par les champs de vecteurs X_1, \dots, X_{n-p}) est intégrable si et seulement si et une ou l'autre des 2 conditions équivalentes suivantes est vérifiée :

0) $\forall i, j, k, \omega_k(X_i, X_j) = 0$;

3) $\forall k, d\omega_k = \sum_{l=1}^p \zeta_l \wedge \omega_l$.

Fautôme d'introduction à la cohomologie de de Rham

① \mathbb{R} n'est pas différentiable, (ni même hamiltonien) à $\mathbb{R} \setminus \{0\}$
 1 composante connexe 2 composantes connexes

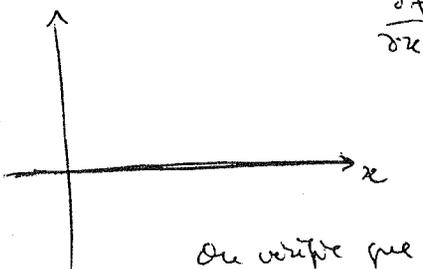
Cette différence se manifeste dans l'existence sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ de fonctions localement mais non globalement constantes : l'ensemble des fonctions f sur V telles que $df=0$ est naturellement isomorphe à \mathbb{R} si $V = \mathbb{R}$, \mathbb{R}^2 si $V = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

② \mathbb{R}^2 n'est pas différentiable, (ni même hamiltonien) à $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$

C'est un peu plus subtil : on remplace les fonctions par les 1-formes.

lemme (Poincaré): Une 1-forme fermée (i.e. telle que $dw=0$ par analogie avec les variables sans bord) sur \mathbb{R}^2 est exacte, i.e. $\exists f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $w = df$

Démonstration: si f existe, elle vérifie l'équ. aux der. partielles $\frac{\partial f}{\partial x} = a, \frac{\partial f}{\partial y} = b$, où $w = a dx + b dy$.
 en particulier $f(x, 0) = f(0, 0) + \int_0^x a(x, 0) dx$
 et $f(x, y) = f(x, 0) + \int_0^y b(x, y) dy$
 on vérifie que $dw=0$, i.e. $\frac{\partial a}{\partial y} = \frac{\partial b}{\partial x}$ équivaut à $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = a(x, y)$ ✓



Observation fondamentale : la propriété du lemme est invariante par difféo forme $d\varphi^* \omega = \varphi^* d\omega$ et $d\varphi^* f = \varphi^* df$.

Mais) sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, la 1-forme $\omega = \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}$ a pour image réciproque d \emptyset par l'application "coordonnées polaires" $P(\theta, r) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$: $P^* \omega = d\theta$; en particulier, $P^* d\omega = dP^* \omega = d^2 \theta = 0$. Puisque P est un difféo local, on en déduit que $d\omega = 0$ i.e. que ω est fermée. Cependant, il n'existe pas sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ de fonction "angle" à valeurs réelles (il en existe une à valeurs dans le cercle, i.e. modulo 2π), donc ω n'est pas exacte. Il est donc particulièrement malheureux de la noter d θ (mais très commode si on fait ce que l'on fait).

Définitions : V variété C^∞ .

$Z^p(V) = \{ p\text{-formes différentielles sur } V, \text{ fermées } (d\omega = 0) \}$
est un \mathbb{R} -groupe abélien contenant le sous-groupe $B^p(V) = \{ p\text{-formes différentielles sur } V, \text{ exactes } (\exists \eta, \omega = d\eta) \}$
le groupe quotient $H^p(V) = Z^p(V) / B^p(V)$ est appelé "groupe de cohomologie de de Rham de V ".

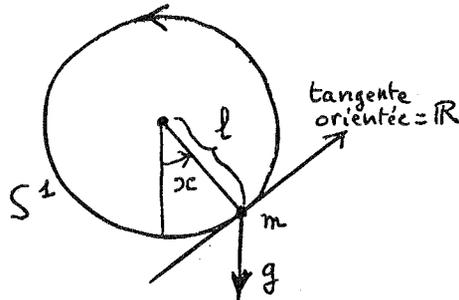
Si $p=0$, $Z^0(V)$ est le groupe des fonctions localement constantes sur V et $B^0(V)$ est nul par définition, donc $H^0(V) \cong \mathbb{R}^{\#(\text{composants connexes de } V)}$

Ce qui précède justifie l'assertion en une démonstration de ce que $H^1(\mathbb{R}^2) = \{0\} \neq H^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \cong H^1(S^1) \xrightarrow{\int_{S^1}} \mathbb{R}$ (utiliser Stokes pour le dernier iso qui traduit simplement qu'une fonction fermée est la dérivée d'une fonction primitive si et seulement si elle est d'intégrale nulle).

Exercice : Étant donnée une application $C^\infty f: V \rightarrow W$, l'image réciproque de formes définit au plus haut un morphisme de groupes $f^*: H^p(W) \rightarrow H^p(V)$ (la cohomologie est un foncteur covariant). Si f est un difféo, f^* est un iso d'où la dim. du non difféo de \mathbb{R}^2 et $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ --- A suivre

**1 – Le pendule comme illustration de
 la double origine de la notion de variété :
 la mécanique et les surfaces de Riemann**

Les mouvements du pendule mathématique de longueur l et de masse m soumis à une gravité uniforme g (figure 1.1) sont régis par l'équation différentielle $ml\ddot{x} = -mg \sin x$, c'est-à-dire par la projection orthogonale sur la tangente au cercle au point paramétré par l'angle x , de l'équation $f = m\gamma$ (la composante normale au cercle est exactement compensée par la réaction de la barre, rigide mais non massive, qui porte la masse ponctuelle m). On a noté par un point, comme les mécaniciens, la dérivée temporelle. Soit $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$; il vient



$$\ddot{x} = -\omega^2 \sin x,$$

ou encore

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -\omega^2 \sin x. \end{cases}$$

Figure 1.1

Considéré comme un champ de vecteurs dans le plan de coordonnées (x, y) , le deuxième membre $(y, -\omega^2 \sin x)$ de cette équation a le portrait de phase décrit dans la figure 1.2 :

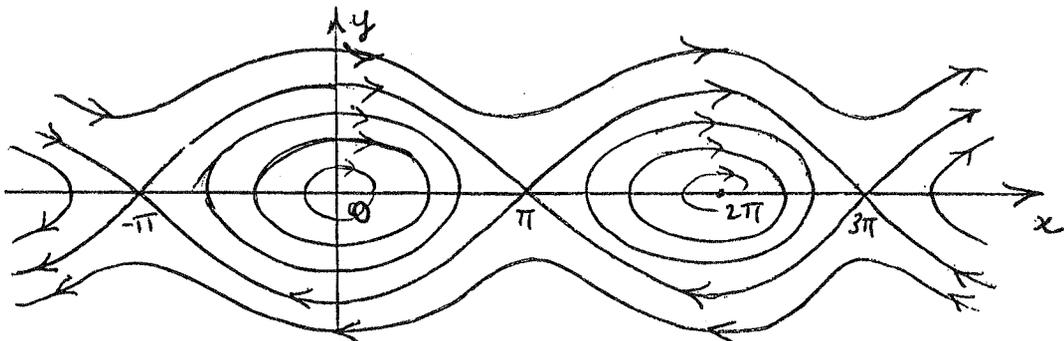


Figure 1.2

Ce portrait de phase ne donne que la géométrie et l'orientation des courbes intégrales, à l'exclusion de leur paramétrage.

Il est encore défini comme l'ensemble des courbes de niveau de la fonction énergie :

$$H = \frac{1}{2}ml^2|\dot{x}|^2 - mgl \cos x,$$

et s'obtient sans peine à partir d'une analyse locale (à l'aide du *lemme de Morse*) des *singularités* de cette fonction, c'est-à-dire des points où, ses deux dérivées partielles s'annulent, elle n'est plus une submersion. Au voisinage des points $y = 0$ et x multiple entier de 2π , la forme quadratique des dérivées secondes est définie positive et l'équilibre est *stable*; au voisinage des points $y = 0$ et x égal à π plus un multiple entier de 2π , elle est indéfinie et l'équilibre est *instable*.

Bien entendu, le "véritable" espace des phases du pendule est le cylindre $(R/2\pi Z) \times R$, c'est-à-dire le fibré tangent TS^1 du cercle $S^1 = R/2\pi Z$ (ensemble des couples *position-vitesse*). La figure 1.3 donne donc le "véritable" portrait de phase du pendule. C'est pourtant le portrait de phase dans $(R/4\pi Z) \times R$ - c'est-à-dire "après revêtement à deux feuillets" - qui est le bon objet d'études au niveau de l'analyse (figure 1.4).

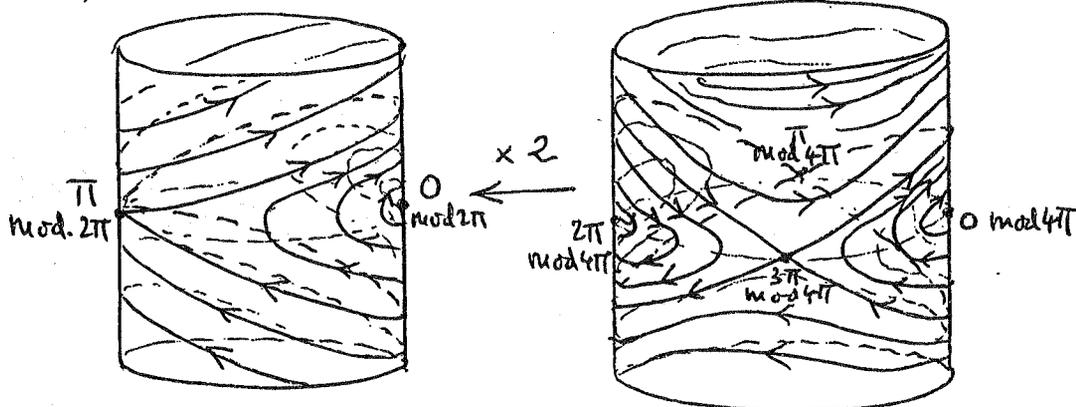


Figure 1.3

Figure 1.4

Un premier niveau de compréhension de cette assertion est obtenu directement dans le domaine réel : plongeons en effet $R/4\pi Z \times R$ dans R^3 par l'application

$$(x, y) \mapsto (z = \sin \frac{x}{2}, w = \cos \frac{x}{2}, \frac{y}{2\omega}),$$

et posons $k = \sqrt{\frac{1 + H/mgl}{2}}$ en remarquant qu'on a toujours $H \geq -mgl$.

La courbe (non connexe si $H \neq mgl$) d'énergie H dans $R/4\pi Z \times R$ est identifiée à l'intersection des deux cylindres d'équations respectives

$$z^2 + w^2 = 1 \quad \text{et} \quad \left(\frac{y}{2\omega}\right)^2 + z^2 = k^2.$$

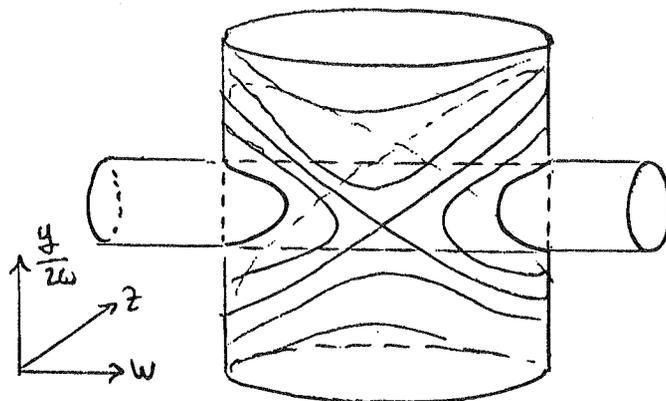


Figure 1.5

Ces cylindres sont représentés sur la figure 1.5 dans le cas où $0 < k < 1$. Nous allons maintenant intégrer l'équation du pendule. Dans la variable de position z , la relation d'énergie s'écrit

$$\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = \omega^2(1 - z^2)(k^2 - z^2).$$

La solution $z(t) = \sin \frac{x(t)}{2}$ vérifiant $z(0) = 0$ est donc la fonction réciproque de la fonction $t(z)$ définie par

$$\omega t = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(k^2 - z^2)}} = \int_0^{\frac{z}{k}} \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)}},$$

c'est-à-dire, si $k < 1$, le produit par k de la fonction elliptique de Jacobi

$$z(t) = k \operatorname{sn}(\omega t, k).$$

On en déduit (voir *Wittaker et Watson, Modern Analysis, Cambridge University Press, Chapitre XXII*) que

$$z(t) = k \operatorname{sn}(\omega t, k), \quad w(t) = \operatorname{dn}(\omega t, k) \quad \text{et} \quad \frac{y(t)}{2\omega} = k \operatorname{cn}(\omega t, k).$$

Si $k > 1$, on obtient de même

$$z(t) = \operatorname{sn}\left(k\omega t, \frac{1}{k}\right), \quad w(t) = \operatorname{cn}\left(k\omega t, \frac{1}{k}\right) \quad \text{et} \quad \frac{y(t)}{2\omega} = k \operatorname{dn}\left(k\omega t, \frac{1}{k}\right).$$

Lorsque $k = 1$, on trouve

$$z(t) = \operatorname{th}(\omega t), \quad w(t) = \frac{1}{\operatorname{ch}(\omega t)} = \frac{y(t)}{2\omega},$$

qui décrit l'orbite homocline joignant en temps infini l'équilibre instable à lui-même.

Ces formules ne prennent cependant leur véritable stature que dans le domaine complexe. Pour le comprendre, rappelons la nature de la fonction $\text{sn}(u, k)$ de la variable complexe u . Et puisque cette fonction dégénère en $\sin u$ lorsque k tend vers 0, commençons par étudier le sinus complexe et sa fonction (multiforme) réciproque

$$\arcsin z = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$$

La figure 1.6 analyse, dans le domaine réel, l'écriture de $z = \sin u$ comme la composée de $u \mapsto (z, \dot{z}) = (\sin u, \cos u)$ avec la projection $(z, w) \mapsto z$.

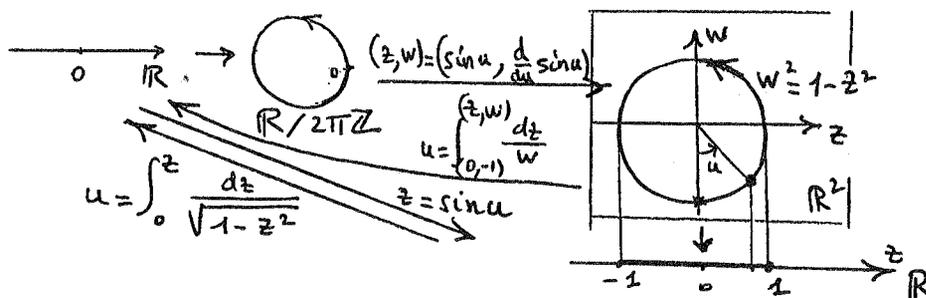


Figure 1.6

La figure 1.7 fait de même dans le domaine complexe. Ne pouvant dessiner dans $C^2 = R^4$, on a représenté le cylindre image de la première application avec deux demi-droites d'auto-intersection correspondant chacune à une génératrice du cylindre repliée sur elle-même dans R^3 en un point de ramification d'ordre deux pour la projection du cylindre sur le plan complexe de la variable z . Après complétion par deux points à l'infini, ce cylindre devient la surface de Riemann (sphère) de la fonction $\sqrt{1-z^2}$. Enfin, on a représenté les ellipses et hyperboles homofocales, images des droites $\text{Im} u = \text{cste}$ et $\text{Re} u = \text{cste}$.

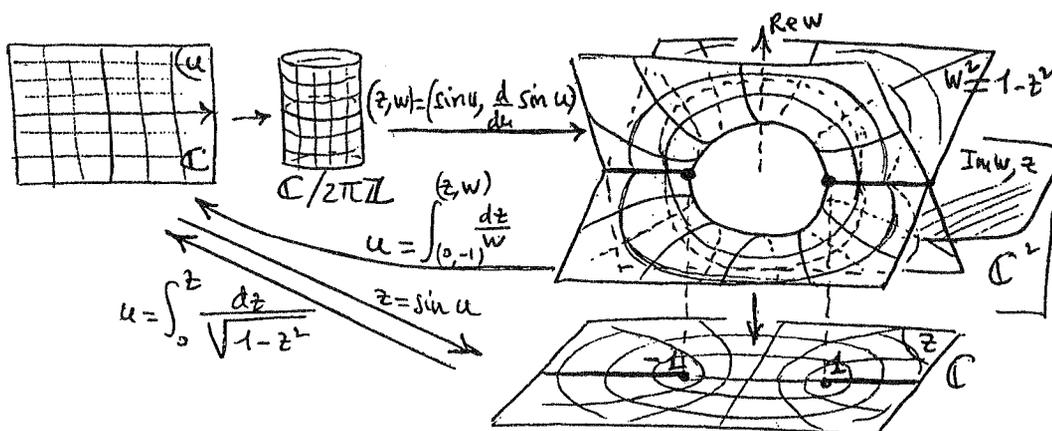


Figure 1.7

La figure 1.8, où l'on fait la même chose pour la fonction $z = \operatorname{sn}(u, k)$, montre que le cylindre est remplacé par un tore privé de deux points (les pôles de $\operatorname{sn}(u, k)$) et donc que la surface de Riemann de la fonction $\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}$ est un tore. On retrouvera la figure 1.7 en faisant tendre k vers 0.

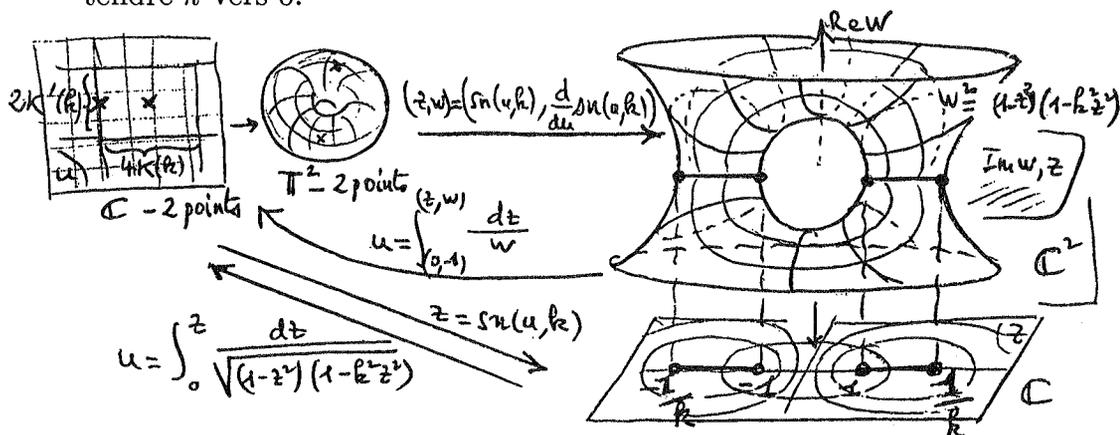


Figure 1.8

Dans l'espace des phases dédoublé $C/4\pi Z \times C$, la courbe intégrale complexe d'énergie $k \neq 1$, intersection de deux cylindres $S^1 \times R^3$ dans $C^3 = R^6$, est donc difféomorphe à un tore privé de deux points, alors que dans le "véritable" espace des phases complexe $C/2\pi Z \times C$, c'est un tore privé d'un unique point.

Remarque. Le calcul de la période $T(k)$ d'une oscillation complète du pendule se déduit immédiatement de ce qui précède : si $k < 1$, par exemple, on obtient

$$\frac{T(k)}{\omega} = 4K(k) = 4 \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}$$

qui est la période réelle de la fonction $\operatorname{sn}(u, k)$ et varie de 2π (cas limite, harmonique, des petites oscillations) à l'infini (cas limite de la solution homocline qui joint en temps infini la position d'équilibre instable à elle-même). Mais la fonction $\operatorname{sn}(u, k)$ possède également une période purement imaginaire, notée classiquement $2iK'(k)$ (voir *Whittaker et Watson*). C'est Paul Appell qui, en 1878, a donné, dans le cas où $k < 1$ uniquement, l'interprétation dynamique de cette dernière; il a remarqué que le remplacement du temps réel t par le temps complexe it revient à multiplier par i les vitesses et par $i^2 = -1$ les accélérations, ce qui équivaut à changer l'orientation de la gravitation. Il en déduit immédiatement que la période complexe du mouvement de libration obtenu en abandonnant sans vitesse le pendule à la position x est égale à la période réelle du mouvement analogue correspondant à la position initiale $\pi - x$ (figure 1.9).

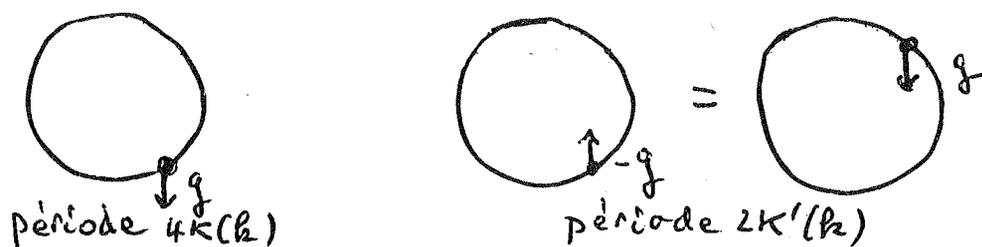


Figure 1.9

Guide pour l'interprétation des figures 1.7 et 1.8. Ces figures s'obtiennent très simplement à partir des remarques suivantes : il s'agit dans les deux cas de la représentation d'une courbe complexe dans C^2 (c'est-à-dire d'une surface réelle dans R^4) donnée par une équation de la forme $w^2 = P(z)$, où P est un polynôme de degré 2 ou 4 dont les racines z_i sont toutes réelles. On peut encore considérer cette surface comme le *graphe* de la fonction *multiforme* $w = \sqrt{P(z)}$. Le problème se passe au niveau des points $(z_i, 0)$ où la restriction à cette surface de la projection $(z, w) \mapsto z$ est *ramifiée*, exactement comme l'est en $(0, 0)$ le graphe de la fonction \sqrt{z} . On représente classiquement une telle surface de la manière suivante : on effectue dans le plan des z un certain nombre de *coupures* dans le complémentaire desquelles on peut choisir continuellement une racine carrée de $P(z)$. La surface consiste alors en le recollement de deux copies de ce complémentaire le long des bords des coupures et la seule difficulté est dans la compréhension de ce recollement. Pour respecter l'échange des déterminations de $\sqrt{P(z)}$ lorsque z parcourt un petit lacet autour d'une racine, celui-ci doit en effet associer un bord sur un feuillet avec le bord opposé sur l'autre. La figure 1.10 indique deux perspectives de la représentation dans R^3 du graphe de \sqrt{z} alors que la figure 1.11 explicite le recollement des deux feuillets du graphe de $\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}$.

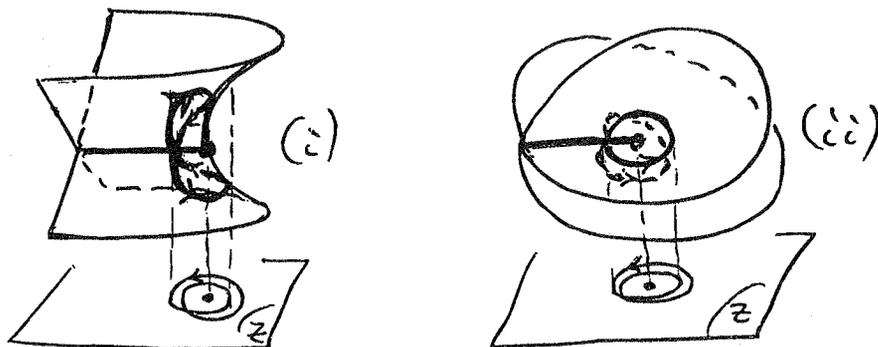


Figure 1.10

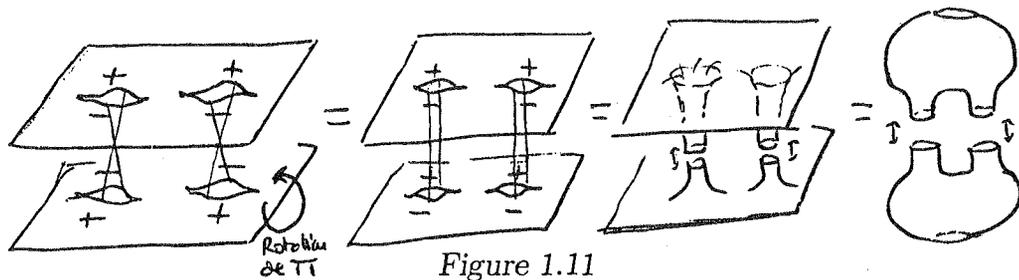


Figure 1.11

Remarques. 1 – On a pas mal de latitude dans le choix des coupures et dans celui de la représentation dans R^3 . Par exemple, si, dans la représentation du sinus, on privilégie la partie imaginaire de w plutôt que sa partie réelle et on remplace les deux coupures par une unique coupure suivant le segment $[-1, 1]$, la figure 1.7 devient la figure 1.12 :

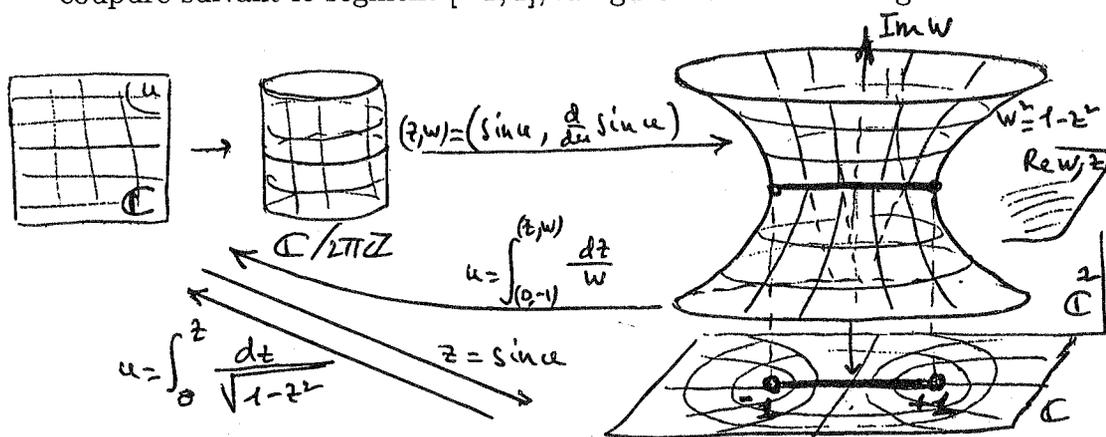


Figure 1.12

2 – Dans les applications de R^2 dans R^3 représentées sur les figures 1.7, 1.8 et 1.10, les points de bifurcation présentent une singularité inévitable (stable) appelée *parapluie de Whitney*, dont le modèle local le plus simple est

$$(t, s) \mapsto (t, st, s^2).$$

Cette singularité se rencontre également dans le *cross-cap*, représentation du ruban de Moebius dans laquelle un voisinage du bord est un anneau plongé de façon standard dans R^3 , ce qui permet en le recollant à un disque d'obtenir le modèle le plus simple dans R^3 du plan projectif (voir le paragraphe 2) et plus généralement de n'importe quelle surface non orientable.

Exercice. Faire les figures analogues dans le cas où P est un polynôme quelconque (*intégrales hyperelliptiques*) et montrer que la surface de Riemann de la fonction $\sqrt{P(Z)}$ est une surface orientable de genre g si le polynôme est de degré $2g + 1$ ou $2g + 2$ (voir par exemple le livre *Riemann surfaces* de George Springer, édité par Chelsea).

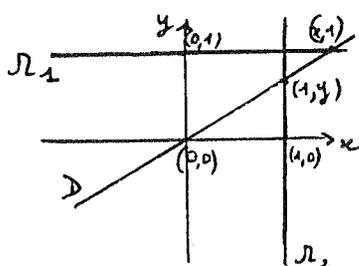
2 – L'espace projectif

L'espace projectif est le lieu de la géométrie projective, celle où seules sont considérées les propriétés invariantes par transformation projective : le birapport de quatre droites, par exemple, mais pas le parallélisme. D'ailleurs, dans l'espace projectif, qu'on obtient en adjoignant à l'espace affine les éléments à l'infini, deux droites se coupent toujours en un point et rien ne ressemble plus à une ellipse qu'une hyperbole. Si enfin l'espace projectif est complexe, il n'y a vraiment plus une seule exception aux théorèmes de géométrie.

Définition. L'espace projectif réel $P_n(\mathbb{R})$ de dimension n est l'espace des droites vectorielles (sous-espaces vectoriels de dimension 1) de \mathbb{R}^{n+1} , c'est-à-dire le quotient (avec sa topologie) de $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ par la relation d'équivalence ($x = y$ s'il existe $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tel que $y = \lambda x$). Un sous-espace vectoriel de dimension $k + 1$ de \mathbb{R}^{n+1} définit un sous-espace projectif de dimension k , isomorphe à $P_k(\mathbb{R})$. On définit de même l'espace projectif complexe $P_n(\mathbb{C})$.

Les éléments de $P_n(\mathbb{R})$ sont repérés chacun par $n + 1$ coordonnées homogènes non simultanément nulles, bien définies à la multiplication près par un même nombre réel différent de 0 : le $n + 1$ -uplet $[x_1, x_2, \dots, x_{n+1}]$ désigne l'unique droite vectorielle de \mathbb{R}^{n+1} qui contient le point de coordonnées $(x_1, x_2, \dots, x_{n+1})$. On fait de même en complexe.

Notons S^n la sphère unité de l'espace euclidien standard \mathbb{R}^{n+1} . On peut encore définir $P_n(\mathbb{R})$ comme le quotient de S^n par la relation d'antipodie ($x = -x$) et $P_n(\mathbb{C})$ comme le quotient de S^{2n+1} par la relation d'équivalence ($x = y$ s'il existe un nombre complexe $\lambda = e^{i\theta}$ de module 1 tel que $y = \lambda x$). Voici l'atlas "canonique" (analytique réel) de $P_1(\mathbb{R})$:



$$\begin{aligned} U_1 &= \mathbb{R}, & U_{1,2} &= \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ U_2 &= \mathbb{R}, & U_{2,1} &= \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ \varphi_1(x) &= D = \varphi_2(y) \\ \varphi_{21}(x) &= \frac{1}{x} = y \end{aligned}$$

Figure 2.1

Exercice. Montrer que l'application f qui à une droite vectorielle de R^2 fait correspondre son point d'intersection autre que l'origine (sauf pour la droite d'équation $y = 0$) avec le cercle C d'équation $(x - 1)^2 + y^2 = 1$ est un difféomorphisme de $P_1(R)$ sur ce cercle, muni de sa structure de sous-variété du plan. Montrer que, si π désigne la projection canonique de S^1 sur son quotient $P_1(R)$ par l'antipodie, on a $f^{-1} \circ \pi(\theta) = 2\theta$.

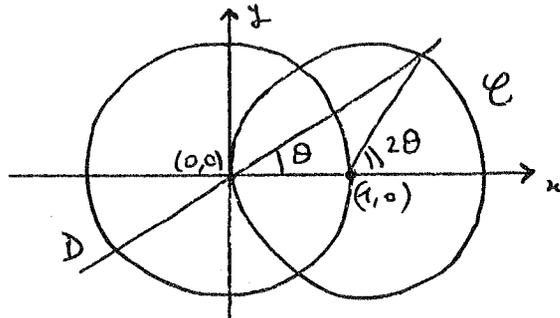


Figure 2.2

On définit de même l'atlas canonique de $P_1(C)$. L'unique changement de carte étant le difféomorphisme holomorphe $z \mapsto 1/z$ de $C \setminus \{0\}$ sur lui-même, on obtient une structure de variété analytique complexe de dimension un (une *courbe complexe*). Au niveau réel, c'est la variété "analytique réelle" orientable de dimension deux (surface) compacte la plus simple, la *sphère de Riemann*. Topologiquement, elle s'obtient en ajoutant un point "à l'infini" au plan complexe et en appelant voisinages de ce point son union avec les complémentaires des compacts (compactifié d'Alexandrov du plan).

Exercice. Définir un difféomorphisme analytique réel de $P_1(C)$ sur la sphère unité de R^3 à l'aide de la projection stéréographique. En cas de panique, consulter par exemple le livre de géométrie de Frédéric Pham. Le passage du plan complexe à la sphère de Riemann permet de comprendre topologiquement nombre de propriétés des fonctions holomorphes, en particulier des polynômes et des fractions rationnelles. A la fraction rationnelle P/Q correspond $f : P_1(C) = C \cup \{\infty\} \rightarrow P_1(C) = C \cup \{\infty\}$ définie par $f(z) = P(z)/Q(z)$ si $z \in C$ n'est pas un pôle de P/Q , $f(z) = \infty$ si z est un pôle de P/Q et $f(\infty) = \lim_{z \rightarrow \infty} P(z)/Q(z)$, cette dernière limite pouvant être ∞ .

Exercices. 1) Montrer qu'en coordonnées homogènes, l'application f associée à la fraction rationnelle $\frac{a_n z^n + \dots + a_0}{b_p z^p + \dots + b_0}$ s'écrit (si $p < n$)

$$f([z_1, z_2]) = [a_n z_1^n + \dots + a_0 z_2^n, z_2^{n-p}(b_p z_1^p + \dots + b_0 z_2^p)].$$

2) Parmi les fractions rationnelles, les polynômes sont caractérisés par le fait que $f^{-1}(\infty) = \infty$.

- 3) Montrer, en utilisant l'atlas canonique de $P_1(C)$, que f est holomorphe
- 4) Montrer que f est une application de la forme suivante : elle possède un nombre fini de *points singuliers* au voisinage de chacun desquels elle s'écrit $z \mapsto z^k$ dans une carte holomorphe bien choisie. En dehors de ces points singuliers elle est aussi "tendue" que possible, n'admettant aucun "pli" : elle est en particulier surjective (c'est le théorème de d'Alembert-Gauss) et définit un *revêtement fini* de la sphère sur elle-même, *ramifié* aux points singuliers.

Traisons rapidement le cas le plus simple en dehors de celui des transformations homographiques (qui sont les seuls difféomorphismes holomorphes de la sphère de Riemann sur elle-même), celui des polynômes quadratiques $P(z) = z^2 + bz + c$: il existe un unique nombre complexe $\alpha = c - b^2/4$ tel que le polynôme $P(z) - \alpha$ ait une racine double z_0 . Les difféomorphismes holomorphes $z \mapsto u = z - z_0$ et $w \mapsto v = w - \alpha$ de $P_1(C)$ (après prolongement par $\infty \mapsto \infty$, exercice !) transforment l'application $w = f(z)$ associée à P en l'application $v = g(u)$ associée au polynôme u^2 , d'où la figure 2.3 :

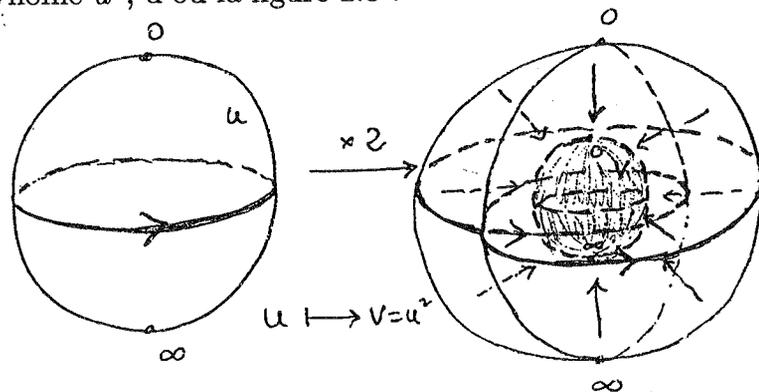


Figure 2.3

La projection canonique $H : C^2 \ni S^3 \rightarrow S^2 = P_1(C)$ qui, à un point de la sphère unité de C^2 fait correspondre l'unique droite vectorielle complexe de C^2 contenant ce point est un objet célèbre de la topologie : c'est la *fibration de Hopf*, analogue complexe de l'application $\theta \mapsto 2\theta$ de $R^2 \ni S^1 \rightarrow S^1 = P_1(R)$. C'est un très bel exemple de *fibration différentiable* : les *fibres*, c'est-à-dire les images réciproques par H des points de S^2 , sont des grands cercles de la sphère S^3 qui la remplissent de manière extrêmement symétrique. Ils sont deux à deux enlacés car bords de deux droites complexes qui se coupent transversalement à l'origine. La figure 2.4 montre ce que devient cette propriété d'enlacement en réel. La fibration de Hopf apparaît aussi bien en topologie dans l'étude des groupes d'homotopie des sphères qu'en dynamique où elle s'identifie, après fixation de l'énergie, à l'espace des phases du système de deux oscillateurs harmoniques non couplés de même fréquence.

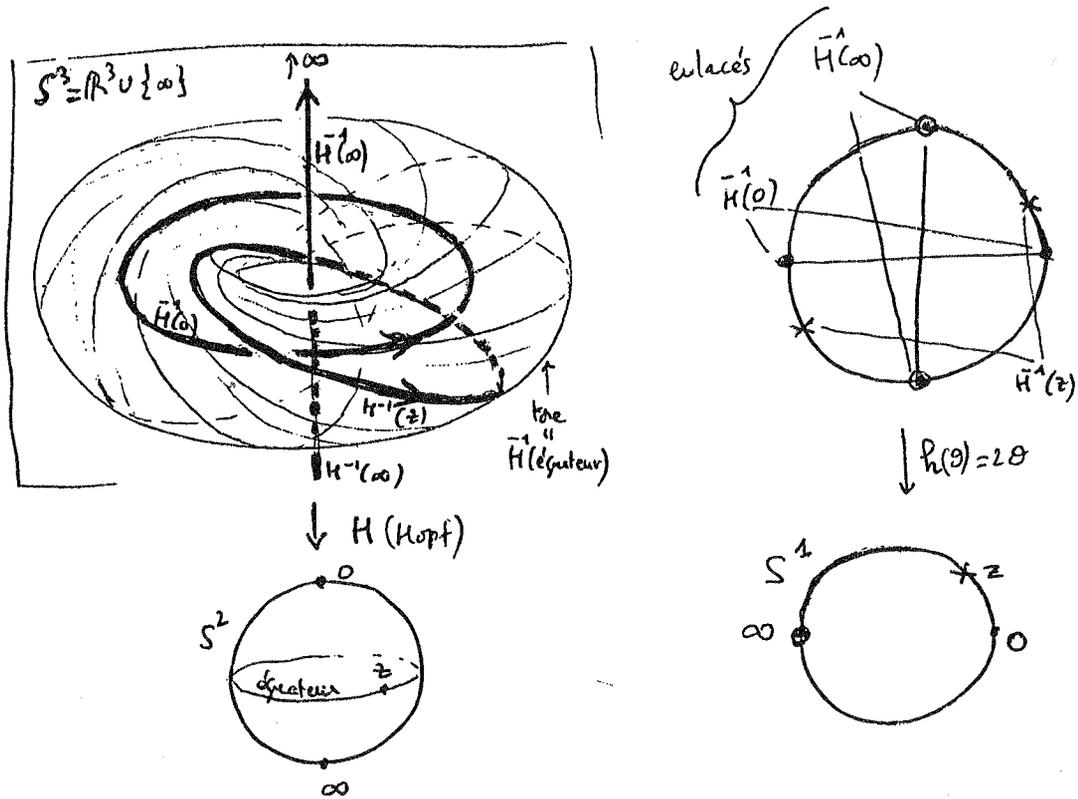


Figure 2.4

La topologie du plan projectif réel $P_2(\mathbb{R})$ est intéressante. Surface compacte sans bord *non-orientable* la plus simple, il n'admet pas de plongement dans \mathbb{R}^3 . En voici tout d'abord une représentation assez singulière (ce n'est pas l'image d'une immersion dans \mathbb{R}^3). Enlevant un petit voisinage en forme de disque de l'hémisphère sud, on obtient un *crosscap* qui présente une singularité du type *parapluie de Whitney*, déjà rencontrée dans les notes sur le pendule. Nous allons voir que ce *crosscap* représente en fait un *ruban de Mœbius* qui porte la non-orientabilité.

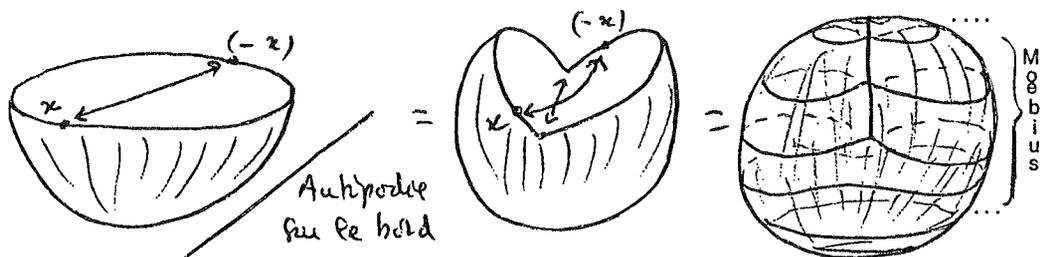


Figure 2.5

La figure suivante explicite le plan projectif comme recollement d'un disque et d'un ruban de Mœbius le long de leur bord. Bien entendu, n'importe quelle droite projective pourrait remplacer la "droite à l'infini" d'équation $z = 0$. Chacune possède un voisinage homéomorphe à un ruban de Mœbius (exercice : le vérifier pour $x = 0$ et $y = 0$) !

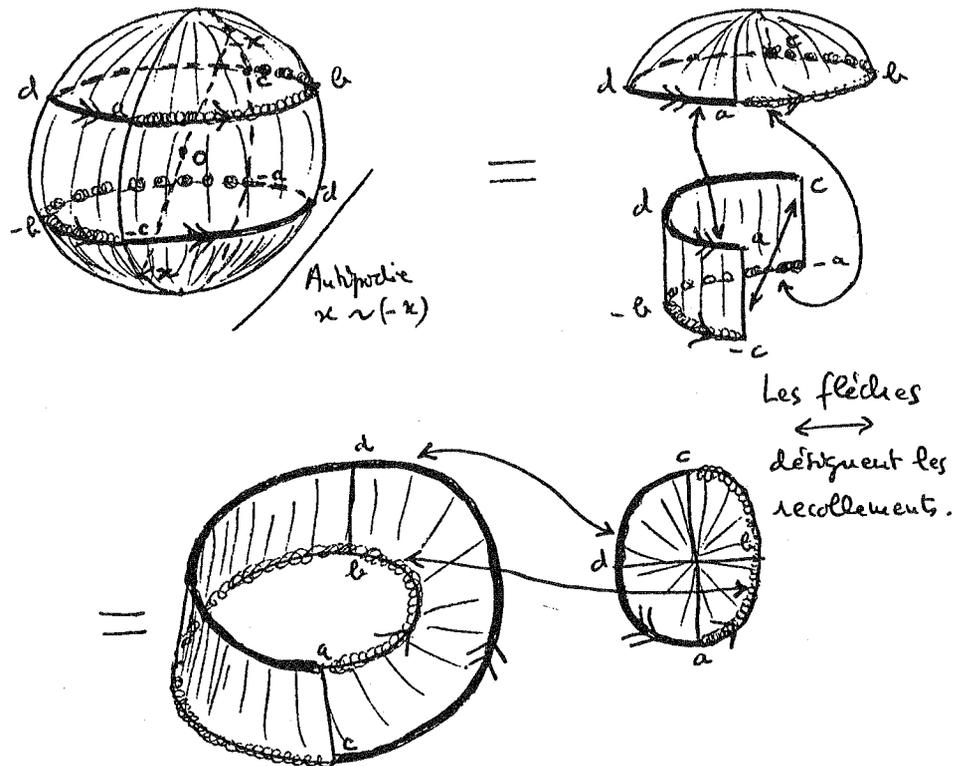


Figure 2.6

Cette représentation permet de comprendre comment 3 droites projectives (donc homéomorphes à des cercles), par exemple celles d'équations $x = 0$, $y = 0$ et $z = 0$, peuvent se couper deux à deux en un unique point.

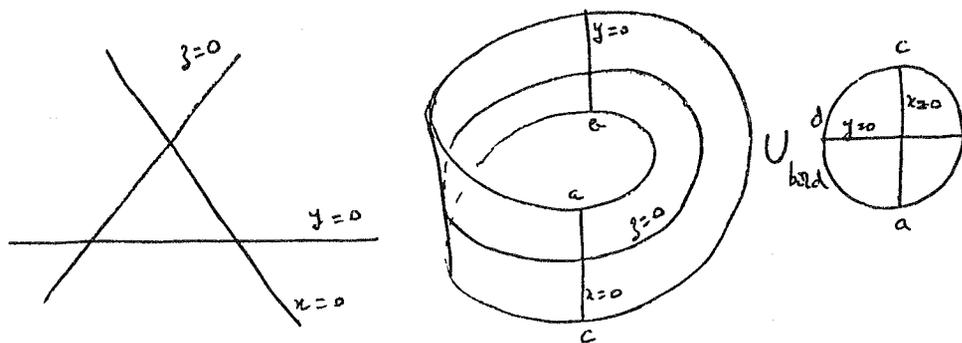


Figure 2.7

La figure suivante montre ce que devient une conique lorsqu'on la "projectivise", c'est-à-dire lorsqu'on lui ajoute ses "points à l'infini". On fait ceci en considérant l'adhérence du cône de sommet l'origine s'appuyant sur la conique supposée tracée dans le plan affine d'équation $z = 1$ de R^3 (domaine de la première carte de l'atlas canonique de $P_2(R)$). Autrement dit, on passe de l'équation $ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$ à l'équation homogène

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dxz + 2eyz + fz^2 = 0$$

qui définit un sous-ensemble de $P_2(R)$. On fera l'analyse locale au voisinage des points à l'infini après avoir explicité les changements de carte dans l'atlas canonique : on obtient ces derniers comme dans le cas de $P_1(R)$ en écrivant que les coordonnées homogènes $[x, y, 1]$, $[x', 1, y']$ et $[1, y'', z'']$ définissent le même point de $P_2(R)$.

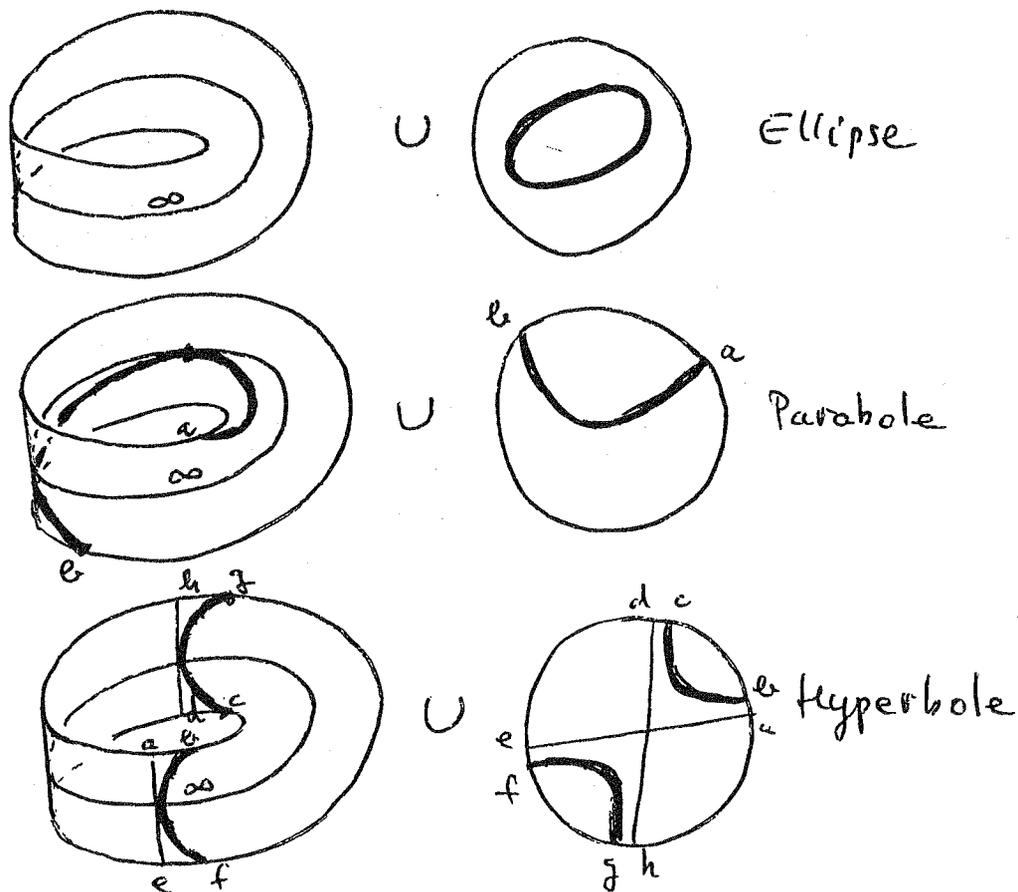


Figure 2.8

La figure 2.9 indique d'une part les lignes de niveau de la restriction à l'ellipsoïde d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$ de la fonction $x^2 + y^2 + z^2$ (on a supposé $a < b < c$), d'autre part les lignes de niveau de la fonction sur $P_2(\mathbb{R})$ qu'on obtient en passant au quotient par l'antipodie $(x, y, z) \mapsto (-x, -y, -z)$.

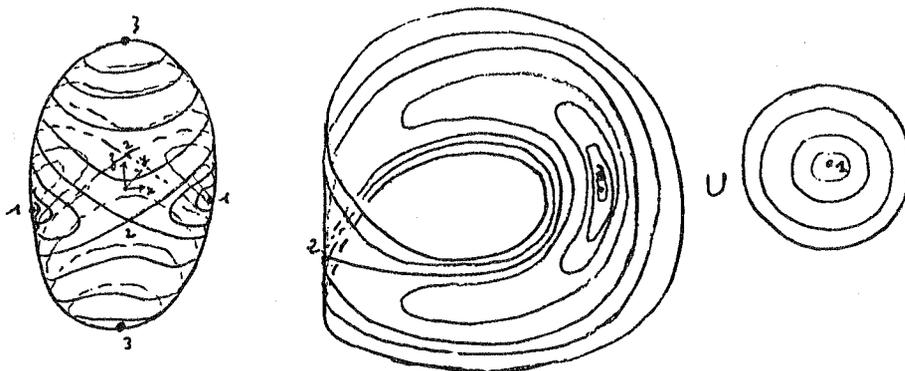


Figure 2.9

Enfin, la figure 2.10 représente les niveaux horizontaux d'une immersion de $P_2(\mathbb{R})$ dans \mathbb{R}^3 . On notera que la composition de cette immersion avec la "fonction hauteur" $(x, y, z) \mapsto z$ n'est autre que la fonction décrite sur la figure précédente.

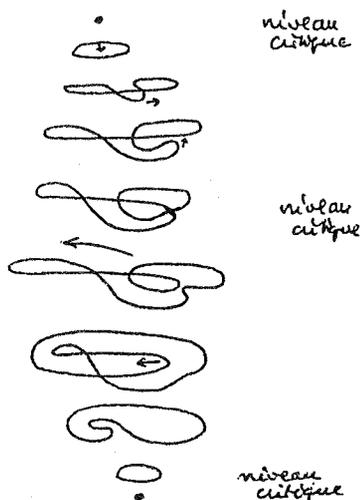


Figure 2.10

Lecture. Le paragraphe 47 du beau livre de Hilbert et Cohn-Vossen *Geometry and the Imagination*, édité par Chelsea. .

Terminons en indiquant le plongement de Véfonèse de $P_2(\mathbb{R})$ dans \mathbb{R}^4 : on vérifie que l'application de S^2 dans \mathbb{R}^4 définie par

$$(x, y, z) \mapsto (x^2 - y^2, xy, yz, zx)$$

passé au quotient par l'antipodie et définit un plongement.

est d'après le paragraphe 46⁷ heptacédrique !

L'espace projectif réel $P_3(R)$, variété analytique réelle de dimension 3, est difféomorphe au groupe $SO(3)$ des rotations de R^3 , donc également au fibré tangent unitaire T_1S^2 de la sphère S^2 . Voici des homéomorphismes dont je laisse au lecteur le soin de vérifier que ce sont en fait des difféomorphismes :

$$P_3(R) = D^3 / (\text{antipodie sur le bord}) \xrightarrow{\alpha} SO(3) \xrightarrow{\beta} T_1S^2.$$

Si $x = 0$, $\alpha(x) = \text{Identité}$; si $x \neq 0 \in D^3$ (boule unité de R^3), $\alpha(x)$ est la rotation d'axe la demi-droite vectorielle contenant x et d'angle $\pi\|x\|$. L'application passe au quotient par l'antipodie sur le bord de D^3 car $-\pi = \pi \pmod{2\pi}$. Quant à β , elle envoie la rotation \mathcal{R} sur le vecteur unitaire parallèle à $\mathcal{R}e_2$ tangent à S^2 au point $\mathcal{R}e_1$ (e_1, e_2, e_3 est la base orthonormée canonique de R^3).

Exercices. 1) Donner une description de $P_3(R)$ comme recollement sur leur bord, difféomorphe à S^2 , d'une boule D^3 et d'un voisinage tubulaire du plan projectif "à l'infini" $P_2(R)$ (fibré différentiable non trivial de base $P_2(R)$ et de fibre un intervalle fermé I , obtenu comme quotient par l'antipodie d'un voisinage tubulaire, difféomorphe à $S^2 \times I$, de l'équateur $x_4 = 0$ dans la sphère unité de R^4).

2) *Paradoxe du garçon de café* : l'image de l'application $[0, 1] \rightarrow SO(3)$ qui à t associe la rotation d'axe \vec{A} fixé et d'angle $2\pi t$ est un lacet qui ne peut être déformé continuellement dans $SO(3)$ en un lacet constant. Montrer qu'au contraire, le même lacet parcouru deux fois – i.e. considéré comme l'image de $[0, 2]$ par la même application – admet une telle déformation. C'est cette dernière propriété qui explique qu'un garçon de café puisse, sans se casser le bras, faire tourner de deux tours complets son plateau en le maintenant horizontal (on pourra, comme exercice complémentaire, dessiner le garçon de café). Mathématiquement c'est la traduction du fait que le groupe fondamental de $P_3(R) = SO(3)$ est d'ordre deux (voir n'importe quel livre de *Topologie algébrique*).

Terminons par le plan projectif complexe $P_2(C)$, qu'on étudie en "complexifiant" ce qu'on a fait pour $P_2(R)$. En particulier, $P_2(C)$ – variété analytique complexe de dimension deux (surface complexe) et donc variété analytique réelle de dimension quatre – s'obtient en recollant sur leur bord, difféomorphe à S^3 , une boule de dimension 4 et le bord d'un fibré en disques D^2 sur la sphère S^2 dont le fibré en sphères S^1 associé est la fibration de Hopf de S^3 sur $P_1(C) = S^2$ déjà rencontrée. Le plan projectif complexe est le lieu naturel de l'étude des courbes algébriques planes : considérée comme une sous-variété analytique réelle de dimension deux, une courbe non-singulière définie par un polynôme homogène $P(x, y, z)$ de degré d est une surface orientable de genre $\frac{(d-1)(d-2)}{2}$.

$$\mathcal{V}_P(V) = \{ \varphi \in \mathcal{O}_P(V) \mid \varphi = \frac{F}{G}, F(P) = 0 \}.$$

1.4. TRAUCTION AFFINE ↔ PROJECTIF : HOMOGENEISATION ET DEHOMOGENEISATION.

$$\varphi_{n+1} : K^n \rightarrow U_{n+1} \subset P_n(K) \quad (\text{voir 3.1.2 (2)})$$

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_n, 1)$$

On appellera hyperplan de l'infini le sous-espace d'équation $x_{n+1} = 0$ (complémentaire de U_{n+1}).

DICTIONNAIRE

$$F_* \in K[X_1, \dots, X_n] \quad \longleftarrow \quad F \text{ homogène} \in K[X_1, \dots, X_{n+1}]$$

$$\text{défini par } F_*(X_1, \dots, X_n) = F(X_1, \dots, X_n, 1)$$

$$f = \sum_{i=0}^d f_i \in K[X_1, \dots, X_n] \quad \longrightarrow \quad f^* \text{ homogène} \in K[X_1, \dots, X_{n+1}]$$

$$\text{avec } f_i \text{ homogène de degré } i \quad \longrightarrow \quad \text{défini par } f^* = \sum_{i=0}^d X_{n+1}^{d-i} f_i$$

$$C \subset K^n, \quad \mathcal{J} = I(C) \quad \longrightarrow \quad E^* = \mathcal{V}(\mathcal{J}^*), \text{ où } \mathcal{J}^* = \{f^* \mid f \in \mathcal{J}\}$$

$$C_* = \mathcal{V}(\mathcal{J}^*), \text{ où } \mathcal{J}^* = \{F_* \mid F \in \mathcal{J}\} \longleftarrow E \subset P_n(K), \mathcal{J} = I(E)$$

Le passage de $P_n(K)$ à K^n est une restriction à U_{n+1} (et passage en coordonnées affines).

Le passage de K^n à $P_n(K)$ est une compactification par addition de points à l'infini judicieux.

Les propriétés évidentes des opérations $F \mapsto F_*$ et $f \mapsto f^*$ sont laissées en exercice (voir Fulton, p. 96, 97).

Nous aurons en particulier besoin de la suivante :

LEMME 3.4.1 - Soit V une variété affine.

Il existe un isomorphisme naturel

$$\alpha : K(V^*) \xrightarrow{\cong} K(V)$$

qui induit, pour tout $P \in V$, un isomorphisme

$$\alpha : \mathcal{O}_P(V^*) \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_P(V)$$

(où P est identifié à $\varphi_{n+1}(P) \in V^*$).

Démonstration : $\alpha : \Gamma_n(V^*) \longrightarrow \Gamma(V)$ est défini par

$$\alpha(f) = f_*, \text{ où}$$

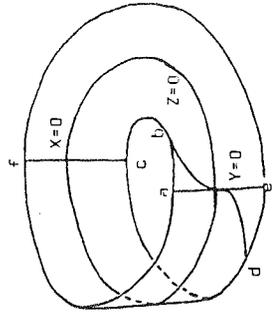
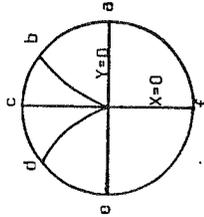
f_* = classe modulo $I(V)$ de F_* , où $F_* \in K[X_1, \dots, X_{n+1}]$ est un polynôme homogène dont la classe modulo $I(V^*)$ est f (On a supposé f homogène, ce qui est licite d'après le début de 3.3).

La fin de la démonstration est facile. ■

En conclusion, les problèmes locaux dans $P_n(K)$ se traitent en fait dans K^n .

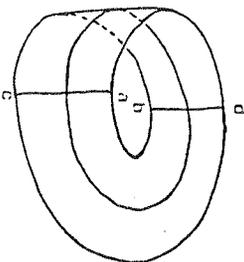
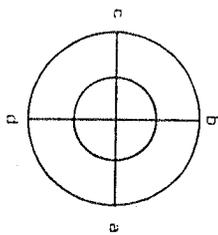
Exemples d'homogénéisation en réel.

$$1) X^2 - Y^3 = 0 \text{ donne } X^2Z - Y^3 = 0$$

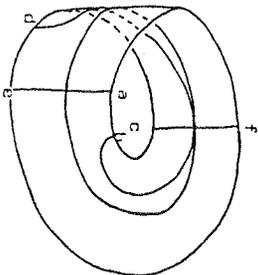
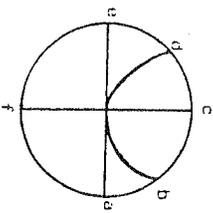


2) Cônes (indistinguable dans le projectif).

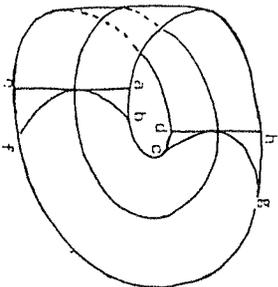
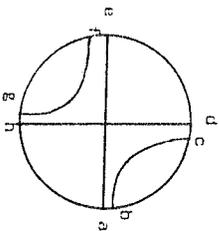
1) $X^2 + Y^2 - 1 = 0$ donne $X^2 + Y^2 - Z^2 = 0$



11) $Y - X^2 = 0$ donne $YZ - X^2 = 0$



111) $XY - 1 = 0$ donne $XY - Z^2 = 0$



CHAPITRE IV

COURBES PROJECTIVES PLANES : LE THEOREME DE BEZOUT.

4.1. QUELQUES EXEMPLES.

On commence par reprendre les définitions données pour les courbes planes affines. Une courbe plane projective sera une classe d'équivalence de polynômes homogènes non identiquement nuls dans $K[X, Y, Z]$, pour la relation $F \sim G$ s'il existe $\lambda \in K, \lambda \neq 0$, tel que $G = \lambda F$.

Grâce à 3.4.1 et 2.3.9, on voit tout de suite que la multiplicité d'un point sur une courbe projective peut se définir en déhomogénéisant, et est invariante par changement de coordonnées projectives :

En particulier, la notion de point régulier garde un sens. Une courbe F sera dite régulière si tous ses points sont réguliers. Ceci équivaut à $\frac{\partial F}{\partial X} \cdot \frac{\partial F}{\partial Y} \cdot \frac{\partial F}{\partial Z}$ ne s'annulent pas simultanément sur $P^1(K)$.

Remarquons qu'une courbe projective régulière est forcément irréductible (les points d'intersection des composantes seraient singuliers) ; ceci est faux en affine (droites parallèles).

Exercice 4.1.0 - Equation de la tangente à une courbe plane projective en un point régulier.

Remarque 4.1.1 - L'ensemble des courbes projectives planes de degré d définies sur K est de façon naturelle en correspondance avec $P^{N-1}(K)$, où $N = \frac{1}{2}(d+1)(d+2)$. Il suffit en effet de compter le nombre N de coefficients d'un polynôme à 3 indéterminées, homogène de degré d .

On peut montrer que l'ensemble des courbes régulières de degré d correspond au complémentaire d'un sous-ensemble algébrique strict de $P^{N-1}(K)$.

Si $K = \mathbb{C}$, le complémentaire d'un sous-ensemble algébrique strict de $P^{N-1}(\mathbb{C})$ est connexe. Autrement dit, étant données deux courbes projectives planes régulières, on peut déformer continûment l'une dans l'autre à travers des courbes régulières !

Ce fait a une conséquence importante : au point de vue géométrique, une courbe algébrique plane régulière définie sur \mathbb{C} est une variété (surface) différentiable orientable connexe compacte de dimension deux (autrement dit un "tore à g trous", où g est le genre de la surface : voir Lefschetz, Topology).

Comme la topologie d'une surface ne peut varier continûment que si l'on passe par des surfaces ayant des singularités, (voir le théorème de submersion d'Ehresmann) on obtient

THEOREME 4.1.3 - Deux courbes projectives planes complexes régulières de même degré sont difféomorphes.

Pour comprendre la structure d'une telle courbe de degré d, il suffit d'étudier la plus simple d'entre elles, par exemple celle d'équation

$$F_d = X^d + Y^d + Z^d.$$

C'est ce que nous allons faire pour $d = 1, 2, 3$.

Si $d = 1$, F_1 définit une droite projective : par changement de coordonnées projectives, on se ramène à $F = X$, ce qui permet de mettre en bijection la courbe définie par F et $P_1(\mathbb{C}) \cong S^2$. Dans ce cas, le genre est donc zéro.

Si $d \geq 2$, on fait les remarques suivantes :

Puisque la courbe C d'équation $X^d + Y^d + Z^d$ ne contient pas le point $(0, 1, 0)$ (point "à l'infini" dans la direction de l'axe des Y), on peut considérer la restriction à C de l'application

$$\Pi : P_2(\mathbb{C}) - \{(0, 1, 0)\} \rightarrow P_1(\mathbb{C})$$

définie par $\Pi(X, Y, Z) = (X, Z)$.

Si $(X_0, Z_0) \in P_1(\mathbb{C})$ vérifie $X_0^d + Z_0^d \neq 0$, $\Pi^{-1}(X_0, Z_0) \cap C$ est formé de d points et on déduit immédiatement du théorème des fonctions implicites que l'image réciproque par Π d'un petit disque de centre (X_0, Z_0) est la réunion de d disques disjoints sur chacun desquels Π est un difféomorphisme (revêtement local à d feuilletés).

Si $(X_0, Z_0) \in P_1(\mathbb{C})$ vérifie $X_0^d + Z_0^d = 0$, $\Pi^{-1}(X_0, Z_0) \cap C$ est formé de l'unique point $(X_0, 0, Z_0)$.

On voit sans peine que l'image réciproque par Π d'un petit disque de centre (X_0, Z_0) est formée d'un seul disque, sur lequel Π se ramène à l'application $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ définie par $f(Z) = Z^d$.

On résume ceci dans la

PROPOSITION 4.1.4 - Si $C \subset P_2(\mathbb{C})$ est la courbe d'équation $X^d + Y^d + Z^d$,

$\Pi|_C : C \rightarrow P_1(\mathbb{C})$ est un revêtement de $P_1(\mathbb{C})$ à d feuilletés, ramifié en d points.

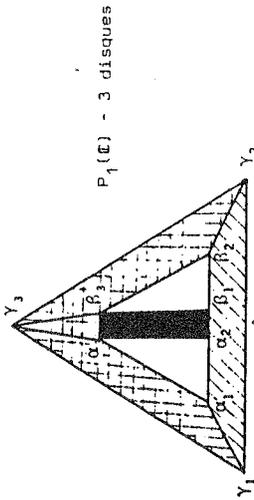
Exercice 4.1.5 - En déduire que la courbe d'équation $X^2 + Y^2 + Z^2$ est difféomorphe à la sphère S_2 et dessiner le revêtement $\Pi|_C : S_2 \rightarrow S_2$.

Etude du cas $d = 3$.

La figure 1 représente $P_1(\mathbb{C})$ auquel on a ôté trois petits disques centrés aux points solution de $X^3 + Z^3 = 0$.

La figure 2 représente l'image réciproque de la figure 1 par l'application $\Pi|_C$. La triangulation aide à construire cette image réciproque.

FIGURE 1



P1(C) - 3 disques

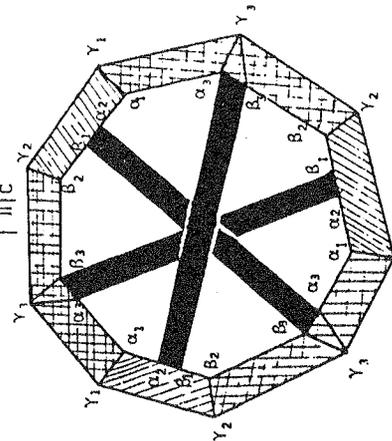
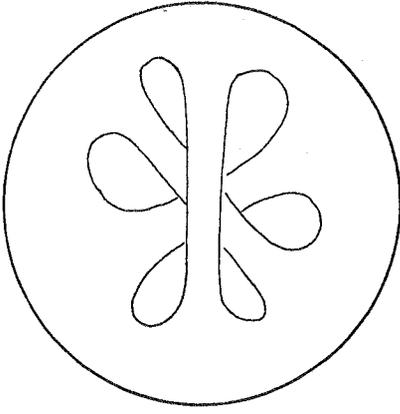


FIGURE 2

C - 3 disques

On constate facilement que c'est la seule possibilité compte tenu de ce que l'image réciproque de chacun des cercles $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ doit être un cercle. Si on oublie la triangulation, on voit donc que C - 3 disques est difféomorphe à la surface (à bord) représentée sur la figure 3.

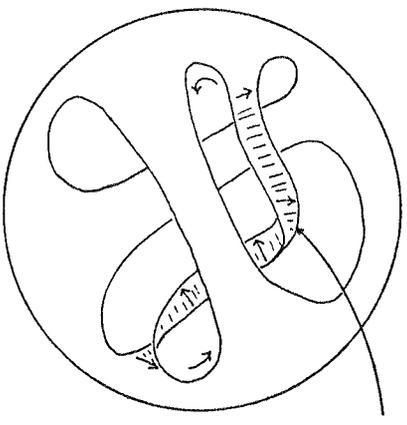
FIGURE 3



C-3 disques

Voici un autre plongement dans \mathbb{R}^3 de cette surface :

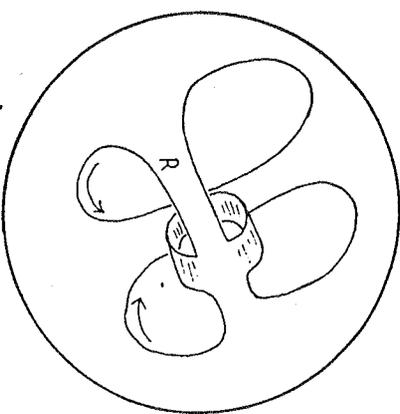
FIGURE 4



ce ruban est tordu deux fois.

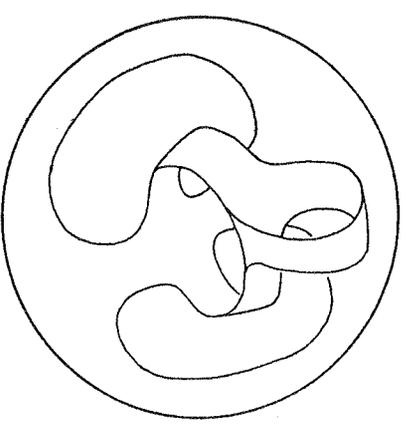
En rapprochant les extrémités du ruban tordu suivant les flèches (Fig. 4), on obtient la surface (difféomorphe) de la figure 5 :

FIGURE 5



En rapprochant les extrémités du ruban R suivant les flèches (Fig. 5), on obtient la surface difféomorphe de la figure 6 (noter que cette opération "retourne" R et donc aussi le ruban qu'il porte).

FIGURE 6



Courage, voici venir la lumière sous la forme des figures 7 et 8 représentant des plongements de $C - 3$ disques dans R^3 équivalents à celui de la figure 6.

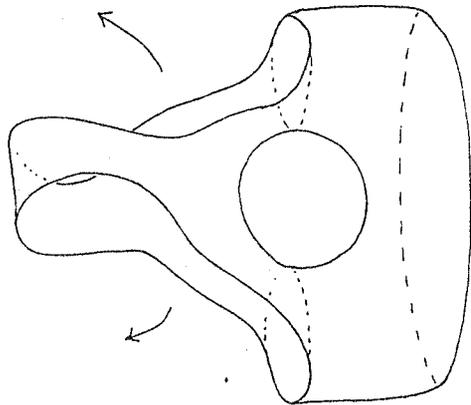


FIGURE 7

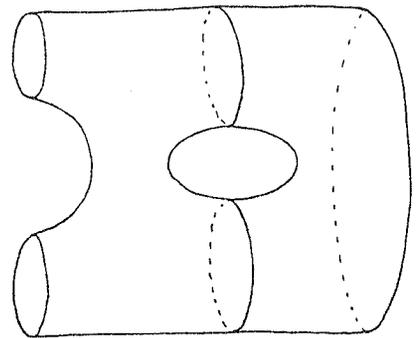


FIGURE 8

COURBES ALGÈBRIQUES PLANES

On reconnaît maintenant que $C \cong T_2$ (T_2 = surface de genre 1 = $S_1 \times S_1$).

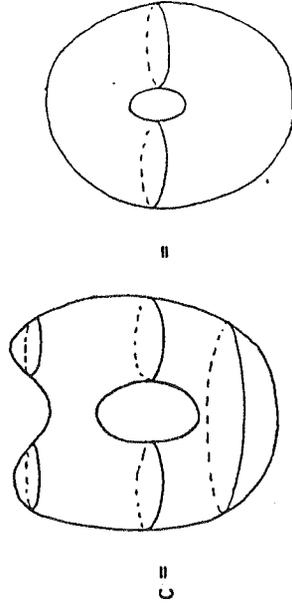


FIGURE 9

Plus généralement, la proposition 4.1.4 jointe à la notion de caractéristique d'Euler-Poincaré d'un polyèdre (voir n'importe quel livre de Topologie algébrique) permet de montrer le

THEOREME 4.1.5 - Une courbe projective plane complexe non singulière de degré d est une "surface de genre $\frac{(d-1)(d-2)}{2}$ ". On dit que $g = \frac{(d-1)(d-2)}{2}$ est le genre de C .

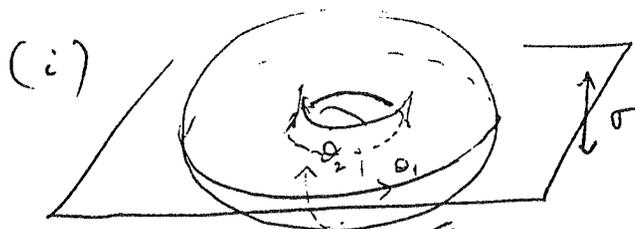
Remarque 4.1.6 - La topologie de la partie réelle d'une courbe projective plane complexe non singulière de degré d pose des problèmes difficiles. Chaque composante connexe est une sous-variété compacte de dimension 1 de $P^2(\mathbb{R})$ et est donc homéomorphe à un cercle (ces composantes sont appelées des ovals). Le théorème de Harnack (voir Shafarevitch) affirme qu'il y a au plus $\frac{(d-1)(d-2)}{2} + 1$ composantes connexes : la démonstration est homologique mais la borne se comprend facilement si on pense que la courbe réelle n'est autre que l'ensemble des points fixes de la courbe complexe (surface de genre $\frac{(d-1)(d-2)}{2}$) par l'involution induite par la conjugaison complexe. La disposition des ovals est un problème difficile.

4.2. LE THEOREME DE BEZOUT. (1ère démonstration)

Donner une solution à l'équation $X^2 + 1$ avait suffi pour donner m solutions (comptées avec multiplicités) à toute équation de degré m ; donner un point d'intersection à deux droites quelconques suffit alors pour donner mn points d'intersection (comptés avec multiplicités) à deux courbes de degrés respectifs m et n (penser à l'intersection de m droites avec n droites).

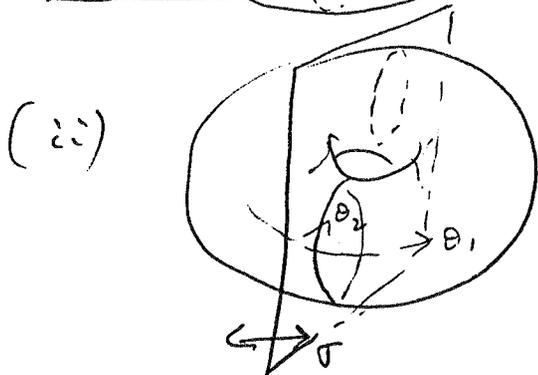
Compléments :

① Exemples d'involution du tde $\mathbb{T}^2 = S^1 \times S^1$: $\sigma^2 = \text{Id}$



$$\sigma(\theta_1, \theta_2) = (\theta_1, -\theta_2)$$

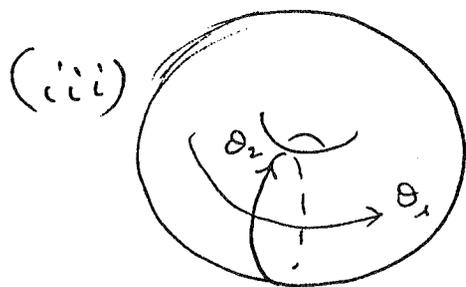
Fix $\sigma = 2$ cercles



$$\sigma(\theta_1, \theta_2) = (-\theta_1, \theta_2)$$

Fix $\sigma = 2$ cercles

c'est la même que (i) à un changement de coordonnées près



$$\sigma(\theta_1, \theta_2) = (2\pi - \theta_1, \theta_2 + \theta_1)$$

Fix $\sigma = 1$ cercle

un peu plus difficile à voir car elle ne provient pas d'une involution de \mathbb{R}^2

Question (pas facile) : A quoi ressemble l'involution définie sur le tde $(x^2 + y^2 + z^2 = 0) \subset \mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ par la conjugaison complexe $[x, y, z] \mapsto [\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}]$?

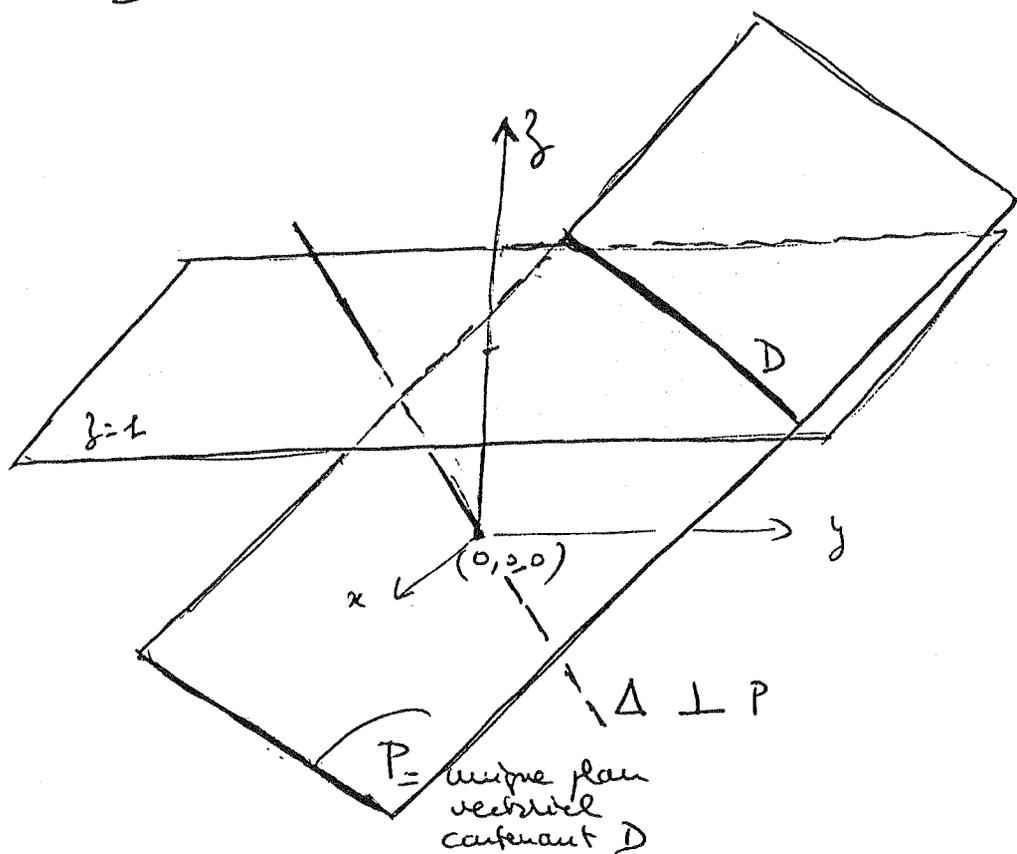
Question (facile) : 1) Trouver une involution du tde dont l'ensemble des points fixes soit discret.
2) Trouver une involution du tde sans point fixe.

Compléments :

(2)

L'ensemble A des droites affines du plan s'identifie naturellement au complémentaire d'un point dans le plan projectif, c'est-à-dire à une bande de Moebius ouverte.

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \setminus \{\text{droite } o_2\} \\ D & \longmapsto & \Delta \end{array}$$

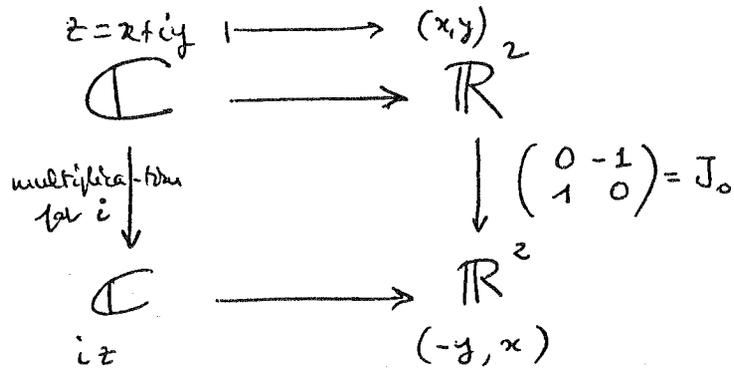


La correspondance $\Delta \leftrightarrow P$ est un exemple de dualité parfaite (remplacement de droites par des hyperplans et réciproquement).

En l'absence de produit scalaire sur l'espace ambiant (ici \mathbb{R}^3) on associe à un hyperplan P la droite de $(\mathbb{R}^3)^*$ formée des formes linéaires sur \mathbb{R}^3 ayant P pour noyau.

3 - Calculs en complexe

1) **Structure complexe.** Sur \mathbb{R}^2 , la structure complexe canonique est donnée par la matrice $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ qui, dans l'identification naturelle à \mathbb{C} , devient la multiplication par i :



Sur un espace vectoriel réel E de dimension deux, une *structure complexe* est la donnée d'un isomorphisme linéaire J tel que $J^2 = -\text{Identité}$ (*antiinvolution*). Ceci équivaut (exercice) à l'existence d'une base dans laquelle J soit représenté par la matrice $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, c'est-à-dire à l'existence d'un \mathbb{R} -isomorphisme de \mathbb{C} sur E qui transforme J en la multiplication par i .

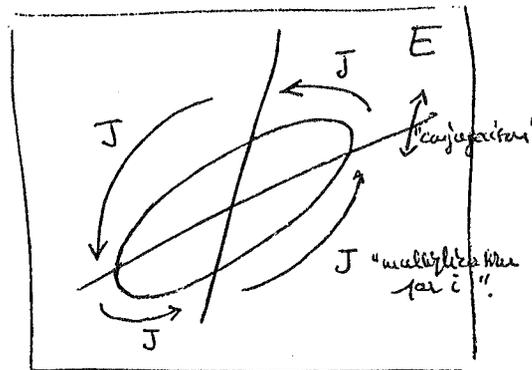
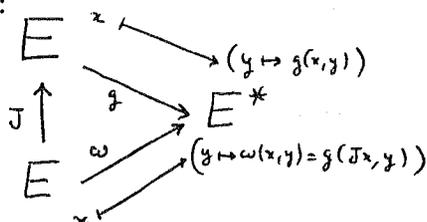


Figure 3.1

La même définition vaut pour un espace vectoriel réel E de dimension paire $2n$: munir E d'une structure complexe revient à choisir un \mathbb{R} -isomorphisme de \mathbb{C}^n sur E qui transforme J en la multiplication par i .

2) **Structure hermitienne.** C'est la donnée sur un même espace vectoriel E , nécessairement de dimension paire, de trois structures compatibles : une structure euclidienne g , une structure symplectique ω et une structure complexe J :

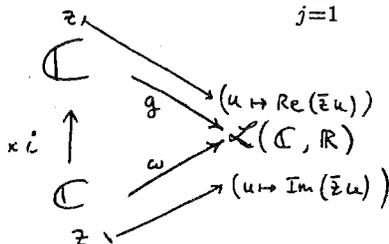


Par définition, les isomorphismes g et ω sont respectivement symétrique ($g = {}^t g$) et antisymétrique ($\omega = -{}^t \omega$). Leur donnée équivaut à celle de formes bilinéaires non dégénérées, respectivement symétrique et antisymétrique, sur l'espace vectoriel E . L'antisymétrie de $\omega = g \circ J$ équivaut à ce que J préserve le produit scalaire euclidien g , donc également le produit scalaire ω :

$$g(X, Y) = g(JX, JY), \quad \omega(X, Y) = \omega(JX, JY).$$

Le modèle d'une telle structure est bien entendu \mathbb{C}^n avec sa structure complexe canonique et, pour structures euclidienne et symplectique respectivement la partie réelle et la partie imaginaire du produit scalaire hermitien :

$$((z_1, \dots, z_n) | (u_1, \dots, u_n)) = \sum_{j=1}^n \bar{z}_j u_j \in \mathbb{C}.$$



Si X et Y sont deux éléments de \mathbb{C}^n , $g(X, Y)$ est donc le produit scalaire des éléments correspondants de \mathbb{R}^{2n} ,

$$g((x_1 + iy_1, \dots, x_n + iy_n), (v_1 + iw_1, \dots, v_n + iw_n)) = \sum_{j=1}^n x_j v_j + \sum_{j=1}^n y_j w_j,$$

alors que $\omega(X, Y)$ est la somme des aires orientées des n parallélogrammes engendrés par les projections de X et Y sur chacune des droites complexes (donc plan réel) de coordonnées (dans \mathbb{R}^2 , c'est la valeur algébrique du produit vectoriel),

$$\omega((x_1 + iy_1, \dots, x_n + iy_n), (v_1 + iw_1, \dots, v_n + iw_n)) = \sum_{j=1}^n (x_j w_j - y_j v_j).$$

3) Groupes classiques. Les automorphismes des structures que nous venons d'introduire jouent un rôle fondamental en géométrie, en mécanique et en physique.

Le *groupe linéaire complexe* $GL(n, C)$ est le groupe des isomorphismes complexes de C^n . S'identifiant au groupe des matrices $n \times n$ à coefficients complexes de déterminant différent de 0, c'est un ouvert de $C^{n^2} = R^{2n^2}$ et donc une variété analytique réelle de dimension $2n^2$. Bien entendu, c'est un sous-groupe de $GL(2n, R)$ qui est lui, de dimension $4n^2$.

Le *groupe unitaire* $U(n)$ est le sous-groupe de $GL(n, C)$ formé des isomorphismes complexes de C^n qui préservent le produit scalaire hermitien :

$${}^t\bar{M}M = \text{Identité.}$$

C'est une sous-variété de dimension n^2 de $GL(n, C)$. On vérifie en effet que les $n(n-1)/2$ termes complexes supérieurs à la diagonale et les n termes réels appartenant à la diagonale de la matrice ${}^t\bar{M}M = \text{Identité}$ définissent une submersion sur R^{n^2} . La matrice $H = {}^t\bar{M}M$ est *hermitienne*, c'est-à-dire qu'elle vérifie ${}^t\bar{H} = H$. Elle est de plus définie positive : si $x \neq 0$, $(Hx|x) = (x|Hx) > 0$. Le sous-ensemble de ces matrices est difféomorphe à R^{n^2} . Le spectre d'une matrice hermitienne positive est réel positif, ce qui permet de définir uniquement sa racine carrée \sqrt{H} . La formule classique

$$M = UH, \quad U = M \left(\sqrt{{}^t\bar{M}M} \right)^{-1}, \quad H = \sqrt{{}^t\bar{M}M}$$

est la décomposition unique d'un élément M de $GL(n, C)$ en produit d'une matrice unitaire et d'une matrice hermitienne définie positive. En particulier, $GL(n, C)$ est difféomorphe au produit de $U(n)$ par R^{n^2} . Lorsque $n = 1$, c'est la décomposition d'une similitude quelconque du plan (multiplication par un nombre complexe non nul) en produit d'une rotation (multiplication par un nombre complexe de module 1) et d'une homothétie (multiplication par un nombre réel positif). Topologiquement, c'est le difféomorphisme "coordonnées polaires" du plan privé d'un point sur le produit du cercle par l'axe réel positif.

Le *groupe orthogonal* $O(2n)$ est le sous-groupe de $GL(2n, R)$ formé des isomorphismes de R^{2n} qui préservent le produit scalaire euclidien : c'est l'ensemble des matrices M réelles $2n \times 2n$ telles que ($I = \text{Identité}$)

$${}^tMIM = I.$$

Le *groupe symplectique* $Sp(2n)$ est le sous-groupe de $GL(2n, R)$ formé des isomorphismes de R^{2n} qui préservent le produit scalaire symplectique : c'est l'ensemble des matrices M réelles $2n \times 2n$ telles que

$${}^tMJM = J.$$

Bien entendu, $U(n) = O(2n) \cap Sp(2n)$.

3) **Applications holomorphes.** Soit $F : E_1 \rightarrow E_2$ une application dérivable entre deux espaces vectoriels E_1 et E_2 munis de structures complexes J_1 et J_2 . On dit que F est holomorphe (ou analytique complexe) si sa dérivée en chaque point commute avec ces structures :

$$\begin{array}{ccc} E_1 & \xrightarrow{dF(e)} & E_2 \\ J_1 \downarrow & & \downarrow J_2 \\ E_1 & \xrightarrow{dF(e)} & E_2 \end{array}$$

Identifiant E_1 et E_2 respectivement à C^n (coordonnées $z_j = x_j + iy_j$) et C^p et notant $F = f + ig$, on retrouve la définition

$$\begin{pmatrix} 0 & -\text{Id} \\ \text{Id} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\text{Id} \\ \text{Id} & 0 \end{pmatrix},$$

c'est-à-dire les classiques conditions de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\partial g}{\partial x}.$$

4) **Calculs en coordonnées z, \bar{z} .** C'est le calcul dans une base propre de J . Bien entendu, il faut pour cela "passer en complexe" c'est-à-dire non pas identifier R^2 à C , mais plonger R^2 dans C^2 en considérant x et y comme des variables complexes.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^2 & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{C}^2 \\ \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \downarrow & & \downarrow J \\ \mathbb{C}^2 & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{C}^2 \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \downarrow & & \downarrow \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \xrightarrow{\varphi} & \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1, -i) \\ \frac{1}{2}(1, i) \end{pmatrix} \end{array}$$

$z = x + iy$
 $w = x - iy$

Dans les nouvelles variables, R^2 devient le sous-ensemble $\varphi^{-1}(R^2)$ de C^2 défini par l'équation $w = \bar{z}$.

A une application linéaire $L(x, y) = ax + by$ de R^2 dans R , on associera sa complexifiée $L_C : C^2 \rightarrow C$ définie par la même matrice $\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$. Exprimée dans la base propre de J , c'est-à-dire dans les coordonnées (z, w) , cette dernière devient

$$L_C \circ \varphi(z, w) = \frac{1}{2}(a - ib)z + \frac{1}{2}(a + ib)w.$$

Si on ne s'intéresse qu'à l'application réelle L , on se limitera aux couples (z, w) tels que $w = \bar{z}$ et on se permettra d'écrire

$$L(x, y) = L(z) = \frac{1}{2}(a - ib)z + \frac{1}{2}(a + ib)\bar{z}.$$

Soit $f : R^2 \rightarrow R$ une application de classe C^1 ,

$$df(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)dy$$

sa dérivée, considérée comme une forme différentielle sur R^2 . Ce qui précède justifie l'écriture

$$df(x, y) = \frac{\partial f}{\partial z}(x, y)dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(x, y)d\bar{z},$$

où, par définition,

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right).$$

L'application $F = f + ig : C \supset \Omega \rightarrow C$ est holomorphe si et seulement si $\frac{\partial F}{\partial \bar{z}} = 0$ sur Ω , c'est-à-dire si $dF(z) = \frac{\partial F}{\partial z}(z)dz$. En effet,

$$\frac{\partial F}{\partial \bar{z}}(z) = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z) + i \frac{\partial g}{\partial \bar{z}}(z) = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial y} \right) + i \left(\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial x} \right) \right).$$

Tout ceci se généralise immédiatement aux dimensions supérieures. Enfin, rappelons que pour un espace vectoriel réel E sans base privilégiée, complexifier signifie remplacer E par son produit tensoriel par C , $E_C = E \otimes_R C$.

Pratique. Soit $F : C^n \supset \Omega \rightarrow C^p$ une application holomorphe. Pour vérifier que l'application réelle associée de $\Omega \subset R^{2n}$ dans R^{2p} est une submersion en un point, il suffit de vérifier que l'application C -linéaire $\frac{\partial F}{\partial z} : C^n \rightarrow C^p$ est de rang complexe p .

Deux bons livres :

Claude Chevalley, *Lie groups*, Princeton University press;
Emil Artin, *Geometric algebra*.

Structure locale de $F : (C, z_0) \rightarrow (C, F(z_0))$ holomorphe. Au voisinage d'un point régulier, c'est un difféomorphisme local qui de plus est conforme (il préserve les angles. En effet, sa dérivée est une similitude :

$$F(z) - F(z_0) \underset{z \rightarrow z_0}{\sim} a_1(z - z_0).$$

Au voisinage d'un point singulier, il existe un entier k , l'ordre du point singulier, tel que

$$F(z) - F(z_0) \underset{z \rightarrow z_0}{\sim} a_k(z - z_0)^k.$$

L'application est alors un revêtement à k feuillets ramifié en z_0 .

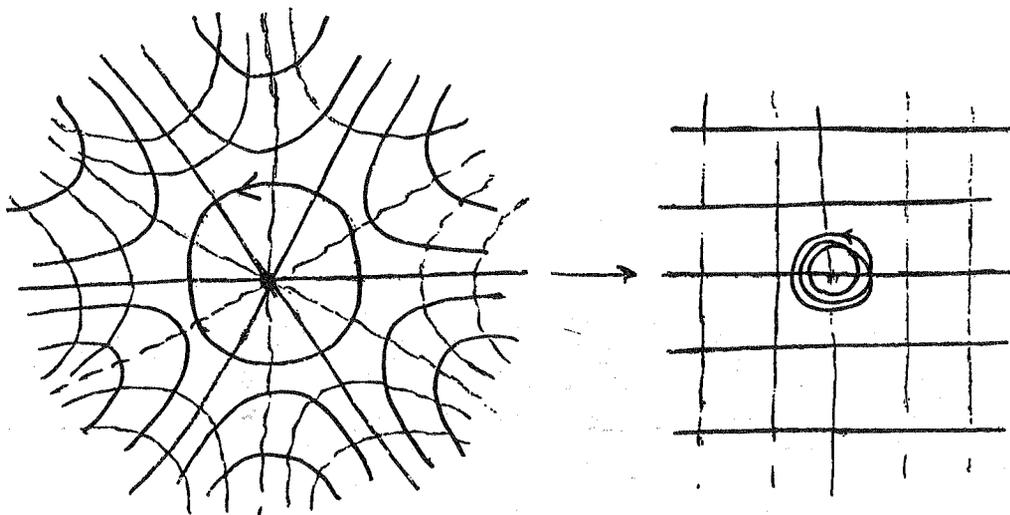


Figure 3.2

(A la source comme au but, les courbes en trait plein et les courbes en trait pointillé sont deux à deux orthogonales).

Rudiments de calcul tensoriel

M1 Géométrie et dynamique (A. Chenciner)

Résumé

Vecteurs, covecteurs, bivecteurs, formes bilinéaires, applications linéaires, tous ces êtres mathématiques sont des exemples de tenseurs. De même, les champs de vecteurs, les formes différentielles, les métriques riemanniennes ou lorentziennes, mais aussi l'application tangente à une application différentiable ou la courbure d'une connexion, sont des exemples de champs de tenseurs. *Dans ce qui suit, tous les espaces vectoriels sont supposés être de dimension finie, ce qui permet d'identifier systématiquement un espace vectoriel E à son bidual $E^{**} := (E^*)^*$.*

1 Tenseurs

Soient E_1, \dots, E_k des espaces vectoriels de dimension finie sur \mathbb{R} (rien n'empêche de choisir un autre corps), $E_i^* = \mathcal{L}(E_i, \mathbb{R})$ leurs duaux. Des applications linéaires $l_i \in E_i^*$ étant données, on définit leur *produit tensoriel* $l_1 \otimes \dots \otimes l_k$ comme étant la forme k -linéaire sur $E_1 \times \dots \times E_k$ définie par

$$(x_1, \dots, x_k) \mapsto l_1(x_1) \dots l_k(x_k).$$

Une telle forme k -linéaire est dite *décomposable*. Notons que $l_1 \otimes \dots \otimes l_k$ est k -linéaire non seulement par rapport aux x_i mais également par rapport aux l_i . Si $\{e_{1;1}, \dots, e_{1;d_1}\}, \dots, \{e_{k;1}, \dots, e_{k;d_k}\}$ sont des bases des E_i , et les e_i^j les éléments des bases duales, i.e. si $e_i^j(\sum_{j=1}^{d_i} x^j e_{i;j}) = x^j$, les $e_1^{i_1} \otimes \dots \otimes e_k^{i_k}$ forment une base de $\mathcal{L}_k(E_1 \times \dots \times E_k, \mathbb{R})$. En particulier, toute forme k -linéaire sur $E_1 \times \dots \times E_k$ s'écrit comme une combinaison linéaire $\sum l_1 \otimes \dots \otimes l_k$ de formes décomposables, ce qui justifie de donner à l'espace $\mathcal{L}_k(E_1 \times \dots \times E_k)$ des formes k -linéaires sur $E_1 \times \dots \times E_k$ le nom de *produit tensoriel* des espaces E_i^* et de le noter $E_1^* \otimes \dots \otimes E_k^*$.

Identifiant canoniquement un espace vectoriel de dimension finie E à son bidual E^{**} par l'isomorphisme d'évaluation $x \mapsto (l \mapsto l(x))$, on peut alors définir le *produit tensoriel* $E_1 \otimes \dots \otimes E_k$ des espaces vectoriels E_i comme l'espace vectoriel $\mathcal{L}_k(E_1^* \times \dots \times E_k^*, \mathbb{R})$ des formes k -linéaires sur $E_1^* \times \dots \times E_k^*$. Ce produit est associatif (et commutatif dans le sens où $E \otimes F$ et $F \otimes E$ sont canoniquement isomorphes). Comme ci-dessus, si les $\{e_{1;1}, \dots, e_{1;d_1}\}, \dots, \{e_{k;1}, \dots, e_{k;d_k}\}$ sont des bases des E_i , les éléments décomposables $e_{1;i_1} \otimes \dots \otimes e_{k;i_k}$ forment une base de $E_1 \otimes \dots \otimes E_k$, dont la dimension est ainsi le produit de celles des E_i .

D'un point de vue pratique, on retiendra :

Un tenseur $t \in E_1 \otimes \dots \otimes E_k$ **s'écrit comme somme d'éléments décomposables** $t = (x_1 \otimes \dots \otimes x_k) + (y_1 \otimes \dots \otimes y_k) + \dots$; **cette écriture n'est pas unique, la règle de calcul étant la linéarité de chacun des termes décomposables par rapport à ses facteurs :**

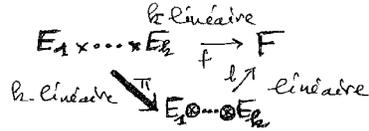
$$x_1 \otimes \dots \otimes (\lambda x'_i + \mu x''_i) \otimes \dots \otimes x_k = \lambda(x_1 \otimes \dots \otimes x'_i \otimes \dots \otimes x_k) + \mu(x_1 \otimes \dots \otimes x''_i \otimes \dots \otimes x_k).$$

L'unique application bilinéaire de $(E_1^* \otimes \dots \otimes E_k^*) \times (E_1 \otimes \dots \otimes E_k)$ dans \mathbb{R} qui à $l_1 \otimes \dots \otimes l_k$ et $x_1 \otimes \dots \otimes x_k$ fait correspondre $l_1(x_1) \dots l_k(x_k)$, met en dualité les espaces $E_1^* \otimes \dots \otimes E_k^*$ et $E_1 \otimes \dots \otimes E_k$. Autrement dit, $E_1 \otimes \dots \otimes E_k$ peut être défini à isomorphisme près par l'identité

$$\mathcal{L}(E_1 \otimes \dots \otimes E_k, \mathbb{R}) = \mathcal{L}(E_1 \times \dots \times E_k, \mathbb{R}).$$

C'est en fait la définition générale, qui vaut également en dimension infinie : le produit tensoriel est caractérisé à isomorphisme près par la *propriété universelle* suivante : si $\pi \in \mathcal{L}_k(E_1 \times \dots \times E_k, E_1 \otimes \dots \otimes E_k)$ est l'application k -linéaire définie par $\pi(x_1, \dots, x_k) = x_1 \otimes \dots \otimes x_k$, toute application k -linéaire f de $E_1 \times \dots \times E_k$ dans un espace vectoriel F se factorise en la composée $f = l \circ \pi$ avec π d'une application linéaire l de $E_1 \otimes \dots \otimes E_k$ dans F uniquement définie. Autrement dit :

Le produit tensoriel est une machine à transformer applications k -linéaires en applications linéaires.



Les applications linéaires sont des tenseurs. On a en effet les identifications canoniques

$$E^* \otimes F \equiv (E \otimes F^*)^* \equiv \mathcal{L}_2(E \times F^*, \mathbb{R}) \equiv \mathcal{L}(E, F^{**}) \equiv \mathcal{L}(E, F).$$

Dans ce langage, la transposition $\mathcal{L}(E, F) \rightarrow \mathcal{L}(F^*, E^*)$ devient, après identification de F^{**} à F , la permutation des facteurs $E^* \otimes F \rightarrow F \otimes E^*$.

Contractions. Des opérations de *contraction* sont induites par la mise en dualité de certains couples (E, E^*) . Lorsque les facteurs E_i sont tous des exemplaires d'un même espace E et de son dual E^* , on parle de *tenseurs r fois contravariants et s fois covariants* s'il y a r exemplaires de E et s exemplaires de E^* . Voici des exemples :

1) La contraction des facteurs E^* et E dans $(E^* \otimes F) \otimes E \equiv \mathcal{L}(E, F) \otimes E$ associe à $l \in \mathcal{L}(E, F)$ et $x \in E$ l'élément $l(x) \in F$. De même, la contraction des couples (E^*, E) et (F^*, F) dans $(E^* \otimes F^*) \otimes E \otimes F$ associe à la forme bilinéaire $b \in \mathcal{L}_2(E \times F, \mathbb{R})$ et aux vecteurs $x \in E, y \in F$, le réel $b(x, y)$.

2) Si $E = F$, la contraction $\mathcal{C}(t)$ de $t = l \otimes x + l' \otimes x' + \dots \in E^* \otimes E$ est le nombre réel $\mathcal{C}(t) = l(x) + l'(x') + \dots$, c'est-à-dire la *trace* de l'homomorphisme qui correspond à t dans l'identification canonique décrite ci-dessus de $E^* \otimes E$ à $\mathcal{L}(E, E)$.

3) La contraction des facteurs E^* et E d'une part, F^* et F d'autre part, dans $(E^* \otimes F) \otimes (E \otimes F^*) \equiv \mathcal{L}(E, F) \otimes \mathcal{L}(E^*, F^*)$ met $\mathcal{L}(E, F)$ et $\mathcal{L}(E^*, F^*)$ en dualité par l'application $(\varphi, \psi) \mapsto \text{trace}({}^t\psi \circ \varphi)$.

Coordonnées : indices contravariants et indices covariants.

Soit $\{e_1, \dots, e_p\}$ une base de E et $\{e^1, \dots, e^n\}$ la base duale. Des éléments $x \in E$ et $l \in E^*$ s'écrivent $x = \sum_{j=1}^n x^j e_j$, $l = \sum_{j=1}^n l_j e^j$, où nous avons pris soin de noter en haut les indices contravariants et en bas les indices covariants. Cette terminologie a son origine dans la manière dont se comportent les coordonnées lors d'un changement de base (se rappeler que, si les vecteurs de base e_i sont des éléments de E , les "fonctions coordonnées" $e^j : x = \sum x^i e_i \mapsto e^j(x) = x^j$ sont des éléments de E^*) :

$$\tilde{e}_i = \sum_{j=1}^n A_i^j e_j \text{ et } \sum_{i=1}^n \tilde{x}^i \tilde{e}_i = \sum_{j=1}^n x^j e_j \text{ impliquent } x^j = \sum_{i=1}^n A_i^j \tilde{x}^i.$$

Si l'indice est covariant, la matrice de passage est la même que pour les vecteurs de base, s'il est contravariant c'est la matrice contragrédiente (transposée de l'inverse). Bien entendu, dans le passage de E à E^* , les rôles des vecteurs de base et des coordonnées sont inversés.

Convention de sommation d'Einstein. Elle consiste en l'élimination des signes de sommation, la règle étant qu'une sommation doit être effectuée dès qu'un même indice apparaît à la fois en position supérieure et inférieure. Par exemple, $x^i e_i$ signifie $\sum_{i=1}^n x^i e_i$. Cette règle rend particulièrement simple l'expression des contractions et donc toutes les opérations naturelles. Explicitons ceci sur les trois exemples ci-dessus :

Soit $\{e_1, \dots, e_p\}$ une base de E , $\{f_1, \dots, f_p\}$ une base de F , et soient $\{e^1, \dots, e^n\}$ et $\{f^1, \dots, f^p\}$ les bases duales. Un élément $u \in E^* \otimes F$ s'écrit

$$u = u_i^j e^i \otimes f_j.$$

Il lui correspond l'élément de $(E \otimes F^*)^*$

$$x^i e_i \otimes y_j f^j \mapsto u_i^j x^i y_j,$$

l'élément de $\mathcal{L}_2(E \times F^*, \mathbb{R})$

$$(x^i e_i, y_j f^j) \mapsto u_i^j x^i y_j,$$

l'élément de $\mathcal{L}(E, \mathcal{L}(F^*, \mathbb{R}))$

$$x^i e_i \mapsto [y_j f^j \mapsto u_i^j x^i y_j],$$

et enfin l'élément de $\mathcal{L}(E, F)$ représenté dans les bases ci-dessus par la matrice des u_i^j (j est l'indice de ligne et i celui de colonne). On retiendra :

La matrice $(u_i^j)_{\substack{\text{lignes } j \\ \text{colonnes } i}}$ correspond au tenseur $u_i^j e^i \otimes f_j$. Quant à la matrice transposée elle correspond au tenseur $u_i^j f_j \otimes e^i$.

Par exemple, l'application (linéaire en \dot{q}) de Legendre du Lagrangien $L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} g_{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j$ associé à une métrique riemannienne sur un ouvert Ω de \mathbb{R}^n , n'est autre, au point q , que le tenseur

$$g_{ij}(q) e^i \otimes e^j \in T_q^* \Omega \otimes T_q^* \Omega$$

de la métrique riemannienne elle-même. C'est un exemple des champs de tenseurs étudiés dans le paragraphe suivant. Revenant aux exemples, on vérifie que

1) la contraction $u_i^j x^i \langle e^i, e_i \rangle f_j = u_i^j x^i f_j$ de $u_i^j e^i \otimes f_j \otimes x^k e_k$ est bien la valeur de l'endomorphisme u sur le vecteur x ; de même, la contraction $b_{ij} x^i y^j \langle e^i, e_i \rangle \langle f^j, f_j \rangle = b_{ij} x^i y^j$ de $b_{ij} e^i \otimes f^j \otimes x^k e_k \otimes y^l f_l$ est la valeur de la forme bilinéaire b sur le couple de vecteurs (x, y) . Par exemple, étant donnée une fonction dérivable $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ et une métrique riemannienne, on a

$$df(q) = \frac{\partial f}{\partial q^j}(q) e^j = g_{ij}(q) X^i(q) e^j, \quad \text{où } \text{grad} f(q) = X^i(q) e_i;$$

2) si $E = F$, la contraction $u_i^i \langle e^i, e_i \rangle = u_i^i$ de $u_i^j e^i \otimes e_j$ est bien la trace de l'endomorphisme correspondant;

3) la contraction $u_i^j v_j^i \langle e^i, e_i \rangle \langle f_j, f^j \rangle = u_i^j v_j^i$ de $u_i^j v_l^k e^i \otimes f_j \otimes e_k \otimes f^l$ est bien la trace de l'endomorphisme ${}^t\psi \circ \varphi$ qui correspond au tenseur $u_i^j v_j^k e^i \otimes e_k$.

Isomorphismes musicaux. La donnée d'une forme bilinéaire non dégénérée $g \in E^* \otimes E^*$ sur l'espace vectoriel E équivaut à celle d'un isomorphisme de E sur E^* , noté en général \flat , l'inverse étant noté \sharp . En coordonnées, ces dénominations s'éclairent car elles correspondent respectivement à la descente et à la montée des indices :

$$(x^i e_i)^\flat = g_{ij} x^i e^j, \quad (x_j e^j)^\sharp = g^{ij} x_j e_i, \quad \text{où } g_{ij} g^{ik} = \delta_j^k.$$

2 Algèbre tensorielle et algèbre extérieure.

Les notations sont celles de Bourbaki (algèbre multilinéaire).

L'algèbre tensorielle. Étant donné un espace vectoriel E de dimension finie sur \mathbb{R} , on appelle *algèbre tensorielle* de E la somme directe

$$T(E) = \mathbb{R} \oplus E \oplus (\otimes^2 E) \oplus \cdots \oplus (\otimes^p E) \oplus \cdots,$$

munie des opérations de somme directe et de produit tensoriel (la notation $\otimes^p E$ désigne le produit tensoriel de p exemplaires de E).

L'algèbre extérieure. On appelle *puissance extérieure p -ième* de E le quotient $\wedge^p E$ de $\otimes^p E$ par le sous-espace vectoriel engendré par les tenseurs décomposables $x_1 \otimes \cdots \otimes x_p$ pour lesquels deux des x_i au moins sont égaux. On note $x_1 \wedge x_2 \wedge \cdots \wedge x_p$ la classe d'équivalence de $x_1 \otimes x_2 \otimes \cdots \otimes x_p$ dans le quotient.

Les éléments de $\wedge^p E$ sont appelés des *p -vecteurs* sur E . L'application $(x_1, \cdots, x_p, y_1, \cdots, y_q) \mapsto x_1 \wedge \cdots \wedge x_p \wedge y_1 \wedge \cdots \wedge y_q$ de $E^p \times E^q$ dans $\wedge^{p+q} E$ est multilinéaire alternée par rapport à E^p et par rapport à E^q ; elle se factorise donc à travers une application bilinéaire de $\wedge^p E \times \wedge^q E$ dans $\wedge^{p+q} E$: c'est le *produit extérieur* d'un p -vecteur et d'un q -vecteur. L'*algèbre extérieure* de E est la somme directe

$$\wedge E = \mathbb{R} \oplus E \oplus \wedge^2 E \oplus \cdots \oplus \wedge^p E \oplus \cdots$$

munie des opérations de somme directe et de produit extérieur (on convient que le produit extérieur d'un scalaire et d'un p -vecteur est la multiplication du p -vecteur par le scalaire).

Quotient ou sous-espace ? A toute permutation σ de $\{1, 2, \dots, p\}$ on associe l'isomorphisme de $\otimes^p E$ défini à partir de l'application multilinéaire de E^p dans $\otimes^p E$

$$(x_1, x_2, \dots, x_p) \mapsto (x_{\sigma^{-1}(1)}, x_{\sigma^{-1}(2)}, \dots, x_{\sigma^{-1}(p)}).$$

On le note $z \mapsto \sigma z$; on définit alors un endomorphisme d'*antisymétrisation*

$$\mathbf{a} : \otimes^p E \rightarrow \otimes^p E, \quad \mathbf{a}z = \sum_{\sigma} \epsilon_{\sigma} \sigma z \quad (\epsilon_{\sigma} \text{ est la signature de la permutation } \sigma)$$

dont l'image est le sous-espace des *tenseurs antisymétriques*, c'est-à-dire des tenseurs $z \in \otimes^p E$ tels que $\forall \sigma, \sigma z = \epsilon_{\sigma} z$ (remarquer que si z est antisymétrique, on a $\mathbf{a}z = p!z$). On vérifie que

L'endomorphisme $\mathbf{a} : \otimes^p E \rightarrow \otimes^p E$ se factorise en un isomorphisme de $\wedge^p E$ sur le sous-espace des tenseurs antisymétriques.

Si $p = 2$, cet isomorphisme applique le 2-vecteur décomposable $x \wedge y$ sur le tenseur antisymétrique $x \otimes y - y \otimes x$.

Notons enfin que l'espace $\wedge^p E^*$ des p -covecteurs s'identifie à l'espace des *formes p -linéaires alternées* (ou *antisymétriques*) sur E , c'est-à-dire à l'espace des *p -formes extérieures*.

3 Champs de tenseurs.

Etant donnée une variété différentiable M , on définit les *champs de tenseurs r fois contravariants et s fois covariants sur M* (plus brièvement les *tenseurs de type (r, s) sur M* comme les sections du fibré

$$\otimes_s^r TM = (\otimes^r TM) \otimes (\otimes^s T^*M)$$

associé au fibré tangent, dont la fibre au-dessus de $m \in M$ est l'espace vectoriel $\otimes_s^r T_m M = (\otimes^r T_m M) \otimes (\otimes^s T_m^* M)$. L'atlas de $\otimes_s^r TM$ associé à un atlas $(\Omega_{\alpha}, \varphi_{\beta\alpha})|_{\alpha, \beta \in A}$ est

$$(\otimes_s^r T\Omega_{\alpha} = \Omega_{\alpha} \times (\otimes^r \mathbb{R}^n) \otimes (\otimes^s (\mathbb{R}^n)^*), \otimes_s^r T\varphi_{\beta\alpha})_{\alpha, \beta \in A},$$

où

$$\begin{aligned} \otimes_s^r T\varphi_{\beta\alpha}(q, \dot{q}_1 \otimes \dots \otimes \dot{q}_r \otimes p_1 \otimes \dots \otimes p_s) = \\ (\varphi_{\beta\alpha}(q), d\varphi_{\beta\alpha}(q)\dot{q}_1 \otimes \dots \otimes d\varphi_{\beta\alpha}(q)\dot{q}_r \otimes \\ p_1 \circ d\varphi_{\beta\alpha}(q)^{-1} \otimes \dots \otimes p_s \circ d\varphi_{\beta\alpha}(q)^{-1}) \end{aligned}$$

Un tenseur sur M de type (r, s) peut donc être défini comme une collection de tenseurs de type (r, s) sur les ouverts Ω_{α} d'un atlas (i.e. d'applications de classe C^{∞} des Ω_{α} dans $\otimes_s^r \mathbb{R}^n$) transformés les uns dans les autres par des changements de carte mixtes, r du type image directe, s du type image réciproque.

On généralise ainsi simultanément la définition carte par carte des champs de vecteurs (les tenseurs de type $(1, 0)$) et des 1-formes différentielles (les tenseurs de type $(0, 1)$).

Les k -formes différentielles sont des tenseurs antisymétriques de type $(0, k)$, les métriques des tenseurs symétriques de type $(0, 2)$, l'application de Legendre de TM dans T^*M un tenseur de type $(0, 2)$. La courbure d'une connexion est un tenseur de type $(1, 3)$.

4 Comment reconnaître pratiquement le caractère tensoriel d'un objet défini sur une variété ?

Par définition, une application t , \mathbb{R} -linéaire en chacun de ses $r+s$ arguments, qui fait correspondre une fonction réelle $t(\omega_1, \dots, \omega_r, X_1, \dots, X_s)$ sur M à la donnée de r formes différentielles ω_i et s champs de vecteurs X_j , est définie par un tenseur $\theta \in \otimes_s^r TM$ si en tout point $m \in M$ on a

$$t(\omega_1, \dots, X_s)(m) = \theta(m)(\omega_1(m), \dots, X_s(m))$$

(où $\theta(m) \in \otimes_s^r T_m M = \mathcal{L}(\otimes^r T_m^* M \otimes (\otimes^s T_m M), \mathbb{R})$ est identifié à un élément de $\mathcal{L}_{r+s}((T_m^* M)^r \times (T_m M)^s, \mathbb{R})$), autrement dit si les seules valeurs des ω_i et des X_j en m (à l'exclusion des valeurs de certaines de leurs dérivées en ce point) déterminent la valeur au point m de la fonction $t(\omega_1, \dots, \omega_r, X_1, \dots, X_s)$. On montre sans peine que ceci équivaut à la $C^\infty(M, \mathbb{R})$ -linéarité de t par rapport à chacun de ses arguments.

On trouvera un résumé un peu moins succinct dans le premier chapitre du livre *Riemannian Geometry* (Springer) de S. Gallot, D. Hulin, et J. Lafontaine.

N.B. Pour la cohérence des énoncés on est amenés à poser $\otimes^0 E = \mathbb{R}$. Puisque $\mathbb{R} \otimes \mathbb{R} = \mathbb{R}$, le fibré $\otimes_0^0 TM$ est donc le fibré trivial $M \times \mathbb{R}$ dont les sections sont les fonctions : $\Gamma^\infty(\otimes_0^0 TM) = C^\infty(M, \mathbb{R})$, et dans tous les cas $\otimes_s^r TM \otimes (\otimes_{s'}^{r'} TM)$ s'identifie à $\otimes_{s+s'}^{r+r'} TM$.

5 Dérivée de Lie.

Comme pour les formes et les champs de vecteurs, la dérivée de Lie d'un champ de tenseurs T quelconque sur une variété peut être définie par la formule $L_X T = \frac{d}{dt}(\varphi_t^* T) \Big|_{t=0}$. On peut la caractériser algébriquement comme l'unique dérivation de l'algèbre (pour le produit tensoriel) des champs de tenseurs qui commute aux contractions \mathcal{C} et coïncide avec la définition déjà donnée de L_X sur les fonctions et les champs de vecteurs :

$$L_X(S \otimes T) = L_X S \otimes T + S \otimes L_X T, \quad L_X \mathcal{C} T = \mathcal{C} L_X T.$$