A. CHENCINER

INTRODUCTION A LA THEORIE DES SINGULARITES DES APPLICATIONS DIFFERENTIABLES

HANOI 6 SEPTEMBRE 1974

A. CHENCINER

INTRODUCTION À LA THEORIE DES SINGULARITES DES APPLICATIONS DIFFERENTIABLES

HANOI - 1974

Préface

Ces notes sont la rédaction d'un cours fait à Hanoi en Octobre 1974 à l'occasion d'un séminaire organisé par l'Institut de Mathématiques du Comité d'Etat des Sciences et la Société Mathématique du Vietnam.

Il s'agissait d'introduire rapidement les outils nécessaires (théorèmes de transversalité par exemple) et d'approfondir une ou deux directions afin d'arriver à des résultats précis.

Le thème choisi est la stabilité des germes.

On commence par la théorie de Thom-Boardman qui permet de comprendre une partie de la structure géométrique d'une application stable; on étudie ensuite les déploiements stables des germes de fonctions de codimension finie; l'étude des germes de petite codimension (queues d'arondes et ombilics dans la terminologie de Thom) fournit beaucoup d'exemples sur lesquels il apparait que la stratification de Thom-Boardman est encore assez grossière, et pose le problème du raffinement de cette stratification.

Ces notes n'auraient jamais vu le jour sans les efforts constants de Hoang Huu Duong que je remercie très sincèrement.

Je remercie aussi toutes les personnes et tous les organismes qui ont contribué à la réalisation de ce séminaire; je voudrais terminer en disant mon admiration pour l'énergie et le courage du peuple Vietnamien, et en lui souhaitant un avenir de succès et de bonheur qui se concrétise un jour dans la réunification du pays.

A. CHENCINER.

TABLE DES MATIERES

Préface

Notations

Chapitre 0

TOPOLOGIES DANS L'ESPACE DES APPLICATIONS DIFFERENTIABLES.

§§ 1. Introduction
2. Espaces de jets
3. Espace des applications différentiables
4. Introduction au cours.

Chapitre I

EXEMPLES DE GERMES DE FONCTIONS ET DE GERMES DE CHAMPS DE VECTEURS STABLES ET INSTABLES.

§§ 1. Conséquence du théorème des fonctions implicites et du théorème d'existence et d'unicité des solutions d'équations différentielles.
2. Lemme de Morse
3. Germes instables.

Chapitre II

LES THEOREMES DE TRANSVERSALITE DE THOM.

§§ 1. Lemme de Sard
2. Définition de la transversalité. Théorème de transversalité facile.
3. Applications des théorèmes de transversalité.
4. Théorème de transversalité facile sur un ensemble stratifié.

...

Chapitre III

THEORIE DES SINGULARITES DE THOM-BOARDMAN.

§§ 1. Exemples

2. Théorie des singularités de Thom-Boardman.

3. Théorème de Boardman (démonstration).

Chapitre IV

DETERMINATION FINIE. DEPLOIEMENT DES GERMES DE FONCTIONS. ETUDE DES GERMES DE PETITE CODIMENSION.

§§ 1. Détermination finie de germes de fonctions

2. Déploiement de germes de fonctions.

3. Etude des germes de petite codimension.

Annexe

TRAVAUX DE THOM ET MATHER SUR LA STABILITE TOPOLOGIQUE

Bibliographie

+
+ +

NOTATIONS

$\dfrac{\partial^{\lvert\alpha\rvert}}{\partial x^{\alpha}}$	$= \dfrac{\partial^{\lvert\alpha\rvert}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$ où $\lvert\alpha\rvert = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ dérivée partielle d'ordre α.
$f\vert_K$	La restriction de f sur l'ensemble K
$f \pitchfork_K W$	Application f est transversale à W en tout point de K.
$f \underset{r}{\sim} g$	f et g ont le même jet d'ordre r
$f \sim g$	f et g sont équivalentes à droite.
$\cong$	isomorphe
$f : N \xrightarrow{C^{\infty}} P$	C^{∞} application f de N dans P
$f : (\mathbb{R}^n, 0) \longrightarrow \mathbb{R}$	Germe de fonction f en 0 , $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$
$f : (\mathbb{R}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}, 0)$	-idem- , $f(0) = 0$
$f \in C^r$	f est une C^r-application
C^r-application, application C^r	application de classe C^r , $0 \leqslant r \leqslant \infty$.
$C^r(N, P)$	espace des C^r-applications muni de la topologie de la convergence compacte.
$\mathcal{C}^r(N, P)$	espace des C^r-applications muni de la topologie de Whitney.
Diff(N)	groupe des difféomorphismes C^{∞} de la variété N
$\mathrm{Diff}_{loc}(\mathbb{R}^n, 0)$	pseudogroupe des C^{∞}-difféomorphismes locaux $(\mathbb{R}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$
Homeo (N)	groupe des homéomorphismes de la variété N

$\mathrm{Hom}^r(N, P)$	espace vectoriel des C^r-applications $N \longrightarrow P$.
Int V ou $\overset{\circ}{V}$	partie intérieure de V
$J^k(N, P)$	espace des jets d'ordre r de germes d'applications de N dans P
$J^k(n, p)$	espace vectoriel des jets $j^r f(0)$ d'ordre r en 0 de germes d'applications C^r $f : (\mathbb{R}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$
$\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$	espace des applications linéaires de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$.
$T_x X$	espace tangent de X en x.
Supp ρ	Support de ρ .

+
+ +

Chapitre 0

TOPOLOGIES DANS L'ESPACE DES APPLICATIONS DIFFERENTIABLES. ESPACES DE JETS.

§ 1. INTRODUCTION.

Considérons l'ensemble $Hom^r(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ des C^r-applications de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$. Sur ce $\mathbb{R}$-espace vectoriel on va définir deux structures topologiques.

1. On dit que $Hom^r(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ est muni de la C^r-topologie (topologie de la convergence compacte) s'il est muni de la topologie dont un système fondamental de voisinages de 0 est l'ensemble des sous-ensembles de $Hom^r(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ définis par :

$$\left\{ f \in Hom^r(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p) ; \left| \frac{\partial^{|\alpha|} f(x)}{\partial x^\alpha} \right| < \varepsilon \quad , \ |\alpha| \leq r \ , x \in K \right\}$$

où $\varepsilon > 0$, K est un ensemble compact arbitraire de $\mathbb{R}^n$.

L'espace $Hom^r(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ muni de la C^r-topologie se note $C^r(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$.

2. Soit $\{K_i\}$ une famille dénombrable de compacts tels que $\mathbb{R}^n \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} K_i$. On dit que $Hom^r(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ est muni de la $\mathcal{C}^r$-topologie (appelée aussi $\mathcal{C}^r$-topologie fine) s'il est muni de la topologie dont un système fondamental de voisinages de 0 est l'ensemble des sous-ensembles de $Hom^r(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ définis par :

$$\left\{ f \in Hom^r(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p) ; \left| \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha} f(x) \right| < \varepsilon_i \ , \ |\alpha| \leq r_i \ , x \in K_i \right\}$$

où $\{\varepsilon_i\}, i \in \mathbb{N}$ est un ensemble de nombres positifs arbitraires et $\{r_i\}, i \in \mathbb{N}$, l'ensemble des nombres entiers positifs tels que $r_i \leq r$.

L'espace $\mathrm{Hom}^r(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ muni de la $\mathcal{C}^r$-topologie*) se note $\mathcal{C}^r(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$.

Exemple :

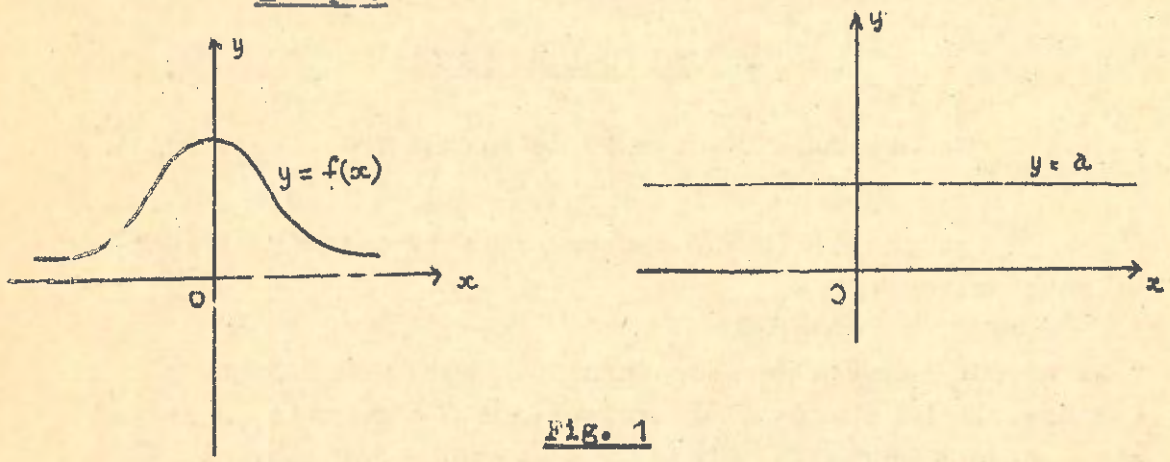


Fig. 1

On peut trouver un voisinage suffisamment petit de $y = 0$ dans la topologie $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ pour que la courbe $y = f(x)$ qui tend vers zéro lorsque $x \longrightarrow \pm\infty$ (fig. 1) soit dans ce voisinage tandis que la courbe $y = a$ (= const) ne soit pas dans ce voisinage même si a est aussi petit que l'on veut.

Remarquons qu'on ne peut pas directement étendre les définitions ci-dessus au cas de variétés différentiables car les dérivées d'ordres supérieurs à 1 n'ont pas de sens intrinsèque sur une variété **) [13]. C'est seulement la nullité des dérivées jusqu'à un ordre fixé qui a un sens intrinsèque (ce que les lecteurs peuvent vérifier eux-mêmes sans difficulté).

---

*) Remarquons que la $\mathcal{C}^r$-topologie introduite ne dépend pas du choix de $\{K_i\}$.

**) En détail soit $f : N \xrightarrow{C^\infty} P$ où N et P sont des variétés différentiables. On peut définir la dérivée intrinsèque (due à Porteous)

$$D(df)(x) : T_x X \quad \mathrm{Ker}\, df(x) \longrightarrow \mathrm{Coker}\, df(x)$$

En particulier si $P = \mathbb{R}$, $df(x) = 0$ (x est un point critique) on a :

$$D(df)(x) = d^2 f(x) : T_x X \times T_x X \longrightarrow \mathbb{R}$$

(Hessien de f en x).

Donc pour globaliser les définitions précédentes il nous faut introduire la notion d'espace de jets qui est basée sur la remarque précédente.

§ 2 - ESPACES DE JETS.

2.1. Considérons l'ensemble de germes d'applications C^∞:

$$(\mathbb{R}^n, o) \longrightarrow (\mathbb{R}^p, o)$$

On introduit sur cet ensemble la relation d'équivalence suivante

$f \sim g \iff$

f et g ont le même développement de Taylor en 0 jusqu'à l'ordre r. La classe d'équivalence de f s'appelle le jet en 0 et est notée $j^r f(0)$. L'ensemble des jets en 0 se note $J^r(n, p)$.

<u>Exemple</u> : $J^1(1,p) \cong \mathbb{R}^p$, $J^1(n,1) \cong (\mathbb{R}^n)^*$

$$J^1(n,p) \cong \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$$

$$j^1 f(o) \longmapsto \text{matrice jacobienne } \left(\frac{\partial f}{\partial x}(o)\right)$$

De la structure d'espace vectoriel sur les germes d'applications C^∞ on déduit une structure d'espace vectoriel sur $J^r(n, p)$ qui s'identifie alors à l'ensemble des polynômes de Taylor de degré r sans terme constant.

On a donc

$$\dim_{\mathbb{R}} J^r(n,p) = p\left(n + \frac{n(n+1)}{2} + \cdots + \binom{n+r-1}{r}\right)$$

où $\binom{n+r-1}{r}$ est egal au nombre des coefficients d'un polynôme homogène de degré r à n variables.

Pour $r \geqslant s$ on a une <u>application d'oubli</u> π^r_s

$$J^r(n,p) \longrightarrow J^s(n,p)$$

$$j^r f(o) \longmapsto j^s f(o)$$

On oublie les termes de degré plus grand que s dans le polynôme de Taylor de f).

A l'aide de la composition des applications

$$\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^q$$

on peut définir une loi de composition

$$J^r(n,p) \times J^r(p,q) \longrightarrow J^r(n,p)$$

$$(j^r f(0),\ j^r g(0)) \longmapsto j^r(g \circ f)(0)$$

On voit aisément que la définition est indépendante des représentants choisis pour les classes d'équivalence et que l'application considérée est algébrique (utiliser la formule de Leibnitz).

Remarquons que $J^r(n,n)$ est muni d'un produit défini par la composition ci-dessus. Ce produit possède l'unité $j^r(id_n)$ où id_n est l'application identique $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$.

Soit $L^r(n)$ (souvent noté $Gl^{(r)}(n,\mathbb{R})) \subset J^r(n,n)$ l'ensemble des r-jets en 0 des C^∞-difféomorphismes locaux $\varphi : (\mathbb{R}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$ (i.e. $\varphi \in Diff_{loc}(\mathbb{R}^n, 0)$)

$L^r(n)$ est un groupe *) avec le produit dans $J^r(n, n)$.

Remarquons que $j^r f(0) \in L^r(n)$ si et seulement si

$$\pi^r_1(j^r f(0)) = j^1 f(0) \in L^1(n)$$

---

*) En réalité $L^r(n)$ est un sous-ensemble d'espace Euclidien difféomorphe à $Gl(n,\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^N$ où

$$N = \sum_{i=2}^{r} n \binom{n+i-1}{i}$$

On a évidemment $L^1(n) \cong Gl(n,\mathbb{R})$

Puisque $L^1(n)$ est ouvert et dense partout dans $J^1(n,n)$ on en déduit que $L^r(n)$ l'est aussi dans $J^r(n,n)$.

<u>Lemme 2.1</u>. On a la suite exacte de groupes non commutatifs

$$0 \longrightarrow K^r \longrightarrow L^r(n) \longrightarrow L^{r-1}(n) \longrightarrow \{1\} \qquad (2.1)$$

où K^r est le groupe additif des applications polynômiales de degré r : $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, σ est le morphisme de groupes défini par

$$\sigma : \quad K^r \longrightarrow L^r(n)$$
$$p \longmapsto j^r(Id + p)(0)$$

<u>Démonstration</u>. On vérifie immédiatement que

$$\pi^r_{r-1} \circ \sigma = \{1\}$$

Donc $L^r(n)$ s'obtient à partir de $L^1(n)$ par extension successive par les groupes $K^k \cong \mathbb{R}^{\alpha(k,n)}$ $(k = 2, \dots r)$

<u>Remarque</u>. De la suite exacte (2.1) on déduit que $L^2(n)$ (groupe non abélien) est un produit semi-direct de $L^1(n)$ et K^2.

En effet, par exemple dans le cas $n = 1$, chaque jet de $L^2(1)$ a la forme $a(x + bx^2)$ où a est un nombre réel différent de zéro (car $a \in L^1(1)$) et $bx^2 \in K^2(1)$. Donc chaque jet considéré correspond à un couple ordonné de nombres réels (b,a) où $a \neq 0$. Pour démontrer que $L^2(1)$ est un produit semi-direct de $L^1(1)$ et K^2 il suffit de vérifier l'égalité

$$(b,a) \circ (\beta,\alpha) = (b\alpha + \beta, a\alpha)$$

(ce que les lecteurs peuvent vérifier par eux-mêmes).

<u>Remarque</u> : Il faut faire attention que l'inclusion naturelle $L^{r-1}(n) \hookrightarrow L^{r}(n)$ n'est pas un morphisme de groupes si $r \geqslant 3$.

<u>Exemple :</u> $L^{2}(1) \overset{\tau}{\hookrightarrow} L^{3}(1)$

Soient :

$$z_1 : \quad x \longmapsto ax + bx^2$$

$$z_2 : \quad x \longmapsto \alpha x + \beta x^2$$

Alors $$z_1 \circ z_2 : \quad x \longmapsto a\alpha x + (a\beta + b\alpha^2)x^2$$

D'autre part

$$\tau(z_1) : \quad x \longmapsto ax + bx^2$$

$$\tau(z_2) : \quad x \longmapsto \alpha x + \beta x^2$$

$$\tau(z_1 \circ z_2) : \quad x \longmapsto a\alpha x + (a\beta + b\alpha^2)x^2$$

Donc

$$\tau(z_1 \circ z_2) \neq \tau(z_1) \circ \tau(z_2) \quad (= a\alpha x + (a\beta + b\alpha^2)x^2 + 2ba\beta x^3)$$

Le seul cas où τ est un morphisme de groupes est celui où $r = 2$.

2.2. <u>Etude globale.</u>

Etant données deux C^{∞}-variétés N, P, on considère $x \in N$, $y \in P$ et on regarde les germes

$$f, g : (N, x) \longrightarrow (P, y)$$

On dira que $f \underset{t}{\sim} g$ si pour un certain couple de cartes locales

...

$(\mathcal{O}_1, \varphi_1)$, (Ω_1, ψ_1) de N et P ,

$\mathcal{O}_1 \subset N$, $\Omega_1 \subset P$

on a

$$\psi_1 \circ f \circ \varphi_1^{-1} \underset{r}{\sim} \psi_1 \circ g \circ \varphi_1^{-1}$$

Cette définition est indépendante du choix des cartes locales. En effet, pour un autre couple de cartes locales $(\mathcal{O}_2, \varphi_2)$, (Ω_2, ψ_2) de N et P , $\mathcal{O}_2 \subset N$, $\Omega_2 \subset P$ on a

$$j^r(\psi_2 \circ f \circ \varphi_2^{-1}) = j^r \psi_{12} \circ j^r(\psi_1 \circ f \circ \varphi_1^{-1}) \circ j^r \varphi_{12}^{-1}$$

où

$$\psi_{12} : \psi_1(\Omega_1 \cap \Omega_2) \longrightarrow \psi_2(\Omega_1 \cap \Omega_2)$$

$$\varphi_{12} : \varphi_1(\mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2) \longrightarrow \varphi_2(\mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2)$$

sont les changements de cartes.

D'où l'on déduit l'assertion .

La relation $f \underset{r}{\sim} g$ est une relation d'équivalence sur l'ensemble de germes $(N, x) \longrightarrow (P, y)$. La classe d'équivalence de f est appelée jet d'ordre r de f en x et est notée $j^r f(x)$.

L'ensemble des jets en x de germes d'applications f telles que $f(x) = y$ est noté $J^r_{x,y}(N, P)$.

<u>Définition</u>. La réunion

$$J^r(N,P) = \bigcup_{(x,y) \in N \times P} J^r_{x,y}(N,P)$$

s'appelle <u>l'espace des jets d'ordre r</u> de germes d'applications de N dans P.

On peut définir sur $J^r(N, P)$ une topologie qui fasse de l'application $\pi : J^r(N,P) \longrightarrow N \times P$ (qui a un jet en x tel que $f(x) = y$, associe le couple (x, y)) une fibration localement triviale.

Pour cela, on commence par remarquer que si U (respectivement V) est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ (respectivement $\mathbb{R}^p$) on peut identifier $J^r(U, V)$ à $U \times V \times J^r(n, p)$ en associant à chaque jet $j^r f(x)$ l'élément $(x, f(x)$, (coefficients du développement de Taylor de f en x)) de $U \times V \times J^r(n, p)$.

Cette identification définit une topologie sur $J^r(U, V)$.

Soit Φ un atlas dénombrable de N,

$$\Phi = \{ (V_i, \varphi_i), i \in \mathbb{N} \}$$

Ψ un atlas dénombrable de P

$$\Psi = \{ (W_j, \psi_j), j \in \mathbb{N} \}$$

Il existe une bijection h_{ij} de $\pi^{-1}(V_i \times W_j)$ sur $\varphi_i(V_i) \times \psi_j(W_j) \times J^r(n,p)$

Soient $x \in V_i$, $f(x) \in W_j$

Posons $g_{ji} = \psi_j \circ f \circ \varphi_i^{-1}$

L'application λ_{ji} de $\pi^{-1}(V_i \times W_j)$ sur $\pi^{-1}(\varphi_i(V_i) \times \psi_j(W_j))$

définie par

$$\lambda_{ji} [j^r f(x)] = j^r g_{ji} (\varphi_i(x))$$

est bijective.

Munissons $J^r(N, P)$ de la topologie la moins fine qui rende continues les applications λ_{ji}.

$J^r(N, P)$ est ainsi muni d'une structure d'espace fibré localement trivial de base $N \times P$.

<u>Formules de changement de cartes</u> :

Supposons $x \in V_i \cap V_k$ $\quad f(x) \in W_j \cap W_\ell$

$$g_{\ell k} = \psi_\ell \circ f \circ \varphi_k^{-1} = \psi_\ell \circ \psi_j^{-1} \circ g_{ji} \circ \varphi_i \circ \varphi_k^{-1}$$

Posons $\omega_{\ell j} = \psi_\ell \circ \psi_j^{-1}$ $\quad \chi_{ki} = \varphi_k \circ \varphi_i^{-1}$

$$g_{\ell k} = w_{\ell j} \circ g_{ji} \circ \chi_{ki}^{-1}$$

Si N et P sont de classe C^∞, $w_{\ell j}$ et χ_{ki} sont de classe C^∞.

Puisque $D g_{\ell k} = D w_{\ell j} \circ D g_{ji} \circ D \omega_{ki}^{-1}$

si $r = 1$ les formules de changement de cartes sont linéaires, donc $J^1(N, P)$ est un fibré vectoriel de base $N \times P$.

§ 3. ESPACE DES APPLICATIONS DIFFERENTIABLES.

3.1. Revenons maintenant aux définitions des topologies dans l'espace des applications différentiables. Sur l'ensemble $Hom^r(N, P)$ des C^r-applications de N dans P on va définir deux structures topologiques.

1. On prend la topologie compacte-ouverte sur l'ensemble des C^0-applications $N \longrightarrow J^r(N, P)$ et on prend sur $Hom^r(N, P)$ la topologie la moins fine rendant j^r continue où $j^r : f \longrightarrow j^r f$.

L'ensemble $\mathrm{Hom}^r(N, P)$ muni de cette topologie (appelée C^r-topologie ou topologie de la convergence compacte) se note $C^r(N, P)$.

2. L'ensemble $\mathrm{Hom}^r(N, P)$ peut être muni de la topologie $\mathscr{C}^r$ fine (topologie de Whitney $\mathscr{C}^r$) c'est la topologie dont une base d'ouverts est l'ensemble :

$$J(U) = \{ f \in \mathrm{Hom}^r (N,P) \ , \ j^r f(N) \subset U \}$$

pour tous les ouverts $U \subset J^r (N,P)$

L'ensemble $\mathrm{Hom}^r(N, P)$ muni de la topologie de Whitney se note $\mathscr{C}^r(N, P)$.

Si N est compacte, les topologies considérées coincident avec la topologie de convergence uniforme de f avec toutes ses dérivées d'ordre $\leqslant r$.

Les espaces $C^r (N,P)$ et $\mathscr{C}^r(N,P)$ sont des espaces de Baire (c'est-à-dire des espaces topologiques qui possèdent la propriété : toute intersection dénombrable d'ensembles ouverts partout denses est partout dense).

L'ensemble $\mathrm{Hom}^\infty (N, P)$ peut être muni de la C^∞-topologie (respectivement $\mathscr{C}^\infty$-topologie) dont la base est l'union des bases de C^r-topologie (respectivement $\mathscr{C}^r$-topologie) $0 \leqslant r \leqslant \infty$.

3.2. Dans ce qui suit nous aurons besoin quelques propriétés de l'espace $C^\infty (N,P)$ $(\mathscr{C}^\infty(N,P))$.

<u>Proposition 3.1</u> : Si N est une variété compacte, $C^\infty(N, \mathbb{R})$ est un espace de Fréchet.

<u>Démonstration</u> : On recouvre N par un nombre fini

d'ouverts U_α tels que chaque $\overline{U_\alpha}$ soit contenu dans une carte locale.

Si $g \in C^\infty(N, \mathbb{R})$ on définit une famille de semi-normes $|g|_k^{U_\alpha}$ de g en posant

$$|g|_k^{U_\alpha} = \sup_{u \in U_\alpha} \left\{ \sum_{|\beta| \leq k} \left| \frac{\partial^{|\beta|}}{\partial x^\beta} g(u) \right| \right\}$$

Ensuite si l'on pose

$$|g|_k = \sum_\alpha |g|_k^{U_\alpha}$$

et

$$d(g,f) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|g-f|_k}{1+|g-f|_k} \qquad \forall g, f \in C^\infty(N,\mathbb{R})$$

$C^\infty(N, \mathbb{R})$ deviendra un espace métrique et complet, qui est donc un espace de Fréchet (de classe C^∞).

<u>Définition 3-1</u>. Soit X un espace topologique séparé. On dit que X est une variété de Fréchet si :

a) Il existe un recouvrement $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ de X par des ouverts.

b) Pour chaque $\alpha \in I$ il existe un homéomorphisme $h_\alpha : U_\alpha \longrightarrow V_\alpha$ où V_α est une partie ouverte d'un espace Fréchet.

c) $\forall \alpha, \beta \in I$, le changement de carte $h_\alpha . h_\beta^{-1}$ est de classe C^∞.

<u>Proposition 3-2</u>. Soient N et P des variétés C^∞, N compacte. Alors $C^\infty(N, P)$ est une variété de Fréchet (cf 4 pour la démonstration).

<u>Remarque</u>. Pour les variétés de Fréchet on peut définir les espaces tangents comme dans le cas des variétés ordinaires.

Corollaire 3.1. L'ensemble Diff(N) des difféomorphismes $N \longrightarrow N$ est un sous-ensemble ouvert de $C^{\infty}(N, N)$ donc Diff (N) est une variété de Fréchet. (En fait, Diff (N) l'est aussi avec la topologie C^{∞} ou C^{∞} même si N n'est pas compacte)

§ 4. INTRODUCTION AU COURS.

4.1. Nous commencerons par introduire la notion générale de stabilité.

Soit S un ensemble muni d'une topologie et d'une relation d'équivalence.

Définition 4.1. Un élément $x \in S$ est dit stable si la classe d'équivalence de x contient un voisinage de x.

Exemple 1. Soient S un ensemble et G un groupe opérant (à droite) sur S. Soit E la relation d'équivalence définie par $x \sim y \iff \exists\, g \in G$, $x.g = y$ (i.e. x et y sont dans même orbite).

Alors $x \in S$ est stable si l'orbite de x contient un voisinage de x.

Exemple 2. Soient S l'espace vectoriel des $n \times n$-matrices complexes $G = Gl(n, \mathbb{C})$ le groupe des $n \times n$-matrices inversibles. G opère sur S par la multiplication des matrices. Alors $x \sim y$ si et seulement si les colonnes de y engendrent le même espace que celles de x. Dans ce cas, on voit aisément x est stable si et seulement si x est inversible.

Exemple 3. Si dans l'exemple 2, G opère sur S par $x^g = g^{-1} xg$. Alors l'orbite de x est la classe des matrices ayant la même forme canonique de Jordan. Puisqu'une perturbation arbitrairement petite de x peut changer les valeurs propres de x, aucun élément n'est stable.

Exemple 4. Soient S une variété différentiable

de dimension finie, G un groupe de Lie compact opérant différentiablement sur S.

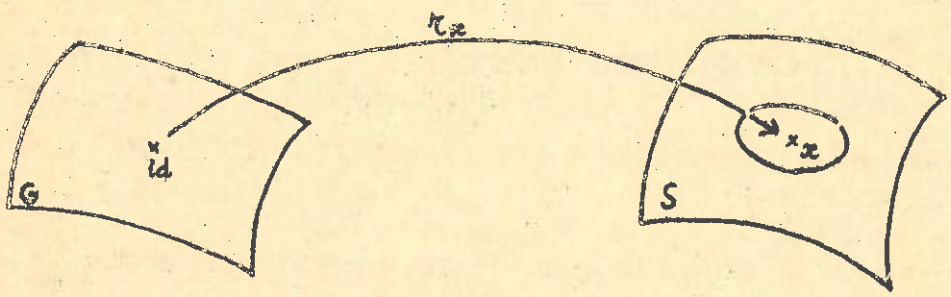


Fig. 2

L'orbite d'un point $x \in S$ est une sous-variété de S qui est l'image de G par l'application différentiable r_x :

$$G \longrightarrow S$$
$$g \longmapsto xg$$

Si l'application

$$dr_x(1) \ : \ T_1G \longrightarrow T_xS$$

est surjective, l'orbite de x est ouverte dans S (car la submersion est une application ouverte) , c'est-à-dire x est stable (fig. 2).

4.2. Dans ce qui suit, nous allons considérer la situation suivante :

L'ensemble S est $C^{\infty}(N, P)$ (où N est compacte) sur lequel le groupe $G = \mathrm{Diff}(N) \times \mathrm{Diff}(P)$ agit grâce à l'application γ :

$$\gamma \ : \ \mathrm{Diff}(N) \times \mathrm{Diff}(P) \times S \longrightarrow S$$
$$(h, k, f) \longmapsto k.f.h^{-1}$$

On obtient alors la <u>stabilité différentiable</u>. Si au lieu de Diff (N) $\times$ Diff (P) on prend Homéo (N) $\times$ Homéo (P) on obtiendra la notion de <u>stabilité topologique</u>. Dans ce qui suit sous le mot "stabilité" on entendra la stabilité différentiable.

L'idée de l'étude de la stabilité dans ce cas est de prendre pour modèle l'exemple ci-dessus des variétés de dimension finie.

Pour cela on doit utiliser les propositions suivantes :

<u>Définition 4.2.</u> Soient $f : N \xrightarrow{C^\infty} P$ et π : $TP \longrightarrow P$ la projection canonique. Alors une application $w : N \xrightarrow{C^\infty} TP$ qui rend commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd} & TP \arrow[d] \\ N \arrow[ur, "w"] \arrow[r, "f"] & P \end{tikzcd}$$

est appelée <u>champ de vecteurs</u> le long de f.

L'ensemble des champs de vecteurs le long de f se note Θ_f .

<u>Proposition 4.1.</u>

1. Θ_f est un espace de Fréchet
2. $T_f\, C^\infty(N,P) \cong \Theta_f$
3. $T_{id(N)}\, Diff(N) \cong \Theta N$ où ΘN est l'espace des sections C^∞ du fibré tangentiel TN .

<u>Démonstration</u> :

D'abord nous démontrons que si E est un fibré vectoriel sur N, l'espace $\Gamma(E)$ des sections C^∞ de E est un espace de Fréchet.

En effet, choisissons un recouvrement U_α de N tel que $E|_{U_\alpha}$ est trivial, alors le suprémum des semi-normes des fonctions de coordonnées est une semi-norme de $\Gamma(E)$. Ensuite on continue comme dans la démonstration de la proposition 3.1.

Donc Θ_f est un espace de Fréchet puisqu'on peut identifier Θ_f avec $\Gamma(f^* TP)$ où $f^* TP$ est l'image réciproque du fibré TP par f.

L'assertion 3) est déduite de l'assertion 2). En effet on a :

$$T_{id_N} \mathrm{Diff}(N) = T_{id_N} C^\infty(N,N) \cong \Theta N$$

Nous allons donc démontrer 2) :

Soit $w \in T_f C^\infty(N,P)$ et $t \longmapsto f_t$ est une courbe représentant w. Soit w' l'application :

$$\begin{array}{ccc} N \longrightarrow TP & & N \longrightarrow TP \\ & & p \longmapsto \frac{df_t}{dt}(p)\Big|_{t=0} \end{array}$$

On a $\pi \circ w' = f$

donc : $w' \in \Theta_f$

On voit aisément ensuite que l'application $w \longmapsto w'$ est un isomorphisme entre $T_f C^\infty(N,P)$ et Θ_f ∎

Maintenant, considérons l'application

$$\begin{array}{rcl} \gamma_f : \mathrm{Diff}(N) \times \mathrm{Diff}(P) & \longrightarrow & S \\ (h,k) & \longmapsto & k \circ f \circ h^{-1} \\ & & \text{où } f \in S \end{array}$$

En $e = id(N) \times id(P)$ on a

$$\begin{array}{rccc} (d\gamma_f)_e : & T_e(\mathrm{Diff}(N) \times \mathrm{Diff}(P)) & \longrightarrow & T_f C^\infty(N,P) \\ & \wr\| & & \wr\| \\ & \Theta N \oplus \Theta P & \longrightarrow & \Theta_f \end{array}$$

Soient

$$\alpha_f : \quad \Theta N \longrightarrow \Theta_f$$
$$\xi \longmapsto -(df)\xi$$

$$\beta_f : \quad \Theta P \longrightarrow \Theta_f$$
$$\eta \longmapsto \eta \circ f$$

<u>Proposition 4.2</u> :

$$(d\gamma_f)_e = \alpha_f \oplus \beta_f$$

<u>Démonstration</u> :

Soit $\tilde{\alpha} : \quad \mathrm{Diff}(N) \longrightarrow C^\infty(N,P)$
$$h \longmapsto f \circ h^{-1}$$

Nous allons démontrer que

$$(d\tilde{\alpha})_{id(N)}(\xi) = \alpha_f(\xi) \quad , \quad \xi \in \Theta N$$

En effet, soit $t \longmapsto h_t$ une courbe représentant ξ et issue de id_N dans Diff (N).

Alors $(d\tilde{\alpha})_{id(N)}(\xi)$ est représenté par la courbe $t \longmapsto f \circ h_t^{-1}$. Mais :

$$\frac{d}{dt}(f \circ h_t^{-1})\Big|_{t=0} = (df) \cdot \frac{dh_t^{-1}}{dt}\Big|_{t=0}$$

D'autre part, en considérant les applications

$$\Delta : \quad \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$t \longmapsto (t,t)$$

et

$$H : \quad \mathbb{R}^2 \longrightarrow N$$
$$(u,v) \longmapsto h_u \circ h_v^{-1}(p) \qquad p \in N$$

on a : $\quad H \cdot \Delta(t) = p$

D'où l'on déduit

$$0 = \frac{\partial H}{\partial u}(0,0) + \frac{\partial H}{\partial v}(0,0) = \frac{dh_t}{dt}(p)\Big|_{t=0} + \frac{dh_t^{-1}}{dt}(p)\Big|_{t=0}$$

car $h_0 = h_0^{-1} = id_N$. Donc

$$\frac{dh_t^{-1}}{dt}\Big|_{t=0} = -\xi$$

et

$$\frac{d}{dt}\left(f \circ h_t^{-1}\right)\Big|_{t=0} = -(df)\xi$$

Ensuite, soit

$$\tilde{\beta} : \mathrm{Diff}_f(P) \longrightarrow C^\infty(N,P)$$
$$k \longmapsto k \circ f$$

Par la même méthode, on peut démontrer que

$$(d\tilde{\beta})_{id(P)}(\eta) = \beta_f(\eta)$$

D'où l'on déduit

$$(d\gamma_f)_e = (d\tilde{\alpha})_{id(N)} \oplus (d\tilde{\beta})_{id(P)} = \alpha_f \oplus \beta_f$$

□

La surjection de l'application r_x dans l'exemple 4 nous conduit à faire l'hypothèse : l'application $d\gamma_f(e)$ est surjective, c'est-à-dire chaque champ de vecteur $\zeta \in \Theta_f$ peut être représenté sous la forme

$$\zeta = (df)\xi + \eta \circ f \quad \text{où} \quad \xi \in \Theta N, \ \eta \in \Theta P$$

Dans ce cas, on dit alors que l'application f est <u>infinitésimalement stable</u> (Fig. 3)

$$\begin{tikzcd} TN \arrow[r, "df"] & TP \\ N \arrow[u, dashed, "\xi"] \arrow[r, "f"] \arrow[ur, "\zeta"] & P \arrow[u, dashed, "\eta"'] \end{tikzcd}$$

Fig. 3

Le modèle de l'exemple 4 nous donne la conjecture : la stabilité infinitésimale équivaut à la stabilité de l'application. Cette conjecture est en fait vraie (si N est compacte ou plus général si f est propre) mais faute du théorème de fonctions implicites dans l'espace de Fréchet il faut faire une démonstration longue et compliquée (cf. [7] dans la théorie locale et [8] dans le cas global).

Exemple : Considérons l'application

$$F : \quad C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) \longrightarrow C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$$
$$f \longmapsto e^f$$

On voit aisément que $dF(0) = id_{C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})}$

mais l'application F n'est pas surjective. Donc dans ce cas, on ne peut pas appliquer le théorème des fonctions inverses.

Remarquons que toutes ces notions peuvent être définies pour les germes.

Dans le premier chapitre de ce cours, nous donnerons des exemples de germes de fonctions et de germes de champs de vecteurs stables et instables.

Le deuxième chapitre introduit la technique fondamentale de la transversalité.

Dans le troisième chapitre, nous essayons de trouver quelles sont les propriétés géométriques que doit avoir nécessairement une application stable. Pour cela, on remarquera qu'une application qui a des propriétés génériques est nécessairement stable. (Une propriété est dite générique si l'ensemble des éléments de S possédant cette propriété contient un ouvert dense dans S). Nous montrerons que génériquement les strates de Boardman d'une application sont des sous-variétés lisses.

Le quatrième chapitre introduit les notions de déploiement universel et de déploiement stable; ceci permet en particulier de construire des germes stables à partir de germes de codimension finie.

Chapitre I

EXEMPLES DE GERMES DE FONCTIONS ET DE GERMES DE CHAMPS DE VECTEURS STABLE ET INSTABLES

§ 1 - CONSEQUENCES DU THEOREME DES FONCTIONS IMPLICITES ET DU THEOREME D'EXISTENCE ET D'UNICITE DES SOLUTIONS D'EQUATIONS DIFFERENTIELLES.

Nous commencerons par rappeler deux conséquences de théorèmes de base bien connus : le théorème des fonctions implicites et le théorèmes d'existence et d'unicité des solutions d'équations différentielles.

1.1. Soit $f : (\mathbb{R}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}, 0)$

un germe de fonction C^∞.

<u>Théorème 1.1</u>. Si $(\text{rang } f)(0) = 1$

alors il existe un difféomorphisme local Φ de $(\mathbb{R}^n, 0)$ i.e. $\Phi \in \mathrm{Diff}_{loc}(\mathbb{R}^n, 0)$ tel que localement on a

$$f \circ \Phi = df(0)\, x$$

Ce théorème est un cas particulier du théorème du rang constant [12] .

Donc, dans le voisinage de 0 , f est déterminé (à changement de coordonnées locales près) par le premier terme de son développement en série de Taylor au point 0 (c'est-à-dire par son jet d'ordre 1).

Autrement dit, si l'on ajoute à f un autre germe $g : (\mathbb{R}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}, 0)$ tel que $dg(0) = 0$ on a localement :

$$f \circ g = f \circ \psi$$

où $\psi \in \mathrm{Diff}_{loc}(\mathbb{R}^n, 0)$

Un autre aspect de ce qui nous intéressera, à savoir les problèmes de stabilité, apparait ici : du théorème précédent, on déduit que si rang $df(0)$ est maximum, le germe $f : (\mathbb{R}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}, 0)$ est stable au sens suivant : si on perturbe un peu f, on peut se ramener à f par un difféomorphisme local (dans la topologie C^∞) de $(\mathbb{R}^n, 0)$ et une translation au but $f(0)$.

1.2. En considérant des germes de champs de vecteurs au lieu de germes de fonctions, on a une situation analogue :

<u>Théorème 1.2.</u> (du flow-box) - Soit

$$X : (\mathbb{R}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$$

un germe en 0 de champ de vecteur C^∞.

Si $X(0) \neq 0$ il existe un difféomorphisme local Φ de $(\mathbb{R}^n, 0)$ tel qu'au voisinage de 0, on ait

$$d\Phi(x_1, \dots x_n) \frac{\partial}{\partial x_1}(x_1, \dots x_n) = X(\Phi(x_1, \dots x_n))$$

où

$$\frac{\partial}{\partial x_1} : \begin{array}{l} \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (x_1, \dots x_n) \longmapsto (1, 0 \dots 0) \end{array}$$

c'est-à-dire X est transporté par Φ de $\frac{\partial}{\partial x_1}$.

Autrement dit, par un changement de coordonnées, on peut "rectifier" les trajectoires du champs X.

<u>Démonstration</u> :

Puisque $X(0) \neq 0$

il existe un $(n-1)$- hyperplan qu'on identifie à $\mathbb{R}^{n-1}$,

par un choix de coordonnées, contenant 0 et transversal à X(0) . (fig. 4).

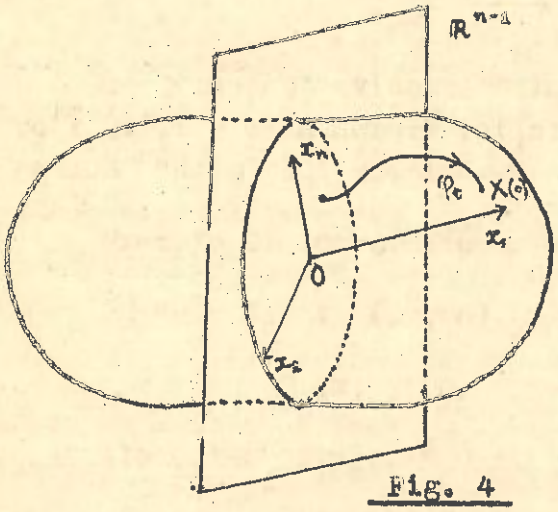


Fig. 4

On définit Φ par

$$\Phi : \quad \mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$
$$x_1 \times (x_2, \dots x_n) \longmapsto \varphi_{x_1}(x_2, \dots x_n)$$

où φ_t est un flot local de X (qui est un groupe à un paramètre de difféomorphismes locaux de $\mathbb{R}^n$) satisfaisant à la condition initiale $\varphi_0(x_2, \dots x_n) = (x_2, \dots x_n)$.
On a :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_1}(0) = \frac{\partial \varphi_{x_1}}{\partial x_1}(0, \dots 0) = X(0)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}(0) = \frac{\partial \varphi_{x_1}}{\partial x_i}(0, \dots 0) = \frac{\partial}{\partial x_i}(0) \qquad i \geqslant 2$$

où

$$\frac{\partial}{\partial x_i} : (x_1, \dots, x_i, \dots x_n) \longmapsto (0, \dots 0, \underbrace{1}_{i^{\text{ème}}}, 0 \dots 0)$$

Du théorème des fonctions implicites, on déduit que Φ est un difféomorphisme local de $(\mathbb{R}^n, 0)$.

Enfin :

$$d\Phi\,(x_1,\dots x_n)\,\frac{\partial}{\partial x_1}(x_1,\dots x_n) = \frac{\partial \Phi}{\partial x_1}\,(x_1,\dots x_n) =$$

$$\frac{\partial \varphi_{x_1}}{\partial x_1}\,(x_2,\dots x_n) = X\,(\varphi_{x_1}(x_2,\dots x_n))$$

$$= X\,(\Phi\,(x_1,\dots x_n))$$

Comme dans le cas du théorème 1.1 , le théorème 1.2 dit que le champ X est déterminé à changement de coordonnées près par X(0) et que X est stable (localement) au sens suivant : les lignes de champ ne changent pas qualitativement pour un champ perturbé.

§ 2 - LEMME DE MORSE

Nous considérons maintenant quelques exemples dans lesquels la fonction (respectivement le champ de vecteurs) n'est pas déterminé par son jet d'ordre 1 en 0 (respectivement sa valeur en 0).

2.1. Théorème 2-1 (Lemme de Morse).

Soit f un germe de fonction $C^\infty : (\mathbb{R}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}, 0)$

On suppose que $df(0) = 0$ et que $d^2f(0)$ (est une forme quadratique) non dégénérée.

Alors il existe un difféomorphisme local Φ de $(\mathbb{R}^n, 0)$ tel que localement on a (cf. [11]) :

$$f \circ \Phi\,(x) = d^2f(0)\,(x, x) \qquad \square$$

Nous en donnerons plus loin une autre démonstration.

Autrement dit en ajoutant à f un autre germe

$$g : (\mathbb{R}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}, 0)$$

tel que

$$dg(0) = 0 , \qquad d^2g(0) = 0$$

on ne change pas l'équivalence considérée.

D'autre part, on peut voir encore que le germe f est stable localement (cf. [7]).

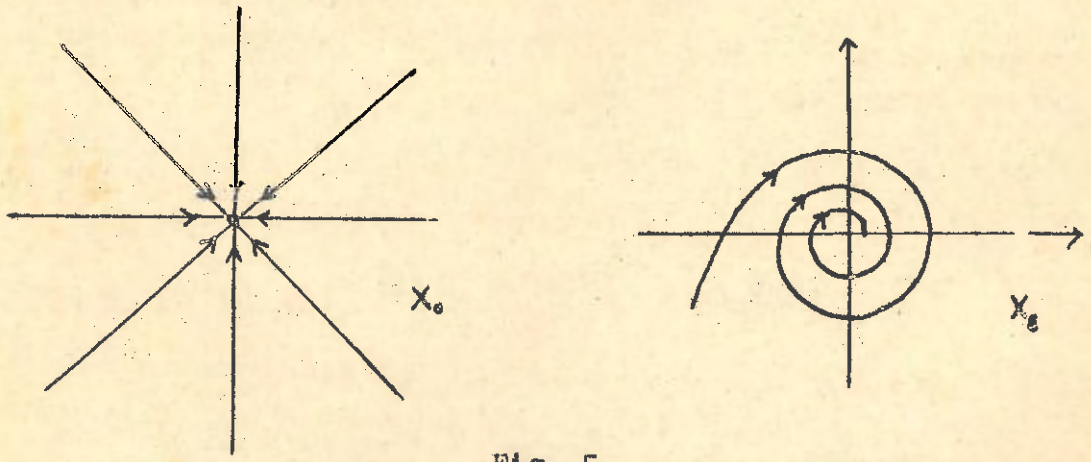
2.2. Dans le cas des champs de vecteur, dès que $X(0) = 0$ on rencontre une situation beaucoup plus difficile à analyser.

Si l'on cherche à transporter par difféomorphisme X sur un champ plus simple (par exemple sa partie linéaire) on se heurte à de gros problèmes même dans les cas où X ressemble au champ grad f pour f germe de fonction de Morse.

<u>Exemple</u> : Soit X_ε le champ de vecteurs dépendant du paramètre ε :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (-x + \varepsilon y\ ,\ -y - \varepsilon x) \end{array}$$

Puisque les valeurs propres de la partie linéaire sont des invariants par changement de coordonnées C^∞, on ne peut pas se ramener de X vè X_0 par un difféomorphisme local de $(\mathbb{R}^2, 0)$. (fig. 5).



<u>Fig. 5</u>

Cependant, ici on sait qu'il existe un homéomorphisme local transportant lignes de champ sur lignes de champ.

On a en fait le théorème suivant :

<u>Théorème 2.2</u> (de Hartman-Grobman).

Soit $X : (\mathbb{R}^n, o) \longrightarrow (\mathbb{R}^n, o)$

un germe en 0 de champ de vecteur C^∞

$$X(x) \qquad Ax + \ldots$$

où A a toutes ses valeurs propres de partie réelle différente de zéro.

Alors il existe un homéomorphisme local de $(\mathbb{R}^n, 0)$ transportant les lignes de champ X sur celles de Y défini par

$$Y(x) = Ax$$

et aussi sur celles de

$$\begin{pmatrix} Id_m & 0 \\ 0 & -Id_n \end{pmatrix} x$$

où m (respectivement n) est le nombre des valeurs propres de partie réelle positive (respectivement, négative). $\square$

Par conséquent, les germes considérés sont stables au sens topologique et ils sont définis par leurs jets d'ordre 1 en 0.

Les exemples ci-dessus font apparaitre une relation entre la stabilité et le fait d'être déterminé par un jet d'ordre fini.

Nous verrons dans le chapitre IV que , dans le cas des germes de fonctions, il y a l'équivalence entre "la détermination finie" et "l'orbite de codimension finie".

§ 3 - <u>GERMES INSTABLES</u>

Donnons enfin quelques exemples de germes qui ne sont pas stables.

Exemple 1. Soit f le germe en 0 :

$$(\mathbb{R}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}, 0)$$
$$x \longmapsto 0$$

Ce germe est évidemment instable. Il est facile de voir qu'il y a un nombre infini de types distincts *) de germes "dans tout voisinage" de ce germe.

Exemple 2. Considérons le germe en 0 :

$$f_0 : (\mathbb{R}^2, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}, 0)$$
$$(x, y, 0) \longmapsto (x^3 y - x y^3, 0)$$

Alors les germes en 0 :

$$f_t : (\mathbb{R}^2, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}, 0)$$
$$(x, y, 0) \longmapsto (x^3 y - x y^3 + t x^2 y^2)$$

où $t \neq 0$ ne sont pas C^∞ équivalents au germe f_0 puisque le birapport de quatre tangentes en 0 de $f_t^{-1}(0)$ change continûment avec t (fig. 6).

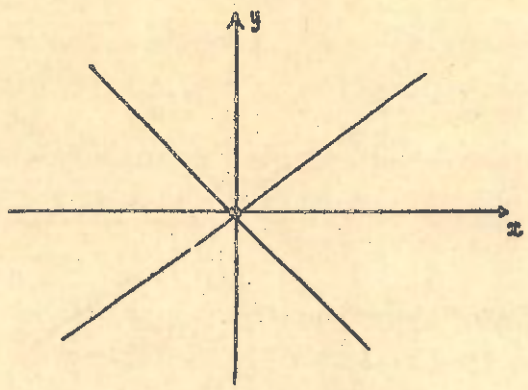


Fig. 6

Donc le germe f_0 est instable et il y a encore un nombre infini de types distincts "dans tout voisinage" de f_0.

Exemple 3. Considérons le germe en 0

---

*) Deux germes sont de même type s'ils sont équivalents à droite (cf. § 1, chap. 4).

$$g_0 : (\mathbb{R}, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}, 0)$$
$$x \longmapsto x^3$$

Les germes en 0

$$g_\varepsilon : (\mathbb{R}, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}, 0)$$
$$x \longmapsto x^3 + \varepsilon x ,$$

où ε est arbitrairement petit, ne sont pas C^∞ équivalents au germe g_0. Donc g_0 est instable (fig. 7).

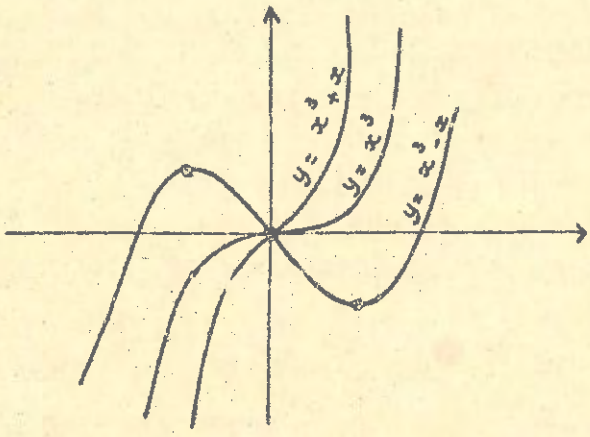


Fig. 7

Mais on verra plus loin qu'il n'y a que deux types distincts au voisinage de g_0 :

$$x \longmapsto x^3 \pm x .$$

Nous nous limiterons dans ce cours à l'étude des fonctions (ou des applications d'une variété dans une autre). Le programme général va être le suivant :

Montrer qu'en général une fonction C^∞ a de bonnes propriétés (le sens de "en général" sera à préciser par la suite).

Dans tout cela, on cherche d'une manière ou d'une autre à mettre de l'ordre dans l'espace des applications C^∞ d'une variété dans une autre en enlevant des sous-ensembles "petits". Que pour pouvoir faire cela, on ait besoin de ne garder que des fonctions suffisamment bonnes est prouvé par la proposition suivante :

<u>Proposition 3-1</u>. (Lemme de Whitney).

Pour tout $F \subset \mathbb{R}^n$ fermé il existe une C^∞ - fonction $\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ tel que $\varphi^{-1}(0) = F$.

<u>Démonstration</u> :

Prenons dans $\mathbb{R}^n$ les parties ouvertes U_p ; $p \geq 1$ telles que

$$F = \bigcap_{p \geq 1} U_p$$

Soit $\{K_m\}$ une suite de compacts dans $\mathbb{R}^n$ tels que

$$\bigcup_{m=1}^{\infty} K_m = \mathbb{R}^n \quad , \quad K_m \subset \mathring{K}_{m+1}$$

Soient $\varphi_p \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$

telles que $0 \leq \varphi_p \leq 1$, $\varphi_p = 0$ sur F et $\varphi_p = 1$ sur $\mathbb{R}^n \setminus U_p$.

En posant

$$\sup_{x \in K_r} \sum_{|q|=0}^{r} \left| \frac{\partial^{|q|}}{\partial x^q} \varphi(x) \right| = |\varphi|_r^{K_r} \qquad \text{(semi-normes)}$$

nous pouvons choisir une suite positive $\{\varepsilon_r\}$ telle que

$$\sum_{r=1}^{\infty} \varepsilon_r \, |\varphi_r|_r^{K_r} < \infty$$

Ensuite posons

$$\psi_m = \sum_{r=1}^{m} \varepsilon_r \varphi_r$$

Alors pour un compact arbitraire $K \subset \mathbb{R}^n$ il existe 1

tel que $K \subset K_1$, par conséquent, si $m' \geqslant m > 1, r$ on a

$$|\psi_{m'} - \psi_m|_r^K \leq \sum_{q>m} \varepsilon_q \, |\varphi_q|_r^K \leqslant \sum_{q>m} \varepsilon_q \, |\varphi_q|_q^{K_q} \to 0$$

avec $m \longrightarrow \infty$. Donc $\{\psi_m\}$ est une suite de Cauchy de $C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ et sa limite φ est la fonction que l'on doit trouver $\square$

Le lemme de Whitney indique la pathologie que peuvent présenter les C^∞-applications : $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ même localement (l'image réciproque d'un point peut être un fermé quelconque de $\mathbb{R}^n$).

\+
\+ \+

Chapitre II

LES THEOREMES DE TRANSVERSALITE DE THOM.

Etant donnée une application d'une variété dans une autre on peut toujours la perturbe légèrement dans la topologie C^{∞} pour qu'elle ait certaines bonnes propriétés.

Pour cela, nous allons étudier la structure d'une application quelconque et introduire la notion de transversalité.

§ 1 - LEMME DE SARD

1.1. Lemme 1.1 : Soit f une application de classe C^1

$$f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p \qquad (n<p)$$

(Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$).

Alors $f(\Omega)$ est de mesure de Lebesgue nulle dans $\mathbb{R}^p$.

Démonstration :

Il suffit de démontrer que $f(K)$ est de mesure nulle où K est un cube fermé quelconque contenu dans Ω.

On décompose K en N^n cubes K_i de côté $\frac{l}{N}$ où l est la longueur du côté de K.

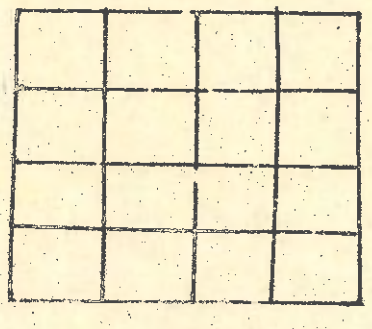


Fig. 8

Si $x, y \in K$ on a

$$|f(x) - f(y)| \leq |x-y| \; \varphi(|x-y|)$$

où φ est une fonction continue, croissante, bornée pour $|x - y|$ proche de zéro.

Donc si $x, y \in K_i$ avec N suffisamment grand on a

$$|f(x) - f(y)| \leq \sqrt{n}\,\frac{\ell}{N}\,\varphi\left(\sqrt{n}\,\frac{\ell}{N}\right)$$

Ensuit $\mu(f(K_i)) \leq C(\sqrt{n})^p \left(\frac{\ell}{N}\right)^p \left(\varphi\left(\sqrt{n}\,\frac{\ell}{N}\right)\right)^p$

où μ est la mesure de Lebesgue, C = const et

$$\mu(f(K)) \leq C(\sqrt{n})^p \, \ell^p \, N^{n-p} \left(\varphi\left(\sqrt{n}\,\frac{\ell}{N}\right)\right)^p$$

Puisque φ est bornée et $n < p$ on déduit en faisant tendre N vers l'infini que $\mu(f(K)) = 0$ $\square$

<u>Remarque</u>: L'assertion n'est pas vraie pour $f \in C^0$ (par exemple si f définit la courbe de Peano qui est une application continue surjective de $[0, 1]$ sur $[0, 1]^2$).

Comme corollaire de ce lemme on a :

<u>Lemme 1.2</u> - Soit f une C^1-application :

$$\Omega \subset N \longrightarrow P$$

où Ω est ouvert de N, N et P sont des variétés différentiables, $\dim N = n$, $\dim P = p$. Si $n < p$ alors $f(\Omega)$ est de mesure de Lebesgue nulle dans P.

Nous rappelons qu'un ensemble S est de mesure de Lebesgue nulle dans une variété P si dans une carte quelconque (U, φ) de P, $\varphi(U \cap S)$ est de mesure de Lebesgue nulle dans $\mathbb{R}^p$.

1.2 - Dans le cas où $n > p$ il est clair que la

mesure de l'image est en général non nulle ; par contre l'image $\Delta(f)$ du lieu singulier $\Sigma(f)$ est de mesure de Lebesgue nulle.

<u>Définition 1.1</u> - Soit $f : N \xrightarrow{C^\infty} P$, N et P sont des C^∞-variétés, $\dim N = n$, $\dim P = p$.

On définit

$$\Sigma(f) = \{ x \in N \ ; \ df(x) \text{ n'est pas de rang maximum} \}.$$

<u>Lemme 1.3</u>. Si f est propre (en particulier si N est compacte), $f(\Sigma(f))$ est fermé dans P.

<u>Démonstration</u> :

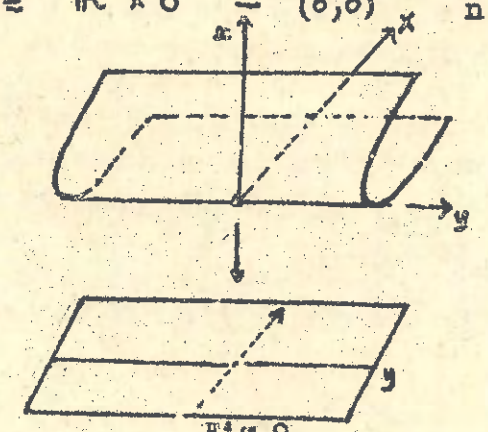
En chaque point $x \in N$ il y a un voisinage V de N tel que ou bien $V \cap \Sigma(f) = \emptyset$ ou bien $V \cap \Sigma(f)$ est fermé dans V (puisque dans ce cas $V \cap \Sigma(f)$ est défini par des équations obtenues en annulant des mineurs de df). Donc $\Sigma(f)$ est fermé dans N (cf. [3]). Puisque f est propre, $f(\Sigma(f))$ est fermé dans P. ∎

<u>Remarque 1</u>. L'assertion n'est pas juste en général si f n'est pas propre.

<u>Exemple</u> :

$$f : \mathbb{R}^2 - (0,0) \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x,y) \longmapsto (x^2, y)$$

$f(\Sigma(f)) = \mathbb{R} \times 0 - (0,0)$ n'est pas fermé (fig.9).



<u>Fig.9</u>

Remarque 2 . Il suffit en fait que $f|_{\Sigma(f)}$ soit fermée.

1.3. Le théorème suivant est fondamental pour démontrer des théorèmes de généricité.

Théorème 1.1. (Lemme de Sard).

Soit $f : N \xrightarrow{C^\infty} P$ où N, P sont des C^∞-variétés. Alors $f(\Sigma(f))$ est de mesure (de Lebesgue) nulle.

Démonstration :

1. D'abord, nous recouvrons P par un nombre dénombrable d'ouverts U_j et N par un nombre dénombrable d'ouverts (Ω_i) tels que pour tout i , il existe j pour lequel $f(\Omega_i) \subset U_j$. Il suffit alors de démontrer qu'en chaque point $x \in N$ il existe un ouvert Ω_i tel que $f(\Sigma(f) \cap \Omega_i)$ soit de mesure nulle. En effet, dans ce cas, on aura

$$f(\Sigma(f)) = f\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}(\Sigma(f) \cap \Omega_i)\right) = \bigcup_{i=1}^{\infty} f(\Sigma(f) \cap \Omega_i)$$

et de la σ-addivité de la mesure on déduira que $f(\Sigma(f))$ est de mesure nulle.

Il suffit donc de démontrer le théorème dans le cas où $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^p$ où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

2. Soit

$$\Sigma_r(f) = \{ x \in \Omega \ , \ df(x) \text{ est de rang } r \}$$

Evidemment, si $p \leq n$, on a

$$\Sigma(f) = \bigcup_{r=0}^{p-1} \Sigma_r(f) \qquad (1\text{-}1)$$

Si $a \in \Sigma_r(f)$ on déduit du théorème des fonctions implicites l'existence de coordonnées dans un voisinage U de a et respectivement dans un voisinage de f(a) telles que f s'écrive

$$y_i = x_i \qquad (i = 1, \ldots, r)$$

$$y_j = f_j(x_1, \ldots, x_n) \qquad (j = r+1, \ldots, p) \qquad (1\text{-}2)$$

avec $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(a) = 0$ si $r+1 \leq i \leq n$.

(Cette dernière condition exprime que le rang de $df(a)$ est exactement r).

On va démontrer que si $x \in U$

$$x \in \Sigma_t(f) \iff \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x) = 0 \qquad \begin{array}{l} t+1 \leq j \leq p \\ t+1 \leq i \leq n \end{array}$$

En effet cette assertion découle du lemme suivant :

<u>Lemme 1-3</u>. Considérons la matrice

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

où A est un $r \times r$-matrice inversible. Alors M est de rang r si et seulement si

$$D = BA^{-1}C.$$

En effet, si M est de rang r, il existe une matrice E telle que

$$C = AE, \qquad D = BE$$

D'où l'on tire

$$D = BA^{-1}C.$$

La réciproque est évidente. $\square$

En appliquant ce lemme à

$$Df(x_1, \ldots, x_n) = \begin{bmatrix} I & 0 \\ B & D \end{bmatrix} \qquad \text{(voir (1,2))}$$

on a $D = 0$ ou $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x) = 0 \qquad t+1 \leq i \leq n$

3. En décomposant

$$U \subset \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n-r} \times \mathbb{R}^r$$

$$\mathbb{R}^p = \mathbb{R}^{p-r} \times \mathbb{R}^r$$

et en posant

$$E_t = (\mathbb{R}^{n-r} \times \{t\}) \cap U ,$$

$$F_t = \mathbb{R}^{p-r} \times \{t\} , \qquad t \in \mathbb{R}^r$$

on a d'après (1-2)

$$f(E_t) \subset F_t$$

Mais d'après 2) :

$$\Sigma_r(f) \cap E_t = \left\{ x \in U , \ \frac{\partial f_j}{\partial x_i}\Big|_{E_t}(x) = 0 \quad , \ \begin{array}{l} j = r+1, \dots p \\ i = r+1, \dots n \end{array} \right\}$$

Si nous démontrons que $f(\Sigma_r(f) \cap E_t)$ est de mesure nulle dans F_t alors $f(\Sigma_r(f) \cap U)$ est de mesure nulle dans $\mathbb{R}^p$ d'après le théorème de Fubini *). De la σ-additivité de la mesure on déduit que $f(\Sigma_r(f))$ est de mesure nulle. D'après (1-1) $f(\Sigma(f))$ est de mesure nulle.

Pour démontrer que $f(\Sigma_r(f) \cap E_t)$ est de mesure nulle, on commence par montrer le

<u>Lemme 1.4</u>. Soit $f : \Omega \xrightarrow{C^\infty} \mathbb{R}^p$ où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Soit $A^r = \left\{ x \in \Omega , \ \frac{\partial^{|k|}}{\partial x_k} f(x) = 0 \ , 1 \leq |k| \leq r \right\}$

Alors, si $r \geq \frac{n}{p}$, $f(A^r)$ est de mesure nulle.

---

*) Théorème de Fubini : L'ensemble mesurable $A \subset \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n-r} \times \mathbb{R}^r$ est de mesure nulle si $A \cap \{\mathbb{R}^{n-r} \times \{t\}\}$ est de mesure de (n-r)- dimension nulle pour chaque $t \in \mathbb{R}^r$.

<u>Démonstration.</u>

Il suffit de prouver que pour tout cube compact K de côté l $f(K \cap A^r)$ est de mesure nulle. Puisque la mesure de Lebesgue est régulière on déduit comme précédemment que $f(A^r)$ est de mesure nulle.

Remarquons que si $x \in A^r \cap K$, $y \in K$ par l'hypothèse, on a

$$|f(x) - f(y)| \leqslant |x-y|^r \alpha(|x-y|) \qquad (1-3)$$

où $\alpha(|t|) \to 0$ pour $t \to 0$ (α est un module de continuité (cf. [6])).

Ensuite comme dans la démonstration du lemme 1-1, on décorpose K en N^n cube K_i de côté $\frac{l}{N}$.

Si K_j est un cube rencontrant $K \cap A^r$ on a

$$|f(x) - f(y)| \leqslant |f(x) - f(z)| + |f(z) - f(y)|$$

$$\forall x, y \in K_j, \qquad \forall z \in K_j \cap A^r$$

Donc, d'après (1-3) :

$$|f(x) - f(y)| \leqslant 2 \left(\sqrt{n}\ \frac{l}{N}\right)^r \alpha\left(\sqrt{n}\ \frac{l}{N}\right)$$

D'où

$$\mu(f(K_j)) \leqslant C \left(\sqrt{n}\,\frac{l}{N}\right)^{rp} \left[\alpha\left(\sqrt{n}\,\frac{l}{N}\right)\right]^p$$

$$C = \text{const}$$

Pour recouvrir $K \cap A^r$ il suffit de N^n cubes K_i. Donc

$$\mu(f(K \cap A^r)) \leqslant C \sqrt{n}^{rp}\, l^{rp}\, N^{n-rp} \left[\alpha\left(\sqrt{n}\,\frac{l}{N}\right)\right]^p$$

Si $N \to \infty$, on a $\alpha\left(\sqrt{n}\,\frac{l}{N}\right) \to 0$ or N^{n-rp} est borné, donc :

$$\mu (f(K \cap A^r)) = 0. \square$$

<u>Lemme I-5</u> : $f(A^1)$ est de mesure nulle.

<u>Démonstration</u> : C'est vrai pour $n < p$ par le lemme I-4. On fait une récurrence sur n à p fixé en prouvant que $f(A^r - A^{r+1})$ est de mesure nulle pour $1 \leq r < \frac{n}{p}$ (on sait déjà que $\mu(f(A^r)) = 0$ pour $r \geq \frac{n}{p}$ par le lemme I-4).

Si $x \in A^r - A^{r+1}$

$$\exists\, k \quad , \quad |k| = r$$
$$\exists\, i \quad \in \{1,\dots,n\}$$
$$\exists\, j \quad \in \{1,\dots,p\}$$

tels que

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial^{|k|}}{\partial x^k}}_{\substack{\text{Dérivée de} \\ \text{longueur } r+1}} f_j(x) \neq 0$$

Donc, dans un voisinage U de x , le sous ensemble défini par $\frac{\partial^{|k|}}{\partial x^k} f_j = 0$ est une sous variété de dimension $n - 1$.

En particulier, il existe un ouvert $\mathcal{O}$ de $\mathbb{R}^{n-1}$ tel que

$$U \cap A^r \subset g(\mathcal{O})$$

où

$$g : \mathcal{O} \subset \mathbb{R}^{n-1} \longrightarrow U$$

est une C^∞-application non dégénérée.

Soit K un ensemble compact de U et $x \in \mathring{K}$.

Posons $L = g^{-1}(K)$, $B^r = L \cap g^{-1}(A^r)$.

D'après le théorème de composition régueuse de Kneser-Glaeser et le théorème de prolongement [6] il existe une

application $h : \mathcal{O} \xrightarrow{C^\infty} \mathbb{R}^p$ tel que $h = f \circ g$ sur B^r et $\frac{\partial^{|k|}}{\partial y_k} h(y) = 0$ pour $1 \leqslant |k| \leqslant r$. Alors par la récurrence sur n on déduit que $f \circ g(B^r)$ et par conséquent $f(A^r \cap K)$ sont de mesure nulle. Mais $A^r - A^{r+1}$ est la réunion dénombrable des sous-ensembles compacts de Ω d'où l'on conclut que $f(A^r - A^{r+1})$ est de mesure nulle. □

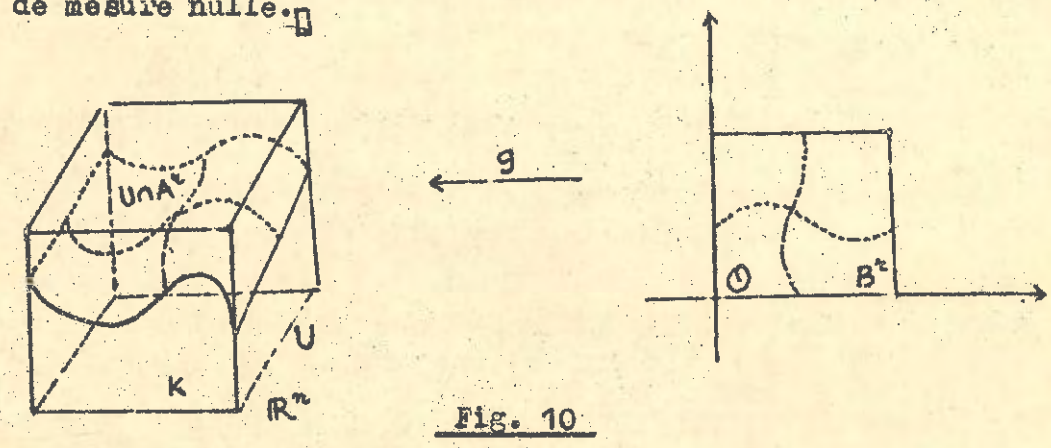


Fig. 10

Remarque : En classe C^r le lemme de Sard n'est vrai que si $r \geqslant (1, n-p+1)$ [6].

Contre exemple. Presque tous les points de la courbe de Peano sont des points doubles qui remplissent un carré.

§ 2 - DEFINITION DE LA TRANSVERSALITE. THEOREME DE TRANSVERSALITE FACILE.

2.1. Donnons maintenant quelques définitions.

Un sous-ensemble Y d'une C^r-variété P sera appelé sous-variété *) de codimension q si en chaque point $x \in Y$ il existe une carte locale (V, β) telle

---

*) Parfois on dit que Y est une sous-variété régulière et sous le mot "sous-variété" on entend l'image d'une immersion injective. Par exemple le flot irrationnel sur un tore est une sous-variété au sens dernier mais irrégulière (cf. [12]).

que $\beta(V) = V_1 \times V_2$ où V_i $(i = 1, 2)$ sont des ouverts respectivement dans $\mathbb{R}^{n-q}$, $\mathbb{R}^q$, $\beta(x) = (0, 0)$ et $\beta(Y \cap V) = V_1 \times \{0\}$.

Si l'on pose

$$\varphi = p_2 \cdot \beta$$

où p_2 est la projection $V_1 \times V_2 \longrightarrow V_2$ on a

$$Y \cap V = \varphi^{-1}(0)$$

et on dit que Y est définie (au voisinage de x) par φ. On remarque que φ est de rang q en x.

<u>Définition 2.1</u> - Soit $f : N \xrightarrow{C^\infty} P$ et Y une sous-variété de P de codimension q.

On dit que f est transversale à Y en $x \in N$ et on écrit $f \pitchfork_x N$ si ou bien $f(x) \notin Y$ ou bien $f(x) \in Y$ et

$$d f(x) (T_x N) + T_{f(x)} Y = T_{f(x)} P .$$

(où $T_x N$, par exemple, est l'espace tangent en x de N). On voit aisément que si $f(x) \in Y$ on a la

<u>Deuxième définition équivalente</u> :

L'application f est transversale à Y en $x \in N$ si et seulement si $\varphi \cdot f$ est de rang q en x [**)] où φ est une application qui définit Y en x, $q = \operatorname{codim} Y$.

On dit que f est transversale à Y en tout point de K et on écrit $f \pitchfork_K Y$ si $f \pitchfork_x Y$ $\forall x \in K$.

Remarquons un cas particulier important :

**) C'est-à-dire $\varphi \cdot f$ est une submersion en x.

si $\dim N < \operatorname{codim} Y$

alors

$$f \pitchfork_N Y \iff f(N) \cap Y = \phi$$

De la définition équivalente ci-dessus de la transversalité, on déduit immédiatement la conséquence :

Si $f \pitchfork_x Y$, au voisinage de x $f^{-1}(Y)$ est soit vide, soit une sous-variété de N de codimension égale à la codimension de Y.

En particulier si $\dim N = \operatorname{codim} W$

et si $f^{-1}(W) \neq \phi$

$f^{-1}(W)$ est un ensemble des points isolés.

Si $f(x) \in Y$ on a aussi la

<u>Troisième définition équivalente</u> :

L'application f est transversale en x à Y si et seulement si $\pi \circ df(x)$ est surjective en x où

$$T_x N \xrightarrow{df(x)} T_{f(x)} P \xrightarrow{\pi} T_{f(x)} P / T_{f(x)} Y$$

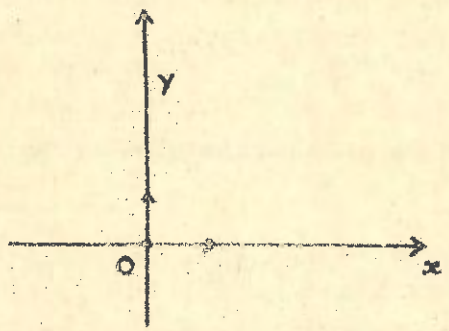
Comparons les deux exemples suivants :

<u>Exemple 1</u> : Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$x \longmapsto (x, 0).$$

$$Y = \{(0, y), y \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$$

Alors $f \pitchfork_0 Y$ (fig. 11).



<u>Fig. 11</u>

Exemple 2 : Soit

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$x \longmapsto (x^3, 0)$$

$$Y = \{(0, y) , y \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$$

Cette fois-ci, f n'est pas transversale à Y en 0 puisque $df(0) = 0$. Ici l'image du plan tangent en 0 n'est pas confondu avec le plan tangent de l'image en $f(0) = (0, 0)$. (Fig. 12).

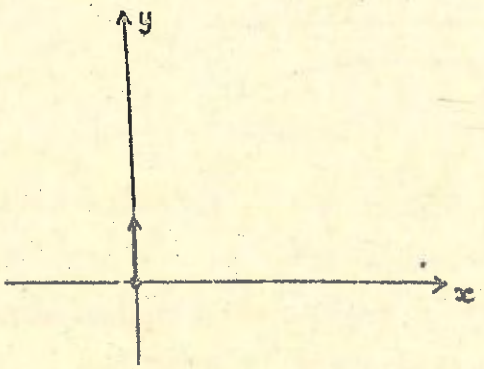


Fig. 12

Voici maintenant un exemple illustrant le théorème de transversalité facile (cf. plus loin).

Exemple 3 : Soit

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(x, y) \longmapsto (x, y, x^2 - y^2)$$
$$Y = \mathbb{R}^2 \times \{0\} \subset \mathbb{R}^3$$
$$df(0)(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2 \times \{0\}$$

Donc f n'est pas transversale à Y en 0. On remarque dans le voisinage de 0, $f^{-1}(Y)$ n'est pas une sous-variété (deux droites concourantes) (fig. 13). Cependant une petite perturbation de f :

$$f_\varepsilon (x, y) = (x, y, \underbrace{x^2 - y^2 + \varepsilon}_{z})$$

change complètement les lignes de niveau et rend $f^{-1}(Y)$ lisse.

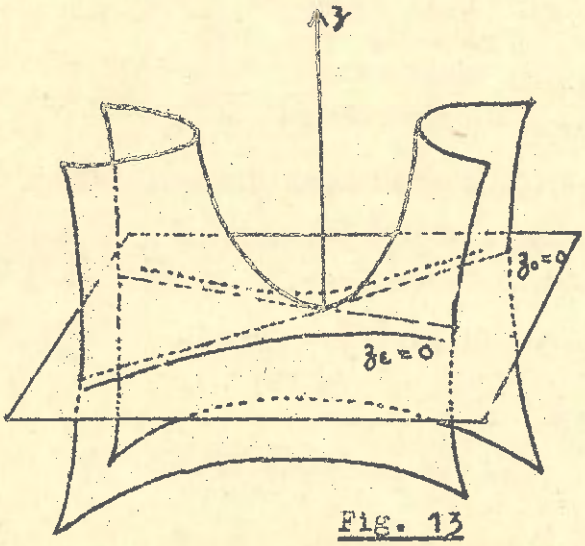


Fig. 13

2.2. Pour démontrer le théorème de transversalité on commence par démontrer le

Lemme 2.1. Si $Y \subset P$ est une sous-variété fermée et si K est compact, l'ensemble

$$\tau_K = \{ f \in C^\infty(N, P) \ , \ f \pitchfork_K Y \}$$

est ouvert dans $C^\infty(N, P)$.

Démonstration :

Soit $f \in \tau_K$.

1. Si $f(K) \cap Y = \emptyset$

l'ensemble $\{ g \in C^\infty(N, P) \ , \ g(K) \cap Y = \emptyset \}$

$= \{ g \in C^\infty(N, P) \ , \ g(K) \subset P - Y \}$

est un voisinage de f.

Dans ce cas, f a donc un voisinage formé d'applications transversales à Y en tout point de K.

2. Si $f(K) \cap Y \neq \emptyset$

on considère

$$x \in K \cap f^{-1}(Y) .$$

Soit $W_{f(x)}$ un voisinage de $f(x)$ dans P (fig.14) tel que

$$Y \cap W_{f(x)} = \varphi_x^{-1}(0)$$

où

$$\varphi_x : W_{f(x)} \longrightarrow \mathbb{R}^q$$

est une application qui définit Y en x (en particulier φ_x est de rang q).

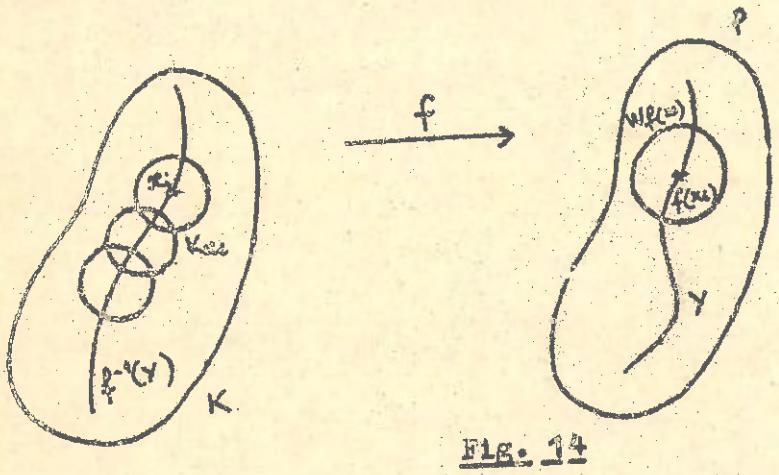


Fig. 14

Soit K_x un voisinage fermé de x dans K tel que

$$f(K_x) \subset W_{f(x)} .$$

On peut supposer K_x assez petit pour que $\varphi_x \circ f|_{K_x}$ soit une submersion.

Recouvrons $f^{-1}(Y) \cap K$ par un nombre fini de tels K_x : $K_{x_1} \dots K_{x_\alpha}$.

On sait que $\varphi_{x_1} \circ f|_{K_{x_1}}$ est une submersion.

Alors il existe un voisinage Θ_1 de f tel que pour tout $g \in \Theta_1$, $\varphi_{x_1} \circ g|_{K_{x_1}}$ soit une submersion.

Soit

$$\Theta = \bigcap_{i=1}^{\alpha} \Theta_i$$

c) Enfin

$$\Gamma = \{ g \in C^{\infty}(N, P) \; ; \; g\,(K - \overbrace{K_{x_1} \cup \ldots \cup K_{x_\alpha}}^{\theta}) \cap Y = \phi \}$$

est un voisinage de 1.

On en déduit que $\Theta \cap \Gamma$ est un voisinage de f formé d'éléments de τ_k, donc τ_k est ouvert dans $C^{\infty}(N, P)$. $\square$

<u>Remarque 1.</u> On a aussi le <u>lemme 2.1 amélioré</u> :

Si $Y \subset P$ est une sous-variété et $W \subset Y$ est un sous-ensemble fermé dans P, l'ensemble

$$\tau_{K,W} = \{ f \in C^{\infty}(N, P) \; , \; f \pitchfork_K Y \text{ sur } W \}$$

est ouvert dans $C^{\infty}(N, P)$.

<u>Explication</u> : $f \pitchfork_K Y$ sur W signifie ou bien

$$f(x) \notin W$$

ou bien

$$f(x) \in W$$

et

$$df(T_x N) + T_{f(x)} Y = T_{f(x)} P .$$

<u>Remarque 2.</u> Si Y n'est pas fermée (même si N est compacte) ou si K n'est pas compact (même si Y est fermée) τ_K n'est pas ouvert en général. En effet,

<u>Exemple 1</u> : $f : S^1 \hookrightarrow R^2$

$$R^2 \supset Y =]-\infty, 0[\times 0 \quad , \quad K = S^1$$

$$S^1 \pitchfork_0 Y$$

Cependant par une translation arbitrairement petite, S^1 deviendra un cercle C tangent à Y. Donc τ_K n'est pas ouvert dans $C^{\infty}(S^1, R^2)$. (Fig. 15).

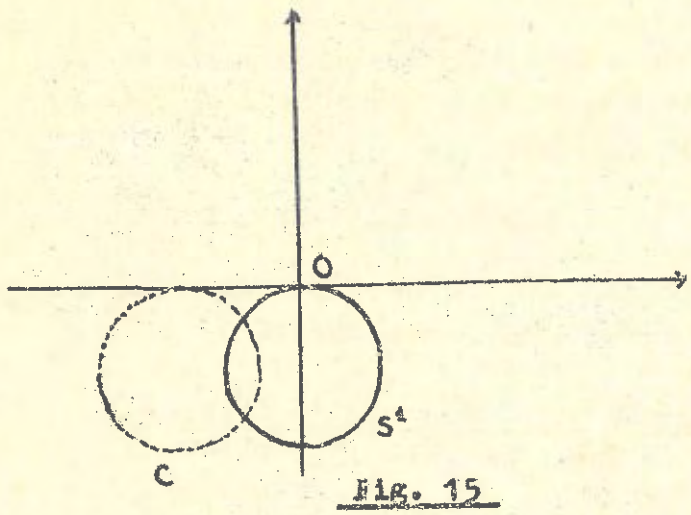


Fig. 15

Exemple 2 :

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$x \longmapsto (x, e^{-x} \sin x)$$
$$\mathbb{R}^2 \supset Y = \mathbb{R} \times \{0\}$$
$$I = \mathbb{R}$$

Alors par des translations verticales arbitrairement petites de la courbe Γ :

$$y = e^{-x} \sin x$$

on obtient des courbes non transversales à Y (Fig. 16).

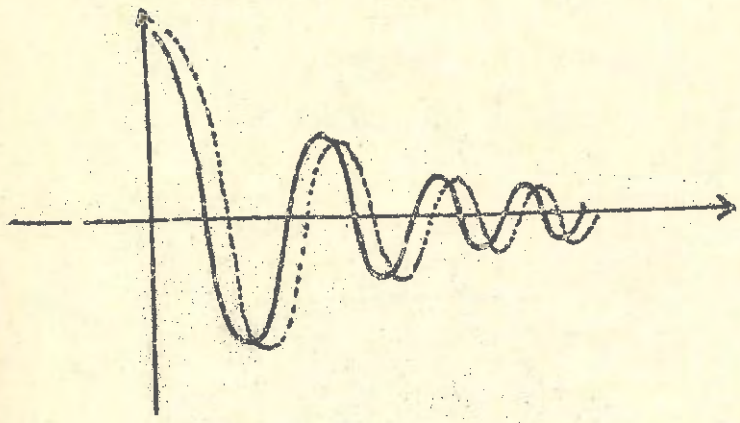


Fig. 16

Donc $\mathcal{T}_K$ n'est pas ouvert dans $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$.
Cependant dans la topologie $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$ les courbes ainsi

obtenues ne sont pas dans un voisinage assez petit de . C'est la commodité de la topologie fine. On a on fait le théorème suivant (cf. [4]) :

L'ensemble $\{f \in \mathcal{C}^{\infty}(N, P)\ ,\ f \pitchfork_K Y$

est ouvert dans $\mathcal{C}^{\infty}(N, P)$ où Y est une sous-variété fermée même si l'ensemble K n'est pas compact.

2.3. <u>Le théorème de transversalité facile.</u>
(Théorème local).

<u>Théorème 2.1.</u> Soit

$$f : N \xrightarrow{C^{\infty}} P \ , \quad a \in N$$

Soit Y une sous-variété fermée de P. Alors il existe un voisinage compact V_a de a dans N et un voisinage (ouvert) W_f de f dans $C^{\infty}(N, P)$ tels que $\tau_{V_a} \cap W_f$ soit ouvert dense dans W_f.

<u>Démonstration</u>

Par le lemme 2.1 il nous faut seulement démontrer la densité de $\tau_{V_a} \cap W_f$ dans W_f.

1. Si $\qquad f(a) \notin Y$

il existe un voisinage compact V_a tel que

$$f(V_a) \cap Y = \phi \ .$$

Il existe alors un voisinage W_f de f tel que

$$\forall g \in W_f \ , \quad g(V_a) \cap Y = \phi$$

c'est-à-dire $\qquad W_f \subset \tau_{V_a}$.

2. Si $\qquad f(a) \in Y$

on choisit V_a compact tel que $f(V_a)$ soit dans une carte de P de la forme $\mathcal{O} \times \mathbb{R}^q$ où $\mathcal{O}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^{p-q}$ et $q = \operatorname{codim} Y$ (léger abus de langage). (Fig. 17).

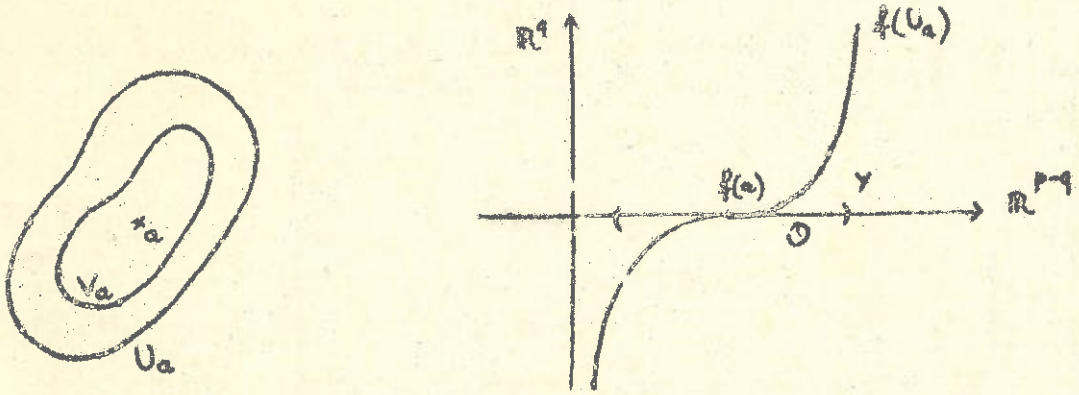


Fig. 17

Soit U_a un voisinage compact de a tel que

$$\mathring{U}_a \supset V_a \qquad \text{et} \qquad f(U_a) \subset \mathcal{O} \times \mathbb{R}^q$$

On définit W_f comme l'ensemble des g tels que

$$g(U_a) \subset \mathcal{O} \times \mathbb{R}^q$$

Il faut alors démontrer que

$$\forall g \in W_f \ , \qquad g \in \mathcal{T}_{V_a}$$

a) Soit ω une fonction en cloche standard sur U_a : (Fig. 18)

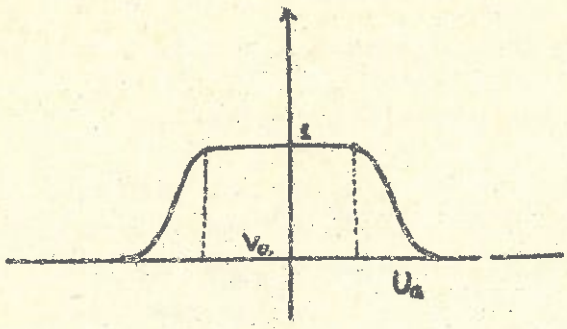


Fig. 18

$$\omega \in C^{\infty}(N, R)$$

$$\omega(x) = 1 \ , \qquad x \in V_a$$

$$\omega(x) = 0 \ , \qquad x \bar{\in} \mathring{U}_a$$

Définissons une famille G d'applications dans $C^{\infty}(N, P)$ dépendant de q paramètres (Fig. 19) :

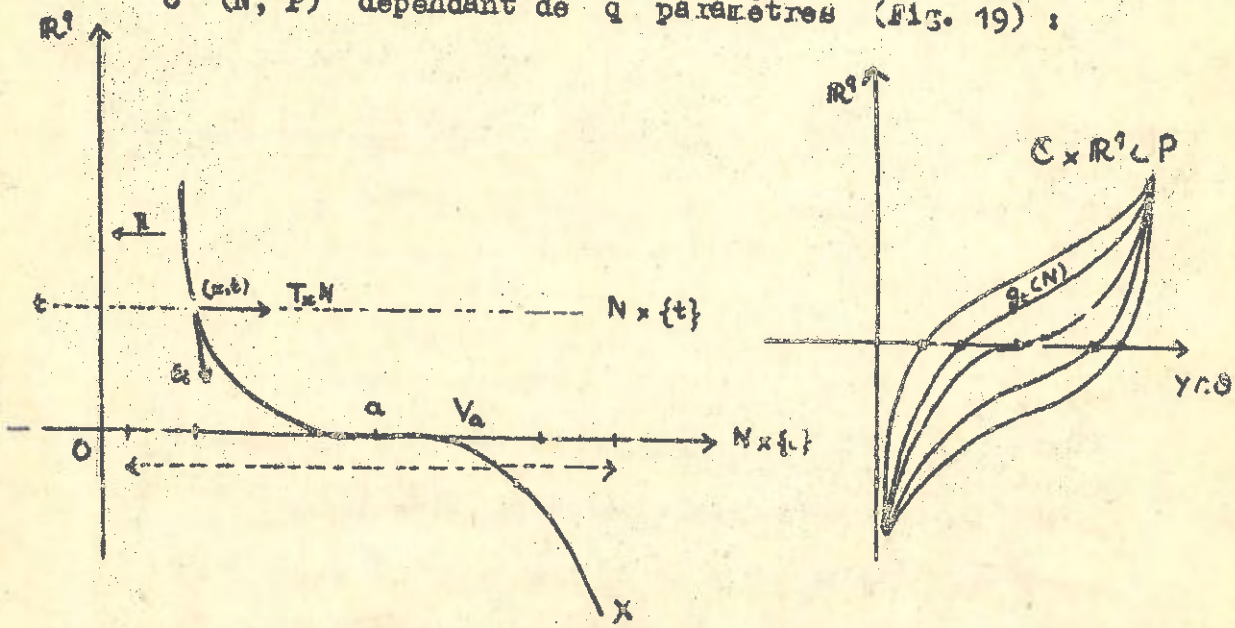


Fig. 19

$$G : N \times \mathbb{R}^q \longrightarrow P$$

$$G(x, t) = g(x) \quad \text{si} \quad x \notin U_a$$

$$G(x, t) = \{p_1 g(x) , p_2 g(x) + t\omega\} \subset \mathcal{O} \times \mathbb{R}^q$$

$$\text{si} \quad x \in U_a$$

où p_1 est la projection : $\mathcal{O} \times \mathbb{R}^q \longrightarrow \mathcal{O}$

p_2 est la projection : $\mathcal{O} \times \mathbb{R}^q \longrightarrow \mathbb{R}^q$

$G(x, t)$ a les propriétés suivantes :

α) $\quad G(x, 0) = g(x)$ (évident)

β) $\quad G \pitchfork_{V_a \times \mathbb{R}^q} Y$

En effet, on a

$$Y \cap (\mathcal{O} \times \mathbb{R}^q) \subset p_2^{-1}(0) .$$

Ensuite :

$$\text{rang } (p_2 \circ G)\Big|_{V_a \times \mathbb{R}^q} = q$$

car si

$$(x, t) \in V_a \times \mathbb{R}^q ,$$

on a

$$p_2 \; G(x, t) = p_2 \, g(x) + t$$

Donc

$$G \pitchfork_{V_a \times \mathbb{R}^q} Y$$

On en déduit qu'il existe une sous-variété (éventuellement ouverte)

$$X = G^{-1} (Y \cap \mathcal{O}) \subset \overset{o}{V}_a \times \mathbb{R}^q$$

Posons

$$g_t(x) = G(x, t)$$

Pour démontrer le théorème il reste à démontrer le

<u>Lemme 2.2</u> : L'ensemble

$$\Omega = \{ t \in \mathbb{R}^q , \; g_t \pitchfork_{V_a} Y \}$$

est dense dans $\mathbb{R}^q$.

<u>Démonstration</u> :
Appelons $\pi : \overset{o}{V}_a \times \mathbb{R}^q \longrightarrow \mathbb{R}^q$

la deuxième projection. Remarquons que si

$$t \notin \pi(X) , \qquad g_t(x) \notin Y$$

donc

$$g_t \pitchfork_{V_a} Y .$$

a) Si $\dim X < q$

d'après le lemme 1.2 l'ensemble $\pi(X)$ est de mesure nulle donc l'ensemble $t \notin (X)$ est dense et par suite l'ensemble Ω est dense dans $\mathbb{R}^q$.

b) Si $\dim X \geqslant q$

soit t une valeur régulière de $\pi|_X$.

Si

$$(x, t) \notin X , \qquad g_t(x) \notin Y$$

donc

$$g_t \pitchfork_x Y .$$

si

$$(x, t) \in X$$

puisque $\pi|_X$ est de rang maximum q en (x, t), il existe q vecteurs $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_q$ linéairement indépendants dans $\mathbb{R}^q$ et tangents à X en (x, t) tels que

$$\varepsilon_1 \oplus \ldots \oplus \varepsilon_q \oplus T_{(x,t)} N \times \{t\} = T_{(x,t)} N \times \mathbb{R}^q$$

Puisque

$$G \pitchfork_{V_a \times \mathbb{R}^q} Y$$

on a pour tout

$$(x, t) \in V_a \times \mathbb{R}^q$$

$$d\, G(x, t) \cdot T_{(x,t)} (N \times \mathbb{R}^q) + T_{G(x,t)} Y = T_{G(x,t)} P$$

Mais

$$d\, G(x,t) . \varepsilon_i \subset T_{G(x,t)} Y$$

car

$$X = G^{-1}(Y \cap \mathcal{O})$$

d'où l'on déduit

$$d\, g_t(x)\, T_x N + T_{g_t(x)} Y = T_{g_t(x)} P$$

c'est-à-dire

$$g_t \pitchfork_{V_a} P$$

D'autre part d'après le lemme de Sard l'ensemble des valeurs régulières t de $\pi|_X$ est dense dans $\mathbb{R}^q$.

Maintenant puisque l'application $t \longmapsto g_t$ est continue de $\mathbb{R}^q$ dans $C^\infty(N, P)$ il existe g_t arbitrairement proche de g dans $C^\infty(N, P)$ tel que $g_t \in \tau_{V_a}$. Donc $\tau_{V_a} \cap W_f$ est dense dans W_f. $\square$

2.4. <u>Théorème</u>. 2.2.(Théorème global) *)

---

*) Le théorème est aussi valable dans le cas où N est une C^∞-variété à bord.

Si K est un compact de N et Y est une sous-variété fermée de P, les applications transversales à Y en tout point de K forment une partie τ ouverte et dense de $C^{\infty}(N, P)$.

Démonstration :

Recouvrons K par un nombre fini d'ensembles compacts $K_1, \ldots, K_n$:

$$N = \bigcup_{i=1}^{n} K_i$$

D'après le théorème local et le lemme 2.1 on peut choisir $\{K_i\}$, tel que τ_{K_i} est ouvert dense. Donc

$$\tau = \bigcap_{i=1}^{n} \tau_{K_i}$$

est ouvert et dense puisque $C^{\infty}(N, P)$ est une espace de Baire. $\square$

Remarque 1 -

Si K n'est pas compact et si Y n'est pas fermée τ est encore dense. En effet, en utilisant un recouvrement dénombrable de Y par des ouverts $\{W_i\}$ tels que $\overline{W_i}$ soient compacts, on obtient les ensembles $\tau_{K_i, \overline{W}_j}$ ouverts et denses (cf. lemme 2.1 amélioré). Donc

$$\tau = \bigcap_{i,j} \tau_{K_i, \overline{W}_j}$$

est dense en vertu de la propriété de Baire de $C^{\infty}(N, P)$.

Remarque 2.

Si N n'est pas compacte, il est commode d'utiliser la topologie fine, on a alors le théorème précédent sans K dans $\mathcal{C}^{\infty}(N, P)$ si Y est fermée et le théorème précédent sans ouverture de τ si Y est une sous-variété quelconque. (cf. 4).

Exemple - Considérons $C^{\infty}(N, P)$

où N est une variété de dimension n et où

$$P = L(\mathbb{R}^a, \mathbb{R}^b)$$

(espace des applications linéaires $\mathbb{R}^a \longrightarrow \mathbb{R}^b$) .

Soit $$Y = P_r$$

l'ensemble des applications linéaires $\mathbb{R}^a \longrightarrow \mathbb{R}^b$ de rang r. C'est une sous-variété lisse de codimension $(a - r)(b - r)$ (car cette sous-variété est définie par $(a - r)(b - r)$ conditions

$$D = C A^{-1} B \qquad \text{(cf. lemme 1.3)}$$

dont on vérifie forcément qu'elles sont indépendantes. D'après le théorème de transversalité, presque toutes les $f \in C^{\infty}(N, P)$ sont transversales à Y (cette propriété est dite générique). Donc pour des application générique

$$f^{-1}(Y) = \{ x \in N \ , \ f(x) \text{ de rang } r \}$$

est une sous-variété lisse de codim $(a - r)(b - r)$ si $n \geqslant (a - r)(b - r)$ et est vide si $n < (a - r)(b - r)$

Cependant ce résultat n'est pas très intéressant car on voudrait plutôt que si N et P sont des variétés quelconques, l'ensemble

$$\{ x \in N \text{ tel que } df(x) \text{ est de rang } r \}$$

soit une variété générique *) , $f \in C^{\infty}(N, P)$. C'est le but des théorèmes de Thom de montrer des choses de ce genre.

---

*) cf. chapitre III.

§ 3 - THEOREMES DE TRANSVERSALITE DE THOM

3.1. Les théorèmes de transversalité de Thom concernent les applications f telles que $j^r f$ soit transversale à une certaine sous-variété de $J^r(N, P)$.

Si Y est une sous-variété fermée de $J^r(N, P)$ et si N est compacte, du théorème facile de transversalité on déduit que l'ensemble

$$\tau = \{ \varphi \in C^\infty(N, J^r(N, P)) , \varphi \pitchfork Y \}$$

est ouvert et dense.

Cependant on s'intéresse non pas à $C^\infty(N, J^r(N, P))$ tout entier mais au sous-ensemble

$$\{ \varphi \in C^\infty(N, J^r(N, P)) , \exists f \in C^\infty(N, P) : \varphi = j^r f \}$$

On dit encore que φ est intégrable.

<u>Théorème 3.1.</u> (Premier théorème de transversalité de Thom).

Soit Y une sous-variété de $J^r(N, P)$. Alors l'ensemble

$$\Omega = \{ f \in C^\infty(N, P) ; j^r f \pitchfork Y \}$$

est partout dense (et ouvert si N est compacte et si Y est fermée).

<u>Démonstration</u> :

Choisissons un recouvrement dénombrable de Y par des ouverts $W_1, W_2, \ldots$, tels que chaque W_i satisfait aux conditions suivantes :

a) La fermeture de W_i dans $J^r(N, P)$ est contenue dans Y.

b) $\overline{W_i}$ est compact.

c) Il existe des voisinages de coordonnées $U_i \subset N$

et $V_i \subset P$ tels que

$$\pi(\overline{W}_i) \subset U_i \times V_i$$

où π est la projection

$$J^r(N, P) \longrightarrow N \times P$$

d) $\overline{U}_i$ est compact.

Le choix d'un tel recouvrement est possible puisque Y est une sous-variété.

Posons :

$$\Omega_{W_i} = \left\{ f \in C^\infty(N, P) \ , \ j^r f \pitchfork Y \text{ sur } \overline{W}_i \right\}$$

Alors on a

$$\Omega = \bigcap_{i=1}^{\infty} \Omega_{W_i}$$

Il nous faut seulement de démontrer que chaque Ω_{W_i} est ouvert et dense dans $C^\infty(N, P)$ puisque de la propriété de Baire de l'espace $C^\infty(N, P)$ on en déduit que Ω est dense partout.

Remarquons qu'en posant

$$\tau_{W_i} = \left\{ g \in C^\infty(N, J^r(N, P)) \ , \ g \pitchfork Y \text{ sur } \overline{W}_i \right\}$$

on a

$$\Omega_{W_i} = (j^r)^{-1}(\tau_{W_i})$$

1. D'abord supposons que N soit compacte. D'après la remarque 2.1 , τ_{W_i} est ouvert et puisque j^r est continue, on en déduit que Ω_{W_i} est ouvert.

Nous allons démontrer que Ω_{W_i} est dense dans ce cas, soient

$$\pi_1 : J^r(N, P) \longrightarrow N$$

$$\pi_2 : J^r(N, P) \longrightarrow P$$

les projections correspondantes. Nous choisissons des cartes locales :

$$\varphi : U_i \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$\psi : V_i \longrightarrow \mathbb{R}^p$$

où

$$n = \dim N , \qquad p = \dim P$$

et des fonctions en cloche standards

$$\rho : \mathbb{R}^n \longrightarrow [0, 1]$$

$$\omega : \mathbb{R}^p \longrightarrow [0, 1]$$

telles que

$$\rho = \begin{cases} 1 & \text{dans un voisinage de } \varphi \circ \pi_1(W_i) \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1 & \text{dans un voisinage de } \psi \circ \pi_2(W_i) \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Soit $\qquad \mathbb{R}^k = J^r(n, p) \times \mathbb{R}^p$

(c'est la fibre de $J^r(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p) \longrightarrow \mathbb{R}^n$). Chaque élément de $\mathbb{R}^k$ peut s'écrire comme

$$Q = (Q_n , \ldots , Q_p)$$

où Q_i sont des polynômes à n variables

$$x = (x_1 , \ldots , x_n)$$

de degré n (avec des termes constants).

A chaque $f(x) \in C^\infty(N, P)$ on associe l'application

$$\Gamma : N \times \mathbb{R}^k \longrightarrow P$$

$$x \times Q \longmapsto \Gamma(x, Q)$$

où

....

$$\Gamma(x, Q) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \notin U_1 \text{ ou } f(x) \notin V_1 \\ \psi^{-1}(\rho(\varphi(x))\,\omega(\psi \circ f(x))\,Q(\varphi(x)) + \psi \circ f(x)) & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Posons

$$\Gamma_Q(x) = \Gamma(x, Q)$$

Considérons l'application "jet partiel en x"

$$G = j^r_x|_Q : \quad N \times \mathbb{R}^k \longrightarrow J^r(N, P)$$

$$(x, Q) \longmapsto j^r \Gamma_Q(x)$$

Soit :

$$U = \{ Q \in \mathbb{R}^k , |Q(\varphi(x))| < \varepsilon \quad , \forall x \in \operatorname{supp} \rho \}$$

où ε est assez petit.

Supposons que

$$(x, Q) \in N \times U \qquad \text{et} \qquad G(x, Q) \in \overline{W_1}$$

Nous allons démontrer que G est un difféomorphisme local en (x, Q). D'où l'on déduit que

$$G \pitchfork_{N \times U} Y$$

sur $\overline{W_1}$.

En effet puisque $\qquad G(x, Q) \in \overline{W_1}$

on a

$$x \in \pi_1(W_1) \quad , \quad \Gamma_Q(x) \in \pi_2(W_1) .$$

D'où l'on obtient

$$|\psi . f(x) - \psi . \Gamma_Q(x)| \leq |Q(\varphi(x))| < \varepsilon$$

Puisque

$$\Gamma_Q(x) \in \pi_2(W_1)$$

on peut choisir ε suffisamment petit pour que

$$\psi . f(x) \leq \operatorname{Int} \omega^{-1}(1)$$

et par conséquent

$$\psi \circ \Gamma_Q(x) = Q(\varphi(x)) + \psi \circ f(x)$$

car

$$x \in \pi_1(\overline{W}_1)$$

Donc

$$\Gamma_Q(y) = \psi^{-1}(Q(\varphi(y)) + \psi \circ f(y))$$

pour tout y proche de x.

Par analogie, on a

$$\Gamma_{Q'}(y) = \psi^{-1}(Q'(\varphi(y)) + \psi \circ f(y))$$

pour tout Q' proche de Q.

Maintenant, supposons que $g \in J^r(N, P)$ est proche de $G(x, Q)$. Soient

$$y = \pi_1(g)$$

et Q' l'application polynômiale unique telle que

$$g = j^r(\psi^{-1} \circ (Q' \circ \varphi + \psi \circ f))(y).$$

Alors l'application $g \longmapsto (y, Q')$ est une application différentiable et inverse de G.

Donc G est un difféomorphisme local en (x, Q). Ensuite, il faut utiliser le lemme suivant :

<u>Lemme 3.1.</u> Soit

$$\Gamma : N \times U \xrightarrow{\mathcal{J}^\infty} P$$

Soit

$$G(x, Q) = j^r \Gamma_Q(x).$$

Supposons que $G \pitchfork Y$ sur $\overline{W}$ où Y est une sous-variété de P, $\overline{W}$ Y. Alors l'ensemble

$$\{Q \in U, \ G \pitchfork Y \text{ sur } \overline{W}_1\}$$

est dense dans U .

La démonstration de ce lemme est tout-à-fait analogue à celle du lemme 2.2.

Maintenant d'après ce lemme 3.1 on peut choisir une suite $Q_1, Q_2, \ldots$ dans $\mathbb{R}^k$ qui tend vers $0 \in \mathbb{R}^k$ telle que

$$j^r \Gamma_{Q_k} \pitchfork Y \text{ sur } \overline{W}_i \quad (k = 1, 2, \ldots)$$

Puisque

$$\Gamma_0 = f \quad \text{et} \quad \Gamma_Q(x) = f(x)$$

si $x \notin U_i$ on en déduit que

$$\lim_{k \to \infty} \Gamma_{Q_k} = f$$

dans $C^\infty(N, P)$ et donc Ω_{W_i} est dense dans $C^\infty(N, P)$.

2. Si N n'est pas compacte en considérant un recouvrement dénombrable de N par des ouverts N_j tels que N_j soient compacts, on voit que les ensembles

$$\Omega_{N_j} = \left\{ g \in C^\infty(\overline{N}_j, j^r g \pitchfork Y \text{ sur } \overline{W}_i \right\}$$

sont ouverts dans $C^\infty(\overline{N}_j, P)$. (cf. remarque 4 [illegible]) du lemme 2.1).

Ensuite puisque l'application de restriction

$$\rho_j : C^\infty(N, P) \longrightarrow C^\infty(\overline{N}_j, P)$$
$$f \longmapsto f|_{\overline{N}_j}$$

est continue on voit que $\rho_j^{-1}(\Omega_{N_j})$ est ouvert dans $C^\infty(N, P)$. D'après ce que nous avons démontré ci-dessus $\rho_j^{-1}(\Omega_{N_j})$ est dense dans $C^\infty(N, P)$. D'où l'on conclut que

$$\Omega = \bigcap_j \rho_j^{-1}(\Omega_{N_j})$$

est dense dans $C^\infty(N, P)$.

3. Pour démontrer l'ouverture de Ω on pose

$$\tau = \{ g \in C^{\infty}(N, J^r(N, P)) , g \pitchfork Y \}$$

Si N est compacte et Y est fermée d'après le théorème 2.2, τ est ouvert et puisque j^r est une application ouverte , on en déduit que Ω est aussi ouvert dans $C^{\infty}(N, P)$. $\square$

<u>Remarque</u> : Si N n'est pas compacte, Ω est encore dense dans $\mathcal{C}^{\infty}(N, P)$ et si Y est fermée , Ω est ouvert dans $\mathcal{C}^{\infty}(N, P)$.

<u>Corollaire 3.1</u> : Avec chaque $i \in \mathbb{N}$ soit W_i une sous-variété de $J^{k_i}(N, P)$. Alors l'ensemble

$$\Gamma = \{ f \in C^{\infty}(N, P) , j^{k_i} f \pitchfork W_i \}$$

est partout dense. Si le nombre de W_i est fini et chaque W_i est fermée, l'ensemble Γ est ouvert dans $C^{\infty}(N, P)$.

3.2. <u>Deuxième théorème de transversalité de Thom.</u>

Soient N , P des C^{∞}-variétés. Posons

$$(\pi_1)^2 : J^r(N, P) \times J^r(N, P) \longrightarrow N \times N \quad \text{(projection naturelle)}$$

$$J_2^r(N, P) = (\pi_1)^{-2}(N \times N - \Delta_N)$$

où Δ_N est la diagonale dans $N \times N$.

Soit

$$j_2^r f : N \times N - \Delta_N \longrightarrow J_2^r(N, P)$$

$$(x_1 , x_2) \longmapsto j^r f(x_1), j^r f(x_2)$$

$$(x_1 \neq x_2)$$

(*) Cette remarque est encore valable dans le cas où N est une variété à bord.

<u>Théorème 3.2</u> (Deuxième théorème de transversalité de Thom).

Soit Y une sous-variété de $J_2^r(N, P)$. Soit

$$\Omega = \left\{ f \in C^\infty(N, P) \ , \ j_2^r f \pitchfork Y \right\}$$

Alors l'ensemble Ω est dense dans $C^\infty(N, P)$.

Si N et Y sont compacts, Ω est ouvert dans $C^\infty(N, P)$.

<u>Démonstration</u> -

La méthode de démonstration de ce théorème est analogue à celle du premier théorème de transversalité.

1. Prenons un recouvrement ouvert dénombrable W_i de Y tel que :

a) la fermeture de chaque W_i dans $J_2^r(N, P)$ est contenue dans Y,

b) Les $\overline{W}_i$ sont compacts.

c) Il existe des voisinages de coordonnées $U_{i_1} \times U_{i_2}$ dans N et $V_{i_1} \times V_{i_2}$ dans Y tels que

$$\overline{U}_{i_1} \times \overline{U}_{i_2} = \emptyset$$

et

$$(\pi_\Delta)^2 (\overline{W}_i) \subset U_{i_1} \times U_{i_2} \times V_{i_1} \times V_{i_2}$$

où

$$(\pi_\Delta)^2 : J_2^r(N, P) \longrightarrow (N \times N - \Delta) \times P \times P$$

(projection naturelle)

d) $\overline{U}_{ij}$ $(j = 1, 2)$ sont compacts.

Posons

$$\Omega_{W_i} = \left\{ f \in C^\infty(N, P) \ , \ j_2^r f \pitchfork Y \text{ sur } \overline{W}_i \right\}$$

Puisque

$$\Omega = \bigcap_{i=1}^{\infty} \Omega_{W_i}$$

il faut seulement de démontrer que chaque Ω_{W_i} est ouvert et dense dans $C^{\infty}(N, P)$.

D'abord, nous allons démontrer que Ω_{W_i} est dense dans $C^{\infty}(N, P)$. Nous choisissons des cartes locales

$$\varphi_j : U_{ij} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$\psi_j : V_{ij} \longrightarrow \mathbb{R}^p$$

où $\quad n = \dim N \quad , \quad p = \dim P$

et des fonctions en cloche standards :

$$\rho_j : \mathbb{R}^n \longrightarrow [0, 1]$$

$$\rho_j = \begin{cases} 1 & \text{dans un voisinage de } \varphi_j \circ \pi_{U_{ij}}(\overline{W}_i) \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

où $\pi_{U_{ij}}$ est la projection de $(\pi_\Delta)^2 (\overline{W}_i)$ sur U_{ij}.

$$\omega_j = \begin{cases} 1 & \text{dans un voisinage de } \psi_j \circ \pi_{V_{ij}}(W_i) \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

où $\pi_{V_{ij}}$ est la projection de $(\pi_\Delta)^2 (W_i)$ sur V_{ij}.

Soit

$$\mathbb{R}^{2k} = (J^r(n,p) \times \mathbb{R}^p)^2$$

On définit l'application :

$$\Gamma : N \times \mathbb{R}^{2k} \longrightarrow P$$

$$\Gamma(x, Q_1, Q_2) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \notin U_{ij} \text{ ou } f(x) \notin V_{ij} \\ \psi_j^{-1} \circ (\rho_j (\varphi_j(x)) \, \omega_j(\psi_j \circ f(x)) \, . \\ \quad \circ \, Q_j (\varphi_j(x)) + \psi_j \circ f(x)) \\ \text{si } x \in U_{ij} \text{ et } f(x) \in V_{ij} \end{cases}$$

soit :

$$U = \left\{ (Q_1, Q_2) \in \mathbb{R}^{2k} \ , \ |Q_j\ (\varphi_j(x))| < \varepsilon \ , \ \forall x \in \operatorname{supp} \rho_j \right\}$$

où ε est assez petit

Posons

$$\Gamma_Q(x) = \Gamma(x, Q_1, Q_2)$$

et

$$\begin{aligned} G \ : \ N \times N - \Delta_N &\longrightarrow J_2^r(N, P) \\ (x_1, x_2) &\longmapsto j^r \Gamma_Q(x_1) \times j^r \Gamma_Q(x_2) \\ (x_1 \neq x_2) & \end{aligned}$$

Comme dans le premier théorème de transversalité, on peut démontrer que G est un difféomorphisme local en (x, Q) où $Q \in U$ si ε est assez petit. C'est-à-dire

$$G \pitchfork_{(N \times N - \Delta_N) \times U} Y \quad \text{sur} \quad W_i$$

Ensuite nous utilisons le lemme suivant dont la démonstration est analogue à celle du lemme 2-2.

<u>Lemme 3-2</u>.

L'ensemble

$$\left\{ Q \in U \ , \ G \pitchfork_{(N \times N - \Delta_N) \times U} Y \quad \text{sur} \quad \overline{W_i} \right\}$$

est dense dans U.

Maintenant on peut choisir une suite $Q^1, Q^2, \ldots$ dans U qui tend vers $0 \in \mathbb{R}^{2k}$ telle que

$$j^1 \Gamma_{Q^j} \times j^r \Gamma_{Q^j} \pitchfork Y \quad \text{sur} \quad \overline{W_i} \qquad (j = 1, 2, \ldots)$$

Puisque

$$\Gamma_0 = f \quad \text{et} \quad \Gamma_Q(x) = f(x) \quad \text{si} \quad x \notin U_{ij}$$

on en déduit que

$$\lim_{k \to \infty} \Gamma_{Q^k} = f$$

dans $C^\infty(N, P)$ et donc Ω_{W_i} est dense dans $C^\infty(N, P)$.

2. Démonstration de l'ouverture de Ω_{W_i}.

Soit

$$x = (x_1, x_2) \in N \times N - \Delta$$

Nous choisissons des voisinages ouverts disjoints U_i, V_i de x_i dans N tels que $\overline{V_i} \subset U_i$. Soit

$$U_x = U_1 \times U_2 , \qquad V_x = \overline{V_1} \times \overline{V_2}$$

Remarquons que V_x est un sous-ensemble fermé de $N \times N$. Soit

$$\Omega_x = \left\{ f \in C^\infty(N, P) , j_2^r f \pitchfork Y \text{ sur } \overline{W_i} \cap (\pi_1)^{-2} (V_x) \right\}$$

Puisque l'ensemble $\{ \mathring{V}_x \}$ où $x \in (\pi_1)^2 W_i$, est un recouvrement ouvert de $(\pi_1)^2 \overline{W_i}$ et $(\pi_1)^2 \overline{W_i}$ est compact, nous pouvons extraire un recouvrement fini $\mathring{V}_{x_1}, \ldots, \mathring{V}_{x_l}$. Remarquons que

$$\Omega_{W_i} = \bigcap_{i=1}^{l} \Omega_{x_i}$$

Donc, pour démontrer l'ouverture de Ω_{W_i} il faut seulement démontrer que chaque Ω_{x_i} est ouvert dans $C^\infty(N, P)$.

Considérons maintenant l'application

$$A : C^\infty(N, P) \longrightarrow C^\infty(N \times N , J^r(N, P) \times J^r(N, P))$$
$$f \longmapsto j^r f \times j^r f$$

et l'ensemble

$$T = \left\{ g \in C^\infty(N \times N , J^r(N, P) \times J^r(N, P) , g \pitchfork Y \text{ sur } \overline{V_i} \cap (\pi_1)^{-2} (V_x) \right\}$$

Puisque V_x est écarté de Δ dans $N \times N$ par U_x on voit que $\mathring{j}_2^r f \pitchfork Y$ sur $\overline{W_i} \cap (\pi_1)^{-2} (V_x)$ si et seulement si $j^r f \times j^r f \pitchfork Y$ sur $\overline{W_i} \cap (\pi_1)^{-2}(V_x)$.

Donc

$$\Omega_{x_i} = A^{-1}(T) .$$

Supposons d'abord que N est compacte. Dans ce cas en remarquant que $\overline{W}_i \cap (\pi_1)^{-2}(V)$ est une sous-variété fermée du lemme 2.1 (remarque 1) on déduit que T est ouvert dans $C^{\infty}(N \times N, J^r(N, P) \times J^r(N, P))$. D'autre part, A est une application continue d'où l'on conclut que Ω_{x_i} est ouvert dans $C^{\infty}(N, P)$.

Si N n'est pas compacte, en considérant un recouvrement dénombrable de N par des ouverts N_i tels que N_i soient compacts et en raisonnant comme dans la démonstration du premier théorème de transversalité on voit que Ω_{x_i} est aussi ouvert dans $C^{\infty}(N, P)$.

Si N et Y sont compactes en répétant les raisonnements ci-dessus, on conclut que Ω est ouvert dans $C^{\infty}(N, P)$. $\square$

<u>Remarque</u> :

Si N n'est pas compacte, Ω est encore ouvert dense dans $C^{\infty}(N, P)$.

§ 4 - APPLICATIONS DES THEOREMES DE TRANSVERSALITE

Nous allons indiquer quelques applications des théorèmes de transversalité de Thom.

4. <u>Définition 4.1.</u>

Soit $f : N \xrightarrow{C^{\infty}} P$.

On dit que f est <u>une immersion</u>, si $df(x)$ est non-dégénérée en tout point $x \in N$.

Si f est une immersion injective et un homéomorphisme sur $f(N)$ munie de la topologie induite, on dit que

1 est <u>un plongement</u>.

<u>Théorème 4.1</u> (de Whitney).

Si $p \geqslant 2n$ l'ensemble

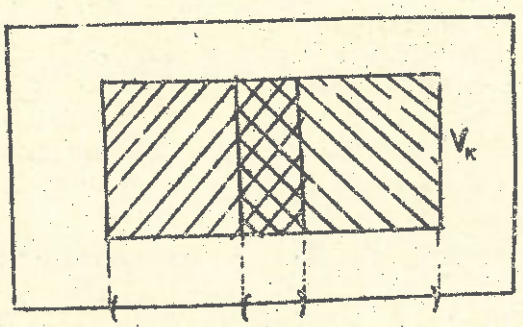
$$\mathrm{I\,mm} = \left\{ f : N \xrightarrow{C^\infty} P \,,\ f \text{ est une immersion} \right\} \text{ est dense dans } C^\infty(N, P) \,.$$

<u>Démonstration</u>.

Soit, pour $k \geqslant 0$,

$$V_k = \left\{ z \in J^1(N, P) \,,\ z = j^1 f(x) \,,\ \text{rang } df(x) = k \right\}$$

V_k est une sou-variété (ouverte sauf pour $k = 0$) de $J^1(N, P)$. En effet l'intersection de V_k avec chaque fibre du fibré $J^1(N, P) \longrightarrow N \times P$ est soit vide, soit une sous-variété (ouverte si $k \neq 0$) de codimension $(n - k)(p - k)$ (voir Ex. de 2.4) invariante sous l'action du groupe structurel $L^1(n, p)$ de la fibre. Donc V_k obtenue par le recollement (Fig. 20) de sous-variétés dans les diverses cartes locales est une sous-variété (ouverte sauf si $k = 0$) de codim $(n - k)(p - k)$.



<u>Fig. 20</u>

On voit aisément que

$$V_0 \cup V_1 \cup \dots \cup V_{n-1} = \overline{V}_{n-1}$$

Ensuite d'après le corollaire 3.1 l'ensemble

$$\Omega = \left\{ f \in C^{\infty}(N, P) \ , \ j^1 f \pitchfork \overline{V}_{n-1} \right\}$$

est dense dans $C^{\infty}(N, P)$. Mais

$$\operatorname{codim} V_k \geqslant \operatorname{codim} V_{n-1} = p - n + 1$$

donc

$$\operatorname{codim} V_{n-1} = p - n + 1 = \dim N$$

d'après l'hypothèse.

Donc :

$$\Omega = \left\{ f \in C^{\infty}(N, P) \ ; \ j^1 f \pitchfork \overline{V}_{n-1} \right\} =$$

$$= \left\{ f \in C^{\infty}(N, P) \ ; \ j^1 f \cap V_k = \emptyset \ , \ k = 0, \ldots, n-1 \right.$$

$$= \text{I mm.} \ \square$$

<u>Remarque 1</u> :

Si N est compacte en appliquant le théorème de transversalité à un ensemble stratifié (cf. § 5) on voit que Imm est aussi ouvert dans $C^{\infty}(N, P)$. Si N n'est pas compacte, Imm est ouvert dans $^{\infty}(N, P)$. (cf. [4]).

Le théorème suivant est une application du deuxième théorème de transversalité.

<u>Théorème 4.2</u> (de Whitney).

Si $2n+1 \leqslant p$ l'ensemble

$$\text{I nj} = \left\{ f : N \xrightarrow{C^{\infty}} P \ ; \ f \text{ est injective} \right\}$$

est dense dans $C^{\infty}(N, P)$.

<u>Démonstration</u>.

On applique le deuxième théorème de transversalité en admettant que Y est la diagonale dans $J^0(N, P) \times J^0(N, P)$. En remarquant que

$$\dim (N \times N - \Delta_N) - \operatorname{codim} Y = 2n - p \leqslant -1$$

On voit que l'ensemble :

$$\Gamma = \left\{ f \in C^{\infty}(N, P) \ , \ f \pitchfork_{N \times N - \Delta_N} Y \right\} =$$

$$\left\{ f \in C^{\infty}(N, P) \ , \ f \text{ est injective} \right\} = \mathrm{Inj}$$

est partout dense.□

<u>Remarque</u> :

Si $2n + 1 \leqslant p$, Inj est [illegible] dans $\mathcal{C}^{\infty}(N, P)$ car Y est fermée.

Ensuite puisqu'une immersion injective d'une variété compacte est un plongement , on obtient :

<u>Corollaire 4.1</u> : Si $2n + 1 \leqslant p$ l'ensemble

$$\mathcal{E}m = \left\{ f : N \xrightarrow{C^{\infty}} P \ , \ f \text{ est un plongement} \right\}$$

est ouvert dense dans $\mathcal{C}^{\infty}(N, P)$.

<u>Remarque</u> : Si N est compacte, $2n + 1 \leqslant p$ on peut démontrer que $\mathcal{E}m$ est ouvert dense dans $C^{\infty}(N, P)$ (cf. [12]).

Dans le théorème suivant , on considère l'homotopie et l'isotopie des plongements.

<u>Théorème 4.3</u> : Soient N, P des C^{∞}-variétés, N est compacte.

Soient $f_0, f_1 : N \xrightarrow{C^{\infty}} P$

sont des plongements tels qu'il existe une homotopie

$$h : N \times [0, 1] \xrightarrow{C^{\infty}} P$$

entre *) f_0 et f_1 .

---

*) i.e. $h|_{N \times 0} = f_0$,

$h|_{N \times 1} = f_1$

Alors, si $2n + 2 \leqslant p$, f_0 et f_1 sont isotopes **) .

<u>Démonstration</u>. Considérons l'application

$$H : N \times [0, 1] \longrightarrow P \times [0, 1]$$
$$(n, t) \longmapsto h(n, t) \times t$$

$$H|_{N \times \{0\}} = f_0$$
$$H|_{N \times \{1\}} = f_1$$

sont des prolongements de N dans $P \times [0, 1]$.

Puisque N est compacte, si

$$2(n + 1) + 1 \leqslant p + 1 \quad \text{i.e.} \quad 2n + 2 \leqslant p$$

on peut approcher H par un plongement G :

$$G : N \times [0, 1] \longrightarrow P \times [0, 1]$$

Remarquons qu'en général G ne respecte pas le paramètre t :

$$G(n, t) = (g(n,t), \alpha(n,t))$$

où

$$\alpha : N \times [0, 1] \longrightarrow [0, 1] ,$$
$$\alpha(n, 0) = 0 , \quad \alpha(n, 1) = 1$$

$$g : N \times [0, 1] \longrightarrow P$$
$$g(n, 0) = f_0 , \quad g(n, 1) = f_1$$

Puisque G est proche de H , $\alpha(x, t)$ est proche de l'application $p : (x, t) \longmapsto t$.

Soit Φ :

$$: N \times [0, 1] \longrightarrow N \times [0, 1]$$
$$(n, t) \longmapsto (n, (\alpha, t))$$

On a

$$\Phi(n, 0) = (n, 0)$$
$$\Phi(n, 1) = (n, 1)$$

et Φ est proche de Id (car $\alpha(x,t)$ est proche de p). Donc Φ est un difféomorphisme de $N \times [0, 1]$.

Alors

$$K = G \circ \Phi^{-1} : N \times [0,1] \xrightarrow{\Phi^{-1}} N \times [0,1] \xrightarrow{G} P \times [0, 1]$$
$$(n, \alpha(x,t)) \longmapsto (n, t) \longmapsto (g(n,t), \alpha(n, t))$$

a les propriétés suivantes

$$K(n, 0) = (f_0, 0)$$
$$K(n, 1) = (f_1, 1)$$

K est un plongement de $N \times [0, 1]$ dans $P \times [0, 1]$ qui respecte la projection sur $[0, 1]$.

Donc K donne une isotopie entre f_0 et f_1. $\square$

4.2. Nous allons montrer maintenant l'application du premier théorème de transversalité à la théorie des fonctions de Morse.

<u>Définition 4.2.</u> La fonction $f \in C^\infty(N, \mathbb{R})$ est appelée <u>fonction de Morse</u> si tous ses points critiques sont non dégénérés.

<u>Théorème 4.4.</u> Si N est compact, l'ensemble des fonctions de Morse est ouvert dense dans $C^\infty(N, \mathbb{R})$.

<u>Démonstration</u> -

Soit $V_0 \subset J^1(N, \mathbb{R})$

l'ensemble (déjà considéré) défini par

$$\{ j^1 f(x) \; ; \; df(x) = 0 \}.$$

V_0 est une sous-variété fermée (qui est la section nulle

du fibré vectoriel $J^1(N, \mathbb{R}) \longrightarrow N \times \mathbb{R}$)

$$\operatorname{codim} V_0 = \dim N = n .$$

Soit :

$$\Omega_0 = \left\{ f \in C^\infty(N, \mathbb{R}) \; ; \; j^1 f \pitchfork V_0 \right\} .$$

D'après le premier théorème de transversalité de Thom, Ω_0 est un ouvert dense dans $C^\infty(N \; \mathbb{R})$.

Nous allons démontrer que

$$\Omega_0 = \mathcal{M}$$

Dans ce but, écrivons localement la condition

$$f \pitchfork_x V_0 .$$

Puisque le problème est local, il suffit de regarder dans une carte. Localement on a

$$j^1 f : \mathbb{R}^n \longrightarrow J^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^n)^*$$

$$x \longmapsto \left(x, f(x), \frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\right)$$

V_0 est défini par l'application de rang n

$$\Phi : J^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$(x, y, a_1, \ldots, a_n) \longmapsto (a_1, \ldots, a_n)$$

(i.e. localement on a $V_0 = \Phi^{-1}(0)$).

Si

$$df(0) = 0 \quad \text{i.e.} \quad f(0) \in V_0 ,$$

la condition $j^1 f \pitchfork V_0$ au point $(0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$ s'écrit

$$\operatorname{rang} d(\Phi \circ j^1 f)(0, \ldots, 0) = n$$

Mais on a

$$d(\Phi \circ j^1 f)(0, \ldots, 0) = d\Phi(j^1 f(0, \ldots, 0)) \, dj^1 f(0, \ldots, 0)$$

et la matrice jacobienne de $d(\Phi \circ j^1 f)\,(0,\dots,0)$ est

$$\begin{pmatrix} \overbrace{\begin{matrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{matrix}}^{n} & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} & \overbrace{\begin{matrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{matrix}}^{n} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \begin{matrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(0) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(0) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(0) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(0) \end{matrix} \end{pmatrix} \begin{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{matrix}}\right\} n \\ \\ \left.\vphantom{\begin{matrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{matrix}}\right\} n \end{matrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(0) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(0) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(0) \end{pmatrix}$$

Donc la condition de transversalité considérée est équivalente à la condition de rang n de la matrice $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(0)\right)$ c'est-à-dire à la condition que le point critique soit non dégénéré.

En conclusion on a $\Omega_0 = \mathcal{M}$. $\square$

<u>Remarque 1</u> :

Si N n'est pas compact, $\mathcal{M}$ est ouvert dense dans $\mathcal{C}^\infty(N, \mathbb{R})$.

<u>Remarque 2</u> :

Si N est compact, chaque fonction de Morse n'a qu'un nombre fini de points critiques.

En effet, remarquons que

$$\operatorname{codim} V_0 = n = \dim N$$

par conséquent la condition $j^1 r \pitchfork V_0$ implique que les

points critiques de f sont isolés (cf. § 21). Mais N est compact, on en déduit que chaque fonction de Morse n'a qu'un nombre fini de points critiques.

<u>Théorème 4.5</u> : l'ensemble $\mathcal{M}_1$ des fonctions de Morse dont toutes les valeurs critiques sont différentes est dense dans $C^\infty(N, \mathbb{R})$.

<u>Démonstration.</u>

Considérons l'application

$$j_2^1 f \quad : \quad N \times N - \Delta_N \longrightarrow J_2^1(N, \mathbb{R})$$

Dans une carte locale, elle s'écrit

$$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n - \Delta_{\mathbb{R}^n} \longrightarrow$$

$$\underset{(x_i \neq y_i)}{(x_1, \dots x_n)\ ,\ (y_1, \dots y_n)} \longmapsto$$

$$\underset{(a_1, \dots a_n)}{\mathbb{R}^n} \times \underset{b}{\mathbb{R}} \times \underset{(c_1, \dots c_n)}{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})} \times \underset{(d_1, \dots d_n)}{\mathbb{R}^n} \times \underset{e}{\mathbb{R}} \times \underset{(f_1, \dots f_n)}{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})}$$

$$(x_1, \dots x_n)\ ,\ f(x_1, \dots x_n)\ ;\ \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \dots x_n)\ ,\ \dots\ ,\ \frac{\partial^2}{\partial x_i}(x_1, \dots x_n)\right)$$

$$(y_1, \dots y_n)\ ,\ f(y_1, \dots y_n)\ ,\ \frac{\partial f}{\partial x_i}(y_1, \dots y_n)\ ,\ \dots\ ,\ \frac{\partial f}{\partial x_i}(y_1, \dots y_n))$$

Dans $J_2^1(N, \mathbb{R})$ considérons la variété Y qui est définie localement par les équations :

$$a_i \neq d_i \quad (i = 1, \dots, n)\ ,$$

$$b = e\ ; \quad c_i = 0\ , \quad f_i = 0 \quad (i = 1, \dots, n)$$

D'après le deuxième théorème de transversalité de Thom, l'ensemble $\left\{ f \in C^\infty(N, \mathbb{R})\ ;\ j_2^1 f \pitchfork_{N \times N - \Delta_N} Y \right\}$ est dense dans $C^\infty(N, \mathbb{R})$. Mais codim $Y = 2n+1 > \dim N$

donc la transversalité est équivalente à la condition

$$j_2^1 f\,(N \times N - \Delta_N) \cap Y = \phi$$

Si p et q sont des points critiques non dégénérés de f, on déduit

$$(p, q) \in N \times N - \Delta_N$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(p) = 0 \quad \text{(dans une carte locale)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(q) = 0$$

et la condition

$$j_2^1 f\,(p, q) \cap Y = \phi$$

implique

$$f(p) \neq f(q)$$

i.e. les valeurs critiques de f sont différentes. En conclusion, l'ensemble $\mathcal{M}_1$ est dense dans $C^\infty(N, \mathbb{R})$. □

Remarque 1.

Si N est compacte, puisque chaque fonction de Morse n'a qu'un nombre fini de points critiques, on en déduit que $\mathcal{M}_1$ est un ensemble ouvert dans $C^\infty(N, \mathbb{R})$.

Remarque 2 :

Si N est compact, on peut démontrer que dans $C^\infty(N, \mathbb{R})$, $\mathcal{M}_1$ coïncide avec l'ensemble des fonctions stables. Donc l'ensemble des fonctions stables forme un ouvert dense dans $C^\infty(N, \mathbb{R})$ (cf. [4]).

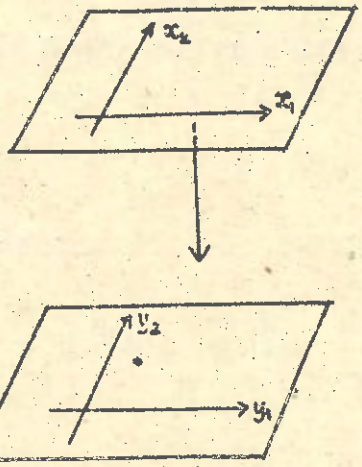
Nous donnerons encore une application plus compliquée du premier théorème de transversalité.

Théorème 4-6 (de Whitney [20]).

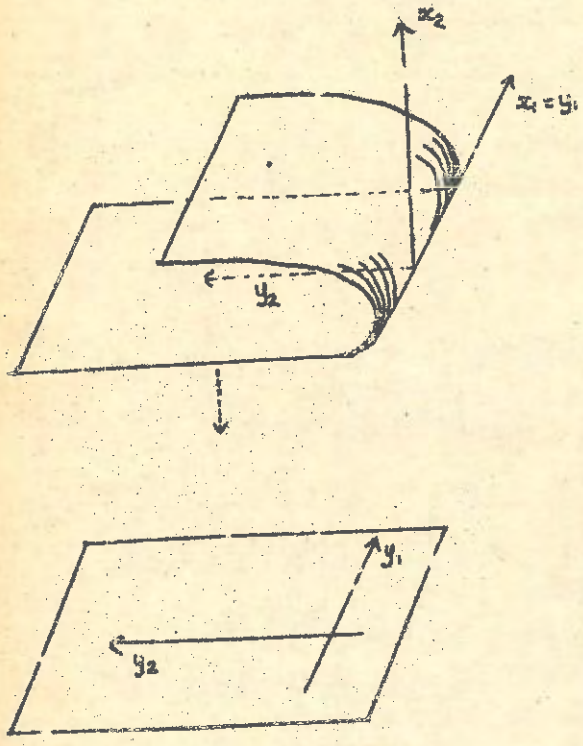
Soient N, P des C^∞-variétés de dimension 2, N compact. Alors il existe un ouvert dense $\Omega \subset C^\infty(N, P)$ tel que $\forall f \in \Omega$, $\forall x \in N$, le germe f_x de f en x

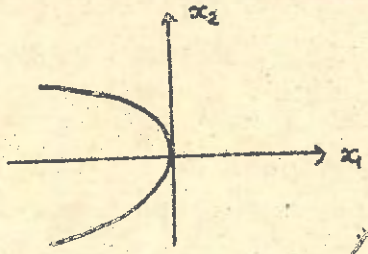
soit équivalent à un des trois germes suivants (fig. 21)

Cas 1



Cas 2





Cas 3

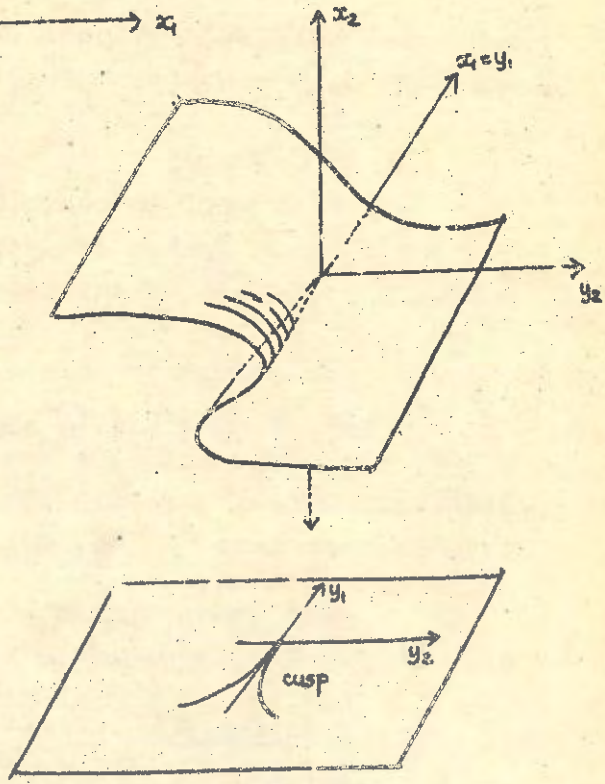


Fig 21

$$(\mathbb{R}^2, (0, 0)) \longrightarrow \mathbb{R}^2, (0, 0)$$
$$(x_1, x_2) \longmapsto (y_1, y_2)$$

où

1) $$y_1 = x_1$$
$$y_2 = x_2$$

2) $$y_1 = x_1$$
$$y_2 = g(x_1, x_2),$$

$$\frac{\partial g}{\partial x_2}(0, 0) = 0$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x_2^2}(0, 0) \neq 0$$

3) $$y_1 = x_1$$
$$y_2 = g(x_1, x_2)$$

$$\frac{\partial g}{\partial x_2}(0, 0) = 0 \; ; \qquad \frac{\partial^2 g}{\partial x_2^2}(0, 0) = 0$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x_1 \partial x_2}(0, 0) \neq 0 \; ; \qquad \frac{\partial^3 g}{\partial x_2^3}(0, 0) \neq 0$$

<u>Démonstration</u> :

1. Soit :
$$V_0 = \left\{ j^1 f(x) \; ; \; df(x) = 0 \right\}$$

la sous-variété fermée de $J^1(N,P)$ déjà considérée. D'après le premier théorème de transversalité, l'ensemble

$$\Omega_0 = \left\{ f \; ; \; j^1 f \cap V_0 = \emptyset \right\}$$

est ouvert dense dans $C^\infty(N, P)$ car

$$\operatorname{codim} V_0 = 4 > \dim N$$

Si $f \in \Omega_0$ on a

$$\forall x \in N, \quad \operatorname{rang} df(x) \geq 1$$

le germe f_x est localement équivalent à un germe

$$(\mathbb{R}^2, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$$

de la forme

$$y_1 = x_1$$
$$y_2 = g(x_1, x_2)$$

Alors, ou bien

$$\frac{\partial g}{\partial x_2}(0, 0) \neq 0$$

donc f_x est équivalent au germe

$$y_1 = x_1$$
$$y_2 = x_2$$

ou bien

$$\frac{\partial g}{\partial x}(0, 0) = 0$$

2. Soit

$$V_1 = \left\{ j^1 f(x) \; ; \; \text{rang } df(x) = 1 \right\}.$$

V_1 est une sous-variété ouverte, et

$$\text{codim } V_1 = (2 - 1)(2 - 1) = 1 .$$

D'après le premier théorème de transversalité, l'ensemble

$$\Omega_1 = \left\{ f \, , \, j^1 f \pitchfork V_1 \right\}$$

est une intersection dénombrable d'ouverts denses dans $C^\infty(N, P)$ donc est dense.

Traduisons localement la condition $f \in \Omega_0 \cap \Omega_1$.

Supposons que

$$f = (f_1, f_2) : (\mathbb{R}^2, (0, 0)) \longrightarrow (\mathbb{R}^2, 0, 0))$$

soit

$$f_1(x_1, x_2) = x_1$$

$$f_2(x_1, x_2) = g(x_1, x_2)$$

où

$$\frac{\partial g}{\partial x_2}(0, 0) = 0$$

i.e.

$$j^1 f(0, 0) \in V_1 .$$

Remarquons que

$$J^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2) \cong \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$$

où $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ est l'espace des applications linéaires de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$.

Alors au voisinage de

$$j^1 f(0,0) = (0,0,0,0,1,0, \frac{\partial g}{\partial x_1}(0, 0), \frac{\partial g}{\partial x_2}(0, 0))$$

$$\in J^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$$

V_1 est définie par l'application :

$$J^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x_1, x_2, y_1, y_2, a, b, c, d) \longmapsto ad - bc .$$

est de rang 1, car $a \neq 0$ dans un voisinage de $j^1 f(0, 0)$.

La condition $j^1 f \pitchfork_{(0,0)} V_1$ s'écrit donc

$$d\Phi(j^1 f(0, 0))\, d(j^1 f)(0, 0)$$

est de rang 1.

Mais

$$d\Phi(x_1, x_2, y_1, y_2, a, b, c, d) = (0,0,0,0,d,-c,-b,a)$$

Donc :

$$d\Phi(j^1 f(0, 0)) = (0,0,0,0,\underset{\substack{\parallel \\ 0}}{\frac{\partial g}{\partial x_2}(0,0)}, -\frac{\partial g}{\partial x_1}(0,0), 0, 1)$$

De même :

$$d\,j^1 f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_1, x_2) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x\ , x_2) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_1, x_2) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_1, x_2) \\ \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1^2}(x_1, x_2) & \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1, x_2) \\ \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1 \partial x_2}(x\ , x\ ) & \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_2^2}(x_1, x_2) \\ \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1^2}(x_1, x_2) & \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1, x_2) \\ \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1, x_2) & \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_2^2}(x_1, x_2) \end{pmatrix}$$

donc

$$d\,j^1 f(0, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ \frac{\partial g}{\partial x_1}(0, 0) & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{\partial^2 g}{\partial x_1^2}(0, 0) & \frac{\partial^2 g}{\partial x_1 \partial x_2}(0, 0) \\ \frac{\partial^2 g}{\partial x_1 \partial x_2}(0, 0) & \frac{\partial^2 g}{\partial x_2^2}(0, 0) \end{pmatrix}$$

Enfin

$$d\Phi\,(j^1 f(0,0)).\, d\, j^1 f(0,0) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 g}{\partial x_1 \partial x_2}(0,0) \\ \\ \dfrac{\partial^2 g}{\partial x_2^2}(0,0) \end{pmatrix}$$

Pour que cette matrice soit de rang 1 , il faut

ou bien $\dfrac{\partial^2 g}{x_2^2}(0,0) \neq 0$ (cas 2)

ou bien $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x_2^2}(0,0) = 0$

et

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x_1 \partial x_2}(0,0) \neq 0 .$$

3. La dernière étape de la démonstration est moins évidente et nécessite pour être comprise conceptuellement la théorie des singularités de Thom-Boardman.

On définit une sous-variété (ouverte)

$$V_2 \subset J^2(N, P)$$

de la manière suivante :

$$V_2 = \left\{ z \in J^2(N, P) \;,\; z = j^2 f(x) \;,\; j^1 f(x) \in V_1 \right.$$

et

$$\left. \text{rang} \; \frac{D\left(f_1, f_2, \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}\dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} - \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}\dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}\right)}{D(x_1, x_2)}(x) = 1 \right\}$$

Dans le troisième chapitre, on verra que la définition de V_2 est intrinsèque (cf. extensions Jacobiennes).

Les théorèmes de Boardman que nous démontrerons dans le troisième chapitre affirment en particulier que V_2 est

une C^∞-sous-variété de $J^2(N, P)$. Remarquons que V_2 est fermée dans l'image réciproque de V_1 par

$$\pi_1^2 : J^2(N, P) \longrightarrow J^1(N, P)$$

On posera

$$\Omega_2 = \left\{ f \in C^\infty(N, P) ; j^2 f \pitchfork V_2 \right\}.$$

Ω_2 est partout dense.

Ecrivons localement les équations de V_2.

Les coordonnées dans $J^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ sont

x_1, x_2, y_1, y_2, a, b, c, d, α_1, β_1, γ_1, α_2, β_2, γ_2

correspondant à

$$\frac{\partial y_1}{\partial x_1}, \frac{\partial y_1}{\partial x_2}, \frac{\partial y_2}{\partial x_1}, \frac{\partial y_2}{\partial x_2}, \frac{\partial^2 y_1}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 y_1}{\partial x_1 \partial x_2}$$

$$\frac{\partial^2 y_1}{\partial x_2^2}, \frac{\partial^2 y_2}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 y_2}{\partial x_1 \partial x_2}, \frac{\partial^2 y_2}{\partial x_2^2}$$

On est en point où $a \neq 0$ donc la première équation qui définit V_1

$$ad - bc = 0$$

est de rang 1.

Ecrivons :

$$\frac{D\left(f_1, f_2, \frac{\partial f_1}{\partial x_1}\frac{\partial f_2}{\partial x_2} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\right)}{D(x_1, x_2)} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix}$$

$$e = \alpha_1 d + a\beta_2 - \beta_1 c - b\alpha_2$$

$$f = \beta_1 d + a\gamma_2 - \gamma_1 c - b\beta_2$$

Pour que cette matrice soit de rang 1 , sachant que $a \neq 0$ et $ad - bc = 0$ il suffit d'écrire $af - be = 0$ (car alors $cf - ed = ca^{-1} be - ed = e(ca^{-1} b - d) = e(ca^{-1} b - a^{-1} bc) = 0$).

On a donc défini localement V_2 par

$$\Psi : J^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2) \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\Psi(x_1, x_2, y_1, y_2, a, b, c, d, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_2, \beta_2, \gamma_2) =$$

$$= (ad - bc , af - be)$$

et

$$\text{rang } \Psi =$$

$$\text{rang} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & d & -c & -b & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x & x & x & x & x & x & x & x & x & a^2 \end{pmatrix} = 2$$

dès que $a \neq 0$.

On recommence alors comme avant en s'apercevant que si

$$f(x_1) = (x_1 , g(x_1, x_2)) ,$$

avec

$$\frac{\partial g}{\partial x_2}(0, 0) = 0 , \quad \frac{\partial^2 g}{\partial x_2^2}(0, 0) = 0 ,$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x_1 \partial x_2}(0, 0) \neq 0$$

on a

$$j^2 f(0, 0) \in V_2$$

Traduisons localement la condition de transversalité $j^2 f \pitchfork_{(0,0)} V_2$ en écrivant que l'application composée

$$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{j^2 f} J^2(\mathbb{R}^2 , \mathbb{R}^2) \xrightarrow{\Psi} \mathbb{R}^2$$

est de rang 2 .

On a :

$$d\psi(\ldots\ldots) =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & c & 0 & 0 & d & -c & -b & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & v_1 & v_2 & v_3 & w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix}$$

où

$$u_1 = d\beta_1 + 2a\gamma_2 - c\gamma_1 - 2b\beta_2$$

$$u_2 = -a\beta_2 + 2b\alpha_2 - \alpha_1 d - a\beta_2 + \beta_1 c$$

$$u_3 = -c\gamma_1 + b\beta_1$$

$$u_4 = a\beta_1 - b\alpha_1$$

$$w_1 = b^2$$

$$w_2 = -2ab$$

$$w_3 = a^2$$

$$d\, j^2 f(0, 0) = \ldots\ldots$$

$$
d\,j^2 f(0,0) = \begin{pmatrix}
1 & 0 \\
0 & 1 \\
1 & 0 \\
\frac{\partial g}{\partial x_1}(0,0) & \frac{\partial g}{\partial x_2}(0,0) \\
0 & 0 \\
0 & 0 \\
\frac{\partial^2 g}{\partial x_1^2}(0,0) & \frac{\partial^2 g}{\partial x_1 \partial x_2}(0,0) \\
\frac{\partial^2 g}{\partial x_1 \partial x_2}(0,0) & \frac{\partial^2 g}{\partial x_2^2}(0,0) \\
0 & 0 \\
0 & 0 \\
0 & 0 \\
\frac{\partial^3 g}{\partial x_1^3}(0,0) & \frac{\partial^3 g}{\partial x_1 \partial x_2}(0,0) \\
\frac{\partial^3 g}{\partial x_1^2 \partial x_2}(0,0) & \frac{\partial^3 g}{\partial x_1 \partial x_2^2}(0,0) \\
\frac{\partial^3 g}{\partial x_1 \partial x_2^2}(0,0) & \frac{\partial^3 g}{\partial x_2^3}(0,0)
\end{pmatrix}
$$

Donc

$$
d\,\psi(j^2 f(0,0))\, dj^2 f(0,0) = \begin{pmatrix}
\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(0,0) & 0 \\
\times & \frac{\partial^3 g}{\partial x_2^3}(0,0)
\end{pmatrix}
$$

Alors on obtient comme condition de transversalite exactement

$$\frac{\partial^3 g}{\partial x_2^3}(0, 0) \neq 0$$

en plus de

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x_1 \partial x_2}(0, 0) \neq 0$$

Nous allons démontrer que $\Omega_0 \cap \Omega_1 \cap \Omega_2$ est ouvert. Alors l'ensemble

$$\Omega = \Omega_0 \cap \Omega_1 \cap \Omega_2$$

possède des propriétés mentionnées dans le théorème.

Pour démontrer que Ω est ouvert, il faut utiliser le théorème de transversalité sur un ensemble stratifié par des variétés ouvertes avec la condition (a) de Whitney.

§ 5 - THEOREME DE TRANSVERSALITE FACILE SUR UN ENSEMBLE STRATIFIÉ.

5.1. La technique des espaces stratifiés de Whitney nous permet de généraliser le théorème de transversalité à des cas où $Y \subset P$ n'est plus une sous-variété.

Définition 5.1.

Soit P une C^∞-variété et soit Y une partie fermée de P. Une stratification de Y est une suite emboîtée des sous-ensembles fermés Y^{p_i} :

$$Y = Y^{p_1} \supset Y^{p_2} \supset \dots \supset Y^{p_\lambda} \supset \dots$$

$$p_1 > p_2 > \dots > p_\lambda > \dots$$

tels que

1) (Propriété des strates) : $Y^{p_\lambda} - Y^{p_{\lambda-1}}$

est une C^∞-sous-variété de dimension p_λ de Y dont ses composantes connexes $A_i^{p_\lambda}$ (dont on supposera qu'il n'y en a qu'un nombre fini de telles composantes) s'appellent des strates.

2) (Propriété de frontière). La frontière

$$A = \overline{A} - A$$

de chaque strate A est la réunion des strates de dimension plus petite que celle de A.

<u>Condition (a) de Whitney</u> :

Soient U, V deux strates,

$$V \subset \overline{U} \quad , \quad x \in V .$$

On dit que le triple (U, V, x) satisfait à la condition (a) de Whitney si pour toute suite $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ de points de U, $x_i \longrightarrow x$ telle que $T_{x_i} U$ converge (dans la grassmanienne appropriée) vers τ, alors $T_x V \subset \tau$.

Si tous les triples (U, V, x), $\forall x \in V$, satisfont à la condition (a) de Whitney, on dit que le couple (U, V) satisfait à cette condition.

On dit qu'une stratification de Y satisfait à la condition (a) de Whitney si cette condition est vérifiée pour tous les couples de strates (U, V) de Y où $V \subset \overline{U}$.

<u>Exemple 1</u>. Considérons dans $\mathbb{R}^3$ les ensembles

$$U : \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 ; \ y > 0\}$$

$$V : \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 , \ y = 0\}$$

Alors on voit aisément que $\overline{U}$ admet une stratification par des strates (U, V) satisfaisant à la condition (a) de Whitney.

<u>Exemple 2</u> : Considérons dans $\mathbb{R}^3$ la surface Y

définie par l'équation

$$x^2 - y^2 z = 0$$

(parapluie de Whitney (fig 22)).

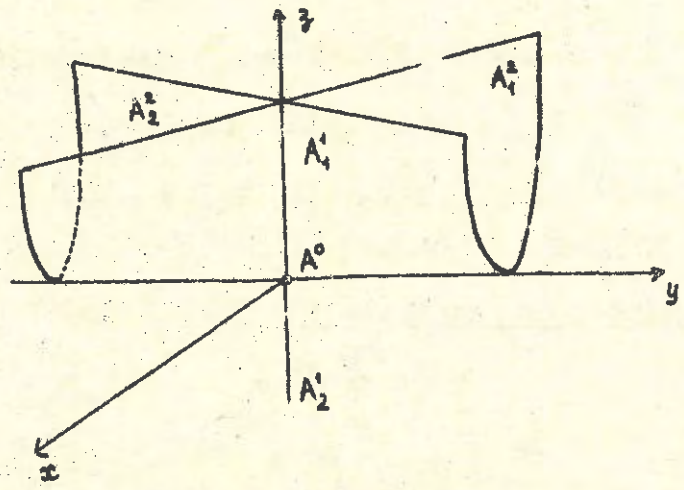


Fig. 22

Nous partageons Y en sous-variétés

$$Y = A_1^2 \cup A_2^2 \cup A_1^1 \cup A_2^1 \cup A^0$$

où

$$A_1^2 = Y \cap \{y > 0\}$$

$$A_2^2 = Y \cap \{y < 0\}$$

$$A_1^1 = \{x = y = 0 , z > 0\}$$

$$A_2^1 = \{x = y = 0 , z < 0\}$$

$$A^0 = \{x = y = z = 0\}$$

Alors la propriété de frontière est vérifiée :

$$\partial A_1^2 = \partial A_2^2 = A_1^1 \cup A^0$$

$$\partial A_1^1 = \partial A_2^1 = A^0 , \qquad \partial A^0 = \phi$$

Donc, nous obtenons une stratification de Y.

On voit aisément que la condition (a) de Whitney est remplie pour cette stratification.

Si nous partageons Y par une autre manière

$$Y = A_1^2 \cup A_2^2 \cup A^1$$

où

$$A^1 = \{ x = y = 0 \}$$

alors la propriété de frontière ne se satisfait pas. Donc nous n'avons pas une stratification.

Remarquons que dans cette partition la condition (a) de Whitney n'est pas remplie en A^0 : Si nous choisissons une suite $\{ x_i \} \longrightarrow 0$; $x_i \in Oy$, alors les plans tangents $T_{x_i} A_j^2$ $(j = 1, 2)$ sont toujours orthogonaux à l'axe z qui est $T_0 A^1$.

<u>Exemple 3</u>. Considérons la surface Y définie par l'équation

$$y^2 = z^2 x^2 - x^3 \qquad \text{(Fig.23)}$$

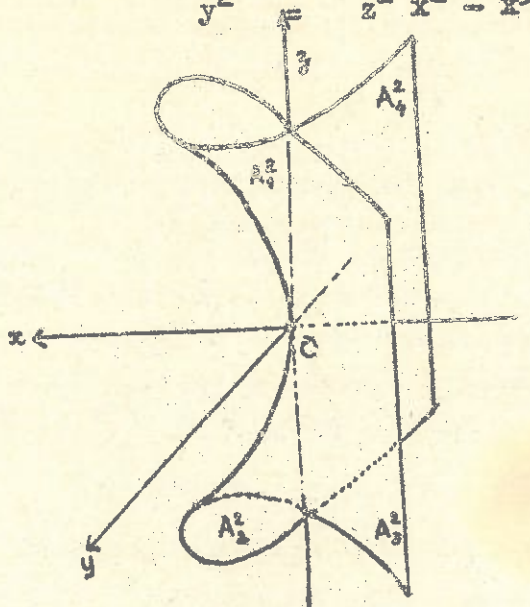


Fig. 23

La stratification de Y :

$$Y = A_1^2 \cup A_2^2 \cup A_3^2 \cup A_4^2 \cup A^1$$

où

$$A^1 = \{x = y = 0\}$$

$$A_1^2 = \{Y - A^1 \; ; \; x > 0 \, , \; z > 0\}$$

$$A_2^2 = \{Y - A^1 \; ; \; x > 0 \, , \; z < 0\}$$

$$A_3^2 = \{Y - A^1 \; ; \; x < 0 \, , \; y > 0\}$$

$$A_4^2 = \{Y - A^1 \; ; \; x < 0 \, , \; y < 0\}$$

satisfait à la condition (a) de Whitney.

Soit $\qquad f : N \xrightarrow{C^\infty} P$

Soit Y un sous-ensemble stratifié de P :

$$Y = \bigcup_j U_j$$

où U_j sont des strates.

<u>Définition 5.2</u>. On dit que f est transversale à Y si f est transversale à toutes les strates U_j de Y:

$$f \pitchfork Y \iff f \pitchfork U_j \, , \; \forall j \, .$$

<u>Théorème 5.1</u> (de transversalité facile sur un ensemble stratifié).

Soit $Y \subset P$ un ensemble fermé stratifié par un nombre fini de sous-variétés avec la propriété (a) de Whitney. Soit N compacte. Alors les applications transversales à Y forment un ouvert dense dans $C^\infty(N, P)$.

<u>Démonstration</u> :

Il est clair que la condition (a) nous donne la situation suivante :

Si f est transversale en tout point $a \in N$ à la strate V alors f est transversale en tout point a à toutes les strates contenant V dans leur adhérence i.e.

l'étoile de V, sur un voisinage assez petit de V dans P.

On peut donc remplacer chaque strate adhérant à V par un fermé obtenu en enlevant un voisinage assez petit de V. Le théorème est alors déduit du théorème de transversalité facile (voir aussi la remarque 1 du lemme 2.1) par récurrence en commencant par les strates de dimension minimale, i.e.

$$U = \mathcal{T} . \qquad \square$$

<u>Application</u> -

L'ensemble $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n , \mathbb{R}^p)$ des applications linéaires de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ peut être stratifié par les strates, composantes connexes de

$$S_k = \left\{ L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n , \mathbb{R}^p) , \text{ rang } L = k \right\}$$

Les S_k sont des variétés ouvertes, sauf S_o qui est fermé (égal à $\{0\}$) et

$$\overline{S}_k = S_o \cup \cdots \cup S_k$$

Puisque S_k est l'orbite de la matrice $\begin{pmatrix} I_l & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ sous l'action de $Gl(\mathbb{R}^n) \times Gl(\mathbb{R}^p)$, pour démontrer la propriété (a) de Whitney pour le couple (S_k , S_l), $0 < l < k$, il suffit de considérer l'intersection des

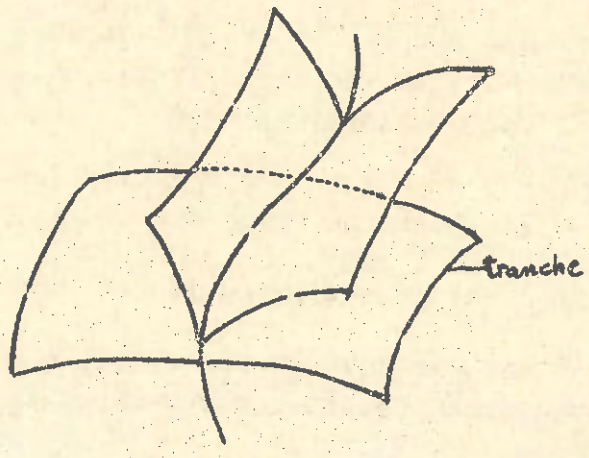


Fig. 24

strates de $\mathcal{Z}_k$ avec une tranche dans $\mathbb{R}^{np}$ (cf. fig. 24) de l'orbite S_1 : ceci est une stratification avec la propriété (a) de Whitney, car on se ramène à un problème en S_0 dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^{n-1}, \mathbb{R}^{p-1})$.

5.2. En revenant à la démonstration du théorème de Whitney on en déduit que l'ensemble

$$\Omega_0 \cap \Omega_1 = \left\{ f \in C^\infty(N, P) \ , \ j^1 f \pitchfork \mathcal{V}_1 \right\}$$

est ouvert dans $C^\infty(N, P)$ où

$$\mathcal{V}_1 = V_0 \cup V_1$$

est une stratification satisfaisant à la condition (a) de Whitney (d'après ce que nous avons démontré ci-dessus).

Ensuite, remarquons que V_2 est une sous-variété fermé dans $(\pi_1^2)^{-1}(V_1)$. Si $f \in \Omega_0$, $j^1 f(N)$ ne rencontre pas un voisinage tubulaire *) de V_0. Donc $j^2 f(N)$ ne rencontre pas l'image de ce voisinage tubulaire i.e. un voisinage tubulaire de $(\pi_1^2)^{-1}(V_0)$ et tout se passe comme si V_2 était fermée.

Donc $$\Omega = \Omega_0 \cap \Omega_1 \cap \Omega_2$$

est ouvert dans $C^\infty(N, P)$ si N est compact. Le théorème de Whitney est alors démontré. □

---

*) Soit X une sous-variété de la C^∞-variété Y. Un voisinage tubulaire de X dans Y est un ensemble ouvert Z de Y et une submersion $\pi : Z \longrightarrow X$ tels que

1. $Z \xrightarrow{\pi} X$ est un fibré vectoriel.

2. $X \subset Z$ est la section nulle de ce fibré.

On a démontré que pour chaque sous-variété X de Y il existe toujours un voisinage tubulaire de X dans Y.

Chapitre III

THEORIE DES SINGULARITES DE THOM - BOARDMAN.

§ 1 - Exemples

Nous commencerons par quelques exemples.

Exemple 1

Soit $f : (\mathbb{R}^2, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$

$$(x_1, x_2) \longmapsto (x_1, g(x_1, x_2))$$

Considérons l'ensemble

$$\sum^1(f) = \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 , \dim \operatorname{Ker} df(x_1, x_2) = 1 \right\}$$

i.e.

$$\sum^1(f) = \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 , \operatorname{rang} f(x_1, x_2) = 1 \right\}$$

$$= \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 , \frac{\partial g}{\partial x_2}(x_1, x_2) = 0 \right.$$

Premier cas : $g(x_1, x_2) = x_2^3 + x_1 x_2$

$$\sum^1(f) = \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 , x_1 = -2 x_2^2 \right\}$$

est une sous-variété lisse (courbe de fronce) (Fig. 25).

Deuxième cas : $g(x_1, x_2) = x_2^3 - 3 x_1^2 x_2$

$$\sum^1(f) = \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 , x_2^2 - x_1^2 = 0 \right\}.$$

$\sum^1(f)$ n'est pas une sous-variété (deux droites

concourantes). Cependant, on peut perturber un peu f pour que $\Sigma^1(f)$ devienne une sous-variété lisse.

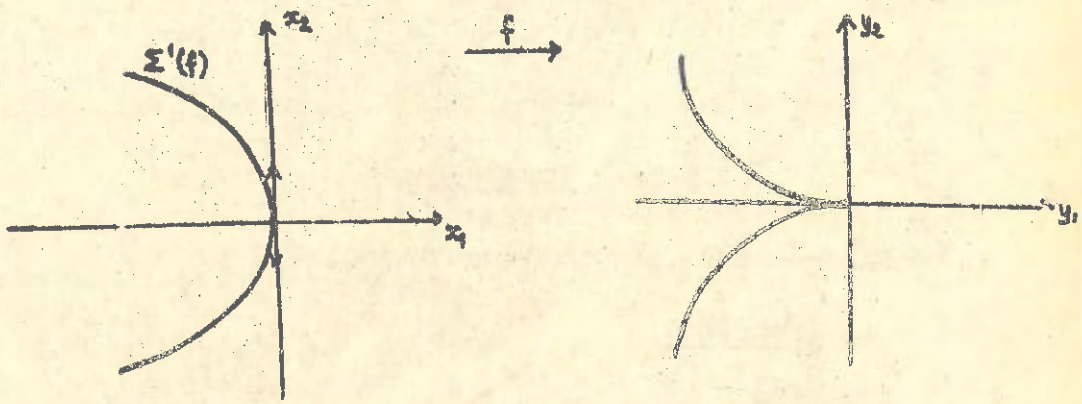


Fig. 25

Par exemple, en remplaçant f par f_ε (Fig. 26)

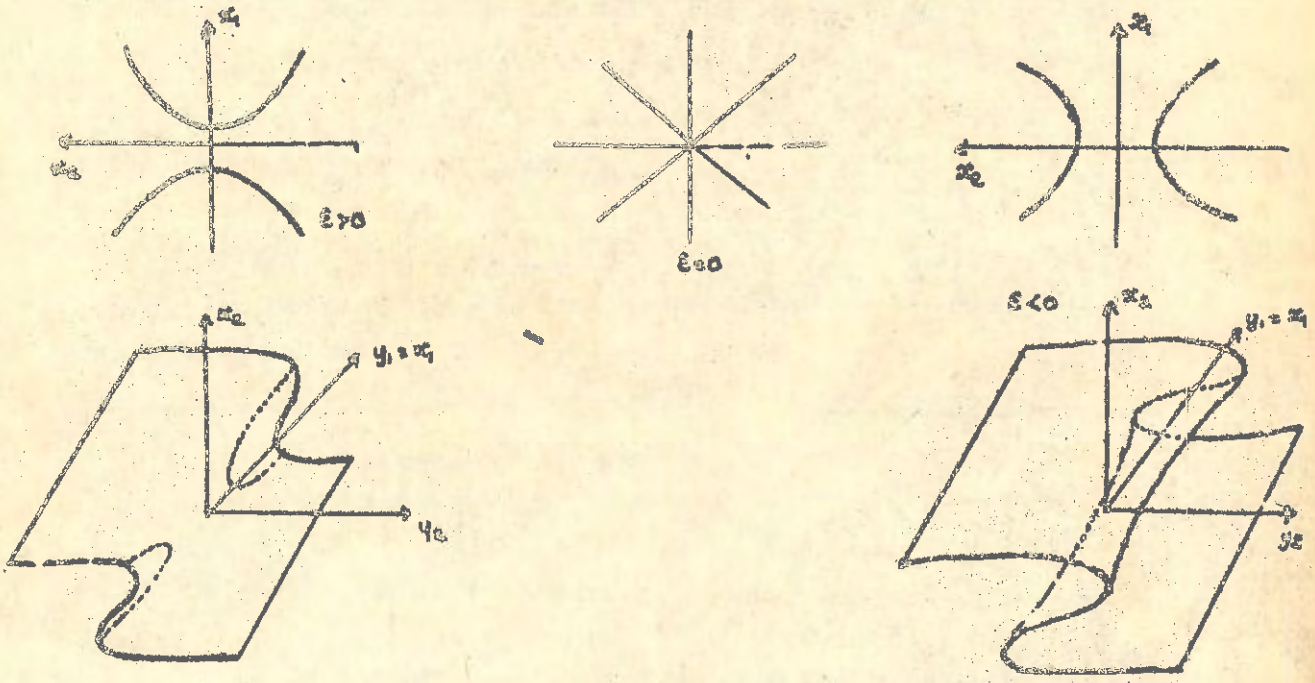


Fig. 26

$$f_\varepsilon : (\mathbb{R}^2, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$$

$$(x_1, x_2) \longmapsto (x_1, x_2^3 + 3\varepsilon x_2 - 3 x_1^2 x_2)$$

On a

$$\sum^1(f_\varepsilon) = \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \,,\; x_1^2 = x_2^2 + \varepsilon \right\}$$

qui est une sous-variété lisse , quand $\varepsilon \neq 0$.

Cette situation est analogue à celle dans l'exemple 3 , § 2. 1 (chap. II). Le passage de $\varepsilon > 0$ à $\varepsilon < 0$ se traduit par une chirurgie sur $\sum^1(f)$.

<u>Exemple 2</u> : Soit

$$f : (\mathbb{R}^3, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^3, 0)$$
$$(x_1, x_2, x_3) \longmapsto (x_1, x_2, x_3^4 + x_1 x_3^2 + x_2 x_3)$$

On a

$$df(x_1, x_2, x_3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ x_3^2 & x_3 & 4x_3^3 + 2x_1 x_3 + x_2 \end{bmatrix}$$

Alors :

$$\sum^1(f) = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,,\; \dim \ker df(x_1, x_2, x_3) = 1 \right\}$$
$$= \left\{ (x \,,\, x \,,\, x) \in \mathbb{R}^3 \,.\; -x_2 = 4x_3^3 + 2x_1 x_3 \right\}$$

Donc $\sum^1(f)$ est une variété lisse (Fig. 27).

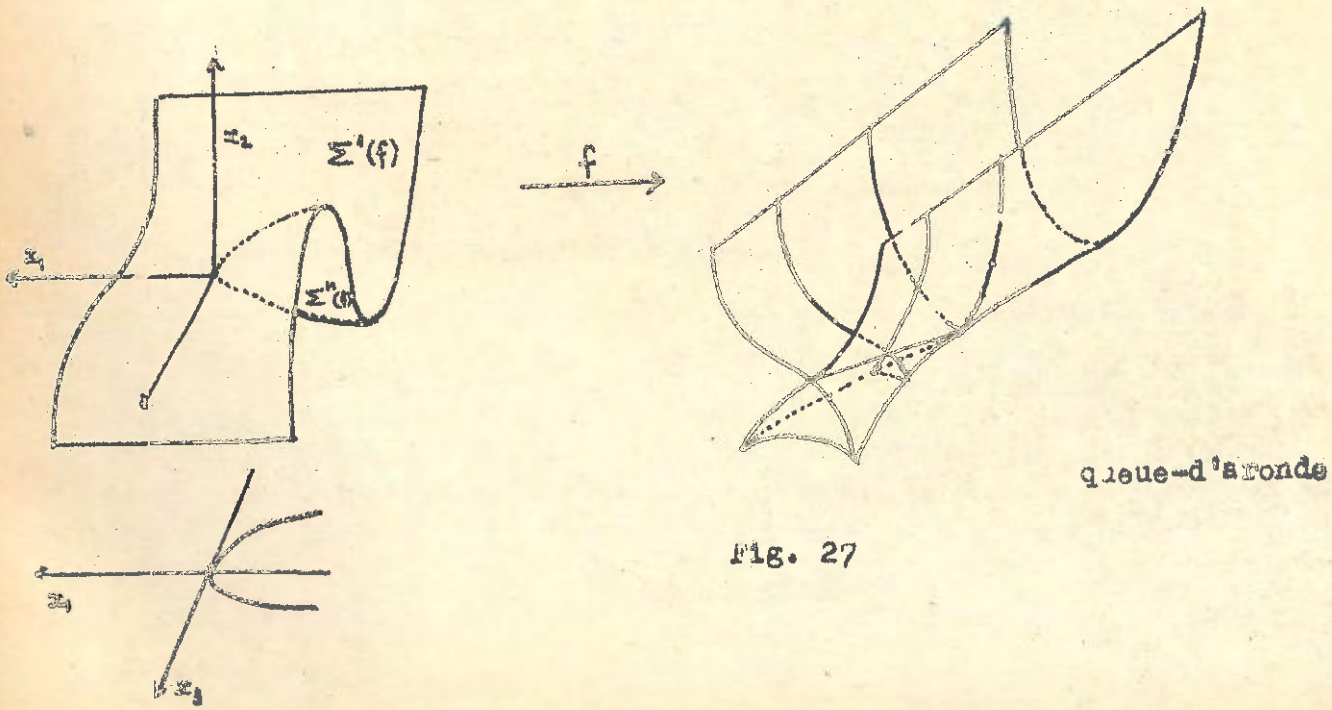


Fig. 27

On a donc un difféomorphisme

$$(\mathbb{R}^2, 0) \xrightarrow{\varphi} \Sigma^1(f) \subset \mathbb{R}^3$$
$$(x_1, x_3) \longmapsto (x, -(4x_3^3 + 2x_1x_3), x_3)$$

Maintenant, nous nous intéressons à l'ensemble

$$\Sigma^{11}(f) = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 ; \dim \ker d\,(f|\Sigma^1(f)) = 1 \right\}$$

D'après ce qui précède, l'étude de $f|_{\Sigma^1(f)}$ se ramène à celle de la composée

$$(\mathbb{R}^2, 0) \xrightarrow{\varphi} \Sigma^1(f) \xrightarrow{f} \mathbb{R}^3$$
$$(x_1, x_3) \longmapsto (x_1, -(4x_3^3 + 2x_1x_3), -3x_3^4 - x_1x_3^2)$$

Donc $\Sigma^{11}(f)$ est défini par la condition

$$\dim \ker d\,(f \circ \varphi)\,(x_1, x_3) = 1$$

On a

$$d\,(f \circ \varphi)\,(x_1, x_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2x_3 & -12x_3^2 - 2x_1 \\ -x_3^2 & -12x_3^3 - 2x_1x_3 \end{pmatrix}$$

d'où l'on déduit

$$\Sigma^{11}(f) = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \Sigma^1(f) ; x_1 = -6x_3^2 \right\}$$

Donc $\Sigma^{11}(f)$ est une sous-variété lisse.

Cependant, dans l'exemple suivant, on n'obtiendra pas une sous-variété lisse $\Sigma^{11}(f)$.

<u>Exemple 3</u>. Soit

$$f : (\mathbb{R}^3, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^3, 0)$$
$$(x_1, x_2, x_3) \longmapsto (x_1, x_2, x_3^4 - x_1^2x_3^2 + x_2x_3)$$

$$\sum^{1}(f) = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \; ; \; 4x_3^3 - 2x_1^2 x_3 + x_2 = 0 \right\}$$

Avec les notations de l'exemple 2, on a

$$(\mathbb{R}^2, 0) \xrightarrow{f \circ \varphi} (\mathbb{R}^3, 0)$$

$$(x_1, x_3) \longmapsto (x_1, \; + 2x_1^2 x_3 - 4x_3^3, \; -3x_3^4 + x_1^2 x_3^2)$$

$$d\, f \circ \varphi (x_1, x_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4x_1 x_3 & + 2x_1^2 - 12x_3^2 \\ 2x_1 x_3^2 & - 12x_3^3 + 2x_1^2 x_3 \end{pmatrix}$$

D'où l'on voit que $d(f \circ \varphi)(x_1, x_2, x_3)$ est de rang 1 si et seulement si

$$x_1^2 = 6x_3^2 .$$

Donc :

$$\sum^{11}(f) = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \sum^{1}(f) \; , \; x_1^2 = 6x_3^2 \right\}$$

qui n'est pas une variété lisse.

Cependant par une perturbation arbitrairement petite de f

$$(\mathbb{R}^3, 0) \xrightarrow{f_\varepsilon} (\mathbb{R}^3, 0)$$

$$(x_1, x_2, x_3) \longmapsto (x_1, x_2, x_3^4 + (\varepsilon - x_1^2) x_3^2 + x_2 x_3)$$

$\sum^{1}$ ne changera pas qualitativement, mais $\sum^{11}$ deviendra une sous-variété lisse avec $\varepsilon \neq 0$.

Dans la théorie de Thom-Boardman que nous allons considérer, on démontre qu'il existe un ouvert dense des applications $f \in C^{\infty}(N, P)$ telles que tous les ensembles

$$\sum^{i}(f) \; , \; \sum^{ij}(f) \; , \; \sum^{ijk}(f) \; , \ldots$$

sont des sous-variétés lisses.

Donc, on peut continuer infiniment le processus ci-dessus pour déterminer des sous-variétés

$$\sum^{i_1 i_2 \dots i_k} (f) \quad \dots$$

En particulier pour des germes stables, en perturbant un peu on peut remplacer ces germes par des germes équivalents qui rentrent dans l'ouvert dense considéré.

§ 2 - THEORIE DES SINGULARITES DE THOM-BOARDMAN.

2.1. Nous commencerons par rappeler quelques notions sur les algèbres de séries formelles

Soit

$$A_n = \mathbb{R}\left[[x_1, \dots, x_n]\right]$$

l'algèbre des séries formelles à n variables sur $\mathbb{R}$.

D'après le théorème de Borel (cf. [12]) on a une surjection

$$T : C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \longrightarrow A_n$$

$$f \longmapsto \sum_\alpha \frac{1}{\alpha!} \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha} f(0)\, x^\alpha$$

Soient J un idéal propre (i.e. $J \neq A_n$ de A_n et $\mathcal{M}_n$, l'idéal maximal de A_n. Nous rappelons que A_n est un anneau local i.e. il possède un idéal maximal unique (l'ensemble des séries sans terme constant).

Remarquons que $J + \mathcal{M}_n^2 / \mathcal{M}_n^2$ est un sous-espace de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n / \mathcal{M}_n^2$ engendré sur $\mathbb{R}$ par $x_1, \dots, x_n$.

<u>Définition 2.1.</u>

$$\text{Rang } J = \dim_{\mathbb{R}} J + \mathcal{M}_n^2 / \mathcal{M}_n^2$$

$$\text{corang } J = n - \text{rang } J$$

On appelle *) dérivation de A_n une application linéaire

$$\Delta : A_n \longrightarrow A_n$$

satisfaisant à l'égalité

$$\Delta(uv) = u \Delta v + v \Delta u \quad , \quad \forall u, v \in A_n$$

Si $1 \leq i \leq n$, il existe une unique dérivation de A_n (qui se note $\frac{\partial}{\partial x_i}$) telle que

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(x_j) = \delta_{ij}$$

où δ_{ij} est le symbole de Kronecker.

Alors, chaque dérivation Δ de A_n prend la forme

$$\Delta = u_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + u_n \frac{\partial}{\partial x_n} \qquad (2.1)$$

où

$$u_1, \dots, u_n \in A_n$$

(On le voit en observant que les opérateurs dans les deux membres coincident sur les x_j $(j = 1, \dots, n)$ donc coincident partout).

<u>Définition 2.2</u> (des extensions jacobiennes).

Soient $f_1, \dots, f_p$ de l'idéal J :

$$J = (f_1, \dots, f_p)$$

On appelle <u>$k^{\text{ème}}$ extension Jacobienne de J</u> (notée $\Delta_k J$) l'idéal engendré par J et par tous les mineurs d'ordre k de la matrice

*) Ceci est une présentation due à Mather [9].

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right) \qquad \begin{array}{l} i = 1,\dots, p \\ j = 1,\dots p. \end{array}$$

Remarquons que la définition est indépendante du choix des systèmes de coordonnées **) et de générateurs car le déterminant est multilinéaire.

Evidemment on a

$$J = \Delta_m J \quad \text{si} \quad m > n$$

$$\Delta_{k+1} J \subseteq \Delta_k J$$

(ce qu'on montre en développant un déterminant suivant une ligne).

$$\Delta_r J = A_n$$

où r est le rang de J (puisque dans l'idéal $\Delta_r J$ il y a au moins un élément inversible qui correspond à un déterminant d'ordre r non nul dans $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(C)\right)$

$i = 1,\dots, p$
$j = 1,\dots, n$.

On a donc une suite d'inclusions

$$J = \Delta_{n+1} J \subset \Delta_n J \quad \dots \subset \Delta_{r+1} J \subset \Delta_r J = A_n$$

<u>Définition 2.3</u> (de l'opérateur δ) :

On pose

$$\delta J = \Delta_{r+1} J$$

où

$$r = \text{rang } J,$$

c'est-à-dire δJ est l'extension Jacobienne maximale de J

**) i.e. l'ensemble $y_1, \dots, y_n$ de n éléments de $\mathcal{M}_n$ tels que $y_1, \dots, y_n$ engendrent $\mathcal{M}_n$. Il est clair que $x_1, \dots, x_n$ est un système de coordonnées de A_n.

qui est encore un idéal propre *). Naturellement, on peut itérer l'opérateur δ pour obtenir $\delta^2 J$, $\delta^3 J$, etc...

<u>Remarque</u> : On peut donner une définition intrinsèque des extensions jacobiennes de la façon suivante :

On appelle $\Delta_k J$, l'idéal $J + J'$ où J' est l'idéal engendré par tous les $k \times k$ - déterminants Δ_{if_j} $(i = 1, \ldots, k, \quad j = 1, \ldots, k)$ où $\Delta_1, \ldots, \Delta_k$ sont des dérivations de A_n et $f_1, \ldots, f_k \in J$.

Si $x_1, \ldots, x_n$ est un système de coordonnées de A_n, $f_1, \ldots, f_p$ un système de générateurs de J, en utilisant (2.1) on voit aisément que cette définition intrinsèque coïncide avec la définition précédente de $\Delta_k J$.

2.2. <u>Définition du symbole de Boardman d'un idéal propre</u> :

On appelle symbole de Boardman d'un idéal propre J de A_n, la suite des nombres entiers positifs $I = (i_1, i_2, \ldots, i_p, \ldots)$ où

$$i_1 = \text{corang } J, \qquad i_2 = \text{corang } J$$

et en général

$$i_k = \text{corang } \delta^{k-1} J.$$

Dans la suite, nous désignerons le symbole de Boardman de J par $I(J)$.

<u>Introduction heuristique aux symboles de Boardman.</u>

Nous allons expliquer la motivation de la définition

---

*) Si J est un idéal propre de A_n, $\Delta_s J$ est aussi propre si et seulement si $s >$ rang J.

du symbole de Boardman.

Soit

$$f : (N, 0) \xrightarrow{C^\infty} P$$

ou

$$\dim N = n , \qquad \dim P = p.$$

Soit $J(f)$ le sous-module engendré par

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} , \ldots , \frac{\partial f}{\partial x_n}$$

où

$$f = (f_1 , \ldots , f_p)$$

Il est clair que $J(f)$ est indépendant du choix du système de coordonnées (x_i).

On a noté

$$\sum^{i_1}(f) = \{ x \in N , \dim \ker df(x) = i_1 \} =$$
$$= \{ x \in N , \operatorname{rang} df(x) = n - i_1 \}$$

Autrement dit

$$\operatorname{corang} J(f) = i_1 .$$

Soit :

$$\Phi : (N, 0) \xrightarrow{C^\infty} \mathbb{R}^\alpha$$
$$x \longmapsto (\text{mineurs d'ordre } n-i_1+1 \text{ de } (\frac{\partial f_i}{\partial x_j}))$$

où α est le nombre des mineurs d'ordre $n - i + 1$ de la matrice jacobienne $(\frac{\partial f_i}{\partial x_j})$.

Supposons que $0 \in \sum^{i_1}(f)$.

On obtient $\sum^{i_1}(f)$ au voisinage de 0 en écrivant que f est de rang $< n - i_1 + 1$ i.e. $\Phi(x) = 0$ (cela est suffisant car l'ensemble des germes de rang $n - i_1$ est ouvert parmi les germes de rang $\leq n - i_1$).

Si $\sum^{i_1}(f)$ est lisse, on a

$$\operatorname{Ker} d\,(f|_{\sum^{i_1}(f)})(0) = T_0\,(\sum^{i_1}(f)) \cap \operatorname{Ker} df(0)$$

Supposons que parmi les composants de Φ, il existe un système d'équations de rang maximum qui définit $\sum^{i_1}(f)$.

Dans ce cas

$$T_0\,\Phi^{-1}(0) = \operatorname{Ker} d\,\Phi(0)$$

donc

$$\operatorname{Ker} d\,(f|_{\sum^{i_1}(f)})\,(0) = \operatorname{Ker} d\,(f,\Phi)(0).$$

Alors

$$0 \in \sum^{i_1,i_2}(f) \iff \dim \operatorname{Ker} d\,(f,\Phi)\,(0) = i_2$$

i.e. i_2 est le corang de l'idéal engendré par $J(f)$ et les mineurs d'ordre $n - i_1 + 1$ de $J(f)$. Par définition de δ cela s'écrit encore

$$\operatorname{corang} \delta J\,(Tf) = i_2$$

Si $0 \in \sum^{i_1,i_2}(f)$ les équations de $\sum^{i_1,i_2}(f)$ au voisinage de 0 sont :

1) celles de $\sum^{i_1}(f)$ i.e. $\Phi = 0$

2) celles obtenues en écrivant

$$\dim \operatorname{Ker} (f|_{\sum^{i_1}(f)})\,(x) \geqslant i_2$$

i.e.

$$\dim \operatorname{Ker} (f,\Phi)\,(x) \geqslant i_2 ;$$

Donc $\sum^{i_1,i_2}(f)$ est définie par l'application (Φ,Ψ) où

$$\Psi \; : \; (N, x) \longrightarrow R^{\beta}$$

$$x \longmapsto (\text{mineurs d'ordre } n - i_2 + 1 \text{ de la matrice jacobienne } \left(\frac{\partial(f, \Phi)_1}{\partial x_j}\right)$$

où β est le nombre des mineurs d'ordre $n - i_2 + 1$ de cette matrice.

Alors si $\sum^{i_1, i_2}(f)$ est lisse et si parmi les composants de (Φ, Ψ) il y a un système d'équations de rang maximum qui définit $\sum^{i_1, i_2}(f)$

$$0 \in \sum^{i_1, i_2, i_3}(f) \iff \dim \operatorname{Ker} d\,(f, \Phi, \Psi) = i_3$$

i.e.

$$\operatorname{corang} \delta^2 J\,(Tf) = i_3 \quad \text{etc...}$$

Mais dans le cas général comme nous l'avons vu dans les exemples, les ensembles $\sum^{i_1}(f)$, $\sum^{i_1, i_2}(f)$ ne sont pas lisses et leur construction par récurrence ne peut être continuée.

Cependant le symbole de $x \in N$ garde un sens (voir ci-dessous) et on peut définir dans tous les cas $\sum^{i_1, \ldots, i_k}(f)$ comme l'ensemble des $x \in N$ dont le symbole est $(i_1, \ldots, i_k)$. On voit tout de suite que pour sâvoir si $x \in \sum^{i_1, \ldots, i_k}(f)$ il suffit de regarder $j^k f(x)$, ce qui permet à Boardman de définir des sous-ensembles

$$\sum^{I} \subset J^k (N, P).$$

Le théorème de Boardman affirme que tous ces sous-ensembles sont des sous-variétés lisses et nous allons maintenant le démontrer.

§ 3 - THEOREME DE BOARDMAN.
(Démonstration).

3.1. Soit

$$A_n(k) = \frac{A_n}{\mathcal{M}_n^{k+1}}$$

On a la projection naturelle

$$\pi_k : A_n \longrightarrow A_n(k) .$$

Remarquons que si J est un idéal de $A_n(k)$, le symbole de Boardman de $\pi_k^{-1}(J)$ est de la forme $(i_1, \ldots, i_k, 0 \ldots 0)$.

<u>Définition 3.1</u>. On appelle le <u>symbole de Boardman</u> $J \subset A_n(k)$ l'ensemble $I = (i_1, \ldots, i_k)$ et on écrit

$$I(J) = I.$$

Soit

$$z \in J^k(n, p) .$$

On notera $J(z)$ l'idéal de $A_n(k)$ engendré par les images $\hat{f}_1, \ldots, \hat{f}_p$ dans $A_n(k)$ de $f_1, \ldots, f_p$ où $f = (f_1, \ldots, f_p)$ est un représentant de z, i.e.

$$J(z) = (\hat{f}_1, \ldots, \hat{f}_n) .$$

Il est clair que $J(z)$ dépend seulement de z et non du choix du représentant f.

<u>Définition 3.2</u>. Le symbole de Boardman de $J(z)$ est appelé <u>symbole de Boardman de z</u>.

Soit

$$I = (i_1, i_2, \ldots, i_k)$$

une suite de nombres entiers positifs. On désigne par $\sum^I$ l'ensemble des jets $z \in J^k(n, p)$ dont le symbole de Boardman est I.

<u>Théorème 3.1</u> (Boardman).

Pour tout $k \in \mathbb{N}$ et toute suite $I = (i_1, \ldots, i_k)$, $\sum^I$ est une sous-variété (lisse) de $J^k(n,p)$.

<u>Remarque 3.1</u>.

$\sum^I$ est invariante sous l'action du groupe $L^k(n) \times L^k(p)$ (groupe structurel de $J^k(N, P)$). Donc en posant

$$\sum^I (N, P) = \bigcup_{(x,y) \in N \times P} \sum^I x, y$$

(où $\sum^I xy \in J^k_{x,y}(N, P)$ est l'ensemble des jets au dessus (x,y) dont les symboles sont égaux à I), on voit que $\sum^I (N, P)$ est, d'après le théorème 3.1 , une sous-variété (lisse) de $J^k(N, P)$.

La stratification de $J^k(N, P)$ par les strates $\sum^I (N, P)$ (qu'on appelle la stratification de Thom-Boardman) peut être raffinée pour devenir une stratification de Whitney [18] .

D'après le théorème 5.1 chap. II les applications $f \in C^\infty(N, P)$ transversales à cette stratification raffinée forment un ouvert dense si N est compacte. En conclusion, nous avons le théorème suivant :

<u>Théorème 3.2</u>

Si N est compacte, l'ensemble des applications $C^\infty(N, P)$ transversales à la stratification de Thom-Boardman contient un ouvert dense dans $C^\infty(N,P)$

<u>Corollaire 3.1</u>.

Toutes les applications stables de $C^\infty(N, P)$ sont transversales à la stratification de Thom-Boardman. (Mais la réciproque n'est pas vraie (cf. [4])).

En effet les strates de Boardman sont invariantes par des difféomorphismes locaux de la source et du but ; donc un germe stable a ses jets transversaux à toutes ces strates.

<u>Corollaire 3.2.</u>

Les germes stables ont des strates de Boardman lisses.

Soit $x \in N$ et supposons que

$$j^k f(x) \in \sum^I (N, P)$$

et

$$j^k f \pitchfork_x \sum^I (N, P) .$$

Soit

$$\sum^I (f) = (j^k f)^{-1} \sum^I (N, P).$$

<u>Corollaire 3.3.</u>

$\sum^I (f)$ est une sous-variété (lisse) dans un voisinage de x.

De plus, Boardman a démontré [2] .

<u>Théorème 3.3.</u> Si

$$j = \dim \operatorname{Ker} d \left(f\big|_{\sum^I (f)}\right)(x) ,$$

$$j^{k+1} f(x) \in \sum^{I,j} (N, P) .$$

Il y a donc un ouvert dense d'applications pour lequel la construction "naïve" de Thom peut être poursuivie infiniment.

Dans ce qui suit, nous allons démontrer le théorème 3.1 de Boardman (démonstration de J. Mather [9]).

3.2. <u>Partie algébrique de la démonstration.</u>

Soit

$$I = (i_1, i_2, i_3, \ldots)$$

une suite non croissante de nombres entiers positifs :
$n \geqslant i_1 \geqslant i_2 \geqslant \cdots$

On désigne par $J_{I,n}$ l'idéal suivant

$$J_{I,n} = (x_1, \ldots, x_{n-i_1}) + (x_1, \ldots, x_{n-i_2})^2 + \\ + (x_1, \ldots, x_{n-i_3})^3 + \cdots$$

Il est aisé de vérifier que

$$I(J_{I,n}) = I . \tag{3.1}$$

En effet, on montre facilement que

$$\delta^k J_{I,n} = J_{S^k I,n} \tag{3.2}$$

où

$$S(i_1, i_2, i_3, \ldots) = (i_2, i_3, i_4, \ldots)$$

<u>Définition 3.3.</u>

Nous dirons que deux idéaux J_1 et J_2 sont équivalents s'il existe un automorphisme de $\mathbb{R}$-algèbre de A_n qui envoie J_1 sur J_2.

<u>Lemme fondamental.</u>

$J_{I,n}$ est maximal parmi tous les idéaux de symbole I.

<u>Démonstration</u> :

Supposons que $J_{I,n} \subset J$ où J est un idéal de symbole I. Si $J_{I,n} \neq J$ on a

$$J_{I,n} + \mathfrak{M}_n^{k+1} \neq J + \mathfrak{M}_n^{k+1}$$

pour tout k suffisamment grand.

On prend le plus petit tel k. Alors

$$J_{I,n} + \mathfrak{M}_n^k = J + \mathfrak{M}_n^k .$$

Soit $\beta \in J$ tel que

$$\forall \alpha \in J_{I,n} \quad , \quad \beta^{(k)} \neq \alpha^{(k)}$$

(où $\beta^{(k)}$ est la série β tronquée à l'ordre k).

Alors il existe $\alpha \in J_{I,n}$ tel que

$$\alpha^{(k-1)} \qquad \beta^{(k-1)}$$

Soit $\gamma = \beta - \alpha$

On a

$$\forall \alpha' \in J_{I,n} \quad , \quad \gamma^{(k)} = \beta^{(k)} - \alpha^{(k)} \neq \alpha'^{(k)}$$

et

$$\gamma^{(k-1)} = 0 .$$

Donc

$$\gamma \in (J \cap \mathcal{M}_n^k) - (J_{I,n} + \mathcal{M}_n^{k+1}) .$$

Mais puisque γ est d'ordre k et

$$\gamma \notin J_{I,n} + \mathcal{M}_n^{k+1}$$

on en déduit qu'il existe un monôme de la forme

$$x_{j_1} \; x_{j_2} \; \dots \; x_{j_k}$$

$$j_1 > n - i_1 \; , \dots , \; j_k > n - i_k$$

$$j_1 \leqslant j_2 \leqslant \dots \leqslant j_k$$

dont le coefficient dans γ est non nul.

Soit D l'opérateur

$$\frac{\partial^{k-1}}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_k - 1}}$$

Il est évident que $D\gamma$ commence par une forme linéaire dans laquelle le coefficient de x_{jk} est non nul.

De plus $D\gamma \in \delta^{k-1} J$.

Donc

$$\text{rang } \delta^{k-1} J > \text{rang } \delta^{k-1} J_{I,n}$$

et J n'a pas le symbole I. Cette contradiction montre que $J_{I,n}$ est maximal parmi les idéaux de symbole I.

Remarque : Les idéaux équivalents à $J_{I,n}$ sont aussi maximaux parmi tous les idéaux de symbole I. On va construire maintenant une opération de saturation β qui associe à un idéal J de symbole I un idéal équivalent à $J_{I,n}$.

Définition 3.4.

Soit J un idéal de A_n. On pose

$$\beta J = J + (\delta J)^2 \quad (\delta^2 J)^3 + \dots + (\delta^{k-1} J)^k + \dots$$

Remarque : $\beta J_{I,n} = J_{I,n}$

ce qui fait comprendre l'origine de l'opération β.

Dans la partie géométrique de la démonstration du théorème 1, nous aurons besoin les propriétés suivantes de l'opérateur β. (Les lecteurs peuvent trouver les autres propriétés importantes de δ et β dans [9]).

Propriété 1. Soient

$$\varphi : A_p \longrightarrow A_n$$

un homomorphisme surjectif de $\mathbb{R}$-algèbres et J un idéal propre de A_n. Alors

$$\delta \varphi^{-1} J = \varphi^{-1} \delta J \qquad (3\text{-}3)$$

$$\beta \varphi^{-1} J = \varphi^{-1} \beta J \qquad (3\text{-}4)$$

Propriété 2 :

$$I\,\beta(J) = I(J)$$

avec tout idéal J dans A_n.

Propriété 3.

Si J est un idéal propre dans A_n, βJ est équivalent à $J_{I,n}$ où I est le symbole de Boardman de J.

Pour démontrer la propriété 1, il faut utiliser le lemme suivant :

Lemme 3.1. Si

$$\varphi : A_p \longrightarrow A_n \qquad (p > n)$$

est un homomorphisme surjectif de $\mathbb{R}$-algèbres on a

$$\Delta_t \varphi^{-1} J = \varphi^{-1} \Delta_t J \qquad (3\text{-}5)$$

Démonstration. Soient

$$y_i \in \mathcal{H}_p \quad \text{tels que} \quad \varphi(y_i) = x_i$$
$$(1 \leqslant i \leqslant n).$$

On peut étendre l'ensemble $y_1, \ldots, y_n$ jusqu'à un système de coordonnées de A_p tel que

$$\varphi\, y_i = 0 \quad \text{avec} \quad n < i \leqslant p.$$

Soit $f_1, \ldots, f_a$ un système de générateurs de J. Soient

$$\tilde{f}_i \in \varphi^{-1} f_i .$$

Alors

$$\tilde{f}_1, \ldots, \tilde{f}_a, \quad y_{n+1}, \ldots, y_p$$

est un système de générateurs de $\varphi^{-1} J$. Puisque $\Delta_t \varphi^{-1} J$ est l'idéal engendré par $\tilde{f}_1, \ldots, \tilde{f}_a$ et tous les mineurs d'ordre t de la matrice Jacobienne $\left(\frac{\partial \tilde{f}_i}{\partial y_j}\right)$ il doit être confondu avec l'image réciproque de l'idéal engendré par $f_1, \ldots, f_a$ et tous les mineurs d'ordre t de la matrice jacobienne $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)$. Autrement dit, on a (3-5). $\square$

Démonstration de la propriété 1.

L'égalité (3-3) est déduite de (3-5) et l'égalité (3-4) est une conséquence de (3-3).

Pour démontrer la propriété 2 , il faut utiliser les lemmes suivants.

Lemme 3-2. Si J est un idéal propre de A_n et

$$\text{rang } J = r \quad (< n)$$

alors il existe un homomorphisme surjectif

$$\varphi : A_n \longrightarrow A_{n-r}$$

tel que φJ est de rang 0 et on a

$$\delta(\varphi J) = \Delta_1(\varphi J) \qquad (3\text{-}6)$$

Démonstration :

Soit $(y_1, \ldots, y_n)$ un système de coordonnées de A_n tel que $y_1, \ldots, y_r \in J$. On définit φ par

$$\varphi : (y_1, \ldots, y_r, y_{r+1}, \ldots, y_n) \longmapsto$$

$$\longmapsto (0, \ldots, 0, y_{r+1}, \ldots, y_n)$$

On a évidemment

$$\text{rang } \varphi J = 0$$

et (3-6) est déduite de la définition de δ.

Remarque 1. De la propriété 3-1 et du lemme 3-2 on déduit que pour démontrer les propriétés de δ et β il suffit de considérer les idéaux de rang 0.

Lemme 3-3.

$$\delta\beta J \subseteq \beta\delta J$$

Démonstration :

Suivant la remarque ci-dessus, il suffit de considérer le cas où

$$\text{rang } J = 0 .$$

Dans ce cas, on a aussi :

$$\text{rang } J = 0 .$$

Ensuite remarquons que si J_1 et J_2 sont deux idéaux propres de A_n on a

$$\Delta_1 (J_1 + J_2) = \Delta_1 J_1 + \Delta_1 J_2$$

$$\Delta_1 (J_1 J_2) \subseteq J_1 (\Delta_1 J_2) + J_2 (\Delta_1 J_1)$$

D'où l'on déduit :

$$\begin{aligned}
\delta\beta J &= \Delta_1 \beta J = \\
&= \Delta_1 J + \Delta_1 (\delta J)^2 + \Delta_1 (\delta^2 J)^3 + \dots \\
&\subseteq \delta J + \delta J (\Delta_1 \delta J) + (\delta^2 J)^2 (\Delta_1 \delta^2 J) + \dots \\
&\subseteq \delta J + (\delta^2 J)^2 + \dots \\
&= \beta\delta J
\end{aligned}$$

<u>Démonstration de la propriété 2.</u>

D'abord, nous démontrons deux formules suivantes par récurrence sur k :

(1_k) : $\delta^k J \subseteq \delta^k \beta J \subseteq \beta\delta^k J$

(2_k) : $\text{rang } \delta^k J = \text{rang } \delta^k \beta J = \text{rang } \beta\delta^k J$

par définition de β et du lemme 3-3 on a

$$\delta J \subseteq \delta\beta J \subseteq \beta\delta J .$$

De plus $(1_k) \Longrightarrow (2_k)$

car $\text{rang } \delta^k J = \text{rang } \beta\delta^k J$

Enfin

$$(1_k) + (2_k) \Longrightarrow (1_{k+1})$$

puisque :

$$\delta^{k+1} J = \delta(\delta^{k} J) \subseteq \delta(\delta^{k} \beta J)$$

(car $\delta^{k} J \subset \delta^{k} \beta J$ d'après (1_k) et rang $\delta^{k} J =$
$=$ rang $\delta^{k} \beta J$ d'après (2_k))

$= \delta^{k+1} \beta J \subseteq \delta(\beta \delta^{k} J)$ (d'après (1_k)) $\subseteq \beta \delta^{k+1} J$

(d'après le lemme 3-3).

<u>Remarque 1</u>. L'inclusion $J_1 \subseteq J_2$ n'implique pas $\delta J_1 \subseteq \delta J_2$. Pour que l'implication soit vraie, on doit supposer encore

$$\text{rang } J_1 = \text{rang } J_2 .$$

<u>Démonstration de la propriété 3</u>. Puisque

$$\text{rang } \delta^{k-1} J = n - i_k$$

on peut choisir un système de coordonnées $y_1, \ldots, y_n$ dans A_n tel que

$$y_1, \ldots, y_{n-i_k} \in \delta^{k-1} J .$$

Alors l'idéal

$$o = (y_1, \ldots, y_{n-i_1}) + (y_1, \ldots, y_{n-i_2})^2 + \ldots$$
$$\ldots + (y_1, \ldots, y_{n-i_k})^2 + \ldots$$

est évidemment équivalent à $J_{I,n}$ et $\beta_o \subset \beta J$ par définition.

D'après le lemme fondamental β_o est maximal parmi les idéaux ayant le sympole I et d'après la propriété 2 :

$$I(\beta J) = I .$$

Donc

$$\beta_o = \beta J$$

et par conséquent βJ est équivalent à $J_{I,n}$.

Remarque 2 : Les définitions et résultats des opérateurs δ et β peuvent être étendus d'une manière triviale au cas de l'algèbre des séries tronquées qui est en fait l'algèbre dans laquelle nous travaillerons.

3.3. Partie géométrique de la démonstration du théorème 1.

Pour toute suite non croissante

$$I = (i_1, i_2, \ldots, i_k)$$

de nombres entiers positifs, on pose

$$J_{I,n} = \pi_k (J_{I',n})$$

où

$$I' = (i_1, i_2, \ldots, i_k, 0, \ldots, 0, \ldots)$$

$J_{I,n}$ est un idéal propre de $A_n(k)$.

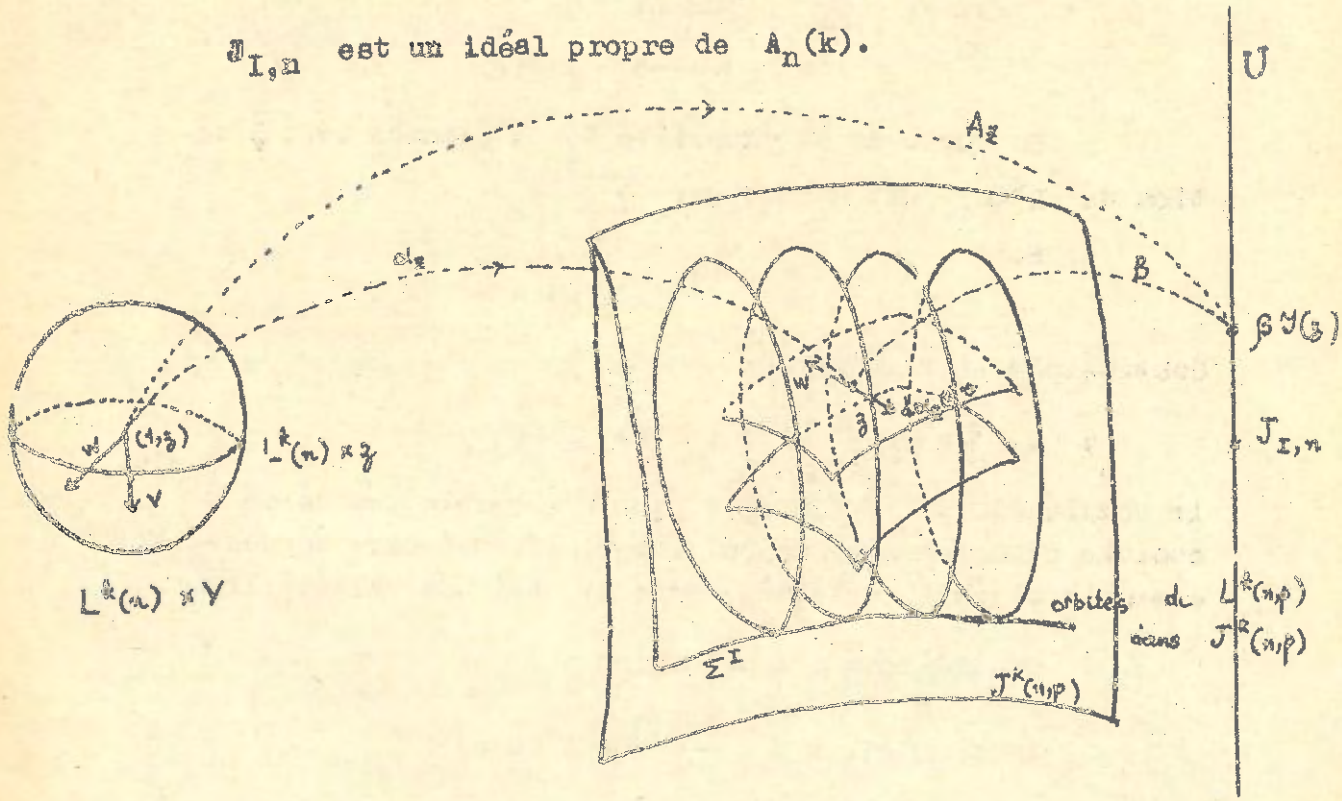


Fig. 28

On pose

$$\mu_I + 1 = \dim \mathbb{R} \frac{A_n(k)}{J_{I,n}}$$

Soit G la grassmannienne des sous-espaces de $A_n(k)$ de codim $\mu_I + 1$. Soit $U \subset G$ l'ensemble des idéaux dans $A_n(k)$ équivalents à $J_{I,n}$. U est l'orbite de $J_{I,n}$ dans G sous l'action du groupe $L^k(n)$ donc U est une sous-variété (cf. [4]).

Remarquons que si

$$z \in \sum^I , \qquad \beta J(z) \in U$$

(d'après la propriété 3). Considérons l'application C^∞ :

$$B : \sum^I \longrightarrow U$$
$$z \longmapsto \beta J(z)$$

En vertu de la propriété 1, B commute avec l'action de $L^k(n)$ sur U et sur $\sum^I$.

Soit

$$V = B^{-1}(J_{I,n}) .$$

Considérons le sous-espace :

$$A = \{ z \in J^k(n,p) ; J(z) \subseteq J_{I,n} \}$$

le complément de V dans A est l'ensemble des zéros communs d'une famille de polynômes, c'est-à-dire un sous-ensemble algébrique fermé. Donc V est une variété lisse.

Considérons l'application

$$\alpha : L^k(n) \times V \longrightarrow J^k(n,p)$$
$$(h, z) \longmapsto h_o z$$

Nous allons prouver que α est de rang constant, plus précisément

$$\text{rang } \alpha(h, z) = \dim U + \dim V$$

Il suffit de considérer seulement le cas $h = 1$, car l'action du groupe permet de tout transporter au point $h = 1$.

Pour tout $z \in V$ soient

$$\alpha_z : L^k(n) \longrightarrow J^k(n, p)$$
$$h \longmapsto h_o z$$
$$A_z : L^k(n) \longrightarrow U$$
$$h \longmapsto h.B_z$$

A_z est une submersion de $L^k(n)$ sur U.

Soient :

$$V \in T_1 L^k(n) , \qquad W \in T_z V .$$

Or a évidemment

$$d\alpha(1, z)(V, W) = d\alpha_z(1)(v) + w$$

Donc :

$$\operatorname{Ker} d\alpha(1, z) = \{ (v, w) \in T_1 L^k(n) \times T_z V, \; w = -d\alpha_z(1)(v) \}$$

Mais

$$d\alpha_z(1)^{-1}(T_z V) = d\alpha_z(1)^{-1} \, d B(z)^{-1}(0) =$$
$$= \operatorname{Ker} d A_z(1) .$$

Donc

$$\operatorname{Ker} d\alpha(1, z) =$$
$$= \{ (V, W) \in \operatorname{Ker} d A_z(1) \times T_z V , \; w = -d\alpha_z(1)(v) \}$$

Puisque A_z est une submersion sur U on a

$$\dim U = \dim T_1 L^k(n) - \dim \operatorname{Ker} d A_z(1) .$$

Donc

...

$$\text{rang } (1, z) =$$

$$= \dim T_1 L^k(n) + \dim T_z V - \dim \ker d\alpha (1, z)$$

$$= \dim T_1 L^k(n) + \dim T_z V - \dim \ker d A_z(1)$$

$$= \dim U + \dim V .$$

Donc α est de rang constant.

Il reste à voir que :

1) $$\alpha (L^k(n) \times V) = \sum^I$$

2) α est une application ouverte.

Une fois cela prouvé, on en déduit, en appliquant le théorème du rang constant [12], que $\sum^I$ est une sous-variété lisse de $J^k(n,p)$.

<u>Démonstration de 1)</u>. On a

$$\alpha (L^k(n) \times V) \subset \sum^I$$

d'après la propriété 1. Réciproquement, soit

$$z \in \sum^I$$

En vertu de la propriété 3, il existe

$$h \in L^k(n) \quad \text{tel que} \quad h.B(z) = J_{I,n}$$

car U est l'orbite de $J_{I,n}$. Soit

$$z' = h z$$

On a

$$B z' = B (h z) = h (Bz)$$

(en vertu de la propriété 1)

$$= J_{I,n} \quad \text{i.e.} \quad z' \in V .$$

Donc

$$z = \alpha (h^{-1}, z') \in \sum^I$$

ce qui montre que

$$\alpha\,(L^k(n) \times V) \supset \Sigma^I .$$

<u>Démonstration de 2)</u>.

Il suffit là encore de regarder la restriction de α à un voisinage arbitrairement petit N de $(1, z)$. Mais si z' est proche de z dans Σ^I, $B(z')$ est proche de $B(z)$, donc

$$Bz' = h\,Bz$$

avec h proche de l'identité et $h^{-1} z' \in V$ est proche de z', donc proche de z.

En conclusion

$$z' = \alpha\,(h, h^{-1} z')$$

où

$$(h, h^{-1} z') \in N$$

ce qui montre que α est une application ouverte. ∎

* * *

Chapitre IV

DETERMINATION FINIE.
DEPLOIEMENTS DE GERMES DE FONCTIONS.
ETUDE DES GERMES DE PETITE CODIMENSION.

Dans ce chapitre, nous étudierons "l'équivalence à droite" des germes de fonctions et nous donnerons ensuite une liste des classes d'équivalence à droite de germes de petite codimension.

§ 1 - DETERMINATION FINIE DE GERMES DE FONCTIONS.

1.1. Définition 1.1. Soient

$$f , g : (\mathbb{R}^n, 0) \longrightarrow \mathbb{R}$$

des germes de fonctions C^∞. Nous disons que f et g sont équivalents à droite, et notons $f \sim g$ s'il existe un difféomorphisme local

$$\varphi \in \mathrm{Diff}_{loc} (\mathbb{R}^n, 0)$$

tel que

$$f = g \circ \varphi .$$

Définition 1.2. Si pour tout germe g tel que

$$j^k g(0) = j^k f(0)$$

on a $f \sim g$ alors on dit que f est de k-détermination finie à droite, ou que f est déterminé à droite par son k-jet.

Définition 1.3. S'il existe un nombre entier k tel que f est déterminé à droite par son k-jet, on dit que f est de détermination finie.

Soit $\mathcal{M}_n$ l'idéal maximal de l'anneau $\mathcal{E}_n$

des germes de fonctions différentiables $(\mathbb{R}^n, 0) \longrightarrow \mathbb{R}$.

<u>Proposition 1.1.</u>

Si $f \in \mathcal{M}_n$ est déterminé à droite par son k-jet on a

$$\mathcal{M}_n J(f) \supseteq \mathcal{M}_n^{k+1}$$

où $J(f)$ est l'idéal engendré par $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$ (l'idéal jacobien de f).

<u>Démonstration</u> - Soient

$$U = \left\{ g \in \mathcal{E}_n ,\ j^k g(0) = j^k f(0) \right\} = f + \mathcal{M}_n^{k+1}$$

$$V = \left\{ g \in \mathcal{E}_n ,\ g \sim f \right. = \text{l'orbite de f sous l'action de } \mathrm{Diff}_{loc}(\mathbb{R}^n, 0)$$

Posons

$$U_{k+1} = j^{k+1}(U) ,$$

$$V_{k+1} = j^{k+1}(V)$$

$$z = j^{k+1} f(0)$$

U_{k+1} et V_{k+1} sont des sous-variétés (localement fermées).

Par hypothèse $U \subseteq V$ donc on a

$$U_{k+1} \subseteq V_{k+1} .$$

Donc, si $\tau_z U_{k+1}$, $\tau_z V_{k+1}$ sont les espaces tangents respectivement à U_{k+1} et à V_{k+1} en z, on a

$$\tau_z U_{k+1} \subseteq \tau_z V_{k+1} \qquad (1-1)$$

D'autre part, en considérant l'application

$$j^{k+1} : \mathcal{M}_n \longrightarrow J^{k+1}(n, 1)$$

on voit facilement que

a) $$(j^{k+1})^{-1} (\tau_z V_{k+1}) = \mathcal{M}_n^{k+1}$$

b) $$(j^{k+1})^{-1} (\tau_z V_{k+1}) = \mathcal{M}_n J(f) + \mathcal{M}_n^{k+2}$$

En effet, l'égalité a) est déduite de la définition de U. Pour démontrer l'égalité b) nous remarquons que les éléments de $\tau_z V_{k+1}$ peuvent être décrits de la facon suivante :

Soit pour

$$t \in [0, \varepsilon) \ , \ \{h_t\} \in \mathrm{Diff}_{loc} (\mathbb{R}^n, 0)$$

est une famille à un paramètre de germes de difféomorphismes locaux tel que $h_0 = id$. Chaque élément de $\tau_z V_{k+1}$ est égal à $j^{k+1} (\frac{d}{dt} f_o h_t|_{t=0})$. Mais nous avons

$$\frac{d}{dt} (f \circ h_t)_{t=0} = \nabla f \cdot \frac{d h_t}{dt}\Big|_{t=0} \in \mathcal{M}_n J(f) .$$

Donc :

$$(j^{k+1})^{-1} (\tau_z V) \subset \mathcal{M}_n J(f) + \mathcal{M}_n^{k+2} .$$

De plus, chaque élément α de $\mathcal{M}_n J(f)$ définit un élément de $\tau_z V$. En effet, soient

$$\alpha (x) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i(x) \frac{\partial f}{\partial x_i} (x) ,$$

$$\xi_i(0) = 0$$

et

$$h_t(x) = x + t \xi(x)$$

où

$$\xi = (\xi_1 , \ldots , \xi_n) .$$

Alors : $$h_t \in \mathrm{Diff}_{loc} (\mathbb{R}^n, 0)$$

avec t assez petit, et nous avons :

$$\frac{d}{dt}\left(f \circ h_t\right)\Big|_{t=0} = \nabla f \cdot \frac{d\,h_t}{dt}\Big|_{t=0} = \nabla f \cdot \xi = \alpha$$

Donc

$$(j^{n+1})^{-1}\,(\tau_z\, V) \supset \mathcal{M}_n\, J(f) + \mathcal{M}_n^{k+2}$$

d'où l'on déduit l'égalité b).

Ensuite, d'après (1-1) on déduit alors

$$\mathcal{M}_n\, J(f) + \mathcal{M}_n^{k+2} \supseteq \mathcal{M}_n^{k+1}$$

d'où l'on conclut en appliquant le lemme de Nakayama suivant (en posant $M = \mathcal{M}_n^{k+1}$, $N = \mathcal{M}_n\, J(f)$)

<u>Lemme de Nakayama.</u>

Soient $\mathcal{R}$ un anneau commutatif avec l'unité 1, $\mathcal{M}$ un idéal, L un $\mathcal{R}$-module et M, N des sous-modules de L. Supposons que :

a) $\forall x \in \mathcal{M}$, $1 + x$ est inversible

b) M est un module de type fini.

c) $M \subseteq N + \mathcal{M} M$

Alors

$$M \subseteq N$$

<u>Démonstration.</u>

Soient $e_1, \ldots, e_n$ des générateurs de M. En vertu de c) il existe $f_i \in N$ et $\alpha_{ij} \in \mathcal{M}$ tel que

$$e_i = f_i + \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}\, e_j$$

ou

$$\begin{aligned} (1-\alpha_{11})\, e_1 - \alpha_{12}\, e_2 + \cdots - \alpha_{1n}\, e_n &= f_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \qquad (1\text{-}2) \\ -\alpha_{n1}\, e_1 - \cdots\cdots - (1-\alpha_{nn})\, e_n &= f_n \end{aligned}$$

Puisque le déterminant du système (1-2) est de la forme $1 + x$ où $x \in \mathcal{M}$, on peut résoudre (1-2) par rapport à $e_1, \ldots, e_n$. Autrement dit $e_i \in N$. D'où l'on obtient

$$M \subseteq N . \square$$

<u>Proposition 1-2.</u> Si

$$f, g \in \mathcal{E}_n , \quad df(0) = 0$$

et si

$$g - f \in \mathcal{M}_n (J(f))^2$$

il existe

$$\varphi \in \mathrm{Diff}_{loc} (\mathbb{R}^n, 0)$$

tel que

$$f \circ \varphi^{-1} = g .$$

<u>Démonstration.</u> Ecrivons

$$g = f + h$$

où

$$h \in \mathcal{M}_n (J(f))^2 .$$

Soit :

$$f_t = f + th , \quad t \in \mathbb{R} .$$

On va chercher $\varphi_t \in \mathrm{Diff}_{loc} (\mathbb{R}^n, 0)$ tel que

$$f_t \circ \varphi_t = f \qquad (1-3)$$

La proposition sera démontrée si on sait faire (1-3) pour $t = 1$.

Pour trouver φ_t on va écrire une version infinitésimale de (1-3) :

$$d f_t(\varphi_t(x)) \cdot \frac{d\varphi_t(x)}{dt} + \frac{\partial}{\partial t} f_t (\varphi_t(x)) = 0$$

ou encore

$$df_t\,(\varphi_t(x)) \circ \frac{d\varphi_t}{dt}(x) = -h\,(\varphi_t(x))$$

Puisque

$$\varphi_t \in \mathrm{Diff}_{loc}\,(\mathbb{R}^n, 0)$$

il faut chercher $\frac{d\varphi_t}{dt}$ sous la forme $X_t \circ \varphi_t$ où X_t est un champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^n$ s'annulant en 0.

$$\begin{tikzcd}
 & T\mathbb{R}^n \arrow[r, "df_t"] \arrow[d] & T\mathbb{R} \arrow[d] \\
\mathbb{R}^n \arrow[ur, "\frac{d\varphi_t}{dt}"] \arrow[r, "\varphi_t"'] & \mathbb{R}^n \arrow[u, dashed, "X_t"'] \arrow[r, "f_t"'] \arrow[dr, "h"'] & \mathbb{R} \\
 & & T\mathbb{R} \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

On est donc amené à résoudre

$$d\,f_t(\varphi_t(x)) \circ X_t(\varphi_t(x)) = -h\,(\varphi_t(x))$$

ou encore

$$df_t(x) \circ X_t(x) = -h(x) \qquad (1\text{-}4)$$

Si (1-4) est résolue avec X_t champ de vecteur dépendant C^∞ du paramètre t, on définit alors φ_t comme solution de l'équation différentielle dépendant du temps :

$$\frac{d\varphi_t}{dt}(x) = X_t\,(\varphi_t(x)) \qquad (1\text{-}5)$$

avec

$$\varphi_o(x) = x.$$

Ainsi l'équation (1-5) possède une solution

$\varphi_0^{(1)}$ unique satisfaisant à la condition initiale

$$\varphi_0^{(1)}(x) = x$$

dans l'intervalle $|t| \leq \varepsilon$ où ε est assez petit. Donc on a

$$f_t \sim f \quad \text{avec} \quad |t| \leq \varepsilon$$

Ensuite, on peut continuer le processus par induction. Notamment, soit $|t_1| < \varepsilon$, on définit alors $\varphi_t^{(2)}$ comme solution de l'équation (1-5) sur $|t - t_1| \leq \varepsilon$ avec la condition initiale

$$\varphi_{t_1}^{(2)}(x) = \varphi_{t_1}^{(1)}(x) .$$

Donc on a

$$f_t \sim f \quad \text{avec} \quad |t| < 2\varepsilon \quad \text{etc...}$$

et enfin on obtient

$$f_1 \sim f .$$

La remarque fondamentale qui nous permet de continuer infiniment le processus précédent est que

$$\forall t \quad \mathbb{R} , \quad J(f_t) = J(f) \qquad (I-6)$$

En effet

$$h \in \mathcal{M}_n (J(f))^2$$

donc

$$\frac{\partial h}{\partial x_i} \in J(f)^2 \subset \mathcal{M}_n J(f), \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

(car $\frac{\partial f}{\partial x_i} \in \mathcal{M}_n$ par l'hypothèse $df(0) = 0$),

on en déduit :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_t(x)}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_t(x)}{\partial x_n} \end{pmatrix} = \quad \ldots$$

$$= \begin{pmatrix} 1 + t\,X_{11}(x) & t\,X_{12}(x) \dots & t\,X_{1n}(x) \\ t\,X_{21}(x) & 1+t\,X_{22}(x) \dots & t\,X_{2n}(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ t\,X_{n1}(x) & t\,X_{n2}(x) \dots & 1+t\,X_{nn}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{f(x)}{x_1} \\ \vdots \\ \dfrac{f(x)}{x_n} \end{pmatrix}$$

où

$$X_{ij}(0) = 0$$

d'où l'on déduit

$$J(f_t) \subset (Jf)$$

D'autre part, si $t = t_0$ est fixé, il existe un voisinage Ω_{t_0} assez petit de $0 \in \mathbb{R}^n$ tel que pour $\forall x \in \Omega_t$ la matrice

$$M_t = \begin{pmatrix} 1 + t\,X_{11} & t\,X_{12} & \dots & t\,X_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ t\,X_{n1} & t\,X_{n2} & \dots & 1 + t\,X_{nn} \end{pmatrix}$$

soit inversible pour $|t| \leqslant |t_0|$. D'où l'on déduit

$$J(f) \subset J(f_t)$$

donc on obtient (1-6).

Pour achever la démonstration, il faut encore regarder comment on résoud l'équation (1-4).

Puisque

$$n \in \mathfrak{M}_n\,(J(f))^2 \subset \mathfrak{M}_n\,J(f)$$

h peut être représenté sous la forme

$$h = -d\,f \cdot X_0$$

où X_o est un certain champ de vecteur sur R^n s'annulant en 0. Mais

$$df = M_t^{-1} \cdot df_t$$

Donc

$$h = df_t \cdot (M_t^{-1})^* X_o .$$

Par conséquent, on peut prendre

$$X_t = (M_t^{-1})^* X_o$$

Remarquons que

$$X_t(0) = (M_t^{-1})^* X_o(0) = 0 . \square$$

<u>Remarque 1</u>. De la proposition 2, on déduit le lemme de Morse (cf. § 2, chap. II). En effet, si f est un germe de fonction de Morse, c'est-à-dire si $f(0) = 0$, $df(0) = 0$, $d^2 f(0)$ est non dégénérée, on a

$$\text{rang } J(f) = n$$

donc

$$J(f) = \mathcal{M}_n .$$

D'après la proposition 1-2

$$g = f + h$$

est équivalente à f dès que $h \in \mathcal{M}_n^3$. En particulier

$$f(x) \sim d^2 f(0) (x, x).$$

<u>Remarque 2</u>. Si

$$\{f_\alpha + h_\alpha\} = \{g_\alpha\}$$

est une famille de fonctions de Morse dépendant continûment du paramètre α dans la démonstration de la proposition 1-2, on construit le champ X dépendant continûment de α et par conséquent la solution φ_t de l'équation (1-5) dépend continûment de α.

Donc, il existe une famille $\varphi_\alpha \in \mathrm{Diff}_{loc}(\mathbb{R}^n, 0)$ qui nous ramène à

$$g_\alpha \circ \varphi_\alpha = q(x)$$

où $q(x)$ est une forme quadratique non dégénérée indépendant de α.

<u>Remarque 3</u>. Si

$$df(0) = 0 , \qquad d^2f(0) = 0$$

on peut remplacer $\mathfrak{M}_n (J^1(f))^2$ par $(J(f))^2$ dans l'énoncé de la proposition 1-2.

<u>**Démonstration**</u>. En effet, on répète la démonstration de la proposition 1-2 en observant que dans ce cas

$$h \in (J(f))^2 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial x_j} \in \mathfrak{M}_n^2$$

car $df(0) = 0$, $d^2f(0) = 0$, donc

$$\frac{\partial h}{\partial x_i} \in \mathfrak{M}_n J(f) . \square$$

<u>Proposition 1.3</u>. Si

$$\mathfrak{M}_n J(f) \supset \mathfrak{M}_n^k \quad \text{et} \quad f \in \mathfrak{M}_n$$

alors f est déterminé à droite par son k-jet.

<u>Démonstration</u>. Si

$$j^k g(0) = j^k f(0)$$

on a

$$g = f + h$$

avec $h \in \mathfrak{M}_n^{k+1}$. Ensuite, comme dans la proposition 1.2 on pose $f_t = f + th$ et on doit chercher une famille à un paramètre de difféomorphismes locaux $\varphi_t \in \mathrm{Diff}_{loc}(\mathbb{R}^n, 0)$ tels que :

$$f_t \circ \varphi_t = f \qquad \text{(I-7)}$$

et la proposition sera démontrée si l'on a (I-7) pour $t = 1$.

Cela nous conduit à chercher de même X_t tel que $X_t \in \mathcal{M}_n$ et

$$df_t \cdot X_t = -h \qquad \text{(I-8)}$$

Soient

$$F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, t) \longmapsto F(x, t) = f_t(x)$$

et

$$X : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$(x, t) \longmapsto X(x, t) = X_t(x)$$

En posant

$$X(x, t) = (X_1(x, t), \ldots, X_n(x, t))$$

d'après (I-8) on doit avoir

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_i}(x, t)\, X_i(x, t) = -h(x)$$

où

$$X_i(0, t) = 0.$$

Si dans l'anneau $\mathcal{E}_{n+1}$ des germes

$$(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, 0 \times 0) \longrightarrow \mathbb{R}$$

On pose

$$J^*(F) = \mathcal{E}_{n+1}\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial F}{\partial x_n}\right)$$

il suffit donc de démontrer qu'on a

$$h \in J^*(F) \cdot \mathcal{M}_n$$

(Nous avons des inclusions $\mathcal{E}_n \subset \mathcal{E}_{n+1}$, $\mathcal{M}_n \subset \mathcal{M}_{n+1}$).

Mais l'hypothèse dit que dans $\mathcal{E}_{n+1}$,

$$h \in \mathfrak{M}_n^{k+1} \mathcal{E}_{n+1}$$

D'autre part

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial F}{\partial x} - t \frac{\partial h}{\partial x_i}$$

donc

$$J(f) \subset J^*(F) + \mathcal{E}_{n+1} \mathfrak{M}_n^k$$

Puisque

$$\mathfrak{M}_n J(f) \supseteq \mathfrak{M}_n^k$$

on en déduit

$$\mathcal{E}_{n+1} \mathfrak{M}_n^k \subset \mathcal{E}_{n+1} \mathfrak{M}_n J(f) \subset \mathfrak{M}_n J^*(F) + \mathcal{E}_{n+1} \mathfrak{M}_n^{k+1}$$

En appliquant le lemme de Nakayama, on a

$$\mathfrak{M}_n J^*(F) \supset \mathfrak{M}_n^k \mathcal{E}_{n+1}$$

d'où on conclut puisque $h \in \mathfrak{M}_n^k \mathcal{E}_{n+1}$.

Ensuite on fera comme dans la proposition I-2 pour terminer la démonstration.

Des propositions 1-1 et 1-3 on déduit le

<u>Corollaire 1.1.</u> Si $f \in \mathfrak{M}_n$

$$\mathfrak{M}_n J(f) \supset \mathfrak{M}_n^k \Longrightarrow f$$

est déterminé par son k-jet $\Longrightarrow$

$$\mathfrak{M}_n J(f) \supset \mathfrak{M}_n^{k+1}$$

<u>Corollaire 1.2.</u>

Si $f \in \mathfrak{M}_n$ et son (k+1)-jet est déterminé à droite par son k-jet , f est déterminé à droite par son k-jet .

<u>Explication.</u>

On dit que $j^{k+1} f(0)$ est déterminé par $j^k f(0)$ si pour tout $g \in \mathcal{E}_n$ ayant

$$j^k g(0) = j^k f(0)$$

il existe

$$h \in \mathrm{Diff}_{loc}(\mathbb{R}^n, 0)$$

tel que

$$j^{k+1} g(0) = j^{k+1} (f \circ h)(0)$$

<u>Démonstration</u>:

Dire que $j^{k+1} f(0)$ est déterminé à droite par $j^k f(0)$ équivaut à $U_{k+1} \subseteq V_{k+1}$ (Voir notations de la démonstration de la proposition 1.1). Donc si

$$z = j^{k+1} f(0)$$

on a

$$T_z U_{k+1} \subseteq T_z V_{k+1}$$

Cela entraîne (voir la démonstration de la proposition 1)

$$\mathcal{M}_n J(f) \supset \mathcal{M}_n^{k+1}$$

Donc d'après la proposition 1.3 , f est déterminé à droite par son $(k+1)$-jet et par l'hypothèse f est déterminé à droite par son k-jet.

1.2. Pour la suite, il faut introduire la

<u>Définition 1.4.</u> Soit

$$f : (\mathbb{R}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}, 0)$$

un germe d'application C^∞ .

On pose

$$\mu(f) = \dim \mathbb{R} \frac{\mathcal{E}_n}{J(f)}$$

Si $f \in \mathcal{M}_n^2$ on définit

$$\operatorname{codim} f = \dim \mathbb{R} \frac{\mathcal{M}_n}{J(f)}$$

Evidemment, on a

$$\operatorname{codim} f = \mu(f) - 1.$$

Remarquons qu'on a aussi

$$\operatorname{codim} f = \dim \mathbb{R} \frac{\mathcal{M}_n^2}{\mathcal{M}_n J(f)}$$

Nous allons démontrer le

<u>Théorème 1.1.</u> Soit $f \in \mathcal{M}_n^2$. Pour que

$$\mu(f) < \infty \qquad (\text{i.e. } \operatorname{codim} f < \infty)$$

il faut et il suffit que f est de détermination finie à droite.

<u>Démonstration.</u>

Supposons que $\mu(f) < \infty$. Les sous-espaces $J(f) + \mathcal{M}_n^k$ sont emboîtés :

$$J(f) + \mathcal{M}_n \supseteq \dots \supseteq J(f) + \mathcal{M}^{\mu+1} \supseteq J(f)$$

Mais

$$\dim \mathbb{R} \frac{\mathcal{E}_n}{J(f) + \mathcal{M}_n} \leq \dim \mathbb{R} \frac{\mathcal{E}_n}{J(f)} = \mu$$

Donc, il existe k $(1 \leq k \leq \mu)$ tel que

$$J(f) + \mathcal{M}_n^{k+1} = J(f) + \mathcal{M}_n^k$$

d'où

$$J(f) + \mathcal{M}_n \cdot \mathcal{M}_n^k \supset \mathcal{M}_n^k$$

En appliquant le lemme de Nakayama, on en déduit

$$J(f) \supset \mathcal{M}_n^k$$

et à fortiori

$$\mathcal{M}_n \, J(f) \supset \mathcal{M}_n^k$$

donc f est détermination à droite par son k-jet.

Réciproquement si

$$\mathcal{M}_n \, J(f) \supset \mathcal{M}_n^k$$

on a

$$\mu - 1 = \dim \mathbb{R} \frac{\mathcal{M}_n^2}{\mathcal{M}_n \, J(i)} \leqslant \dim \mathbb{R} \frac{\mathcal{M}_n^2}{\mathcal{M}_n^k} < \infty \qquad \square$$

<u>Remarque 1</u>. En fait, nous avons démontré que

$$\mu(f) < \infty \iff J(f) \supset \mathcal{M}_n^k$$

(sans l'hypothèse $f \in \mathcal{M}_n^2$).

<u>Remarque 2</u> : Si

$$f(0) = 0$$

et si f est analytique (complexe) en particulier, si f est un polynôme complexe, on a une interprétation simple de *) $J(f) \supset \mathcal{M}_n^k$ qui équivaut (grâce à Nullstellensatz de Hilbert) à l'affirmation : L'ensemble

$$\sum(f) = \left\{ z \in \mathbb{C}^n , \ \frac{\partial f}{\partial z_1} = \dots = \frac{\partial f}{\partial z_n} = 0 \right\}$$

soit localement réduit à 0, soit vide

$$\sum(f) \subseteq 0$$

---

*) où $\mathcal{M}_n$ est l'idéal maximal de $\mathcal{O}_n$.

Remarque 3. Grâce au théorème de préparation différentielle, on a aussi

$$\mu(f) < \infty \iff \tau(f) < \infty$$

où

$$\tau(f) = \dim \mathbb{R} \frac{\mathcal{E}_n}{(f, J(f))}$$

On verra plus loin l'interprétation de $\tau(f) < \infty$.

Remarque 4.

La notion de détermination finie à droite n'est pas tres intéressante pour les germes

$$(\mathbb{R}^n, 0) \longrightarrow \mathbb{R}^p \quad , \quad p \geqslant 2$$

car on peut démontrer que (cf. [10])

(f. de détermination finie à droite $p \geqslant 2$) $\iff$ (f équivalente à droite à un germe en 0 d'une submersion)

On va voir maintenant que l'ensemble des germes de fonction qui ne sont pas déterminés à droite est de "codimension infinie."

Lemme 1.1. Pour tout $z \in J^k(n, 1)$ il existe $f \in \mathcal{E}_n$ tel que

$$j^k f(0) = z \quad \text{et} \quad \mu(f) < \infty.$$

Démonstration.

Représentons z par un polynôme $P(x_1, \ldots, x_n)$ de degré k. Soit

$$F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

l'application définie par

$$F(x_1, \ldots, x_n, t_1, \ldots, t_n) =$$

$$= P(x_1, \ldots, x_n) + \sum_{i=1}^{n} t_i x_i^{k+1}$$

Puisque

$$\frac{\partial F}{\partial t_i} \neq 0 \quad \text{pour} \quad x_i \neq 0 ,$$

$dF(x, t)$ est de rang maximum si $x \neq 0$. Donc d'après le théorème des fonctions implicites $F^{-1}(0) - (0 \times \mathbb{R}^n)$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.

Considérons la restriction de la projection π :

$$\pi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$(x, t) \longmapsto t$$

sur $F^{-1}(0) - (0 \times \mathbb{R}^n)$. D'après le lemme de Sard, il existe une valeur régulière $t_o = (t_{o1}, \ldots, t_{on})$ de π aussi proche de 0 que l'on veut.

Alors, si l'on pose

$$f(x_1, \ldots, x_n) = F(x_1, \ldots, x_n, t_{o1}, \ldots, t_{on}) ,$$

$f(x_1, \ldots, x_n)$ est un polynôme tel que

1) $j^k f(0) = z$ (évident)

2) f est de rang maximum si $x \neq 0$ et si $x \in f^{-1}(0)$.

En effet, l'hypothèse implique l'existence pour tout $x \neq 0$ de vecteurs tangents $\xi_1, \ldots, \xi_n$ dans $T_{x, t_o}(F^{-1}(0) - 0 \times \mathbb{R}^n)$ de la forme

$$\xi_i = \left(\sum_{j=1}^{n} \eta_{ij}(x, t_o) \frac{\partial}{\partial x_j} , \frac{\partial}{\partial t_i} \right)$$

$$(i = 1, \ldots, n)$$

Donc on a

$$\sum_{j=1}^{n} \eta_{ij}(x, t_o) \frac{\partial F}{\partial x_j}(x, t_o) + \frac{\partial F}{\partial t_i}(x, t_o) = 0$$

$$(i = 1, \ldots, n)$$

Alors les $\frac{\partial F}{\partial x_i}(x, t_o)$ ne sont pas tous nuls sinon on a aussi

$$\frac{\partial F}{\partial t_i}(x, t_o) = x_i^{k+1} = 0 \qquad (i = 1, \dots, n)$$

donc $x = 0$.

Par conséquent, ou bien $x = 0$ est un point isolé de l'ensemble

$$\left\{ x \in \mathbb{R}^n , \ f(x) = 0 , \ \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = 0 \quad (i = 1, \dots n) \right\}$$

ou bien cet ensemble est vide.

Pour voir que $\mu(f) < \infty$, il faut complexifier f. Soit

$$\tilde{f} : (\mathbb{C}^n , 0) \longrightarrow \mathbb{C}$$

le germe d'application holomorphe unique correspondant à f. Les raisonnements ci-dessus nous montre $\Gamma \subseteq \{0\}$ où

$$\Gamma = \left\{ z \in \mathbb{C}^n , \ \tilde{f}(z) = 0 , \ \frac{\partial \tilde{f}}{\partial z_i}(z) = 0 \quad (i = 1, \dots, n) \right\}$$

Supposons que $\Gamma = \{0\}$.

Nous allons démontrer que 0 est aussi un point isolé de l'ensemble

$$\sum(\tilde{f}) = \left\{ z \in \mathbb{C}^n , \ \frac{\partial f_i}{\partial z_i}(z) = 0 \quad (i = 1, \dots, n) \right\}$$

En effet, dans le cas contraire, il existe un arc analytique issu de 0 dans $\mathbb{C}^n$ sur lequel tous les $\frac{\partial f}{\partial z_i}$ s'annulent (lemme des petits chemins). Alors puisque

$$f(0) = 0 ,$$

f est nul sur tout l'arc et on en déduit que 0 n'est pas un point isolé de Γ.

La contradiction obtenue montre que 0 est un point isolé de $\Sigma(\tilde{f})$. D'après la remarque 2, § 1.2, il existe k tel que

$$J(f) \supset \mathcal{M}_n^k \qquad \text{donc} \qquad \mu(\tilde{f}) < \infty$$

(où $\mu(\tilde{f}) = \dim_{\mathbb{C}} \dfrac{\mathcal{O}_n}{J(f)}$) et par conséquent $\mu(f) < \infty$

<u>Définition 1.5.</u>

Si $f \in \mathcal{E}_n$ posons

$$\mu_k(f) = \dim_{\mathbb{R}} \frac{\mathcal{E}_n}{J(f) + \mathcal{M}_n^k}$$

<u>Remarque</u> : $\mu_k(f)$ ne dépend que de $j^k f(0)$ car $J(f)$ est bien défini mod $\mathcal{M}_n^k$ dès que f est bien défini mod $\mathcal{M}_n^{k+1}$.

Soit

$$A_k = \left\{ z \in J^k(n, 1) \,,\, \mu_k(z) > k - 1 \right\}$$

Nous allons démontrer le

<u>Lemme 1.2.</u>

1) $\mu(f)$ est fini si et seulement s'il existe k tel que

$$j^k f(0) \notin A_k$$

2) A_k est un sous-ensemble algébrique de $J^k(n,1)$ qui vérifie

$$\lim_{k \to \infty} \operatorname{codim} A_k = +\infty$$

(Nous rappelons qu'un sous-ensemble X d'un espace vectoriel V est dit algébrique fermé si

$$X(x_1, \ldots, x_n) = \left\{ f_1(x_1, \ldots, x_n) = \ldots\ldots \right.$$

$$\left. \ldots\ldots = f_m(x_1, \ldots, x_n) = 0 \right\}$$

où $f_i(x_1, \ldots, x_n)$ sont des polynômes; $(x_1, \ldots, x_n) \in V$.

Les sous-ensembles algébriques fermés de V forment des ensembles fermés dans une topologie sur V qui s'appelle la topologie de Zariski sur V).

Démonstration.

1) Supposons que $\mu(f) < \infty$.

Si $z = j^k f(0)$ on a

$$\mu_k(z) = \mu_k(f) \leqslant \mu(f).$$

Si on prend k suffisamment grand par exemple $k > \mu(f)$ on a

$$\mu_k(z) \leqslant k - 1$$

i.e.

$$z \notin A_k .$$

Réciproquement, supposons qu'il existe k tel que

$$j^k f(0) \notin A_k \qquad \text{i.e.} \qquad \mu_k(z) \leqslant k - 1$$

Donc, dans la suite de k sous-espaces emboîtés :

$$J(f) + \mathfrak{M}_n^k \subseteq J(f) + \mathfrak{M}_n^{k-1} \subseteq \dots \subseteq J(f) + \mathfrak{M}_n$$

il y a forcément deux sous-espaces qui ont même $\mu_l(f)$ c'est-à-dire

$$\exists\, l \leqslant k - 1$$

tel que

$$J(f) + \mathfrak{M}_n^l = J(f) + \mathfrak{M}_n^{l+1}$$

Donc

$$J(f) + \mathfrak{M}_n^{l+1} \supset \mathfrak{M}_n^l$$

et en appliquant le lemme de Nakayama on obtient

$$J(f) \supset \mathfrak{M}_n^l$$

et ensuite

$$\mu(f) < \infty$$

(voir remarque 1, § 1.2).

2) A_k est un sous-ensemble algébrique fermé de $J^k(n, 1)$ puisqu'on obtient les équations de A_k en annulant certains mineurs d'un déterminant. Donc A_k a un nombre fini de composants irréductibles de codimension minimum.

Soient :

a_k = codim A_k

b_k = le nombre des composants irréductibles de A_k (ayant codim a_k).

Alors on a

a) $k \leqslant l \Longrightarrow a_k \leqslant a_l$

b) $k \leqslant l$, $a_k = a_l \Longrightarrow b_k \geqslant b_l$

c) $\forall k$, $\exists\, l \geqslant k$ tel que :

ou bien $a_k < a_l$

ou bien $a_k = a_l$ et $b_k > b_l$.

Les assertions a) et b) sont facile à vérifier. Pour démontrer l'assertion c) il faut utiliser le lemme 1.1 et l'assertion 1) du lemme 1.2 . En effet , si pour tout $l > k$ l'assertion c) n'est pas vérifiée, alors on a

$$a_k = a_l \quad \text{et} \quad b_k = b_l$$

Dans ce cas, soient $Y_1 , \ldots , Y_{b_k}$ les composants irréductibles de codim a_k dans A_k . Alors

$$(\pi_k^l)^{-1} Y_1 , \ldots (\pi_k^l)^{-1} Y_{b_k}$$

sont des composants irréductibles de codim a_k dans A_l . Donc, il suffit de démontrer que

$$(\pi_k^l)^{-1} Y_1 \not\subset A_l$$

avec l suffisamment grand.

En effet, soit $z \in Y_1$. D'après le lemme 1.1

il existe f tel que

$$\mu(f) < \infty \quad \text{et} \quad j^k f(0) = z .$$

Donc, d'après l'assertion 1) du lemme 1.2 , il existe l suffisamment grand pour que

$$j^l f(0) \notin A_l$$

i.e.

$$(\pi_k^l)^{-1} Y_1 \not\subset A_l .$$

La contradiction obtenue affirme l'assertion c).

Des assertions a) b) c) , on déduit

$$\operatorname*{codim}_{k\to\infty} A_k \longrightarrow \infty . \qquad \square$$

Maintenant, nous posons

$$J^\infty(n, p) = \varprojlim J^k(n, p)$$

où l'on prend la limite inverse par rapport au système de projection

$$\pi_k^l : J^l(n, p) \longrightarrow J^k(n, p) .$$

Si $l \geqslant k$, la projection π_k^l est continue par rapport aux topologies de Zariski sur $J^l(n, p)$ et $J^k(n,p)$. Alors, on peut définir la limite inverse de topologie sur $J^\infty(n, p)$. Cette topologie s'appelle la <u>topologie de Zariski</u> sur $J^\infty(n, p)$. (C'est la topologie la plus faible pour que les projections

$$\pi_k : J^\infty(n, p) \longrightarrow J^k(n, p)$$

soient continues).

Un sous-ensemble X de $J^\infty(n, p)$ est dit <u>pro-algébrique</u> s'il est fermé dans la topologie de Zariski de $J^\infty(n, p)$.

Pour chaque sous-ensemble pro-algébrique X dans $J^\infty(n, p)$, on pose :

$$\operatorname{codim} X = \sup_k \operatorname{codim} X_k$$

où X_k est la fermeture de Zariski de $\pi_k X$ dans $J^k(n, p)$.

Définition 1-6.

Nous disons que $z \in J^\infty(n, 1)$ est déterminé à droite si

$$z = j^\infty f(0) = \varprojlim j^k f(0)$$

où f est déterminé à droite.

En posant

$$J_0^\infty(n, 1) = \left\{ z \in J^\infty(n,1) \; ; \; z = \varprojlim j^k f(0) \; , \; j^1 f(0) = 0 \right\}$$

on voit que $J_0^\infty(n, 1)$ est un sous-ensemble pro-algébrique de $J^\infty(n, 1)$.

Théorème 1-2. L'ensemble A des $z \in J_0^\infty(n, 1)$ qui ne sont pas déterminés à droite est un sous-ensemble pro-algébrique de codimension infinie.

Démonstration.

1. D'abord, nous démontrons que A est pro-algébrique.

Nous avons vu (lemme 1-1) :

$$\mu(f) < \infty \iff \exists k : j^k f(0) \notin A_k$$

Ensuite, d'après le théorème 1.1, on a

$$A = \left\{ z \in J_0^\infty(n, 1) \; ; \; z = j^\infty f(0) \; , \; \mu(f) < \infty \right\}$$

$$= \bigcap_k \pi_k^{-1}(A_k) \cap J_0^\infty(n, 1) .$$

Mais A_k sont des sous-ensembles algébriques fermés, donc A est pro-algébrique.

2) On a :

$$\operatorname{codim} A = \sup_k \operatorname{codim} A_k = \infty$$

(d'après le lemme 1-2). $\square$

§ 2. DEPLOIEMENTS DE GERMES D'APPLICATIONS

Nous commencerons par considérer le problème global dont nous n'étudierons que l'aspect local.

Soit

$$f : N \xrightarrow{C^\infty} \mathbb{R}^p$$

considérons l'application $d\,_f(e)$ (cf. 4-2. chap. 0) :

$$d\gamma_f(e) : \mathcal{E}N \oplus \mathcal{E}P \longrightarrow \mathcal{E}f$$

$$(\xi, \eta) \longrightarrow df_o\xi + \eta_o f$$

<u>Définition 2-1</u>. La codimension de f, notée $c(f)$, est la codimension de l'image de $\mathcal{E}N \oplus \mathcal{E}P$ dans $\mathcal{E}f$ par l'application $d\gamma_f(e)$.

Soient

$$f : N \longrightarrow \mathbb{R}^p$$

est de codimension $c < \infty$ et $f_1, \ldots, f_c$ une base d'un supplémentaire de l'image de $\mathcal{E}N + \mathcal{E}P$,

$$f_i \in C^\infty(N, \mathbb{R}^p) \quad ; \quad (i = 1, \ldots, c)$$

On a :

<u>Théorème 2-1</u> (de Sergeraert [15]).

Si $c(f) < \infty$, il existe un voisinage W_f de f dans $C^\infty(N, \mathbb{R}^p)$ et une application φ :

$$\varphi : W_f \xrightarrow{C^\infty} \mathbb{R}^c \times \operatorname{Diff} N \times \operatorname{Diff} \mathbb{R}^p$$

$$g \longmapsto (\lambda_1(g), \ldots, \lambda_c(g), \varphi_g, \psi_g)$$

tel que

$$\forall g \in \mathcal{V}_f \quad : \quad g = \psi_g \left(f + \sum_{i=1}^{c} \lambda_i(g)\, f_i\right) \varphi_g^{-1}$$

Remarque 1 .

L'ensemble $f + \sum_{i=1}^{c} \lambda_i f_i$ où $\lambda_i \in \mathbb{R}$ apparait comme une section transverse (ou une tranche) à l'orbite de f sous l'action de Diff N × Diff $\mathbb{R}^p$. Alors le théorème de Sergeraert dit que si g est assez voisin de f , g est dans l'orbite de la tranche $f + \sum_{i=1}^{c} \lambda_i f_i$ donc cette tranche est stable localement (Fig. 29).

On voit que dans ce cas, il existe une structure localement triviale de $C^\infty(N, \mathbb{R}^p)$ au voisinage de f.

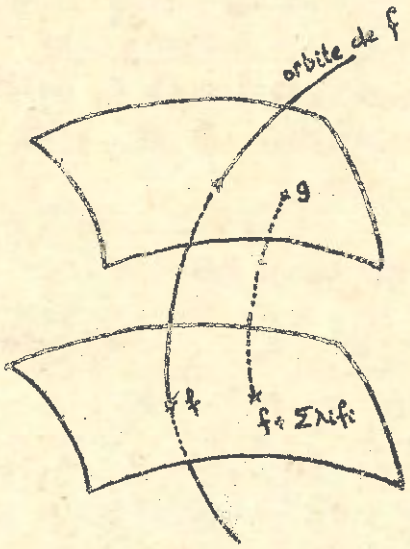


Fig. 29

Remarque 2 :

Dans le cas où f est infinitésimalement stable i.e. c = 0 on obtient

$$g = \psi_g \circ f \circ \varphi_g^{-1}$$

c'est-à-dire g est dans l'orbite de f, ce qui montre que f est stable.

Maintenant, par analogie avec le cas global dont on vient de parler, on considère le déploiement d'un germe de fonction.

<u>Définition 2.1.</u> Soit

$$f : (\mathbb{R}^n, 0) \xrightarrow{C^\infty} (\mathbb{R}^p, 0)$$

un germe d'application. <u>Un déploiement du germe f</u> consiste d'une application

$$\begin{tikzcd}
F : (\mathbb{R}^n, 0) \times (U \times 0) \arrow[rr] \arrow[dr, "p"'] & & \mathbb{R}^p \times (U, 0) \arrow[dl, "p'"] \\
& (U, 0) &
\end{tikzcd}$$

(U voisinage de 0 dans l'espace de paramètres $\mathbb{R}^k$) compatible avec les feuilletages de la source et du but définis par les projections p, p' et tel que

$$F\big|_{(\mathbb{R}^n, 0) \times \{0\}} = f .$$

<u>Définition 2-2.</u> Si F est le déploiement ci-dessus, on se donne un autre espace de paramètres $(V, 0')$ (de dimension quelconque) ainsi qu'une application C^∞

$$g : (V, 0') \longrightarrow (U, 0)$$

On appellera <u>déploiement induit de F par l'application g</u> le déploiement G univoquement défini par le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
G : (\mathbb{R}^n, 0) \times (V, 0') \arrow[rr] \arrow[dr] \arrow[dd, "id"'] \arrow[dd, shift left=6, "g"] & & \mathbb{R}^p \times (V, 0') \arrow[dl] \arrow[dd, "id"] \arrow[dd, shift left=6, "g"] \\
& (V, 0') \arrow[d, "g"] & \\
& (U, 0) & \\
F : (\mathbb{R}^n, 0) \times (U, 0) \arrow[ur] & & \mathbb{R}^p \times (U, 0) \arrow[ul]
\end{tikzcd}$$

<u>Définition 2.3.</u> Etant donnés deux déploiements F, G du germe f, d'espaces de paramètres $(U,0)$, $(V, 0')$ respectivement, on dira que ces déploiements sont équivalents (isomorphes) s'il existe des difféomorphismes locaux

$$H : (\mathbb{R}^n, 0) \times (U, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^n, 0) \times (V, 0')$$

$$H' : (\mathbb{R}^p, 0) \times (U, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^p, 0) \times (V, 0')$$

de la forme

$$H(x, u) = (h_u(x), k(u))$$

$$H'(y, u) = (h_{u'}(y), k(u))$$

où k est un difféomorphisme local

$$k : (U, 0) \longrightarrow (V, 0')$$

tel que le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd}
(\mathbb{R}^n, 0) \times (U, 0) \arrow[rr] \arrow[dr] \arrow[dd, "H"'] & & \mathbb{R}^p \times (U, 0) \arrow[dl] \arrow[dd, "H'"] \\
& (U,0) \arrow[d, "k"] & \\
& (V, 0') & \\
(\mathbb{R}^n, 0) \times (V, 0') \arrow[rr] \arrow[ur] & & \mathbb{R}^p \times (V, 0') \arrow[ul]
\end{tikzcd}$$

Le but de la théorie de déploiement des germes d'applications est de démontrer que si le germe f satisfait à une certaine condition de finitude (presque toujours réalisée dans le cas des fonctions, $p = 1$ (cf. théorème 2.2 ci-dessous) alors il existe un déploiement F de f qu'on peut qualifier de "versel" en ce sens que tout autre déploiement est équivalent à un déploiement induit de celui-là par une C^∞-application convenable dans l'espace des paramètres de ce déploiement. On montrera que deux déploiements versels de dimension minimale sont équivalents ce qui définit à l'équivalence près un déploiement "universel".

Nous donnons ici un théorème de ce type dont la démonstration (qui est assez longue) les lecteurs peuvent trouver, par exemple, dans [17].

<u>Théorème 2.2</u>. Soit

$$f : (\mathbb{R}^n, 0) \xrightarrow{C^\infty} \mathbb{R}$$

Supposons que $\mu(f) < \infty$ et $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ engendrent $\dfrac{\mathcal{E}_n}{\mathcal{J}(f)}$ comme espace vectoriel réel (il n'y en a pas forcément le nombre minimum).

Alors le déploiement

$$F : (x_1, \ldots, x_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_k) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left(f(x) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \varphi_i(x), \lambda_1, \ldots, \lambda_k \right)$$

est versel.

Si $1, \varphi_1, \ldots, \varphi_{p-1}$ est une base de $\dfrac{\mathcal{E}_n}{\mathcal{J}(f)}$ alors F est un déploiement universel.

Maintenant supposons $\tau(f) < \infty$ (voir Remarque 3, § 1-2).

Soient $1, f_1, \ldots, f_k$ des générateurs de $\dfrac{\mathcal{E}_n}{(f) + \mathcal{J}(f)}$. Nous allons considérer le déploiement

$$F : (x_1, \ldots, x_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_k) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left(f(x) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i f_i(x), \lambda_1, \ldots, \lambda_k \right)$$

Si le germe

$$F : (\mathbb{R}^n, 0) \times (\mathbb{R}^k, 0) \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}^k$$

est stable, on dit que f admet un déploiement F stable. $\square$

<u>Théorème 2.3</u>. Le germe F est infinitésimalement stable.

<u>Démonstration</u> :

D'après le théorème de préparation, il suffit de montrer que (cf. [7])

$$dF\,\Theta_X + F^{*}\,\Theta_Y + \mathcal{M}_Y\,\Theta_F = \Theta_F$$

où

$$X = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \quad , \qquad Y = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^k$$

On identifie :

1. Θ_F à $(\mathcal{E}_{n+k})^{k+1}$

par le choix des générateurs

$$\frac{\partial}{\partial y} \cdot F \, , \; \frac{\partial}{\partial \lambda_1} \cdot F \, , \ldots , \; \frac{\partial}{\partial \lambda_k} \cdot F$$

2. Θ_X à $(\mathcal{E}_{n+k})^{n+k}$

par le choix des générateurs

$$\frac{\partial}{\partial x_1} , \ldots , \frac{\partial}{\partial x_n} , \; \frac{\partial}{\partial \lambda_1} , \ldots , \frac{\partial}{\partial \lambda_n}$$

3. Θ_Y à $(\mathcal{E}_{k+1})^{k+1}$

par le choix des générateurs

$$\frac{\partial}{\partial y} , \; \frac{\partial}{\partial \lambda_1} , \ldots , \frac{\partial}{\partial \lambda_k}$$

soit

$$(\xi_0(x,\lambda) , \ldots , \xi_k(x,\lambda))$$

un élément donné de Θ_F .

On est ainsi ramené à chercher des $\xi_i(x,\lambda)$, $\eta_i(y,\lambda)$ et $\alpha_{ij}(x,\lambda)$ telles que (on a noté $F_0 = f(x) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i f_i(x)$) :

$$\begin{pmatrix} \xi_0(x,\lambda) \\ \vdots \\ \xi_k(x,\lambda) \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \frac{\partial F_0}{\partial x_1}(x,\cdot) & \cdots & \frac{\partial F_0}{\partial x_n}(x,\lambda) & f_1(x) & \cdots & f_k(x) \\ \hline & & & 1 & & 0 \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & 0 & & 1 \end{array}\right) \begin{pmatrix} \xi_1(x,\lambda) \\ \vdots \\ \xi_{n+k}(x,\lambda) \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{pmatrix} \eta_0(F(x,\lambda)) \\ \vdots \\ \eta_k(F(x,\lambda)) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_0(x,\lambda)\,\alpha_{00}(x,\lambda) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i\,\alpha_{0i}(x,\lambda) \\ \\ F_0(x,\lambda)\,\alpha_{k0}(x,\lambda) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i\,\alpha_{ki}(x,\lambda) \end{pmatrix} \qquad (2.1)$$

Remarquons que :

$$\eta_i(y, \quad) = \eta_i(0, 0) + y\,\alpha_{00} + \sum_{i=1}^{k} \lambda\,\alpha_{0i}$$

donc on peut supposer que

$$\eta_i(\,F(x,\lambda)\,) = \eta_i = \text{const}$$

en renvoyant les autres termes dans le dernier terme de l'équation (2-1).

Ensuite, en posant

$$\xi_i(x, 0) = \xi_i(x) \,, \qquad (i = 0, \ldots, k)$$

$$\alpha_{i0}(x, 0) = \alpha_{i0}(x)$$

On doit résoudre pour $\lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0$ un système de la forme

$$\begin{pmatrix} \xi_0(x) \\ \vdots \\ \xi_k(x) \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) & f_1(x) & \dots & f_k(x) \\ \hline & & & 1 & & 0 \\ & 0 & & & & \\ & & & 0 & & 1 \end{array}\right) \begin{pmatrix} \xi_1(x) \\ \vdots \\ \xi_{n+k}(x) \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{pmatrix} \eta_0 \\ \vdots \\ \eta_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f(x)\,\alpha_{00}(x) \\ \vdots \\ f(x)\,\alpha_{k0}(x) \end{pmatrix}$$

qui s'écrit encore

$$\xi_0(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\,\xi_i(x) + \sum_{j=1}^{k} f_j(x)\,\xi_{n+j}(x) + \eta_0 + f(x)\,\alpha_{00}(x), \qquad (2\text{-}2)$$

$$\xi_j(x) = \xi_{n+j}(x) + \eta_j + f(x)\,\alpha_{j0}(x) \qquad (2\text{-}3)$$

$$(1 \leqslant j \leqslant k)$$

Posons

$$\xi_{n+j}(x) = \xi_{n+j}(0) + \tilde{\xi}_{n+j}(x)$$

$$\xi_j(x) = \xi_j(0) + \tilde{\xi}_j(x)$$

Les équations (2-3) donnent en prenant

$$\alpha_{jo}(x) = 0 \qquad (j = 1, \ldots, k) \ ;$$

$$\tilde{\xi}_{n+j}(x) + \xi_{n+j}(0) + \eta_j = \xi_j(0) + \tilde{\xi}_j(x)$$

d'où l'on déduit

$$\xi_{n+j}(0) + \eta_j = \xi_j(0) \qquad (2\text{-}4)$$

(car $\tilde{\xi}_{n+j}(0) = \tilde{\xi}_j(0) = 0$)

$$\tilde{\xi}_{n+j}(x) = \tilde{\xi}_j(x)$$

On résoud alors l'équation (2-2) sous la forme

$$\underbrace{\xi_o(x) - \sum_{j=1}^{k} f_j(x)\, \tilde{\xi}_{n+j}(x)}_{\text{donné}} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\, \xi_i(x) + f(x)\, \alpha_{oo}(x) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{k} f_i(x)\, \xi_{n+j}(0) + \eta_o$$

ce qui est possible d'après l'hypothèse.

On détermine en particulier $\xi_{n+j}(0)$ donc η_j par (2-4).

Maintenant, en admettant que

$$\xi_i(x,\lambda) = \xi_i(x) \ ,$$

$$\alpha_{io}(x,\lambda) = 0 \qquad (i = 1, \ldots, k)$$

$$\alpha_{oo}(x,\lambda) = \alpha_{oo}(x)$$

On peut trouver sans difficulté les autres termes $\alpha_{ij}(x,\lambda)$ $(i = 0, \ldots, k \ , \ j = 1, \ldots, k)$. $\square$

<u>Corollaire 2.1</u> . Si f est un germe vérifiant

$\tau(f) < \infty$ (ou $\mu(f) < \infty$ qui est en fait équivalent) F est un germe stable (car dans le cas des germes : la stabilité infinitésimale est équivalente à la stabilité (cf. [7]).

Autrement dit, si $\tau(f) < \infty$, f admet un déploiement stable F.

On va faire maintenant l'étude géométrique des cas où $\mu(f)$ est petit.

§ 3. ETUDE DES GERMES F DE PETITE CODIMENSION

3.1. Elimination des variables non significatives.

Le lemme suivant montre que dans l'étude des germes $f \in \mathcal{E}_n$ tel que

$$f(0) = 0 , \quad df(0) = 0$$

on peut se ramener au cas où il n'y a pas de terme du second degré dans le développement en série de Taylor.

Lemme 3.1 (de Gromoll-Meyer [5])

Soit $f : (\mathbb{R}^n, 0) \longrightarrow \mathbb{R}$

un germe de fonction tel que $f(0) = 0$, $df(0) = 0$.
Si

$$\text{rang } d^2 f(0) = k$$

il existe un système de coordonnées $(y_1, \ldots, y_k, x_{k+1}, \ldots, x_n)$ tel que dans lequel f peut être représenté sous la forme

$$f(y_1, \ldots, y_k, x_{k+1}, \ldots, x_n) =$$

$$= q(y_1, \ldots, y_k) + g(x_{k+1}, \ldots, x_n)$$

où :

a) $$q\,(y_1, \ldots, y_k)$$

est une forme quadratique non dégénérée de $y_1, \ldots, y_k$.

b) $d^2g(0) = 0$ et le germe $g : (\mathbb{R}^{n-k}, 0) \longrightarrow \mathbb{R}$

est bien déterminé, à difféomorphisme lo al de $(\mathbb{R}^{n-k}, 0)$ près, par le germe f.

<u>Démonstration</u> :

I. Considérons un système de coordonnées

$$x = (x_1, \ldots, x_n)$$

dans $\mathbb{R}^n$. Soit

$$N = \operatorname{Ker} d^2f(0) = \{ x \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } \forall y \in \mathbb{R}^n,\ d^2f(0)\,(x, y) = 0 \}.$$

Par l'hypothèse, N est est un sous-espace de $\mathbb{R}^n$ de dimension n-k. Soit P un sous-espace de dimension k supplémentaire de N. Alors $d^2f(0)\big|_P$ est non dégénérée.

Dans ce cas, on dit que l'application $p : \mathbb{R}^n \longrightarrow N$ définit un feuilletage adapté à f.

Plus général on a la

<u>Définition 3.1</u>. On dira qu'une application (locale)

$$p : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n-k}$$

définit <u>un feuilletage adapté à f</u> si

1) p est de rang maximum en 0.

2) $f\big|_{p^{-1}(p(0))}$ a en 0 un point critique non dégénéré.

Si p définit un feuilletage adapté à f on peut par un changement de coordonnées locales se ramener au cas où

...

$$N = \{ x_1 = \dots = x_k = 0 \}$$

$$p : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n-k}$$

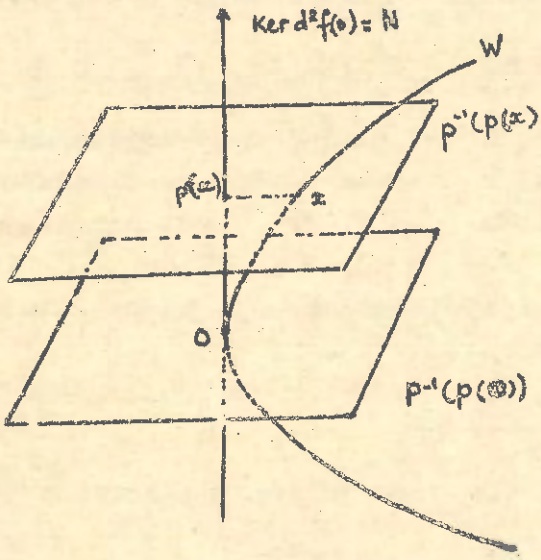
$$(x_1, \dots, x_n) \longmapsto (x_{k+1}, \dots, x_n)$$

<u>Lemme 3.2</u> :

Si p définit un feuilletage adapté a f, l'ensemble

$$W = \{ x \in \mathbb{R}^n , \ x \text{ est un point critique de } f|_{p^{-1}(p(x))} \}$$

est au voisinage de 0 une sous-variété de dimension $n-k$ tangente en 0 à N (fig. 30).



<u>Fig. 30</u>

<u>Démonstration</u> :

W est défini localement par les équations

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0 , \dots , \frac{\partial f}{\partial x_k} = 0$$

qui sont de rang maximum en 0 par l'hypothèse. Donc

$$\dim W = n - k .$$

Le fait que W est tangente en 0 à N est évident.

<u>Corollaire 3.1</u>. L'application g est définie par

$$g : N \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x_{k+1}, \ldots, x_n) \longmapsto g(x_{k+1}, \ldots, x_n) = f(W \cap p^{-1}(x_{k+1}, \ldots, x_n))$$

est de classe C^{∞}.

<u>Démonstration</u>. Il suffit de voir que l'application

$$(x_{k+1}, \ldots, x_n) \longmapsto W \cap p^{-1}(x_{k+1}, \ldots, x_n)$$

est de classe C^{∞}, ce qui est clair (graphe W).

II. <u>Démonstration de l'existence d'une décomposition.</u>

Si $(x_{k+1}, \ldots, x_n)$ est assez proche de $(0, \ldots, 0)$, $p^{-1}(x_{k+1}, \ldots, x_n)$ est proche de $p^{-1}(0, \ldots, 0)$, la restriction $f|_{p^{-1}(x_{k+1}, \ldots, x_n)}$ est proche de $f|_{p^{-1}(0, \ldots, 0)}$ et donc $f|_{p^{-1}(x_{k+1}, \ldots, x_n)}$ aura encore un point critique non dégénéré proche de $(x_{k+1}, \ldots, x_n) \in N$. C'est le point $W \cap p^{-1}(x_{k+1}, \ldots, x_n)$.

Donc l'application

$$(x_{k+1}, \ldots, x_n) \longmapsto f|_{p^{-1}(x_{k+1}, \ldots, x_n)}$$

détermine une famille à $n-k$ paramètres de fonctions de Morse (tout est local).

On applique alors le lemme de Morse à paramètres (cf. Remarque 2, § 1.1), il existe un changement de coordonnées dans $\mathbb{R}^n$:

$$\mathbb{R}^n : (x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n) \longmapsto$$

$$\longmapsto (y_1, \ldots, y_k, x_{k+1}, \ldots, x_n)$$

tel que dans le système de coordonnées $(y_1, \ldots, y_k, x_{k+1}, \ldots, x_n)$ f peut s'écrire sous la forme

$$f(y_1, \ldots, y_k, x_{k+1}, \ldots, x_n) =$$

$$= q(y_1, \ldots, y_k) + g(x_{1+1}, \ldots, x_n)$$

où $q(y_1, \ldots, y_k)$ est une forme quadratique non dégénérée et où

$$g(x_{k+1}, \ldots, x_n) = f(W \cap p^{-1}(x_{k+1}, \ldots, x_n))$$

est la valeur au point critique de $f|_{p^{-1}(x_{k+1}, \ldots, x_n)}$.

Ce germe g :

$$g : \mathbb{R}^{n-k} \longrightarrow \mathbb{R}$$

s'appelle la <u>singularité résiduelle</u>. Il est clair que

$$g(0) = 0, \quad dg(0) = 0, \quad d^2 g(0) = 0$$

(puisque $f(0) = 0$, $df(0) = 0$, rang $d^2f(0) = k$).

III. <u>Démonstration de l'unicité de la singularité résiduelle.</u>

Choisir une décomposition revient à choisir un feuilletage adapté et la singularité résiduelle s'obtient en regardant les valeurs aux points critiques des restrictions de f aux feuilles.

Soit $(x_1, \ldots, x_n)$ un système de coordonnées tel que dans lequel f est représenté sous la forme

$$f = \sum_{i=1}^{k} \pm x_i^2 + g(x_{k+1}, \ldots, x_n)$$

Considérons le premier feuilletage adapté à f donné par la projection

$$p : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} \longrightarrow \mathbb{R}^{n-k}$$

$$(x_1, \ldots, x_n) , (x_{k+1}, \ldots, x_n) \longmapsto (x_{k+1}, \ldots, x_n)$$

Considérons une deuxième décomposition correspondant à un nouveau feuilletage adapté donné par

$$p' : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n-k} \qquad \text{(Fig. 31).}$$

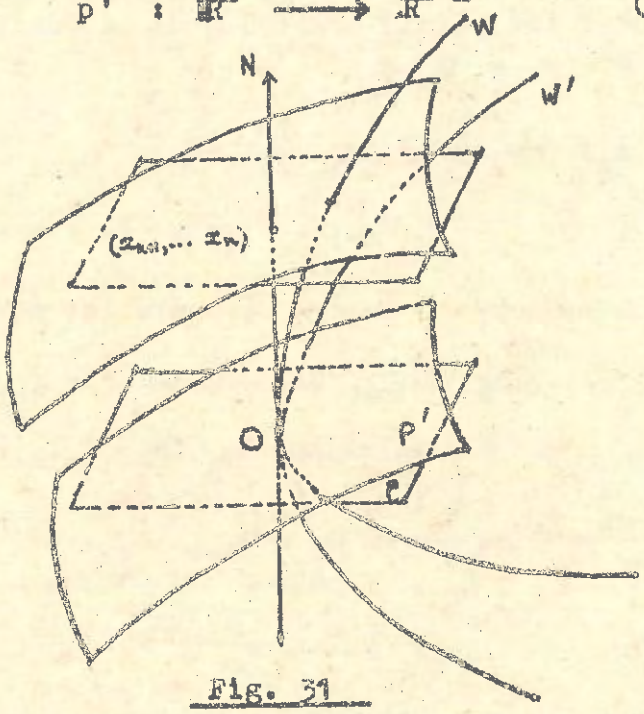


Fig. 31

A cause de la transversalité à N des feuilles de P', celles-ci peuvent se représenter comme des graphes

$$x_{k+j} - h_{k+j}(x_1, \ldots, x_k) = \text{const}$$

c'est-à-dire

$$P'(x_1, \ldots, x_n) = (x_{k+1} - h_{k+1}(x_1, \ldots, x_k), \ldots$$
$$\ldots, x_n - h_n(x_1, \ldots, x_k)) =$$
$$= (y_{k+1}, \ldots, y_n) .$$

Soit :

$$W' = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \,,\ x \text{ est un point critique de } f\big|_{p'^{-1}(p'(x))} \right\}.$$

On doit comparer g et g' où g' est définie par

$$g'(y_{k+1}, \ldots, y_n) = f\,(p'^{-1}(y_{k+1}, \ldots, y_n) \cap W')$$

Pour obtenir les équations de W' on paramètre les feuilles comme ci-dessus par $x_1, \ldots, x_k$, il faut donc chercher les points critiques de la famille de fonctions $\mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}$:

$$(x_1, \ldots, x_k) \longmapsto f\,(x_1, \ldots, x_k, h_{k+1}(x_1, \ldots, x_k) + y_{k+1}, \ldots, h_n(x_1, \ldots, x_k) + y_n).$$

On est donc ramené à résoudre les équations :

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_k, h_{k+1}(x_1, \ldots, x_k) + y_{k+1}, \ldots \ldots h_n(x_1, \ldots, x_k) + y_n) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{n-k} \frac{\partial f}{\partial x_{k+j}}(x_1, \ldots, x_k, h_{k+1}(x_1, \ldots, x_k) + y_{k+1}, \ldots, h_n(x_1, \ldots, x_k) + y_n) \cdot$$

$$\frac{\partial h_{k+j}}{\partial x_j}(x_1, \ldots, x_k) = 0 \qquad (i = 1, \ldots, k)$$

En remarquant que

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_n) = \pm 2\, x_i \qquad (i = 1, \ldots, k)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_{k+j}}(x_1, \ldots, x_n) = \frac{\partial g}{\partial x_{k+j}}(x_{k+1}, \ldots, x_n)$$

$$(j = 1, \ldots, n-k)$$

on a :

$$W' = \left\{ (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \; ; \; x_i = \pm \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n-k} \frac{\partial g}{\partial x_{k+j}} \cdot \right.$$

$$\left. \cdot (x_{k+1}, \ldots, x_n) \cdot \frac{\partial h_{k+j}}{\partial x_i} (x_1, \ldots, x_k) \right\} \quad (3\text{-}1)$$

$$(i = 1, \ldots, k)$$

où

$$x_{k+j} = h_{k+j} (x_1, \ldots, x_k) + y_{k+j} \qquad (3\text{-}2)$$

$$(j = 1, \ldots, n-k)$$

Donc :

$$g'(y_{k+1}, \ldots, y_n) = \sum_{i=1}^{k} \pm x_i^2 + g(x_{k+1}, \ldots, x_n)$$

où les x_i sont définis par (3-1), (3-2) ; c'est-à-dire

$$g'(y_{k+1}, \ldots, y_n) \in g(x_{k+1}, \ldots, x_n) + [J(g(x_{k+1}, \ldots, x_n))]^2$$

et $g'(y_{k+1}, \ldots, y_n)$ est équivalente à $g(x_{k+1}, \ldots, x_n)$ d'après la remarque 3 de la proposition 4-2.

Enfin les applications :

$$\varphi_1 : \mathbb{R}^{n-k} \longrightarrow W'$$

$$(x_{k+1}, \ldots, x_n) \longmapsto P^{-1}(x_{k+1}, \ldots, x_n) \cap W'$$

et $P'|_{W'}$ sont des difféomorphismes locaux (car $P'^{-1}(0, \ldots, 0) \pitchfork_0 W'$) donc l'application

$$P' \cdot \varphi_1 : (x_{k+1}, \ldots, x_n) \longmapsto$$

$$\longmapsto P'(P^{-1}(x_{k+1}, \ldots, x_n) \cap W') = (y_{k+1}, \ldots, y_n)$$

est aussi un difféomorphisme local de $(\mathbb{R}^{n-k}, 0)$.

<u>Corollaire 3-2</u> .

On a :

1. $\mu(f) = \mu(g)$.

2. g est déterminé par son k-jet $\Longrightarrow$ f est déterminé par son k-jet.

En effet, en remarquant que :

$$J(f) = (x_1, \ldots, x_k, \frac{\partial g}{\partial x_{k+1}}, \ldots, \frac{\partial g}{\partial x_n}) \in \mathcal{M}_n$$

$$J(g) = (\frac{\partial g}{\partial x_{k+1}}, \ldots, \frac{\partial g}{\partial x_n}) \in \mathcal{M}_{n-k}$$

on en déduit l'assertion 1).

2. Si $\quad j^k \tilde{f}(0) = j^k f(0)$

d'après le lemme de Gromoll-Meyer, on doit avoir

$$\tilde{f}(x_1, \ldots, x_n) = \eta(x_1, \ldots, x_k) + \tilde{g}(x_{k+1}, \ldots, x_n)$$

où

$$j^k \tilde{g}(0) = j^k g(0) .$$

Par hypothèse on a

$$\tilde{g} \circ \varphi = g$$

où

$$\mathrm{Diff}_{loc}(\mathbb{R}^{n-k}, 0)$$

Donc en considérant le difféomorphisme $\psi \in \mathrm{Diff}_{loc}(\mathbb{R}^n, 0)$:

$$\psi(x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n) =$$

$$= (x_1, \ldots, x_k, \varphi_1(x_{k+1}, \ldots, x_n), \ldots,$$

$$\ldots, \varphi_{n-k}(x_{k+1}, \ldots, x_n))$$

où

$$(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) = \varphi$$

évidemment on a

$$\tilde{f} \circ \psi = f .$$

Donc, au point de vue de la codimension comme de la détermination finie sans restriction, on peut supposer que $d^2 f(0) = 0$.

La partie quadratique dans la décomposition de f n'est pas importante pour la nature topologique de la singularité.

Remarquons que chaque germe a donc deux invariants numériques importants : le corang $n-k$ qui est le nombre des variables figurant dans la singularité résiduelle et la codimension qui est la dimension diminuée d'une unité du déploiement universel.

<u>Proposition 3.1.</u> Si

$$\operatorname{codim} f \leqslant 5 \quad \text{où} \quad f \in \mathcal{M}_n^3$$

on a

$$n \leqslant 2.$$

<u>Démonstration</u> :

L'espace vectoriel réel $\dfrac{\mathcal{M}_n}{J(f)}$ contient sûrement parmi ses générateurs $x_1, \ldots, x_n$. De plus, il y a $\dfrac{n(n+1)}{2}$ monômes distincts $x_i x_j$ $(i,j = 1,\ldots, n)$ et seulement n relations

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0.$$

On en déduit que

$$\operatorname{codim} f \geqslant n + \frac{n(n+1)}{2} - n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Mais si $n \geqslant 3$ cela implique

$$\operatorname{codim} f \geqslant 6. \quad \square$$

C'est là une des remarques fondamentales de Thom dans la théorie des catastrophes : les germes de petite codimension ne font intervenir au plus que deux variables

significatives (les autres variables rentrent dans la partie quadratique).

3.2. Classification des germes.

Théorème 3.1. Soit

$$f : (\mathbb{R}^n, 0) \xrightarrow{C^\infty} \mathbb{R}$$

$$f(0) = 0 , \qquad df(0) = 0 .$$

Si $\quad$ corang $f = 1$, $\quad$ codim $f = k$

on a

$$f \sim \sum_{i=1}^{n-1} \varepsilon_i x_i^2 \pm x_n^{k+2} \qquad (k \geqslant 1)$$

où $\varepsilon_i = \pm 1$.

Démonstration :

D'après le lemme de Gromoll-Meyer, on a

$$f(x_1, \ldots, x_n) \sim \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i x_i^2 + g(x_n)$$

où

$$g(x_n) = x_n + h(x_n)$$

avec $\quad \alpha \geqslant 3 , \; h \in \mathcal{M}_1^4 \quad$ (car $g \in \mathcal{M}_1^3$).

Puisque $\quad \mathcal{M}_1 J(x_n^\alpha) = \mathcal{M}_1^\alpha$

d'après la proposition 1-3 , on a

$$g(x_n) \sim x_n^\alpha .$$

D'autre part :

$$\text{codim } f = \text{codim } g = \frac{\mathcal{M}_1}{x_n^{\alpha-1}} = \alpha - 2$$

et on en déduit le théorème 3-1 en appliquant le corollaire 3.2 .

Dans la suite, nous regarderons seulement les germes

de petite codimension :

$k = 1$	$g(x) \sim x^3$	(pli)
$k = 2$	$g(x) \sim x^4$	(fronce)
$k = 3$	$g(x) \sim x^5$	(queue-d'aronde)
$k = 4$	$g(x) \sim x^6$	(papillon)

Considérons maintenant le cas où corang $f = 2$.

<u>Lemme 3.2.</u> Si

$$\text{corang } f = 2 \; ; \qquad f(0) = 0 \; , \qquad df(0) = 0$$

$$j^3 f(0) \sim \sum_{i=1}^{n-2} \varepsilon_i x_i^2 + g_3(x_{n-1}, x_n)$$

$$\varepsilon_i = \pm 1$$

où g_3 est l'un des quatre polynômes suivants :

1. $x_{n-1}^2 x_n \pm x_n^3$
2. $x_{n-1}^2 x_n$
3. x_{n-1}^3
4. 0

<u>Démonstration</u> :

D'après le lemme de Gromoll-Meyer,

$$f(x_1, \ldots, x_n) \sim \sum_{i=1}^{n-2} \varepsilon_i x_i^2 + g(x_{n-1}, x_n)$$

où

$$g(x_{n-1}, x_n) = g_3(x_{n-1}, x_n) + h(x_{n-1}, x_n) \; ;$$

$g_3(x_{n-1}, x_n)$ est une forme cubique

$$h(x_{n-1}, x_n) \in \mathcal{M}_2^4 \; .$$

On peut décomposer $g_3(x_{n-1}, x_n)$ en facteurs

linéaires sur $\mathbb{C}$. Les quatres cas correspondent respectivement à 3, 2, 1 ou 0 facteurs linéaires. Par une transformation linéaire $g_3(x_{n-1}, x_n)$ prendre une des formes dans la proposition.

<u>Théorème 3-2</u>. Soit

$$f : (\mathbb{R}^n, 0) \longrightarrow \mathbb{R} ,$$

$$f(0) = 0 , \qquad df(0) = 0$$

Si

$$\text{coreng } f = 2 ; \qquad \text{codim } f \leqslant 7$$

on a :

$$f \sim \sum_{i=1}^{n-2} \varepsilon_i x_i^2 + g(x_{n-1}, x_n)$$

où $g(x_{n-1}, x_n)$ est le germe d'un des polynômes suivants :

$x_{n-1}^2 x_n \pm x_n^k$	$(k \geqslant 3)$	codim $f = k$
$x_{n-1}^3 \pm x_n^4$		codim $f = 5$
$x_{n-1}^3 + x_{n-1} x_n^3$		codim $f = 6$
$x_{n-1}^3 + x_n^5$		codim $f = 7$

<u>Démonstration</u> :

D'après le lemme de Gromoll-Meyer

$$f(x_1, \ldots, x_n) \sim \sum_{i=1}^{n-2} \varepsilon_i x_i^2 + g(x_{n-1}, x_n)$$

Ensuite, en utilisant le lemme 3-2 on démontre que :

1) Si $g_3(x_{n-1}, x_n) = x_{n-1}^2 x_n \pm x_n^3$

on a $g(x_{n-1}, x_n) = g_3(x_{n-1}, x_n)$,

2) Si $g_3(x_{n-1}, x_n) = x_{n-1}^2 x_n$

on a

$$g(x_{n-1}, x_n) = x_{n-1}^2 x_n \pm x_n^k \qquad (k = \text{codim } f)$$

3) Si $\quad g_3(x_{n-1}, x_n) = x_{n-1}^3$

et $\quad \text{codim } f \leqslant 7$

on a :

$$g(x_{n-1}, x_n) = \begin{cases} x_{n-1}^3 \pm x_n^4 & \text{si} \quad \text{codim } f = 5 \\ x_{n-1}^3 + x_{n-1} x_n^3 & \text{codim } f = 6 \\ x_{n-1}^3 + x_n^5 & \text{codim } f = 7 \end{cases}$$

Nous ne vérifions que le premier cas (le plus simple), et les lecteurs peuvent trouver la démonstration des autres cas par exemple dans [1] [16] .

Si

$$g_3(x_{n-1}, x_n) = x_{n-1}^2 x_n \pm x_n^3$$

$$J(g_3) = (2 x_{n-1} x_n , x_{n-1}^2 \pm 3 x_n^2)$$

D'autre part on a

$$x_{n-1}^3 = x_{n-1} \frac{\partial g_3}{\partial x_n} \mp \frac{3}{2} x_n \frac{\partial g_3}{\partial x_{n-1}}$$

$$x_{n-1}^2 x_n = \frac{1}{2} x_{n-1} \frac{\partial g_3}{\partial x_{n-1}}$$

$$x_{n-1} x_n^2 = -\frac{1}{2} x_n \frac{\partial g_3}{\partial x_n}$$

$$x_n^2 = \pm \frac{1}{3} x_n \frac{\partial g_3}{\partial x_n} \mp \frac{1}{6} x_{n-1} \frac{\partial g_3}{\partial x_1}$$

Donc :

$$\mathcal{M}_2^3 \subseteq \mathcal{M}_2 J(g_3) + \mathcal{M}_2^4$$

ou (en appliquant le lemme de Nakayama)

$$\mathcal{M}_2^3 \subseteq \mathcal{M}_2 J(g_3)$$

et d'après la proposition 1-3 , g_3 est déterminé par son 3-jet, c'est-à-dire on peut prendre

$$g(x_{n-1}, x_n) = g_3(x_{n-1}, x_n)$$

Remarquons que dans ce cas

$$\text{codim } f = \text{codim } g = 3$$

$\square$

<u>Remarque 1</u>. Si $g_3 \equiv 0$ on a :

$$\text{codim } f = \text{codim } g = \infty$$

à cause de l'existence des fonctions plates.

<u>Remarque 2</u>. Si codim $f \geqslant 7$ par exemple codim $f = 9$ donc ce cas

$$g_3(x_{n-1}, x_n) = x_{n-1}^3$$

on a

$$g(x_{n-1}, x_n) = x_{n-1}^3 + A\, x_{n-1}\, x_n^4 + B\, x_n^6$$

où A, B sont des constantes telles que

$$4A^3 + 27B^3 \neq 0 .$$

Donc, dans ce cas, la forme normale de g dépend continûment de paramètres (de modules).

3.3. Dans la suite, nous considérons quelques germes de petite codimension, notamment les trois ombilics de Thom :

<u>Ombilic hyperbolique</u> :

$$g : (\mathbb{R}^2, 0) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x, y) \longmapsto x^3 + y^3 \quad (\sim x^3 + xy^2)$$
$$\operatorname{codim} g = 3$$

<u>Ombilic elliptique</u> :

$$g : (\mathbb{R}^2, 0) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x, y) \longmapsto x^3 - 3\,xy^2 \quad (\sim x^3 - xy^2)$$
$$\operatorname{codim} g = 3$$

<u>Ombili parabolique</u> :

$$g : (\mathbb{R}^2, 0) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x, y) \longmapsto x^2 y + y^4$$
$$\operatorname{codim} g = 4$$

Nous allons étudier maintenant les déploiements universels des 7 germes : pli, fronce, queue d'aronde, papillon, ombilic hyperbolique, ombilic elliptique et ombilic parabolique.

Remarquons que chacun de ces germes est donné par un polynôme quasi-homogène, ce qui montre que $f \in J(f)$ et donc

$$\mathcal{T}(f) = \mu(f).$$

Le déploiement universel de f est défini par (cf. Théorème 2-2) :

$$F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^c \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}^c$$
$$(x, \lambda_1, \ldots, \lambda_c) \longrightarrow \left(f(x) + \sum_{i=1}^{c} \lambda_i f_i(x), \lambda_1, \ldots, \lambda_c \right)$$

où $(f_1, \ldots, f_c)$ est une base de $\dfrac{\mathcal{M}_n}{J(f)}$.

Nous obtenons ainsi la liste suivante des déploi-

-ements universels (les coefficients et les signes des f_i n'ont pour raison d'être que la commodité du calcul)

corang = 1

1) Pli : $(x, \lambda) \longmapsto (x^3 + x, \lambda)$

codim = 1

2) Fronce : $(x, \lambda_1, \lambda_2) \longmapsto$

$\longmapsto (x^4 + \lambda_2 x^2 + \lambda_1 x, \lambda_1, \lambda_2)$,

codim = 2

3) queue-d'aronde : $(x, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \longmapsto$

$\longmapsto (x^5 + \lambda_3 x^3 + \lambda_2 x^2 + \lambda_1 x, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$

codim = 3

4) Papillon : $(x, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \longmapsto$

$\longmapsto (x^6 + \lambda_4 x^4 + \lambda_3 x^3 + \lambda_2 x^2 +$

$+ \lambda_1 x, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$

codim = 4

corang = 2

5) Ombilic hyperbolique

$(x, y, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \longmapsto (x^3 + y^3 -$

$- \lambda_1 x - \lambda_2 y + \lambda_3 xy, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$

codim = 3

6) Ombilic elliptique :

$(x, y, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \longrightarrow (x^3 + 3 xy^2 -$

$- \lambda_1 x - \lambda_2 y + \lambda_3 (x^2 + y^2), \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$

codim = 3

7) Ombilic parabolique

.....

$$\left| \begin{array}{l} (x, y, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \longmapsto (x^2 y + y^4 - \lambda_1 x - \\ - \lambda_2 y + \lambda_3 x^2 + \lambda_4 y^2 , \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \end{array} \right.$$

codim $f = 4$.

3.4. <u>Etude géométrique des sept germes précédents.</u>
(Les sept catastrophes élémentaires de Thom)

<u>Remarque générale</u> :

Considérons le déploiement stable

$$\begin{tikzcd} (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k , (0, 0)) \arrow[rr, "F"] \arrow[dr, "\pi"'] & & \mathbb{R} \times \mathbb{R}^k \arrow[dl, "\pi"] \\ & \mathbb{R}^k & \end{tikzcd}$$

où

$$F(x_1, \ldots, x_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_k) =$$

$$= \left(f(x_1, \ldots, x_n) + \sum_{j=1}^{k} \lambda_j f_j (x_1, \ldots, x_n) , \lambda_1, \ldots, \lambda_k \right)$$

et π est la projection sur la deuxième composante.

On fait la remarque évidente suivante :

Pour tout $(x_1, \ldots, x_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_k) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$,

$$\text{rang } dF(x_1, \ldots, x_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_k) \geqslant k$$

d'où on déduit que l'ensemble $\Sigma(F)$ des points critiques de F sont des points $x \in N$ où

$$\text{rang } dF(x) = k$$

c'est-à-dire

$$\Sigma(F) = \Sigma^n(F)$$

où $\Sigma^n(F)$ est la strate de Boardman du symbole (n),

mais puisque F est stable, $\sum^n(F)$ est une sous-variété lisse dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$ au voisinage de $(0, 0)$ (cf. corollaire 3-2, chap. III).

On remarque aussi que

$$(x_1, \ldots, x_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_k) \in \sum(F)$$

si et seulement si $(x_1, \ldots, x_n)$ est un point critique de

$$F_0(x) = f(x) + \sum_{j=1}^{k} \lambda_j f_j(x) .$$

Ensuite, on vérifie facilement le

<u>Lemme 3-3</u>. Soient

$$K = \{ (x_1, \ldots, x_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_k) \in \sum(F) ,$$

$F|_{\sum(F)}$ n'est pas de rang maximum en ce point $\}$.

$$L = \{ (x_1, \ldots, x_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_k) \in \sum(F) , \pi|_{\sum(F)}$$

n'est pas de rang maximum en ce point $\}$.

$$M = \{ (x_1, \ldots, x_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_k) \in \sum(F) ,$$ le Hessien de $F_0(x)$ est dégénéré en $(x_1, \ldots, x_n) \}$.

Alors :

$$K = L = M$$

<u>Définition 3-2</u>.

$$\pi(K) \; (= \pi(L)) = \pi(M)) \subset \mathbb{R}^k$$

est appelé la bifurcation de la famille de germes que représente F (terminologie de la théorie des catastrophes).

D'après le lemme 3-3 c'est donc l'ensemble

..

$$\mathrm{Bif}(F) = \{ \lambda_1, \ldots, \lambda_k \; ; \; F_0(x) \text{ a au moins un point critique dégénéré assez voisin de } 0 \}.$$

3.5. <u>Etude de la bifurcation de sept catastrophes élémentaires.</u>

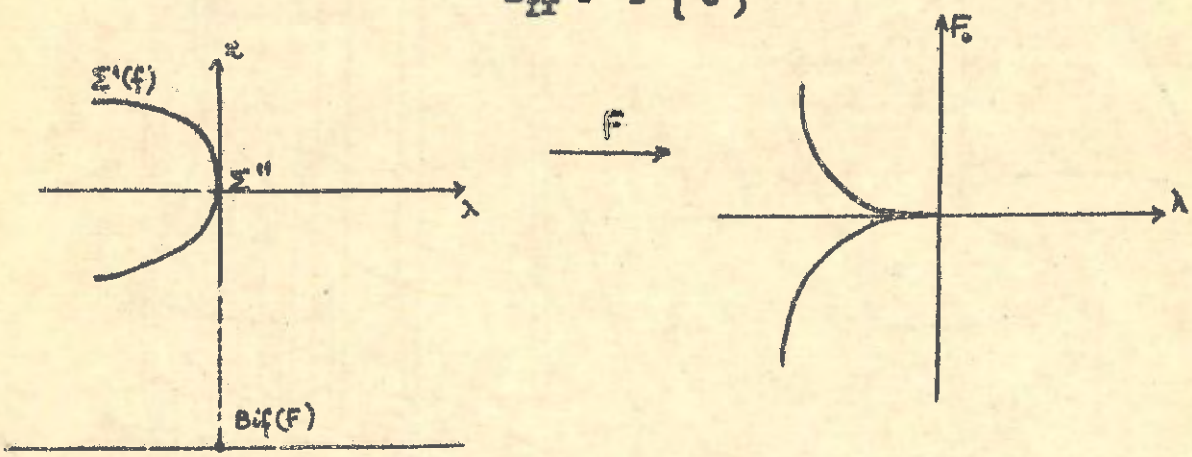
1. <u>Pli</u> : On a

$$F : (x, \lambda) \longmapsto (x^3 + \lambda x, \lambda)$$

$$\frac{\partial F_0}{\partial x} = 0 \Longrightarrow \Sigma(F) = \{ (x, \lambda), \; 3x^2 + \lambda = 0 \}$$

En éliminant x dans $\frac{\partial F_0}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial^2 F_0}{\partial x^2} = 0$ on obtient :

$$\mathrm{Bif}\, F = \{ 0 \}$$



<u>Fig. 32</u>

$$F(\Sigma(F)) = \{ (F_0, \lambda) \; : \; F_0 = x^3 + \lambda x = 0, \; 3x^2 + \lambda = 0 \}$$

$$= \{ (F_0, \lambda) \; : \; 4\lambda + 27 F_0^2 = 0 \quad \text{(cusp)}$$

(Fig. 32).

2. <u>Fronce</u> : On a

$$F : (x, \lambda_1, \lambda_2) \longmapsto (x^4 + \lambda_2 x^2 + \lambda_1 x, \lambda_1, \lambda_2)$$

$$\frac{\partial F_0}{\partial x} = 0 \longrightarrow \sum(F) : \{ (x, \lambda_1, \lambda_2) ; 4x^3 + 2\lambda_2 x + \lambda_1 = 0 \}.$$

En éliminant x dans $\frac{\partial F_0}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial^2 F_0}{\partial x^2} = 0$ on obtient

$$Bif(F) = \{ (\lambda_1, \lambda_2) ; 8\lambda_2^3 + 27\lambda_1^2 = 0 \}$$

$$F(\sum(F)) = \{ (F_0, \lambda_1, \lambda_2) : F_0 = x^4 + \lambda_2 x^2 + \lambda_1 x \quad 4x^3 + 2\lambda_2 x + \lambda_1 = 0 \}$$

(queue-d'aronde) - (Fig. 33).

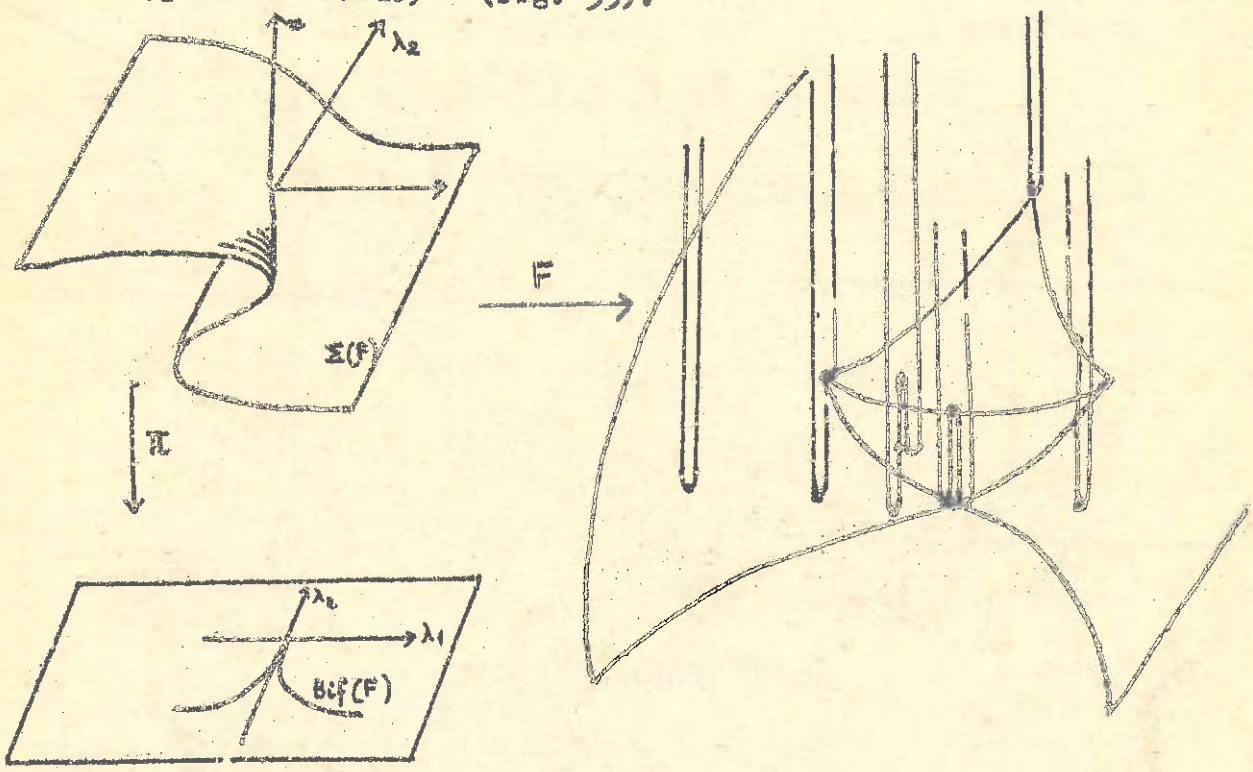


Fig. 33

Queue-d'aronde.
$F(\sum(F))$ et le changement de forme de $F_0(x)$.

3. Queue-d'aronde :

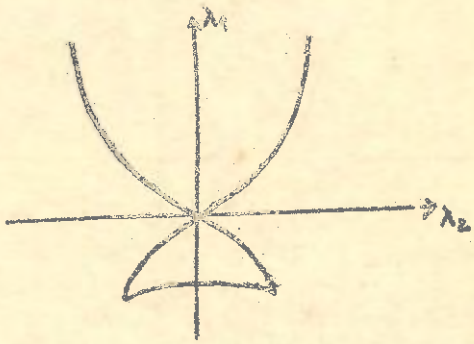
$$F : (x, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \longmapsto (x^5 + \lambda_3 x^3 + \lambda_2 x^2 + \lambda_1 x, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$$

$$\frac{\partial F_0}{\partial x} = 0 \Longrightarrow \sum (F) : \{ (x, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) : 5x^4 + 3\lambda_3 x^2 + 2\lambda_2 x + \lambda_1 = 0 \}$$

$$\mathrm{Bif}(F) = \{ (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) : 5x^4 + 3\lambda_3 x^2 + 2\lambda_2 x + \lambda_1 = 0 \quad 20x^3 + 12\lambda_3 x + 2\lambda_2 = 0 \}$$

(queu -d'aronde - Fig. 34).

queue - d'aronde



Section de Bif(F)

Fig. 34

4. Papillon :

$$F : (x, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \longmapsto (x^6 + \lambda_4 x^4 + \lambda_3 x^3 + \lambda_2 x^2 + \lambda_1 x, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$$

$$\frac{\partial F_0}{\partial x} = 0 \Longrightarrow \sum (F) : \{ (x, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) : 6x^5 + 4\lambda_4 x^3 + 3\lambda_3 x^2 + 2\lambda_2 x + \lambda_1 = 0 \}$$

$$B_{II}^{\ell\ell}(F) = \Big\{ (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \ : \ 6x^5 + 4\lambda_4 x^3 + 3\lambda_3 x^2 + 2\lambda_2 x + \lambda_1 = 0$$

$$30x^4 + 12\lambda_4 x^2 + 6\lambda_3 x + 2\lambda_2 = 0 \Big\}$$

$B_{II}^{\ell\ell}(F)$ est contenu dans R^4.

On a des sections suivantes de $B_{II}^{\ell\ell}(F)$. (Fig. 35)

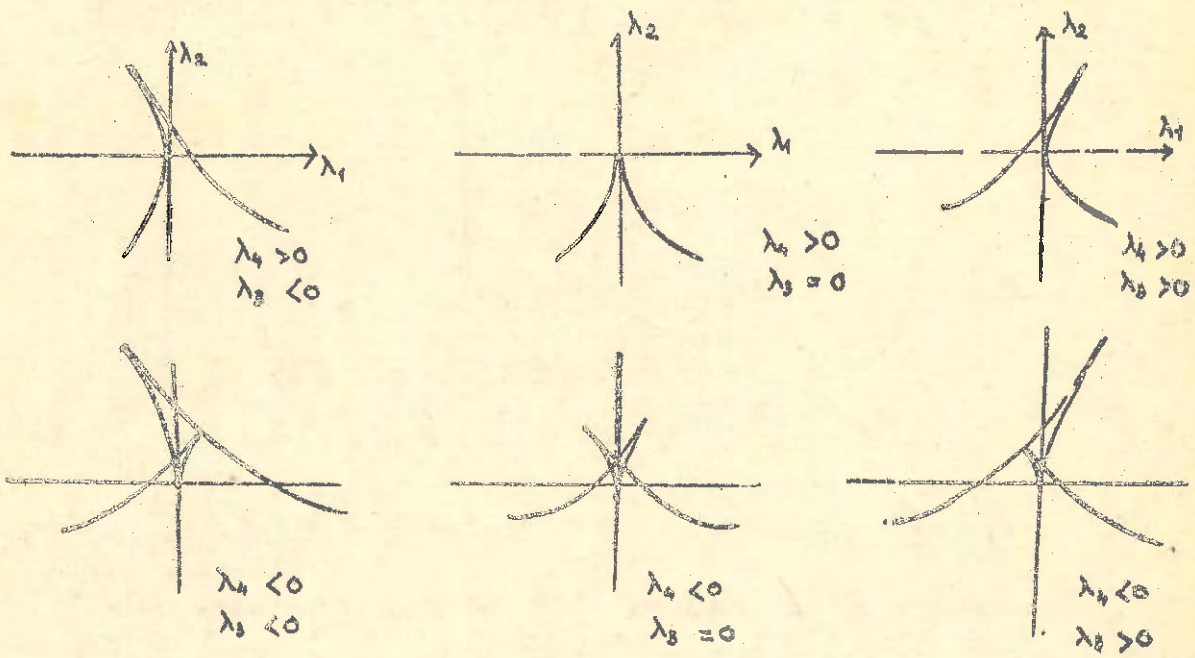


Fig. 35

5. <u>L'ombilic hyperbolique</u> :

$$F : (x, y, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \longmapsto (x^2 + y^3 - \lambda_1 x - \lambda_2 y + \lambda_3 xy, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$$

Les équations de $B_{II}(F)$ s'obtiennent en éliminant x, y dans les équations suivantes :

$$\frac{\partial F_0}{\partial x} = 0 , \qquad \frac{\partial F_0}{\partial y} = 0 ,$$

$$\mathrm{Det}\begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 F_0}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 F_0}{\partial x\,\partial y} \\[2ex] \dfrac{\partial^2 F_0}{\partial x\,\partial y} & \dfrac{\partial^2 F_0}{\partial y^2} \end{vmatrix} = 0$$

c'est-à-dire

$$\lambda_1 = \lambda_3\, y + 3\, x^2$$

$$\lambda_2 = \lambda_3\, x + 3\, y^2$$

$$\lambda_3^2 = 36\, xy$$

Intersection de $B_{if}(F)$ avec un hyperplan $\lambda_3 = \text{const}$ (Fig. 36) .

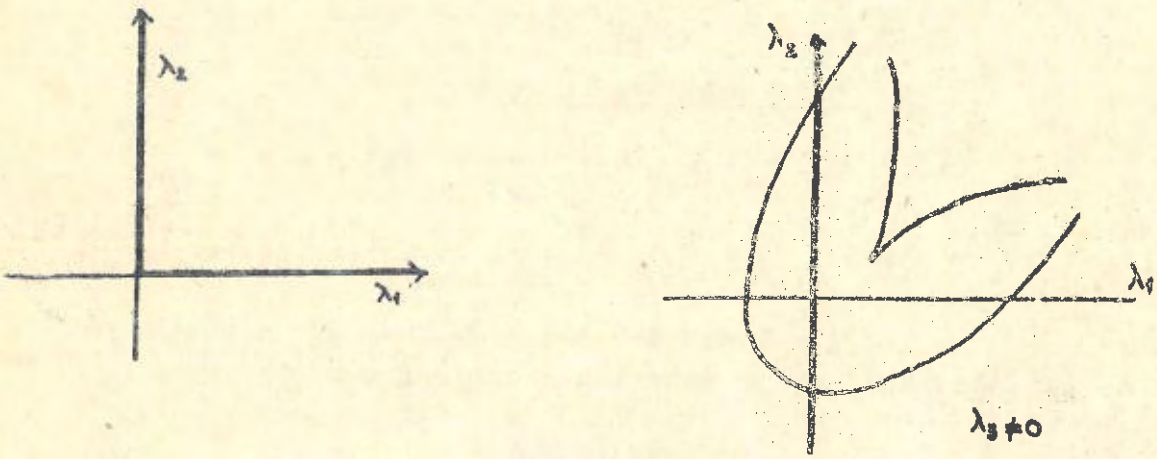


Fig. 36

6. L'ombilic elliptique

$$F : (x, y, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \longmapsto (x^3 - 3\, xy^2 - \lambda_1\, x - \lambda_2\, y + \lambda_3\, (x^2 + y^2), \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$$

Les équations de $B_{if}(F)$ s'obtiennent en éliminant x, y dans les équations suivantes :

$$\lambda_1 = 2x\lambda_3 + 3\,(x^2 - y^2)$$

$$\lambda_2 = 2y\lambda_3 - 6xy$$
$$\lambda_3^2 = 9(x^2 + y^2)$$

Intersection de $Bif(F)$ avec un plan $\lambda_3 \neq 0$ (Fig. 37).

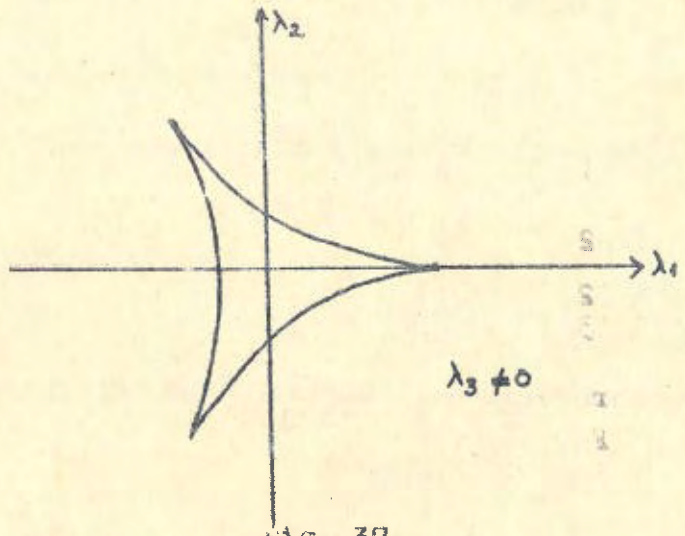


Fig. 37

7. Ombilic parabolique :

$$F : (x, y, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \longmapsto (x^2 y + y^4 - \lambda_1 x - \lambda_2 y + \lambda_3 x^2 + \lambda_4 y^2, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$$

Les équations de $Bif(F)$ dans R^4 s'obtiennent en éliminant x, y dans les équations :

$$\lambda_1 = 2x(y + \lambda_3)$$
$$\lambda_2 = 2y\lambda_4 + x^2 + 4y^3$$
$$(y + \lambda_3)(6y^2 + \lambda_4) - x^2 = 0$$

Intersection de $Bif(F)$ avec un sous-espace

$$\lambda_4 = \text{const}, \quad \lambda_3 = \text{const}$$

(Fig. 38) :

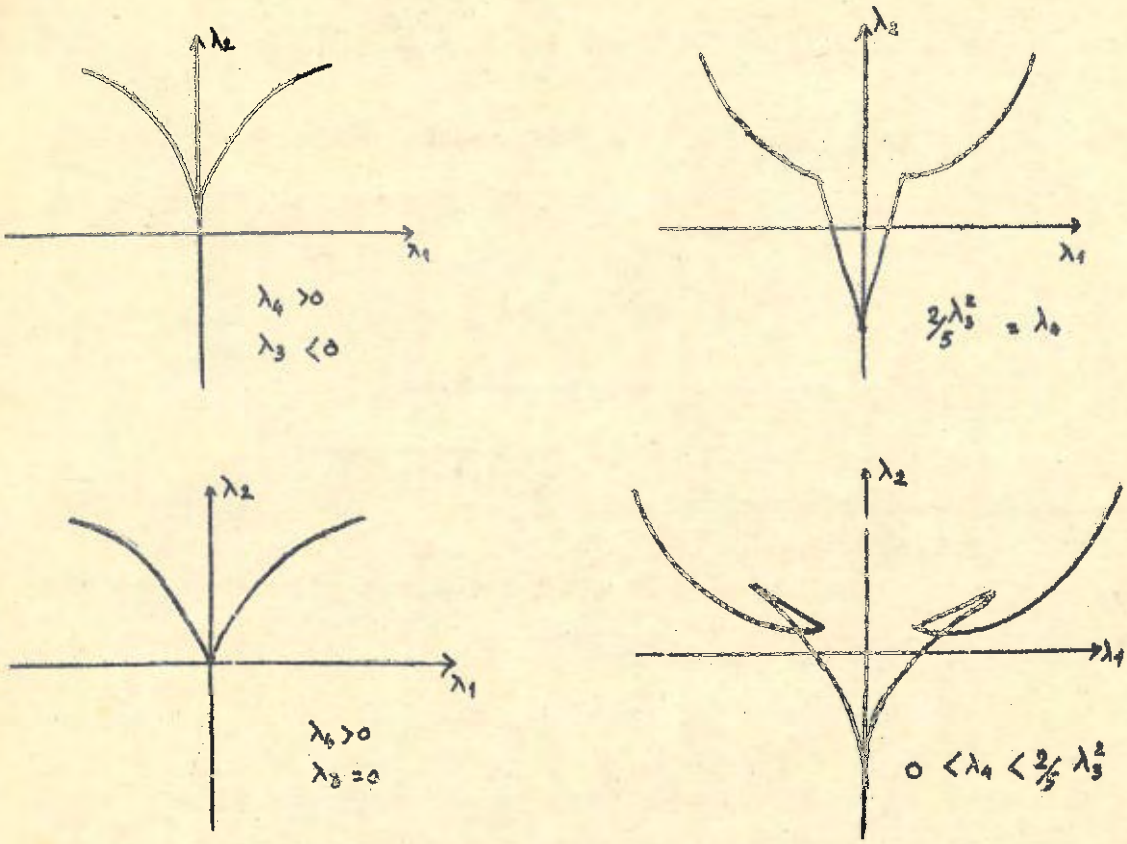


Fig. 38

(voir [17] , chap.4 pour les autres cas).

Remarquons que

$$\sum^{2,2}(F) \subset \sum^{2}(F) = \sum(F)$$

est la courbe définie par les équations

$$\frac{\partial F_0}{\partial x} = \frac{\partial F_0}{\partial y} = \frac{\partial^2 F_0}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 F_0}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F_0}{\partial y^2} = 0$$

ou

$$\lambda_1 = 2x\,(y + \lambda_3)$$

$$\lambda_2 = 2y\,\lambda_4 + x^2 + 4\,y^3$$

$$y + \lambda_3 = 0 \; ; \qquad x = 0 \; ; \qquad 6\, y^2 + \lambda_4 = 0$$

$\Pi (\sum^{2,2} (F))$ dans $\mathbb{R}^4$ est la courbe définie par les équations

$$\lambda_1 = 0$$
$$\lambda_4 = -6\lambda_3^2$$
$$\lambda_2 = -\frac{4}{3}\lambda_4\lambda_3$$

Un calcul analogue montre que $\overline{\sum^{2,1,1,1} (F)}$ (fermeture de $\sum^{2,1,1,1} (F)$) est la courbe définie par les équations:

$$\lambda_1^2 = -64^2\, y^5$$
$$\lambda_2 = -40\, y^3$$
$$\lambda_3 = -5\, y$$
$$\lambda_4 = 10\, y^2$$
$$x^2 = -64\, y^2 \qquad (x\lambda_1 \geqslant 0)$$

L'image $\Pi (\overline{\sum^{2,1,1,1} (F)})$ dans $\mathbb{R}^4$ est donnée par les équations :

$$\lambda_1^2 = \frac{64^2}{5^5}\lambda^5$$
$$\lambda_2 = \frac{8}{25}\lambda_3^3$$
$$\lambda_4 = \frac{2\, w^2}{5}$$

Remarquons que

$$\overline{\sum^{2,1,1,1} (F)} \cap \sum^{2,2} (F) = 0$$

est un point ombilic hyperbolique , tandis que les autres points de $\sum^{22} (F)$ sont des ombilics elliptiques si

$\lambda_3 > 0$ et hyperboliques si $\lambda_3 < 0$ (voir Fig. 39).

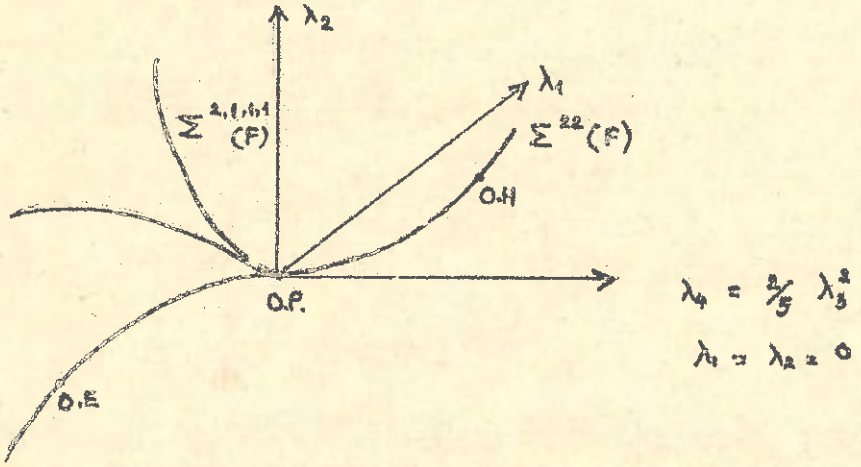


Fig. 39

Donc la bifurcation dans $\mathbb{R}^4$ du déploiement de l'ombilic parabolique nous montre que la stratification de Thom-Boardman est encore assez grossière et il faut raffiner pour obtenir une bonne stratification.

Remarque : On a démontré (cf. [1]) les théorèmes suivants concernant l'étude de l'ensemble $Bif(F)$ pour les germes considérés dans 3-2.

Théorème 3-3. L'ensemble

$$\mathbb{C}^k \setminus Bif(F)$$

est un espace Eilenberg-Maclane i.e.

$$\pi_i\,(\mathbb{C}^k - Bif(F)\,) = 0$$

avec $i > 2$.

Soit Γ un groupe fini engendré par les réflexions de $\mathbb{R}^n$ par rapport à quelques hyperplans.

La complexification de l'action de Γ sur $\mathbb{R}^n$ donne un groupe fini dans $\mathbb{C}^n$. Soit X l'ensemble de $\mathbb{C}^n$

dont l'orbite ayant un nombre maximum de points. On obtient X en enlevant quelques hyperplans dans $\mathbb{C}^n$.

<u>Définition.</u> Le groupe fondamental de l'espace

X/Γ est appelé le groupe de tresse $B(\Gamma)$ de Γ :

$$b(\Gamma) = \pi_1\left(\frac{X}{\Gamma}\right)$$

<u>Théorème 3-4.</u>

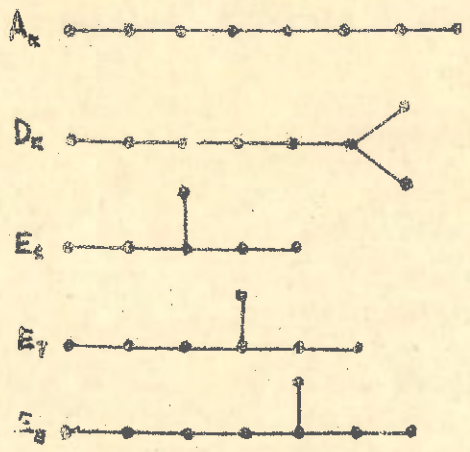
$$\pi_1\left(\mathbb{C}^k - B_{if}(F)\right) = B(\Gamma)$$

où Γ est le groupe de Weyl correspondant : A_k, D_k, E_6, E_7, E_8. $\mathbb{C}^k - B_{if}(F)$ est homéomorphe à X/Γ.

Considérons maintenant la fibration sur $\mathbb{C}^k - B_{if}(F)$ dont la fibre V_λ sur $\lambda \in \mathbb{C}^k - B_{if}(F)$ est l'hypersurface dans $\mathbb{C}^n$ définie par l'équation

$$f_0(x, \lambda) = 0.$$

<u>Théorème 3-5.</u> V_λ est de type d'homotopie d'un bouquet de k sphères de dimension $n-1$.



<u>Fig. 40</u>

A titre de ces sphères, on peut prendre des cycles évanouissents de Picard-Lefschetz [13]. De plus, si n est impair, on peut choisir ces k cycles tels que leurs

indices d'intersection soient donnés par les diagrammes de Dynkine (voir Fig. 40).

Ici, chaque point est un sphère (générateur de $h_{n-1}(V_\lambda)$). Les indices d'intersection de deux sphères α et β sont :

$$(\alpha,\alpha) = (-1)^{\frac{n-1}{2}} 2$$

$$(\alpha,\beta) = (-1)^{\frac{n+1}{2}}$$

si α et β sont liés par un segment de droite, et

$$(\alpha,\beta) = 0$$

dans le cas contraire.

Les lecteurs peuvent trouver les autres résultats de l'étude topologique de l'ensemble de bifurcation dans les travaux de V.I. Arnold, F. Pham, D. Siersma et d'autres.

\+
\+ \+

BIBLIOGRAPHIE

1. Arnold V.I. — Formes normales des fonctions dans le voisinage des points critiques dégénérés, Groupes de Weyl A_K, D_K, E_K et singularités Lagrangiennes. Funkcionalnij analiz i jewo prilozenija, 6, No 4 (1972) 3-25 (en russe).

2. Boardman J.M. — Singularities of differentiable maps. Publ. Math. I.H.E.S. 33 (1967) 21-57.

3. Bourbaki N. — Topologie générale - Paris, Hermann

4. Golubitsky M. Guillemin V. — Stable Mappings and Their Singularities. Springer - Verlag. New-York Inc. 1973.

5. Gromoll D. Meyer W. — On differentiable functions with isolated critical points. Topology, 8, (1969) 361-369

6. Malgrange B. — Ideal of Differentiable Functions. Oxford University Press 1966.

7. Malgrange B. — Théorème de préparation et stabilité des germes. Cours du Séminaire à Hanoi, 1974.

8. Mather J. — Stability of C^{∞} Mappings II - Infinitesimal stability implies stability. Annals of Math. Vol. 89, No 2, March 1969, 254-291.

9. Mather J. — On Thom-Boardman singularities. Dynamical systems. Ed. by M.M.Peixoto, Academic Press 1973, 233-249.

10. Mather J. Notes on Right-equivalence 1970. (Unpublished, handwritten notes).

11. Milnor J. Morse Theory. Annals of Math. Studies, 51, Princeton University Press., Princeton New-Jersey 1963.

12. Narasimhan R. Analysis on real and complex manifolds. Masson et Cie, Editeur, Paris 1968.

13. Pham F. Introduction à l'étude topologique des singularités de Landau. Paris Gauthier Villars Editeur, 1967.

14. Porteous Simple singularities of maps. Proceedings of Liverpool Singularities Symposium. Lecture Notes in Mathematics. Springer-Verlag New-York, 1971.

15. Sergeraert F. Un théorème de fonctions implicites sur certains espaces de Fréchet et quelques applications. Thèse Orsay, 1972.

16. Siersma D. Classification and Deformation of Singularities. Thesis, Amsterdam 1974.

17. Thom R. Modèles mathématiques de la morphogenèse - Chapitre 3. Théorie du déploiement universel. Chapitre 4. Catastrophes élémentaires (par A. Chenciner). IHES. 1971.

18. Thom R. Ensembles et Morphismes stratifiés. BAMS 1969.

19. Wall C.T.C. Lectures on C^{∞} stability and Classification.
Proceedings of Liverpool Singularities I.
Springer Lectures notes 192, 178-206,
(1971).

20. Whitney H. On Singularities of Mappings of Euclidean Spaces I. Mappings of the plane into the plane.
Ann. of Math., 62 (1955), 374-410.

+
+ +

A N N E X E

TRAVAUX DE THOM ET MATHER SUR LA STABILITE TOPOLOGIQUE

par Alain CHENCINER

Séminaire BOURBAKI,
25e année, 1972-73,
No 424. Février 1973.

1. Introduction.

Il s'agit de la stabilité topologique des applications C^∞ d'une variété C^∞ dans une autre, plus précisément de la conjecture suivante : les applications topologiquement stables forment un ouvert dense dans l'espace $C^\infty_{pr}(N, P)$ de toutes les applications propres C^∞ de la variété N dans la variété P, muni de la topologie fine de Whitney (les définitions précises sont données au paragraphe 2).

Thom a donné dans [11] et [13] les grandes lignes d'une démonstration directe de la densité dans $C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ du sous-espace des applications localement topologiquement stables ; Mather esquisse dans [6] une démonstration du théorème global lorsque N est compacte, basée sur le même outil (la théorie de Thom des morphismes stratifiés sans éclatement) mais faisant jouer un rôle particulier à sa caractérisation des applications différentiablement stables (voir [3] et [14]). C'est cette démonstration qui est exposée ici.

2. Définitions et résultats.

N et P sont des variétés C^∞ de dimensions

respectives n et p ; $C^\infty(N, P)$ est l'espace des applications C^∞ de N dans P, muni de la topologie engendrée par les ouverts suivants

$$\{ f \in C^\infty(N, P) \ , \ j^k f(N) \subset U \ ,$$

k entier, U ouvert de l'espace des jets $J^k(N,P) \}$; ce dernier est muni de sa topologie naturelle de fibré localement trivial sur $N \times P$ à fibre $\mathbb{R}^q$ (voir 1).
$C^\infty_{pr}(N,P)$ est ouvert dans $C^\infty(N,P)$.

Soit $\mathrm{Diff}(N)$ (resp. $\mathrm{Homéo}(N)$) le groupe des difféomorphismes C^∞ (resp. homéomorphismes) de N. Le groupe produit

$$D \equiv \mathrm{Diff}(N) \times \mathrm{Diff}(P)$$

(resp. $H \equiv \mathrm{Homéo}(N) \times \mathrm{Homéo}(P)$) agit sur $C^\infty(N,P)$ (resp. sur l'ensemble des applications continues de N dans P) par

$$(g, h) f = h \circ f \circ g^{-1} .$$

2.1. <u>Définition.</u> Soient

$$f , f' \in C^\infty(N, P) \ ;$$

f' est différentiablement (resp. topologiquement) équivalente à f si f' est dans l'orbite de f sous l'action de D (resp. H).

2.2. <u>Définition.</u>

$f \in C^\infty(N, P)$ est différentiablement (resp. topologiquement) stable si l'orbite de f sous l'action de D (resp. H) contient un voisinage de f dans $C^\infty(N, P)$. □

2.3. <u>Théorème.</u>

Il existe une partie $\mathcal{N}$ de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ (appelée par

Mather le "nice range" ou "bon domaine") telle que

(i) Si $(n,p) \in \mathcal{N}$, les applications différentiablement stables forment un ouvert dense de $C^{\infty}_{pr}(N, P)$.

(ii) Si $(n, p) \in \mathcal{N}$, il existe un ouvert non vide de $C^{\infty}_{pr}(N, P)$ formé d'applications qui ne sont pas différentiablement stables.$\square$

2.4. Théorème.

Si N est compacte, les applications topologiquement stables forment un ouvert dense de $C^{\infty}(N, P)$.$\square$

La démonstration de ces théorèmes comporte deux réductions successives, des fonctions aux germes (ou plutôt aux multigermes), puis des germes aux jets (comparer à [14]).

Soit

$$J^k(n, p) \cong \mathbb{R}^q$$

l'espace des jets en 0 de germes d'applications C^{∞} de $(\mathbb{R}^n, 0)$ dans $(\mathbb{R}^p, 0)$. Alors $J^k(n, p)$ s'identifie naturellement à la fibre du fibré $J^k(N, P) \longrightarrow N \times P$; le groupe structural de ce fibré est le groupe A^k défini au paragraphe suivant. Chaque partie $\Sigma^k \subset J^k(n,p)$ invariante sous l'action de A^k engendre un sous-fibré $\Sigma^k_{N,P}$ de $J^k(N, P)$.

Le théorème de transversalité de Thom (modifié légèrement dans [3] pour s'adapter à la topologie de Whitney) montre que le théorème 2.4 et le (i) du théorème 2-3 découlent du théorème suivant.

2.5. Théorème -

Les entiers n et p étant fixés, il existe un entier k, un sous-ensemble algébrique fermé Σ^k de $J^k(n,p)$ invariant par A^k, et une stratification de

Whitney (voir paragraphe 7) S^k de $J^k(n,p) - \Sigma^k$ invariante par A^k ayant les propriétés suivantes :

(a) codim $\Sigma^k > n$ et S^k n'a qu'un nombre fini de strates.

(b) Si N est compacte et si $f \in C^\infty(N, P)$ vérifie

(b_1) $J^k f(N) \cap \Sigma^k_{N,P} = \emptyset$,

(b_2) f est multitransverse par rapport à la stratification $S^k_{N,P}$ de $J^k(N,P) - \Sigma^k_{N,P}$ déduite de S^k, alors f est topologiquement stable.

(c) Si $(n,p) \in \mathcal{N}$ (bon domaine), on peut prendre $k = p + 1$, et choisir Σ^{p+1} et S^{p+1} de façon à remplacer la conclusion de (b) par : "f est différentiablement stable" ; de plus, on peut remplacer l'hypothèse "N compacte" par l'hypothèse "f propre" .□

Une application f satisfaisant (b_1), (b_2) sera dite générique (si $(n,p) \in \mathcal{N}$, on supposera (c) réalisé). On a

$$\begin{tikzcd}
f \text{ diff. stable} \arrow[rr, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow, shift left, "\text{si } (n,p) \in \mathcal{N} \text{ et } f \text{ propre}"] & & f \text{ topol. stable} \\
& f \text{ générique} \arrow[ur, Rightarrow, "\text{si } N \text{ compacte}"'] \arrow[ul, Rightarrow, shift left] &
\end{tikzcd}$$

Bien entendu, la transversalité ne se conservant pas par homéomorphisme, les applications topologiquement stables n'ont aucune raison d'être génériques au sens précédent. De la démonstration du théorème 2-5, on déduit

pour les applications génériques des propriétés locales très fortes . si n et p sont fixés, il existe une liste finie de germes d'applications

$$g_i : (\mathbb{R}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$$

telle que le germe en un point quelconque de N d'une application générique soit topologiquement (resp. différentiablement, si $(n, p) \in \mathcal{N}$) équivalent à l'un des germes de la liste (l'équivalence des germes se définit de manière analogue à celle des applications).

Si l'on pense à la pathologie que peuvent présenter les applications C^∞ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$, même localement (l'image réciproque d'un point peut être un fermé quelconque de $\mathbb{R}^n$), on voit que de tels résultats de généricité sont précieux.

3. Rappel de résultats sur la stabilité différentiable.

Je rappelle ici les premiers travaux de Mather, en particulier [3] , dont une partie a fait l'objet d'un précédent exposé (voir [14]). Sur l'ensemble des germes d'applications C^∞ de $(\mathbb{R}^n, 0)$ dans $(\mathbb{R}^p, 0)$, on fait agir les groupes suivants :

R = germes en 0 de difféomorphismes C^∞ de $(\mathbb{R}^n, 0)$

L = germes en 0 de difféomorphismes C^∞ de $(\mathbb{R}^p, 0)$

K = germes en 0 de difféomorphismes C^∞ de $(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, 0)$ de la forme $(x,y) = \alpha(g(x), h_x(y))$, où g représente un élément de R et, pour tout x, h_x représente un élément de L .

$$A = R \times L .$$

On a des inclusions de sous-groupes :

$$\begin{tikzcd} R \arrow[dr, hook] & & \\ & A \arrow[r, hook] & K \\ L \arrow[ur, hook] & & \end{tikzcd}$$

L'action de K sur un germe est définie par

$$[\alpha . f]\,(x) \;=\; h_x(\, f(g^{-1}(x))\,)$$

On en déduit une action C^∞ du groupe de Lie K^k des k-jets en 0 d'éléments de K sur la variété $J^k(n, p) \cong \mathbb{R}^q$.

L'orbite d'un élément de $J^k(n, p)$ est donc l'image d'une variété lisse par une immersion injective ; en fait, c'est même une sous-variété; la même propriété est valable si on remplace K^k par le sous-groupe A^k (voir 3 , § 1).

On a déjà dit que A^k n'est autre que le groupe structural du fibré $J^k(N, P) \longrightarrow N \times P$ · la décomposition de la fibre $J^k(n,p)$ en K^k-orbites fournit donc une décomposition de l'espace total $J^k(N, P)$ en sous-variétés, appelées par Mather les "classes de contact". La décomposition de la fibre en A^k-orbites redonne, bien entendu, la décomposition de $J^k(N,P)$ provenant de l'action sur $C^\infty(N,P)$ du groupe

$$D \;=\; \mathrm{Diff}\,(N) \times \mathrm{Diff}\,(P).$$

Si r est un entier positif, on définit ${}_rJ^k(N,P)$ comme l'image réciproque par

$$\Pi^r_N \;:\; \left[J^k(N,P)\right]^r \longrightarrow N^r$$

du sous-espace

$$N^{(r)} \;=\; \left\{ (x_1, \ldots, x_r) \in N^r \,,\; x_i \neq x_j \text{ pour } i \neq j \right\}.$$

En particulier, ${}_1J^k(N,P)$ s'identifie à $J^k(N,P)$.

A une application f correspond une extension

$$ {}_rj^k f \ : \ N^{(r)} \longrightarrow {}_rJ^k(N,P) $$

(voir [3] , § 1).

L'action diagonale de D sur $C^\infty(N, P)^r$ induit une action sur ${}_rJ^k(N, P)$ dont les orbites sont des sous-variétés. De même, on définit dans ${}_rJ^k(N,P)$ une partition en classes de contact qui sont des sous-variétés (voir [3] , § 4).

La traduction géométrique de l'équivalence entre stabilité et stabilité infinitésimale (voir [3] , [14] , et le paragraphe 5) est le théorème suivant :

3.1. <u>Théorème</u>. Soit

$$ f \in C^\infty_{pr}(N, P) $$

Si $r \geqslant p+1$ et $k \geqslant p$, les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) f est différentiablement stable ;

(ii) ${}_rj^k f$ est transverse à chaque orbite de D dans ${}_rJ^k(N, P)$;

(iii) ${}_rj^k f$ est transverse à chaque classe de contact dans ${}_rJ^k(N, P)$. □

Rappelons que la transversalité de ${}_rj^k f$ aux classes de contact dans ${}_rJ^k(N, P)$ équivaut à la multitransversalité de $j^k f$ aux classes de contact dans $J^k(N,P)$, c'est-à-dire à la transversalité jointe à la propriété suivante : si $t \leqslant r$, si $x_1, \ldots, x_t \in N$ vérifient

$$ f(x_1) = \ldots = f(x_t) = y , $$

si U_i désigne la classe de contact de $j^k f(x_i)$, $1 \leq i \leq t$, et si g_i désigne le germe en x_i de l'application $(j^k f)^{-1}(U_i)$, les germes $g_1, \ldots, g_t$ se coupent en position générale en y. (La même interprétation vaut, bien sur, pour les orbites de D).

Commentaire sur 3.1.

Les implications

$$(i) \Longrightarrow (ii) \Longrightarrow (iii)$$

sont claires, la première à cause du théoréme de transversalité appliqué à chaque orbite, la deuxième parce que $K^k \supset A^k$.

L'implication profonde est

$$(iii) \Longrightarrow (i)$$

qui se décompose en (iii) $\Longrightarrow f$ est infinitésimalement stable $\Longrightarrow$ (i), chaque étape utilisant le théorème de préparation différentiable (voir [14] et [15]).

Remarquons que (ii) et (iii) font intervenir un nombre non dénombrable de conditions de transversalité ; ceci explique que la stabilité différentiable ne soit pas, en général, une propriété générique.

Enfin, (ii) est la condition de transversalité que l'on attend, alors que (iii) est celle avec laquelle on peut travailler.

4. Que se passe-t-il dans le bon domaine ? (voir [3], § 7).

Soit

$$\Pi^k(n, p) \subset J^k(n, p)$$

la réunion de tous les modules d'orbites de K^k ; plus

précisément, l'ensemble W_s des éléments de $J^k(n,p)$ appartenant à une orbite de codimension $\geqslant s$ est un sous-ensemble algébrique fermé de

$$J^k(n, p) \cong \mathbb{R}^q ;$$

on note W_s^* la réunion des composantes irréductibles de W_s de codimension $< s$; la réunion

$$\Pi^k(n, p) = \bigcup_{s \geqslant 0} W_s^*$$

de ces composantes est le plus petit sous-ensemble algébrique fermé K^k-invariant de $J^k(n, p)$ dont le complémentaire ne contienne qu'un nombre fini de K^k-orbites. Soit

$$\sigma^k(n, p) = \operatorname{codim} \Pi^k(n, p)$$

et soit

$$\sigma(n, p) = \inf_k {}^k(n, p)$$

(il est clair que $\sigma^k \leqslant \sigma^l$ si $k \geqslant l$). Le bon domaine est défini par $n < \sigma(n, p)$, et est déterminé dans [4] . La densité des applications différentiablement stables dans ce cas est alors une conséquence immédiate du théorème de transversalité et du théorème 3.1 . Par contre, le (ii) du théorème 2-3 est loin d'être immédiat (voir [3] , §§ 9, 10, 11). Le premier exemple de couple $(n, p) \in \mathcal{N}$ a été donné par Thom dans [8] (il s'agit du cas $n = p = s^2$, $s \geqslant 4$) ; dans [16] un exemple très intuitif montre que $(9,8) \in \mathcal{N}$.

Par ailleurs, on voit que, dans le bon domaine, le théorème 2-5 est une conséquence du théorème 3-1 : on peut prendre $k = p + 1$

$$\Sigma^{p+1} = \Pi^{p+1}(n, p) ,$$

et la stratification de $J^{p+1}(n,p) - \Sigma^{p+1}$ par les K^{p+1}-orbites.

En dehors du bon domaine, on ne peut pas éviter de rencontrer $\Pi^k(n,p)$, c'est-à-dire des familles continues d'orbites le K^k ; on essaie alors de rassembler ces familles d'orbites en strates d'équisingularité topologique: génériquement, $j^k f(N)$ sera transverse aux strates de la stratification correspondante de $J^k(N, P) - \sum^k_{N,P}$ (mais pas aux classes de contact individuelles).

5. Les applications T. S. F
(ou de type singulier fini).

Disons , tout de suite, que les applications génériques obtenues au théorème 2-5 seront de ce type.

Il faut reppeler la notion de stabilité infinitésimale (les notations sont celles de Mather et diffèrent de celles de 14) : Soient

$$\tau(f) : \tau(N) \longrightarrow \tau(P)$$

l'application tangente à f , $\theta(N)$ (resp. $\theta(f)$, resp. $\theta(P)$) le module sur $C^\infty(N)$, resp. $C^\infty(P)$) des sections C^∞ de $\tau(N)$ (resp. $f^*\tau(P)$, resp. $\tau(P)$), et

$$tf : \theta(N) \longrightarrow \theta(f) ,$$

$$f : \theta(P) \longrightarrow \theta(f)$$

les applications définies par

$$tf(\xi) = \tau(f) \circ \xi$$

$$\omega f(\eta) = \eta \circ f .$$

Mather a montré (voir 14) que f propre est différentiablement stable si et seulement si elle est infinitésimalement stable, c'est-à-dire si

$$tf(\theta(N)) + \omega f(\theta(P)) = \theta(f) .$$

5.1. <u>Définition.</u>

$$f \in C^{\infty}(N, P)$$

est dite T.S.F. si $\theta(f) / tf(\theta(N))$ est un $C^{\infty}(P)$-module de type fini pour la structure définie <u>via</u>

$$f^{*} : C^{\infty}(P) \longrightarrow C^{\infty}(N) .$$

<u>Remarques</u> :

(i) Rappelons que l'ensemble critique $\sum(f)$ de f est l'ensemble des $x \in N$ pour lesquels $T_x f$ n est pas surjective ; il est clair que $\theta(f) / / tf(\theta(N))$, qui est un $C^{\infty}(N)$-module de type fini, est, en fait, un $C^{\infty}(\sum(f))$-module de type fini; on va voir que les applications T. S. F. sont exactement celles pour lesquelles $C^{\infty}(\sum(f))$ est un $C^{\infty}(P)$-module de type fini (§ 6, remarque).

(ii) L'analogue de la propriété T. S. F. pour les germes est d'avoir une K-codimension finie (voir plus loin la caractérisation locale des applications T.S.F.) ; or les germes de K-codimension finie sont exactement ceux qui s'obtiennent par changement de base à partir d'un germe stable (qu'on peut construire explicitement : voir 2). L'intérêt des applications T.S.F. est de vérifier une propriété globale analogue.

5-2. <u>Définition</u>

On appelle déploiement de f un carré cartésien

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook, "i"'] & P \arrow[d, hook, "j"] \\ N' \arrow[r, "f'"] & P' \end{tikzcd}$$

dans lequel i et j sont des plongements C^{∞} , et f'

une application C^∞ transverse à j. $\square$

On dit que f admet un déploiement stable si f' est stable.

5-3. <u>Théorème.</u> Si f est T. S. F., f admet un déploiement infinitésimalement stable. $\square$

On verra que la réciproque est vraie un peu plus loin.

<u>Esquisse de démonstration</u> (d'après [7]).

Le premier pas est analogue à la construction dans [2] d'un germe stable ayant une algèbre locale donnée (qui n'est autre que la construction du déploiement stable d'un germe de K-codimension finie). Si U est un $C^\infty(P)$-module projectif de type fini, et si

$$\Omega \quad : \quad \Theta(P) \oplus U \longrightarrow \Theta(f) \,/\, tf(\,\Theta(N)\,)$$

est un morphisme de $C^\infty(P)$-modules qui étend

$$\omega f \quad : \quad \Theta(P) \longrightarrow \Theta(f) \,/\, tf(\,\Theta(N)\,)$$

(léger abus de notation), il existe un déploiement (i, j, f') de f qui rende commutatif le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc}
\Theta(P) \oplus U & \xrightarrow{\ \Omega\ } & \Theta(f) \,/\, tf(\,\Theta(N)\,) \\
\alpha \,\Big\|\wr & & \beta \,\Big\|\wr \\
\Theta(P') \underset{C^\infty(P')}{\otimes} C^\infty(P) & \xrightarrow{\ \Omega'\ } & \Theta(f')/tf(\Theta(N')) \underset{C^\infty(N')}{\otimes} C^\infty(N)
\end{array}$$

$C^\infty(N)$ (resp. $C^\infty(P)$) est un $C^\infty(N')$ (resp. $C^\infty(P')$)-module <u>via</u> i (resp. j) ; Ω' s'obtient par composition et passage au quotient naturels à partir de $\omega f'$ (on ne regarde que ce qui se passe au-dessus de $i(N)$ et $j(P)$).

β est toujours un isomorphisme à cause de l'hypothèse de

transversalité de f' et j.

Pour avoir un isomorphisme tel que α, il suffit de prendre pour P' l'espace total $E(\xi)$ d'un fibré vectoriel ξ sur P dont le module des sections est isomorphe à U. Il faut maintenant définir f' pour rendre le diagramme commutatif : on présente U comme facteur direct dans un $C^{\infty}(P)$-module libre de type fini V (ce qui revient à regarder ξ comme sous-fibré de $P \times \mathbb{R}^t$) et on prolonge Ω en $\tilde{\Omega}$:

$$\Theta(P) \oplus V \longrightarrow \Theta(f) / tf(\Gamma(N)) ;$$

soit $\mathcal{U}$ un voisinage de $N \times \{0\}$ dans $N \times \mathbb{R}^t$ et soit

$$\tilde{f} : \mathcal{U} \longrightarrow P \times \mathbb{R}^t$$

l'application définie par

$$\tilde{f}(x, u_1, \ldots, u_t) = (f(x) - \sum^{t} u_i \alpha_i(x), u_1, \ldots, u_t)$$

[α_i est un élément de $\Theta(f)$ relevant l'image $\tilde{\Omega}(v_i)$ du générateur v_i de V qui correspond à la section constante $x \longmapsto$ (x, i-ème vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^t$) ; cette formule a un sens à condition d'identifier un voisinage de la section nulle dans $T(P)$ avec un voisinage de la diagonale dans $P \times P$ (on choisit alors $\mathcal{U}$ en conséquence).

L'application $\tilde{f}$ ainsi définie est transversale sur $P \times 0$ et donc aussi sur un voisinage $\mathcal{V}$ de $P \times 0$ dans

$$E(\xi) \subset P \times \mathbb{R}^t .$$

L'application

$$f' = \tilde{f}|\tilde{f}^{-1}(\mathcal{V}) : \tilde{f}^{-1}(\mathcal{V}) \longrightarrow \mathcal{V}$$

répond à la question à condition de prendre pour i (resp. j)

l'inclusion de $N \times \{0\}$ dans

$$\tilde{f}^{-1}(\mathcal{V}) = N'$$

(resp. l'inclusion de $P \times \{0\}$ dans $\mathcal{V} = P'$).

Dans le cas où f est T.S.F. , on peut donc trouver f' telle que Ω' soit surjective. Une application f' ayant cette propriété est dite par Mather "infinitésimalement stable au-dessus de $j(P)$".

En se restreignant au besoin à l'image réciproque d'un voisinage de $j(P)$ dans P' , on peut supposer que la restriction de f' à $\Sigma(f')$ est propre; on montre alors qu'il existe un voisinage P''' de $j(P)$ dans P' tel que la restriction f''' de f' à

$$N''' = f'^{-1}(P''')$$

soit infinitésimalement stable (i.e. $\omega f'''$ surjectif). Le point fondamental est l'existence d'un voisinage P'' de $j(P)$ dans P' tel que la restriction f'' de f' à

$$N'' = f'^{-1}(P'')$$

soit T. S. F. ; grâce à la proposition 5-5 , ce résultat de finitude découle du théorème de préparation différentiable, et plus précisément du corollaire suivant appliqué au faisceau de $C^\infty(N')$-modules

$$\underline{\theta}(f') \,/\, tf'(\,\underline{\theta}(N')\,)$$

($\underline{C}^\infty(N')$ = faisceau des germes de fonctions C^∞ de N' dans $\mathbb{R}$, $\underline{\theta}(f')$ = faisceau des germes de champs de vecteurs au-dessus de f' , etc ...) :

5-4. <u>Théorème</u>. Soit $\underline{A}$ un faisceau de $\underline{C}^\infty(N')$-modules localement fini (i.e. localement engendré par un nombre fini de sections). Si la restriction de f' au support de $\underline{A}$ est propre, si la fibre au-dessus de $y \in P'$

de cette restriction est un ensemble fini, et si

$$\bigoplus_{x \in (\mathrm{supp}\ \underline{A}) \cap f'^{-1}(y)} \dim_{\mathbb{R}} \underline{A}_x / f'^{*}\mathcal{M}_y \underline{A}_x$$

est fini, le faisceau $f'_{*}\underline{A}$ est localement fini en y comme faisceau de $\underline{C}^{\infty}(P')$-modules.

J'en viens, maintenant, à la caractérisation locale des applications T.S.F.

5-5. <u>Proposition</u> -

$f \in C^{\infty}(N, P)$ est T. S. F. , si et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites :

(a) $f \mid \Sigma(f) : \Sigma(f) \longrightarrow P$ est propre.

(b) Le nombre de points dans $\Sigma(f) \cap f^{-1}(y)$ est borné supérieurement pour $y \in P$.

(c) La dimension

$$\chi(f, x) = \dim_{\mathbb{R}} \Theta(f)_x / (tf(\Theta(N)_x) + f^{*}\mathcal{M}_{f(x)}\, \Theta(f)_x)$$

est bornée supérieurement pour $x \in N$. □

Les notations $\Theta(f)_x, \ldots$ sont les analogues germiques des notations $\Theta(f), \ldots$, et $\mathcal{M}_{f(x)}$ est l'idéal maximal des germes de fonctions $(P, f(x)) \longrightarrow \mathbb{R}$ qui sont nuls en $f(x)$.

<u>Où trouver la démonstration de 5-5</u> :

On voit facilement par l'absurde que, si f est T. S. F. , la condition (a) est vérifiée. En ce qui concerne (b) et (c), on peut, pour tout $y \in P$, majorer

$$\sum_{x \in f^{-1}(y) \cap \Sigma(f)} \chi(f, x)$$

par le nombre de générateurs de $\Theta(f) / tf(\Theta(N))$ comme $C^{\infty}(P)$-module. La réciproque

se démontre de la même manière que la passage de la condition de transversalité aux K-orbites à la stabilité infinitésimale dans le théorème 3-1 (comparer à [3] et au dernier paragraphe de [14])

Remarques.-

(1) On déduit facilement de cette caractéristique locale le fait que si f admet un déploiement T. S. F. , f est elle-même T. S. F. ; en particulier, si f admet un déploiement infinitésimalement stable, f est T. S. F.

(2) Ne pas confondre les notions de déploiement stable et de déploiement universel (voir [13]); même au niveau local, l'exemple de l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x, y) = (x^3, y)$$

montre qu'un germe T. S. F. peut être de A-codimension infinie.

6. Démonstration du théorème 2-5 ;
1°) où l'on définit $\sum^k$.

6.1. Définition.-

$\sum^k$ est l'ensemble des jets $z \in J^k(n, p)$ représentés par au moins un germe

$$f : (\mathbb{R}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$$

tel que $\chi(f, 0) \geq k$. Cette propriété est alors vraie pour tout germe représentant z (utiliser Nakayama).

On peut montrer que, si deux germes f et g sont dans la même orbite, alors

$$\chi(f, 0) = \chi(g, 0) \qquad ([2] , \text{cor. } 2\text{-}6).$$

On en déduit que Σ^k est une réunion de K^k-orbites, et est donc invariante sous l'action de A^k. Dans le cas particulier où la codimension de la K-orbite de f est finie, et si k est assez grand, $\chi(f, 0) + n - p$ est la codimension dans $J^k(n, p)$ de la K^k-orbite de

$$j^k f(0) = z \qquad ([2], \text{ th. } 2\text{-}5).$$

Soit $\Sigma^k_{N,P}$ le sous-fibré de $J^k(N, P)$ de fibre Σ^k ; si N est compacte, et si $f \in C^\infty(N, P)$ vérifie

$$j^k f(N) \cap \Sigma^k_{N,P} = \emptyset ,$$

f est T. S. F. Pour le voir, on se reporte à la caractérisation locale des applications T. S. F. ; le seul point non immédiat est le (b) qui nécessite N compacte: tout d'abord, on montre facilement que chaque point

$$x \in \Sigma(f) \cap f^{-1}(y)$$

est isolé dans $f^{-1}(y)$ dès que $\chi(f, x) < +\infty$ (voir [2], lemme 2-4) si le germe de f en x est celui d'une application analytique, la réciproque est vraie : on déduit, en effet, du Nullstellensatz l'équivalence entre " $\chi(f, x) < \infty$ " et " $\tilde{f}^{-1}(\tilde{f}(x))$ est au voisinage de x une intersection complète à singularité isolée" , où $\tilde{f}$ est le complexifié de f. Si f est propre, il n'y a donc qu'un nombre fini de points dans chaque fibre $f|\Sigma(f)$. On déduit alors du théorème 5-4 que ce nombre est localement borné : pour tout $y \in P$, il existe un voisinage U de y dans P tel que, pour tout $y' \in U$,

$$\sum_{x' \in f^{-1}(y')} \chi(f, x') \leqslant \sum_{x \in f^{-1}(y)} \chi(f, x) ,$$

d'où la conclusion.

Remarques.-

(i) On a déjà vu, au début du paragraphe 5, que, si $C^{\infty}(\sum(f))$ est un $C^{\infty}(P)$-module de type fini, f est T. S. F. Le lemme 2-4 de [2] que l'on vient d'utiliser, joint au théorème 5-4, montre immédiatement la réciproque.

(ii) Il est facile de donner un exemple d'une application propre de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant les hypothèses ci-dessus mais pas le (b) de la proposition 5-5 ; une telle application n'est donc pas T. S. F.

6.2. Proposition.

La codimension de $\sum^{k}$ dans $J^{k}(n, p)$ tend vers l'infini avec k.

Commentaires.-

(1) Cette proposition dit essentiellement que le nombre de paramètres continus dont dépendent les modules de K-orbites ne croit pas trop vite en fonction de la codimension de ces orbites.

(2) Il est assez clair intuitivement qu'il faut une infinité de conditions dans $J^{\infty}(n,p)$ pour assurer la non-finitude du germe de morphisme $(f \mid \sum(f))_x$; c'est d'ailleurs ce qu'on montre dans ce qui suit.

Démonstration de 6-2 (d'après [7]) :

$\sum^{k}$ est un sous-ensemble algébrique fermé de $J^{k}(n,p)$ et n'a donc qu'un nombre fini de composantes irréductibles de codimension minimum ; l'affirmation suivante permet de trouver pour l'une quelconque Γ de ces composantes un entier $l > k$ tel que l'image réciproque de Γ par la projection canonique $J^{l}(n,p) \longrightarrow J^{k}(n,p)$

ne soit pas toute entière contenue dans Σ^1. Une récurrence évidente donne alors le résultat.

<u>Affirmation</u> (Milnor, Thom, Samuel ,...). Tout élément $z \in J^k(n,p)$ a un représentant f pour lequel $\chi(f, 0) < +\infty$.

J'ai déjà dit que, si f est analytique, la condition $\chi(f, 0) < +\infty$ équivaut à la condition que $\tilde{f}^{-1}(0)$ ait en 0 une singularité isolée d'intersection complète (où $\tilde{f}$ = complexifié de f) c'est-à-dire que $\tilde{f}^{-1}(0) - 0$ soit localement une sous-variété de dimension $n - p$ si $n > p$ (resp. vide si $n \leq p$).

Soit

$$P = (P_1, \ldots, P_p) : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^p$$

l'application polynomiale de degré k représentant z, et soit

$$Q : \mathbb{C}^n \times \mathbb{R}^{np} \longrightarrow \mathbb{C}^p$$

l'application définie par

$$Q_i(x, t) = Q_i(x_1, \ldots, x_n, t_{11}, \ldots, t_{np}) =$$
$$= P_i(x) + \sum_{j=1}^{n} t_{ji}\, x_j^{k+1} ,$$
$$(i = 1, \ldots, p).$$

La différentielle de Q est surjective en (x, t) si $x \neq 0$, donc $Q^{-1}(0) - (0 \times \mathbb{R}^{np})$ est une sous-variété. Le théorème de Sard assure alors l'existence d'une valeur régulière t_0 de la projection de $Q^{-1}(0) - (0 \times \mathbb{R}^{np})$ sur $\mathbb{R}^{np}$. Considérons l'application

$$P_{t_0}(x) = Q(x, t_0) : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^p$$

qui représente z ; $P_{t_0}^{-1}(0) - 0$ est une sous-variété complexe de dimension $n - p$, c'est-à-dire $\chi(P_{t_0}, 0) < +\infty$.

Conséquence :

Si N est compacte, les applications T. S. F. de N dans $\mathbb{R}$ ont un complémentaire de codimension infinie : celà signifie que, pour tout entier $\alpha \geqslant 0$, une famille à α paramètres d'applications de N dans P peut être légèrement déformée de facon que toutes les applications de la famille soit T. S. F.

Il nous reste maintenant à stratifier les applications T. S. F. "génériques" et à montrer leur stabilité topologique en appliquant le théorème d'isotopie de Thom auquel le paragraphe suivant est consacré.

7. Morphismes stratifiés sans éclatement : le deuxième théorème d'isotopie de Thom.

La technique des espaces stratifiés inaugurés par Whitney dans l'étude topologique des espaces analytiques a permis à Thom de donner un critère très utile de trivialité topologique d'une famille d'applications C^∞ (voir [9] , [11] , [12] , [13]) , tout en faisant comprendre la différence de nature entre les variations continues (modules) du type différentiable d'une application C^∞ et celles de son type topologique (voir [10]).

7.1. Définition.

Soit X une variété C^∞ et soit $Y \subset X$. Une stratification de Whitney de Y est une partition localement finie de Y en sous-variétés C^∞ (les strates) qui vérifie

(i) (Axiome de frontière) Si U et V sont des strates, et si $\bar{U} \cap V \neq \emptyset$, alors $V \subset \bar{U}$;

(ii) (Propriété (b)). Soient U et V deux strates avec $V \subset \overline{U}$, soient $x \in V$, et $\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow X$ un difféomorphisme sur un voisinage de x dans X. Soit x_i (resp. $\{y_i\}$) une suite de points $\varphi^{-1}(U)$ (resp. de $\varphi^{-1}(V)$) convergeant vers $^{-1}(x)$ converge dans $P_{n-1}(\mathbb{R})$ vers l, et que la suite des plans tangents $T_{x_i}\varphi^{-1}(U)$ converge vers τ dans la grassmannienne correspondante. Alors $l \subset \tau$.□

Commentaires.

(1) On vérifie facilement que la propriété (ii) est indépendante du choix de φ et équivaut à la conjonction des classiques propriétés (a) et (b) de Whitney.

(2) Mather parle plutôt de préstratification, réservant le nom de stratification à la donnée en chaque point de Y du germe de la strate contenant ce point ; c'est en fait sous cette forme locale que se présentent naturellement les stratifications qu'on va considérer.

Le but de ce paragraphe est de faire comprendre la démonstration du théorème ci-dessous, du à Thom, et exposé par Mather dans [5] et [6] .

7-2. Théorème (2ème théorème d'isotopie).

Soit

$$X' \xrightarrow{f} X \xrightarrow{g} \mathbb{R}$$

un diagramme de variétés et d'applications C^∞ (qu'on peut considérer comme une famille à 1 paramètre d'applications C^∞) , et soient

$$Y \subset X \ , \qquad Y' \subset X'$$

des fermés admettant une stratification de Whitney.

On suppose que :

(i) $$f(Y') \subset Y .$$

(ii) Pour toute strate U' de Y', la restriction de f à U' est une submersion sur une strate de Y.

(iii) Pour toute strate U de Y, la restriction de g à U est une submersion sur R.

(iv) Les restrictions

$$f|Y' : Y' \longrightarrow Y$$

et

$$g|Y : Y \longrightarrow \mathbb{R}$$

sont des applications propres.

(v) f n'a pas d'éclatement (la définition est donnée plus loin.

Il existe alors un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} B' \times \mathbb{R} & \xrightarrow{h \times id} & B \times \mathbb{R} & \xrightarrow{\text{projection}} & \mathbb{R} \\ \varphi' \downarrow & & \varphi \downarrow & & \| \ id \\ Y' & \xrightarrow{f|Y'} & Y & \xrightarrow{g|Y} & R \end{array}$$

dans lequel B (resp. B') est la fibre de Y (resp. Y') au-dessus de $0 \in \mathbb{R}$, h est la restriction de f à B', et φ, φ' sont des homéomorphismes (on peut encore dire que la famille d'applications C^{∞} considérée est topologiquement triviale).

<u>Technique de démonstration.</u>

On cherche à relever le champ de vecteurs standard $\frac{\partial}{\partial t}$ sur $\mathbb{R}$ en un champ ξ tangent aux strates de Y,

puis à relever ξ en un champ ξ' tangent aux strates de Y' ; pour que l'intégration de ces champs fournisse deux homéomorphismes (qui vérifieront automatiquement les conclusions du théorème), il faut <u>contrôler</u> ξ et ξ' au voisinage des points où se raccordent des strates : on utilise à cet effet un système bien choisi de voisinages tubulaires des strates.

(1) <u>Construction de</u> ξ .

On commence par trouver pour chaque strate U de Y un voisinage tubulaire T_U de U dans V de façon que la collection des T_U ait les propriétés suivantes de compatibilité : Soient

T_U l'espace total de T_U ,

$\pi_U : |T_U| \longrightarrow V$ la projection ,

$\rho_U : |T_U| \longrightarrow \mathbb{R}_+$ la fonction tubulaire

(le fibré T_U est défini comme un voisinage de la section nulle dans un fibré muni d'un produit scalaire, et ρ_U est la fonction "carré de la longueur d'un vecteur dans sa fibre") . On demande que, si $V \subset \bar{U} - U$, les fibres au-dessus de $|T_V| \cap U$ de T_U soient contenues dans les fibres correspondantes de l'application

$$(\pi_V , \rho_V) : |T_V| \longrightarrow V \times \mathbb{R}$$

(on dire avec Mather que la restriction de T_U à $|T_V| \cap U$ est <u>compatible</u> avec l'application (π_V, ρ_V)).

La construction de ces voisinages tubulaires se fait par récurrence ascendante sur la dimension des strates; plus précisément, l'existence de T_U lorsque T_V est donné est conséquence des deux faits suivants :

7-3. <u>Fait</u> (1) (Théorème des voisinages tubulaires).

Soit $F : X \longrightarrow Z$ une application C^{∞} et soit U une sous-variété de X telle que $F|U$ soit une submersion. Il existe un voisinage tubulaire T_U de U dans X qui est compatible avec F.

La démonstration ne diffère pas sensiblement de celle du théorème classique ; c'est bien entendu une forme relative de ce théorème qu'on utilise dans la récurrence.

7-4. <u>Fait</u> (2).

Soient U , $V \subset \bar{U} - U$ deux sous-variétés de X vérifiant la propriété (ii) de la définition 7-1 . Soit T_V un voisinage tubulaire de V dans X . Il existe un voisinage ϑ de V dans T_V tel que la restriction à $U \cap \vartheta$ de l'application (π_V, ρ_V) soit une submersion.

La démonstration est triviale à partir des définitions; on peut remarquer que la propriété analogue pour la seule application π_V ne nécessite que la propriété (a) de Whitney.

On peut donc supposer donnée une famille $\{T_U\}$ ayant les propriétés demandées. Compte tenu de l'hypothèse (iii) de 7-2 , la même démonstration fournit d'ailleurs une famille T_U de voisinages tubulaires qui sont en plus compatibles avec g . On peut alors construire par récurrence un relèvement ξ du champ $\frac{\partial}{\partial t}$, tangent aux strates de Y , et contrôlé par la famille $\{T_U\}$, c'est-à-dire un champ ξ qui vérifie (on rétrécit au besoin les Y_U) :

$$(1) \qquad \forall y \in Y , \quad g_*(\xi(y)) = \frac{\partial}{\partial t}(g(y))$$

(condition de relèvement) ;

(2) $\forall y \in Y \cap |T_U|$, $\pi_{U*}(\xi(y)) = \xi(\pi_U(y))$

(condition de cohérence) ;

(3) $\forall y \in Y \cap |T_U|$, $\xi(y)\rho_U = 0$;

cette dernière condition empêche les lignes intégrales de ξ d'origine dans $|T_U| \cap Y$ d'aller se perdre dans $\bar{U} - U$ ou hors de $|T_U|$, en les canalisant dans les surfaces de niveau de ρ_U.

On montre sans trop de difficultés qu'un tel champ, bien que non continu en général, est localement (et en fait globalement car $g\,Y$ est propre) intégrable, ce qui fournit l'homéomorphisme φ. On vient en fait d'indiquer la démonstration du Ier théorème d'isotopie de Thom (voir [9] et [12]).

(2) <u>Construction de</u> ξ'.

Si on remplace g par f, la construction précédente est possible dans l'image réciproque par f d'une strate de Y ; plus généralement, la construction d'un système $\{T_{U'}\}$ de voisinages tubulaires des strates de Y' relevant $\{T_U\}$ et permettant de contrôler suffisamment ξ' pour le rendre intégrable est possible moyennant l'hypothèse "f n'a pas d'éclatement" que je vais expliciter maintenant :

7-5. <u>Définition.</u>

f n'a pas d'éclatement si, pour tout triplet (U', V', y'), U', V' strates de Y', $y' \in V' \subset \bar{U}' - U'$, la condition suivante est vérifiée:

(a_f) Pour toute suite de points $y'_i \in U'$ convergeant vers y' telle que la suite de plans $\{\ker d(f\,U')_{y'_i}\}$ ait une limite τ, on a

$$\tau \supset \ker d\,(f\,V')_{y'}$$

(si f est l'application nulle, on retrouve la condition (a) de Whitney). $\square$

L'exemple typique d'une application présentant de l'éclatement est l' "éclatement des géomètres algébristes" qui s'écrit localement

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad , \quad f(x, y) = (x, xy) ,$$

avec V' définie par $x = 0$, et $V = (0, 0)$.

Si f n'a pas d'éclatement, on construit une famille $\{T_{U'}\}$ telle que

(i) Si $f(U') \subset U$, on a

$$f(|T_{U'}|) \subset |T_U| \quad \text{et} \quad f\pi_{U'} = \pi_U f .$$

(ii) Si $V' \subset \overline{U}' - U'$, la restriction de $T_{U'}$ à $|T_{V'}| \cap U'$ est compatible avec l'application $\pi_{V'}$; si de plus $f(V')$ et $f(U')$ sont dans la même strate de Y , on peut demander la compatibilité avec l'application $(\pi_{V'}, \rho_{V'})$.

On se convainc facilement qu'une telle famille $\{T_{U'}\}$ ne peut exister dans l'exemple précédent, les conditions (i) et (ii) (1ère partie) étant incompatibles.

La démonstration de l'existence de $\{T_{U'}\}$ se fait par récurrence exactement comme pour celle de $\{T_U\}$, y compris dans le cas de deux strates de Y' ayant pour image des strates distinctes de Y , à condition d'interpréter comme suit la condition de non éclatement :

Soient U' et V' telles que

$$f(U') \subset U , \quad f(V') \subset V , \quad V' \subset \overline{U}' - U' ;$$

on suppose $T_{V'}$ construit de facon que $f\pi_{V'} = \pi_V f$:

il existe alors une application Φ rendant commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd}
|T_{V'}| \arrow[dr] \arrow[drr, bend left, "\pi_U f"] \arrow[ddr, bend right, "\pi_{V'}"'] & & \\
& \Omega \arrow[r] \arrow[d] & |T_V| \cap U \arrow[d, "V"] \\
& V' \arrow[r, "f"] & V
\end{tikzcd}$$

(Ω désigne le produit fibré et on rappelle que $\pi_V \pi_U = \pi_V$).

La condition (a_f) pour tous les triplets (U', V', y'), $y' \in V'$, équivaut à la condition :

$$\Phi \big| |T_{V'}| \cap U'$$

est une submersion (il faut peut-être restreindre $T_{V'}$). On peut alors construire $T_{U'}$ qui, au-dessus de $|T_{V'}| \cap U'$, soit à la fois compatible avec $\pi_U f$ et $\pi_{V'}$ (conditions (i) et (ii)).

On peut alors relever ξ en un champ ξ' contrôlé par $\{T_{U'}\}$ (bien entendu la condition 3) ne peut être exigée que dans l'image réciproque par f d'une strate de Y, et le fait que ξ vérifie cette condition 3) n'intervient pas dans la construction de ξ').

L'intégrabilité locale de ξ' dans l'image réciproque d'une strate de Y se voit comme précédemment ; l'intégrabilité locale de ξ' sur tout Y' découle de celle de ξ sur Y.

On en déduit alors l'intégrabilité globale grâce

à la propriété de $f|Y'$, et donc l'existence de φ' et la démonstration du théorème 7-2.

Remarque.-

Le théorème 7-2 devient faux si on supprime la condition de non éclatement. Dans [10] , Thom construit une famille à un paramètre d'applications polynomiales de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ (donc $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}^3 \times R \xrightarrow{g} \mathbb{R}$) vérifiant les autres conditions du théorème pour une stratification bien choisie mais telle que chacune des applications de la famille (et donc aussi f) présente de l'éclatement; il montre que deux quelconques des applications de la famille ont un type topologique différent. De tels modules ne peuvent exister pour des applications triangulées (qui ne présentent jamais d'éclatement) et Thom conjecture que l'absence d'éclatement est une CNS pour qu'une application stratifiée puisse être triangulée.

8. Démonstration du théorème 2-5 ;
2°) où l'on stratifie $J^k(n.p) - \Sigma^k$.

On commence par montrer l'existence, pour chaque application infinitésimalement stable $f' : N' \longrightarrow P'$, de stratifications canoniques $S_{f'}(N')$ et $S_{f'}(P')$ qui fassent de f' un morphisme stratifié sans éclatement. On définit alors la stratification S^k de $J^k(n,p) - \Sigma^k$ de façon que si $f : N \longrightarrow P$ (N compacte) vérifie

$$j^k f(N) \cap \Sigma^k_{N,P} = \emptyset$$

et si (i, j, f') est un déploiement stable de f , la multitransversalité de f par rapport à $S^k_{N,P}$ soit équivalente à la transversalité de j par rapport à $S_{f'}(P')$.

8.1. Stratification de f' .

Les trois propriétés qu'on utilise sont :

(i) La restriction de f' à $\Sigma(f')$ est un morphisme propre et fini (voir § 5).

(ii) Le germe de f' en un point quelconque de N' est différentiablement équivalent au germe d'une application polynomiale (à savoir, le représentant polynomial de son jet d'ordre $\dim P' + 1$ dans une carte ; voir [2]).

(iii) Le multigerme de f' en un nombre quelconque de points est infinitésimalement stable.

On raisonne alors localement : si N' est un ouvert semi-algrébrique (pas forcément connexe) de $\mathbb{R}^{n'}$ et P' un ouvert semi-algébrique de $\mathbb{R}^{p'}$, les méthodes utilisées dans [9] et [12] permettent de trouver des stratifications de Whitney analytiques $S_{f'}(N')$ de N' et $S_{f'}(P')$ de P' telles que

(1) $\Sigma(f')$ soit un sous-ensemble stratifié.

(2) Si $x' \in \Sigma(f')$, la restriction de f' à la strate passant par x' est une immersion, et l'image de cette strate est une strate de P'.

(3) Si $x' \in N' - \Sigma(f')$, la strate de x' coïncide localement avec l'image réciproque par f' de la strate contenant $f'(x')$.

(4) Le couple $(S_{f'}(N'), S_{f'}(P'))$ est minimal parmi les couples de stratifications de Whitney analytiques ayant les propriétés précédentes.

La démonstration se fait par récurrence à partir de la stratification de Whitney analytique du sous-ensemble semi-algébrique $\Sigma(f')$ de $\mathbb{R}^{n'}$ (construite par exemple dans [9]); chaque strate U est à la fois une sous-variété analytique et un sous-ensemble semi-analytique de $\mathbb{R}^{n'}$. L'ensemble

des points de U où le rang de $f'|U$ s'abaisse à une adhérence semi-analytique de dimension inférieure à celle de U, ce qui permet de raffiner la stratification de N' pour avoir la propriété de rang constant sur chaque strate.

Le fait que le nombre de points dans les fibres de $f' \,|\, \Sigma(f')$ soit borné (en fait par $\dim P' = p'$, (voir 3) et que le multigerme de f' en une fibre soit infinitésimalement stable permet de définir l'image directe de cette stratification par f' : une strate en $y' \in P'$ est localement l'intersection des images par f' des strates de N' aux points de

$$\Sigma(f') \cap f'^{-1}(y') .$$

Il faut remarquer qu'en général une telle opération ne définit pas une stratification, ne serait-ce que parce que l'image par f' d'un germe d'ensemble n'est pas, sans condition sur f', un germe d'ensemble bien déterminé (regarder l'exemple suivant la définition 7-5).

On prend enfin l'intersection de la stratification de N' avec la stratification image réciproque de celle qu'on vient de définir sur P'.

Pour globaliser, on part d'un recouvrement ouvert de P' ; le caractère fonctoriel de ces stratifications locales et le fait que deux germes analytiques infinitésimalement stables qui sont différentiablement équivalents le sont analytiquement permettent le recollement des stratifications locales en des stratifications de Whitney de P' et d'un voisinage de $\Sigma(f')$ dans N' ; on finit de stratifier N' en stratifiant $N' - \Sigma(f')$ par la condition (3) du cas local.

On remarque que la condition (2) du cas local implique que f' n'a pas d'éclatement.

8.2. <u>Stratification de</u> $J^k(n,p) - \Sigma^k$.

si

$$z \in J^k(n, p) - \Sigma^k$$

est le jet d'un germe stable

$$\tilde{f} : (\mathbb{R}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^p, 0) ,$$

on considère la stratification de $\mathbb{R}^n$ qu'on vient de lui associer, et on définit le germe de la strate de S^k en z comme la réunion des K^k-orbites locales des jets correspondant aux germes de f en tous les points de la strate (locale) de $\mathbb{R}^n$ qui contient 0 . Il est clair que là où elle est définie, cette stratification répond aux exigences du début du paragraphe 8 (revoir le théorème 3-1).

Pour traiter le cas général, j'ai déjà remarqué que les germes de K-codimension finie sont l'analogue local des applications T.S.F. ; en particulier, la démonstration de 5-3 fournit pour un tel germe

$$f : (\mathbb{R}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$$

un entier q et un germe stable

$$f : (\mathbb{R}^{n+q}, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^{p+q}, 0)$$

<u>qui est dans la K-orbite de</u> $f \times id_{\mathbb{R}^q}$. Soit

$$z = j^k f(0) ;$$

on considère l'application de stabilisation qui à $z \in J^k(n, p)$ associe

$$z \times id_{\mathbb{R}^q} \in J^k (n + q, p + q) ;$$

on stratifie $J^k(n + q, p + q)$ au voisinage de $z \times id_{\mathbb{R}^q}$ en faisant agir K^k sur la stratification définie au voisinage de $j^k f(0)$, et on stratifie $J^k(n,p)$ au voisinage de z par image réciproque par l'application de stabilisation.

9. Démonstration du théorème 2-5 ; 3°) où tout devient clair (?)

Si n et p sont donnés, on fixe k de façon que

$$\operatorname{codim} \Sigma^k > n .$$

Si N est compacte, on déduit de ce qui précède q'une application générique $f : N \longrightarrow P$ s'obtient à partir d'une application stable $f' : N' \longrightarrow P'$ par un changement de base j transverse à la stratification canonique $S_{f'}(P')$ de P' ; on en déduit (voir 9) que l'application f est elle-même un morphisme stratifié sans éclatement (les applications de ce type sont donc denses dans $C^\infty(N, P)$ lorsque N est compacte ; il est intéressant à ce point de lire la conclusion de [10] , où la condition 2°) correspond à la transversalité vérifiée par les applications génériques). Il nous reste à montrer que f est topologiquement stable : si g est proche de f , on la prolonge en g' proche de f' (continument en fonction de g) ; f' étant stable s'écrit

$$\psi \circ g' \circ \varphi^{-1}$$

où φ (resp. ψ) est un difféomorphisme de N' (resp. P') proche de l'identité. On en déduit que

$$(i_g = \varphi \circ i , \; j_g = \psi \circ j , \; f')$$

est un déploiement stable de g . De plus, on construit de la même façon une famille différentiable à un paramètre $\{f_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ qui vérifie $f_0 = f$, $f_1 = g$, à laquelle est associée une famille à un paramètre de déploiements stables (i_{f_t} , j_{f_t} , f') qui ont la propriété que j_{f_t} est transverse à $S_{f'}(P')$ pour tout t .

(Cette construction est possible car f' est homotopiquement stable, voir [14] .)

On peut alors appliquer le 2ème théorème d'isotopie (7-2) au diagramme

$$N \times \mathbb{R} \xrightarrow{F} P \times \mathbb{R} \xrightarrow{\pi} \mathbb{R}$$

où

$$F(x, t) = (f_t(x), t) \quad , \qquad \pi(y, t) = t$$

et où les stratifications sont induites par les applications transverses

$$N \times \mathbb{R} \ni (x, t) \longmapsto i_t(x) \in N'$$

et

$$P \times \mathbb{R} \ni (y, t) \longmapsto j_t(y) \in P'$$

10. <u>Remarques finales.</u>

Si on ne s'intéresse qu'à la stabilité locale des applications, on peut donner du théorème 2-5 un énoncé dans lequel n'apparait plus la condition de transversalité à la stratification $S^k_{N,P}$. Pour simplifier, occupons-nous de la stabilité différentiable ; on sait (voir 2) que tout germe stable

$$f : (\mathbb{R}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$$

est équivalent par A à son jet d'ordre $p + 1$; la notion de jet stable a donc un sens dans $J^{p+1}(n,p)$ ce qui implique que, si $z \in J^{p+1}(N, P)$, ou bien tout germe $f : (N, x) \longrightarrow (P, y)$ représentant z l'application $j^{p+1} f$ est transversale en z à la classe de contact de z , ou bien il n'existe pas de germe f représentant z tel que $j^{p+1} f$ soit transversale en z à cette classe de contact. Soit Uns^{p+1} le sous-ensemble de $J^{p+1}(n,p)$ formé des jets instables ; Uns^{p+1} est algébrique fermé et invariant par A^{p+1} (mais pas par K^{p+1} !!) , il lui correspond un sous-fibré $Uns^{p+1}_{N.P}$ de $J^{p+1}(N,P)$ qui est

exactement l'ensemble des z qui sont des points de non-transversalité sur leur classe de contact (on montre dans 2 que le complémentaire de Uns^{p+1} dans une K^{p+1}--orbite est exactement une A^{p+1}-orbite, ce qui éclaire l'équivalence (ii) $\Longleftrightarrow$ (iii) de 3-1). La stabilité différentiable locale de f est donc assurée par la seule condition

$$j^{p+1} f(N) \cap \mathrm{Uns}^{p+1}_{N,P} = \emptyset$$

(bien entendu, on assure ainsi la condition de transversalité, mais pas celle de multitransversalité). Dans [3], Mather montre l'équivalence entre $\operatorname{codim} \mathrm{Uns}^{p+1} \leqslant n$ et $\sigma(n,p) \leqslant n$; on retrouve le (i) du théorème 2-3. Pour en déduire le (ii), il y a encore un pas non trivial à savoir l'existence, pour toute sous-variété lisse de $J^k(N, P)$ de codimension $\leqslant n$, d'un point z transversal (i.e. tel qu'il existe un germe $f : (N, x) \longrightarrow P$ vérifiant $j^k f(x) = z$ et "$j^k f$ est transversal en z à cette sous-variété").

*
* *

BIBLIOGRAPHIE

(Annexe)

1. R. Abraham and J. Robbin — Transversal mappings and flows. Benjamin, 1967.

2. J. Mather — Classification of stable germs by R-algebras. Publ. Math. I.H.E.S., 37 (1969), p. 223-248,

3. J. Mather — Transversality. Advances in Math., 4 (1970), p. 301-336.

4. J. Mather — The nice dimensions. Proceedings of Liverpool singularities Symposium I. Lecture Notes in Math., No 192, p. 207-253, Springer-Verlag, 1971.

5. J. Mather — Notes on topological stability, Preprint, 1970.

6. J. Mather — Stratification and mappings. Preprint, 1971.

7. J. Mather — Lettre, Sept. 1972.

8. R. Thom, H. Levine — Singularities of differentiable mappings. Proceedings of Liverpool singularities Symposium I. Lecture Notes in Math., No 192, p. 1-89, Springer-Verlag, 1971.

9. R. Thom — Propriétés différentielles locales des ensembles analytiques. Sém. Bourbaki, exposé 281, vol. 1964/65, Addison-Wesley/Benjamin.

10. R. Thom — La stabilité topologique des applications polynomiales. L'enseignement Mathématique, VIII, 1962, p. 24-33.

11. R. Thom — Local topological properties of differentiable mappings. Colloquium on Differential Analysis, Tata Institute, Bombay, 1964, Oxford University Press, London, p. 191-202.

12. R. Thom — Ensembles et morphismes stratifiés. Bulletin Amer. Math. Soc., vol. 75, No 2, 1969, p. 240-284.

13. R. Thom — Modèles mathématiques de la morphogénèse. Chap. 3 : Théorie du déploiement universel, I.H.E.S. , mars 1971.

14. J.-C. Tougeron — Stabilité des applications différentiables (d'après J. Mather), Séminaire Bourbaki, exposé 336, vol. 1967/68, Addison-Wesley/Benjamin.

15. C.T.C. Wall — Lecture on C^∞-stability and classification. Proceedings of Liverpool singularities Symposium I, Lecture Notes in Math., No 192, p. 178-206, Springer-Verlag, 1971.

16. F. Pham — Classification des singularités. Préprint Université de Nice, 1971.