VIỆN TOÁN-HỌC
INSTITUT DE MATHEMATIQUES

EQUATIONS DIFFERENTIELLES

(Quelques aspects de la théorie reliée au problème de la turbulence hydrodynamique)

COURS de A. CHENCINER
À HANOI EN 1977
RÉDIGÉ PAR
DOÀN QUỲNH ET HOÀNG XUÂN SÍNH

HÀ-NỘI 1979

EQUATIONS DIFFERENTIELLES

(QUELQUES ASPECTS DE LA THÉORIE RELIÉE AU PROBLÈME DE LA TURBULENCE HYDRODYNAMIQUE)

COURS DE A. CHENCINER

A HANOÏ EN 1977

RÉDIGÉ PAR

DOÀN QUỲNH ET HOÀNG XUÂN SÍNH

Dans ce cours, donné à l'Ecole Polytechnique de Hanoï en janvier-février 1977, je me suis inspiré librement de plusieurs sources, en particulier le livre de mécanique céleste de S. Sternberg et la thèse de M.R. Herman.

Je remercie chaleureusement les deux rédacteurs, ainsi que tous ceux qui m'ont rendu ce deuxième séjour au Viet-Nam aussi passionant et enrichissant que rempli de chaleur humaine.

A. CHENCINER.

E Q U A T I O N S

D I F F E R E N T I E L L E S

Cours d'Alain CHENCINER à HANOI 1.2.77.

INTRODUCTION :

Dans la recherche de modèles mathématiques de la turbulence il y a plusieurs tendances :

1) - les équations de la dynamique des fluides (Euler, Navier-Stokes,..) ne sont plus valables, il faut faire intervenir des modèles statistiques et abandonner une description déterministe.

2) - ces équations sont encore valables et il faut chercher la turbulence sur les équations.

Ces équations sont des équations aux dérivées partielles non linéaires (traduisant essentiellement l'équation $F = m\gamma$ dans le fluide), leur étude qualitative est difficile.

Pour ne donner qu'un exemple, citons l'équation d'Euler des fluides non visqueux incompressibles (pas très réalistes, appelés par Feynman liquides secs) :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \Sigma\, u_i \frac{\partial u}{\partial x_i} = - \text{grad } p$$

(correspondant à $F = m\gamma$)

$$\Sigma \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \qquad \text{(incompressibilité)}$$

$$u(x,0) = u_0(x) \qquad \text{donnée à l'instant 0}$$

(u = vitesse au point x,t de la particule à l'endroit x et au temps t) (cf. cours d'Alain Chenciner à l'Université de Hanoï, 1.2.77, pour écrire l'équation d'Euler).

Si u_0 est analytique (ou C^∞), on peut résoudre analytiquement (ou C^∞) jusqu'à un temps t^* fini, mais on ne sait pas ce qui se passe après ?

Notons par $u(x,t)$ le champ de vitesse dans le fluide. On considère l'espace H des fonctions $u(x)$ telles que $\Sigma \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0$ (champs de vitesse) (analytiques, différentiables, intégrables,...) (c'est un espace de dimension infinie). L'équation d'Euler ou d'autres peut se ramener à une équation différentielle sur H (non bornée mais raisonable) :

$$\frac{du}{dt} = X(u),$$

$X(u)$ est un champ de vecteurs sur H. Si on soumet le fluide à une action constante dans le temps (action stationnaire), par exemple si on tourne une baguette dans le fluide (expérience de Couette-Taylor, v. le dessin) et si μ mesure l'"intensité" de cette action, plus précisément, μ = nombre de Taylor), l'évolution du champ de vitesse est donnée par une famille d'équations de la forme :

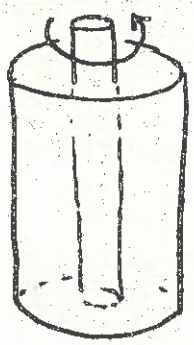
$$\frac{du}{dt} = X_\mu (u).$$

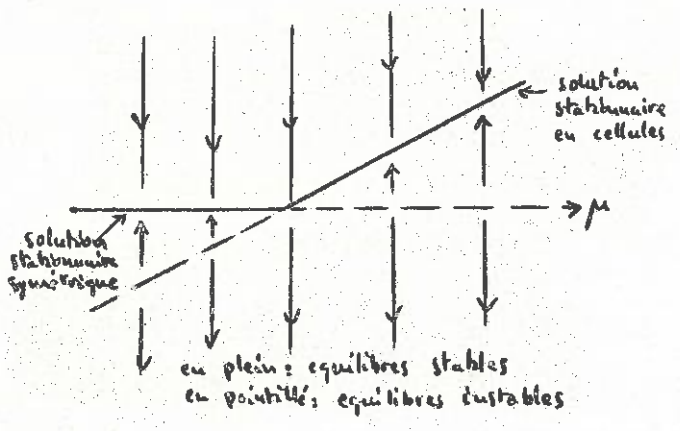
Lorsque μ varie, on peut observer par exemple :

1) - Si $\mu = 0$: le champ de vecteurs X_0 a un point d'équilibre stable et donc, quand t tend vers ∞, $u(x,t)$ tend vers un attracteur stable $u = u_0$

2) - Si $\mu > 0$, μ petit : u tend toujours vers un régime stationnaire stable : $\forall x$, $u(x,t)$ est indépendante de t.

3) - Si on augmente μ : on a un changement de régime stationnaire, par exemple, échange des stabilités de deux équilibres. On n'a plus la symétrie globale du champ de vecteurs, mais apparaît une nouvelle symétrie : les cellules (voir le livre de D.D. Joseph : Stability of fluid motion, Springer 1976).





4) - Si on augmente μ encore : apparaîtra un régime périodique (les cellules oscillent périodiquement).

5) - Si on augmente μ encore, on peut avoir un régime quasi-périodique, par exemple, quant t tend vers ∞, u(t) tend vers $f(w_1t, w_2t)$ où f est une application périodique de période (1,1) et

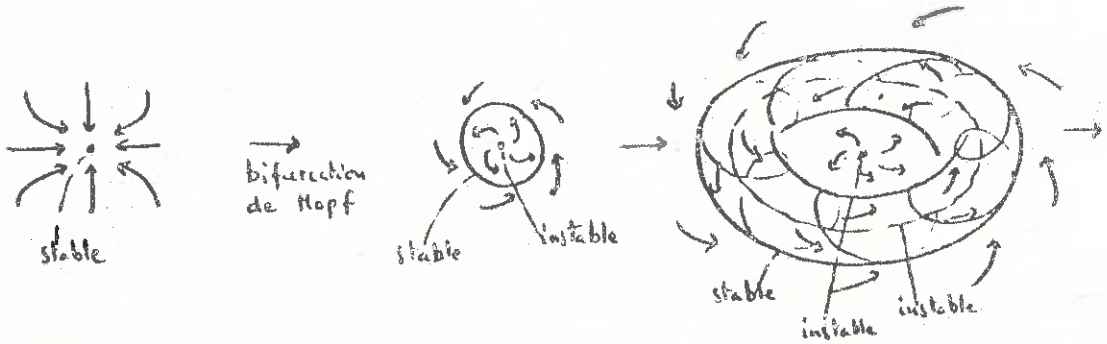
$\frac{w_1}{w_2} \notin \mathbb{Q}$; on n'a pas d'orbites périodiques mais des orbites denses sur un tore attractant. Ce phénomène est difficile à regarder dans l'expérience précédente, mais on peut l'apercevoir grâce aux techniques récentes de Gollub et Swiney.

6) - Si on augmente μ encore et encore, alors on a la turbulence : ici il y a 2 points de vue :

Celui de Landau : le tore attractant précédent n'est plus attractant, il apparaîtra des tores de 3 dimensions qui sont attractants, puis ceux-ci cesseront à leur tour d'être attractants, il apparaîtra des tores à 4 dimen-

sions attractants, etc... Dans ce modèle, la turbulence équivaut à l'existence d'un régime asymptotique quasi périodique à (nombreuses) périodes indépendantes.

Celui de Lorentz : Lorentz a fait des calculs numériques sur une famille d'équations différentielles dans $\mathbb{R}^3$ obtenue à par ir des équations de Navier-Stokes pour le problème de Bénard en faisant une transformation de Fourier et en ne gardant que trois termes : par ces calculs il voit apparaître des attracteurs étranges (comme le produit d'un Cantor par un intervalle, et le régime asymptotique dépend d'une manière essentielle des conditions initiales : on a "l'effet des ailes du papillon".



Ruelle et Takens ont combiné ces deux points de vue :

Après avoir étudié mathématiquement la bifurcation faisant passer d'une orbite périodique stable(*) à un tore invariant stable de dimension 2, ils montrent que sur un tore invariant de dimension ≥ 4, si on perturbe un peu un champ quasi-périodique, il peut apparaître des attracteurs étranges (voir aussi un récent préprint de Ruelle, Takens, Newhouse).

Un des problèmes devient alors de savoir ce qui se passe "génériquement" pour une équation différentielle sur un tore : des solutions quasi périodiques, des attracteurs etc...

Dans la première partie du cours, nous parlons des équations différentielles sur les tores à 2 dimensions avec le théorème de Denjoy et les résultats d'Herman-Arnold.

(*) Ici stable signifie attractant.

Dans la 2ème partie du cours, nous étudions très succintement l'apparition de tores invariants, en particulier les bifurcations de Hopf ; Une conséquence de cette étude est sans doute la nécessité de modifier le point de vue de Ruelle et Takens, la bifurcation d'un tore T^2 en un tore T^3 semblant déjà très improbable en général.

Chapitre 1.

CHAMPS DE VECTEURS SUR T^2 ET DIFFEOMORPHISMES DU CERCLE.

§ 1.

On s'intéresse au comportement qualitatif des solutions des equations différentielles sur le tore T^2, c.à.d. aux champs de vecteurs sur T^2 à difféomorphisme près (ou quelquefois à homéomorphisme près).

Soit X un champ de vecteurs de classe C^∞ sur T^2. On dit que X est structurellement stable si pour tout champ de vecteurs de classe C^∞, X' sur T^2, assez proche de X (dans l'espace, muni de la topologie C^∞, de tous les champs de vecteurs de classe C^∞ sur T^2), il existe un homéomorphisme de T^2 sur T^2, transformant les courbes intégrales de X en courbes intégrales de X'.

Le théorème de Peixoto dit que les champs de vecteurs de classe C^∞ sur T^2 structurellement stables forment un ouvert dense dans l'espace de tous les champs de vecteurs de classe C^∞ sur T^2.

D'autre part, le théorème d'Herman et d'Arnold dit qu'il y a beaucoup de champs de vecteurs ergodiques sur T^2 (ces champs ergodiques ne sont pas structurellement stables), "beaucoup" au sens de la mesure. Dans l'étude des équations différentielles sur T^2, la notion de mesure joue un rôle important (lire à ce propos l'article de Kolmogorov au congrès international des mathématiciens en 1954).

§ 2.

NOTATIONS

a) - On considère le tore T^2 comme l'espace quotient

$$T^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$$

Le fibré tangent $T(T^2)$ de T^2 s'identifie canoniquement à $T^2 \times \mathbb{R}^2$ puisque T^2 est un groupe de Lie.

Pour chaque champ de vecteurs $\bar{X}$ sur T^2, nous avons le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
T(T^2) \arrow[d, shift right] \arrow[r, phantom, "\cong"] & T^2 \times R^2 \arrow[d] \\
T^2 \arrow[u, shift right, "\bar{X}"] \arrow[ur, "\bar{X}"'] \arrow[r, phantom, "="] & T^2
\end{tikzcd}$$

et puisque $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 = T^2$ est un revêtement, nous avons le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
 & T(T^2) \arrow[rr, "\simeq"] \arrow[d, shift right] & & T^2 \times \mathbb{R}^2 \arrow[d] & \\
 & T^2 \arrow[u, shift right, "\bar{X}"] \arrow[urr, "\bar{X}"] \arrow[rr, equal] & & T^2 & \\
T(\mathbb{R}^2) \arrow[uur] \arrow[d, shift right] \arrow[rrr, "\sim"] & & & \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \arrow[uul] \arrow[d] & \\
\mathbb{R}^2 \arrow[u, shift right, "X"] \arrow[uur] \arrow[urrr, "X"] \arrow[rrr, equal] & & & \mathbb{R}^2 \arrow[uul] &
\end{tikzcd}$$

donc ce champ de vecteurs peut être identifié à une application $\mathbb{Z}^2$-périodique :

$$X : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x,y) \longrightarrow (\alpha(x,y),\beta(x,y)) = X(x,y)$$

et l'équation différentielle sur T^2 peut être écrite sous la forme :

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \alpha(x,y) & (x,y) \in \mathbb{R}^2 \\ & \alpha,\ \beta \text{ sont des fonctions } \mathbb{Z}^2\text{-périodiques.} \\ \dfrac{dy}{dt} = \beta(x,y) & \end{cases}$$

Rappellons que T^2 étant compact, à $\bar{X}$ correspond un flot global. (c.à.d. un groupe à un paramètre de difféomorphismes de T^2)

$$\varphi_t : T^2 \longrightarrow T^2 \quad ,$$

$$\frac{d\varphi_t}{dt}(x,y) = \bar{X}(\varphi_t(x,y))$$

$$\varphi_{t_1} \circ \varphi_{t_2} = \varphi_{t_1+t_2}$$

b) - Si $\bar{F} : T^2 \longrightarrow T^2$ est un difféomorphisme et si $\bar{X}$ est un champ de vecteurs sur T^2, alors l'image directe de $\bar{X}$ est le champ de vecteurs $\bar{Y}$ sur T^2 défini par :

$$\bar{Y} = \bar{F}_*(\bar{X})$$

$$\bar{Y}(\bar{F}(m)) = d\bar{F}(m)\ \bar{X}(m)$$

c) - Puisque $\mathbb{R}^2 \longrightarrow T^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ est un revêtement, chaque difféomorphisme $\bar{F} : T^2 \longrightarrow T^2$ peut être relevé en une application $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$.

Remarquons que F est un difféomorphisme : en effet, si G est un relèvement de $\bar{G} = \bar{F}^{-1}$, alors GoF est un relèvement de id_{T^2}, donc $GoF(x,y) = (x+\alpha, y+\beta)$, avec $(\alpha,\beta) \in \mathbb{Z}^2$.

Quitte à changer le relèvement G de $\bar{G}$, on peut supposer que $\alpha = \beta = 0$, c'est-à-dire $GoF = id_{\mathbb{R}^2}$; il reste à remarquer que $FoG(x,y) = (x+a, y+b)$, $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$, et que $FoGoF(x,y) = F(x,y)$:

FoG a donc un point fixe, ce qui implique $a = b = 0$.

Soit $\langle\bar{F}\rangle : H_1(T^2) \longrightarrow H_1(T^2)$ l'application induite par F sur l'homologie à coefficients entiers. Puisque $\bar{F}$ est un difféomorphisme et $H_1(T^2) \cong \mathbb{Z}^2$, $\langle\bar{F}\rangle$ est déterminée par une matrice unimodulaire

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

(on suppose que $\bar{F}$ conserve l'orientation de T^2), $a,b,c,d \in \mathbb{Z}$.

Remarquons que l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

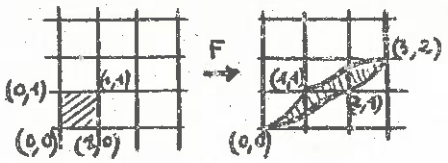
est un difféomorphisme de R^2 ; si on passe au quotient, on obtient un difféomorphisme de T^2 qu'on nomme difféomorphisme "linéaire" de T^2.

En composant $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} o\, F$, on obtient un difféomorphisme $G : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dont le $\bar{G}$ induit l'identité sur $H_1(T^2)$.

On en déduit $G(x,y) = id_{(x,y)} + \varphi(x,y)$, où $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ est une application $\mathbb{Z}^2$-périodique. Donc, finalement, dans le cas général, chaque relèvement d'un difféomorphisme $\overline{F} : T^2 \longrightarrow T^2$ est défini à translation près par $F : R^2 \longrightarrow R^2$,

$$F(x,y) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \varphi(x,y)$$

où $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ est une application $\mathbb{Z}^2$-périodique, $a,b,c,d \in \mathbb{Z}$ et $\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \pm 1$. (Voir le dessin pour



$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et } \varphi(0,0) = (0,0)).$$

d) - Rappelons que nous avons appelé $\overline{F} : T^2 \longrightarrow T^2$ difféomorphisme linéaire si un relèvement F de $\overline{F}$ a la forme

$$F(x,y) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Nous disons qu'une courbe sur T^2 est une droite si elle est la projection d'une droite dans R^2 ; si celle-ci a une pente irrationnelle, et passe par $(0,0)$, elle ne rencontre jamais d'autres points de coordonnées entières ; nous avons le cas contraire si elle a une pente rationnelle.

Le champ de vecteurs sur T^2 défini par

$$\frac{dx}{dt} = w_1$$

$$\frac{dy}{dt} = w_2$$

ou, d'une manière équivalente, le champ de vecteurs $X(x,y) = (w_1, w_2)$ où w_1, w_2 sont des constantes, est appelé champ de vecteurs linéaires sur T^2. Les courbes intégrales de ce champ sont les droites de pente $\frac{w_2}{w_1}$. Lorsque $\frac{w_2}{w_1} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, chaque orbite est dense (dans T^2) ; lorsque $\frac{w_2}{w_1} \in \mathbb{Q}$, chaque orbite est une courbe fermée sur T^2.

§ 3.

Nous cherchons des critères sur un champ de vecteurs $\overline{X}$ sur T^2 pour qu'il existe un difféomorphisme de T^2 transformant ce champ en un champ linéaire de vecteurs de pente irrationnelle.

Une première condition nécessaire : $\overline{X}$ n'a pas de zéros, c.à.d. $\overline{X}(x,y) \neq 0$, $\forall (x,y) \in T^2$.

Proposition I.1.

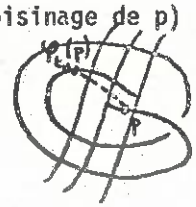
Soit $\overline{X}$ un champ de vecteurs sans zéros sur T^2. Alors il existe une courbe fermée plongée dans T^2 partout transversale à $\overline{X}$.

Démonstration.

I) - Soit M un espace topologique, φ_t un groupe à un paramètre d'homéomorphismes de M. Un fermé $F \subset M$ est appelé invariant si $\varphi_t(K) \subset K$ (donc $\varphi_t(K) = K$)

pour tout t ; ce fermé invariant K est appelé fermé minimal invariant si K ne contient pas de sous-fermé strict invariant. Si M est un espace compact, alors il existe un fermé minimal invariant car une suite décroissante de fermés (pour l'inclusion) non vides d'un compact a une intersection non vide. Soit K un fermé minimal invariant et $p \in K$; alors, $\{\varphi_t(p) \mid t \in \mathbb{R}\}$ est dense dans K, sinon, son adhérence est un sous-fermé invariant.
Un point limite de l'orbite de p pour $t \longrightarrow +\infty$ est, par définition, un point de la forme $\lim\limits_{t_n \longrightarrow +\infty} \varphi_{t_n}(p)$. Si K est un fermé minimal, alors {points limites de l'orbite de $p \in K$} est un fermé invariant, et donc coïncide avec K.
Une orbite récurrente est, par définition, l'orbite d'un point p telle qu'il existe une suite $t_n \longrightarrow \infty$, $\varphi_{t_n}(p) \longrightarrow p$.

2) - Démonstration de la proposition : Supposons que X est défini par $\begin{cases}\alpha(x,y)\\ \beta(x,y)\end{cases}$, et considérons le champ de vecteurs Y défini par $\begin{cases}\beta(x,y)\\ -\alpha(x,y)\end{cases}$. C'est un champ de vecteurs sur T^2. A ce champ de vecteurs correspond un groupe à un paramètre d'homéomorphismes du compact T^2. Si ce champ de vecteurs a une orbite fermée, cette orbite est bien une courbe fermée plongée dans T^2, partout transversale à $\overline{X}$. Sinon, on prend un fermé minimal invariant K de $\overline{Y}$, et $p \in K$; alors, d'après 1), l'orbite de p est une orbite récurrente de $\overline{Y}$; avec t assez grand, on peut lier convenablement $\varphi_t(p)$ avec p (dans un voisinage de p) pour avoir une courbe Γ demandée. (voir le dessin).



<u>Remarque</u> : Cette courbe Γ ne borde pas dans T^2.

<u>Démonstration</u> : ou bien Γ est homologue à 0 et alors Γ borde un disque, ou bien Γ n'est pas homologue à 0 et Γ ne borde pas. Mais si elle borde un disque, puisqu'elle est transversale au champ de vecteurs $\overline{X}$, ce champ a donc un zéro dans ce disque (d'après le théorème de Brouwer), ce qui contredit l'hypothèse sur $\overline{X}$. (on regarde l'application $D^2 \longrightarrow S^1$,

$(x,y) \longrightarrow \frac{X(x,y)}{||X(x,y)||}$ qui prolonge une application $S^1 \longrightarrow S^2$ de degré +1).

<u>Proposition 1.2.</u>

Pour toute courbe fermée différentiable Γ plongée dans T^2 et non homologue à 0, il existe un difféomorphisme $\bar{F} : T^2 \longrightarrow T^2$ tel que $F\{(x=0)\} = \Gamma$.

<u>Démonstration</u> :

Soient a et b les 2 générateurs canoniques de $H_1(T^2)$ et $\langle\Gamma\rangle = pa+qb$.

I) Si Γ est une droite, $(p,q) = 1$, car si $p=kp'$, $q=kq'$, $k\neq 1$, la courbe Γ n'est plus une courbe fermée plongée. D'après le théorème de Bezout, puisque $(p,q) = 1$ il existe $s,t \in \mathbb{Z}$ tels que $ps-qt = -1$.

Le difféomorphisme linéaire de T^2 défini par la matrice $\begin{pmatrix} t & p \\ s & q \end{pmatrix}$ transforme $\{x = 0\}$ en Γ.

2) Si Γ est une courbe quelconque, on a :

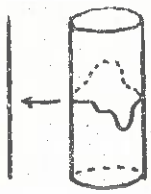
(i) $(p,q) = 1$. En effet, ou bien le complémentaire de Γ dans T^2 est connexe et il existe alors Γ' intersectant Γ transversalement et en un seul point, donc Γ appartient à une base de $H_1(T^2;\mathbb{Z})$, ou bien Γ sépare T^2 en deux composantes connexes, mais alors l'une d'elles est un disque, et Γ est homologue à 0.

(ii) Γ est isotope à la droite correspondante Γ' (c.à.d. la droite telle que $\langle\Gamma\rangle=\langle\Gamma'\rangle = pa + qb$, $(p,q) = 1$.

En effet, $\Gamma \cap \Gamma' = 0$ en homologie, puisque

$(pa + qb)^2 = p^2 a^2 + q^2 b^2 + pq(ab + ba) = 0$

On peut alors séparer Γ et Γ' par isotopie en utilisant un procédé à la Whitney pour réduire le nombre de points d'intersection, puis le théorème de prolongement des isotopies ; Grâce à 1), on se ramène alors au cas où Γ est une courbe fermée non homologue à 0 sur T^2 qui ne coupe pas $\Gamma' = \{x = 0\}$.



On considère alors le tore comme un cylindre dont on identifie les deux extrémités, et on regarde la projection de cette courbe sur l'axe du cylindre ; en appliquant la théorie des fonctions de Morse, on peut trouver une isotopie de Γ à la base du cylindre, qu'on prolonge en une isotopie ambiante de T^2.

§ 4.

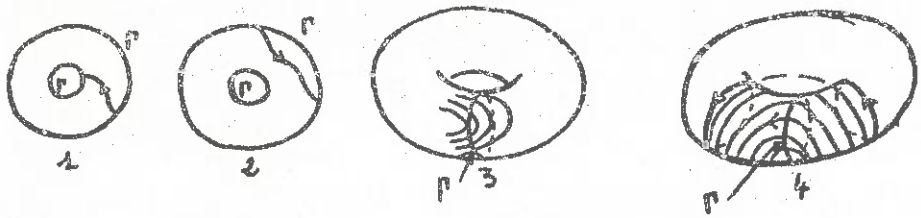
Une 2e hypothèse.

Soient $\overline{X}$ un champ de vecteurs sans zéro sur T^2 et Γ une courbe fermée transversale à $\overline{X}$. Nous supposons que pour tout point $p \in \Gamma$, il existe un $t > 0$ tel que $\varphi_t(p) \in \Gamma$ (φ_t est le flot correspondant à $\overline{X}$) : Alors si on considère le plus petit $t > 0$ tel que $\varphi_t(p) \in \Gamma$, on définit une application de Γ dans Γ $t \longrightarrow \varphi_t(p)$, qu'on appelle l'application de Poincaré (ou application de premier retour).

Remarques :

1) C'est le cas si $\overline{X} = X_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial}{\partial x_2}$ avec X_1 (ou X_2) partout non nul (alors on prend $\Gamma = \{x_1 = 0\}$ (ou $\Gamma = \{x_2 = 0\}$). En particulier, c'est le cas si on perturbe un peu un champ linéaire $a_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + a_2 \frac{\partial}{\partial x_2}$ non identiquement nul.

2) C'est le cas si $\overline{X}$ n'a pas de zéros et n'a pas d'orbites périodiques (grâce au théorème de Poincaré - Bendixson), car si on coupe le tore suivant Γ, on obtient un anneau (plongeable dans R^2) dont on doit identifier les bords. Voir le dessin 1, on ne peut avoir d'orbites comme sur le dessin 2)



parce que Γ est transversale à $\overline{X}$ (v. le dessin 3)

3) C'est le cas aussi si le flot φ_t préserve une mesure lisse $U(x,y)dx\wedge dy$. (Voir Sternberg, celestial mechanics, vol II).

Contre exemple : Voir le dessin 4 (composante de Reeb) : toute orbite issue de Γ spirale vers une droite périodique et ne revient donc pas sur Γ .

Donc, si cette hypothèse est vérifiée, on a une application qu'on nomme application de Poincaré de Γ dans Γ et puisqu'on peut considérer $\Gamma = S^1 = \{x=0\}$, on a donc :

$$\overline{f} : S^1 \longrightarrow S^1.$$

Cette application est continue (elle est de classe C^k si $\overline{X}$ est de classe C^k) et injective, donc surjective, donc homéomorphisme (resp. difféomorphisme de classe C^k : renverser le temps).

Un problème important en hydrodynamique, mécanique céleste ;..., est : quand $\overline{X}$ définit-il un mouvement quasi-périodique sur T^2 ? (c'est-à-dire quand existe-t-il un changement de coordonnées différentiables transformant $\overline{X}$ en un champ linéaire de pente irrationnelle ?).

Sous-problème 1 : quand par homéomorphisme (ou difféom.) transforme-t-on les trajectoires de $\overline{X}$ en celles d'un mouvement quasipériodique (c.à.d. des droites ?).

Sous-problème 2 : reparamétrisation.

§ 5.

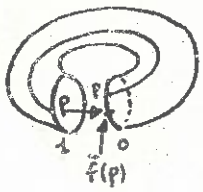
Problème 1er :

Pour chaque champ de vecteurs $\overline{X}$ sur T^2 (dont nous supposons toujours qu'il vérifie les hypothèses ci-dessus), on a (*) une application différentiable

$$S^1 \times [0,1] \longrightarrow T^2$$

(*) Une façon de la construire est de remarquer que le temps de 1er retour varie différentiablement avec p.

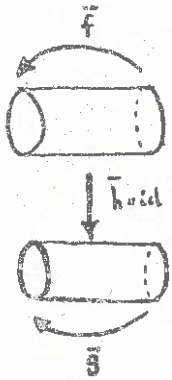
qui envoie les droites $\{p\} \times [0,1]$ sur des morceaux de courbes intégrales de $\bar{X}$, donc, le feuilletage trivial de $S^1 \times [0,1]$ induit sur



$S^1 \times [0,1] \;/\; \{p\times 1 = \bar{f}(p)\times 0\}$ un feuilletage difféomorphe à celui déterminé par le champ de vecteurs $\bar{X}$.

Soient $\bar{X}$ et $\bar{Y}$ deux champs de vecteurs sur T^2 dont les applications de Poincaré correspondantes sont $\bar{f}$ et $\bar{g}$.

Nous cherchons un homéomorphisme (difféomorphisme) de T^2 transformant l'un dans l'autre les feuilletages de ces champs (c.à.d. les courbes intégrales mais non pas les paramètrages de ces lignes). Ce problème se ramène en fait à trouver un homéomorphisme (ou un difféomorphisme) $\bar{h} : S^1 \longrightarrow S^1$, tel que (voir le dessin) :

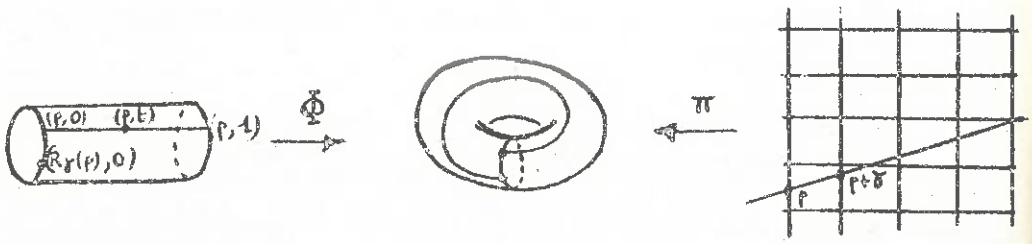


$$\bar{g}\circ\bar{h} = \bar{h}\circ\bar{f} \text{ soit } \bar{g} = \bar{h}\circ\bar{f}\circ\bar{h}^{-1}$$

(c.à.d. un problème de conjugaison dans un groupe d'homéomorphismes (ou des difféomorphismes de T^2).

En particulier, peut-on avoir $\bar{g}$ = rotation ? c.à.d. quand $\bar{f}$ est conjuguée à une rotation ? Dans ce cas, à un même homéomorphisme (ou un difféomorphisme) près, toutes les trajectoires de $\bar{X}$ sont des droites. (Si $\bar{f}$ est la rotation R_γ, l'application $S^1 \times [0,1] \xrightarrow{\Phi} T^2 = S^1 \times S^1$ considérée est ici

$$\Phi(p,t) = (R_{\gamma t}(p),\ t \pmod 1) \text{ (voir le dessin)).}$$



On traitera ce problème dans le chapitre suivant par les théorèmes de Denjoy et d'Herman. Un des buts principaux de ce cours est de voir ce qui se passe en général pour les champs de vecteurs sur T^2 qui vérifient les deux hypothèses précédentes (c.à.d. sans zéros et ayant la propriété de retour sur une courbe fermée transversale à ce champ) au sens de la catégorie de Baire et au sens de la mesure.

§ 6.

Problème 2e :

Nous allons maintenant voir comment, une fois les trajectoires rectifiées, on peut reparamètrer le champ. Ça vaudra alors la peine d'étudier quand est-ce que f est conjugée à une rotation R_γ.

Le problème se pose donc ainsi (théorème de Kolmogorof) : On part d'un champ de vecteurs $\overline{X}$ sur T^2 dont toutes les trajectoires sont des droites, c.à.d.

$$X(x,y) = f(x,y)\left(\gamma\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\right)$$

(par abus de notations, on identifie $\overline{X}$ avec le relèvement $\tilde{X}$) où $\gamma = \text{const}$, $f(x+1,y) = f(x,y)$, $f(x,y+1) = f(x,y)$, $\forall(x,y)$.

Existe-t-il un difféomorphisme $\overline{F} : T^2 \longrightarrow T^2$, $(x,y) \longrightarrow (u,v)$ tel que $\overline{F}_*X$ soit $k\left(\gamma\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v}\right)$ où k est une constante

(c.à.d. un champ de vecteurs quasi-périodique) ?

$\overline{F}$ est définie par

$$F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x,y) \longmapsto (u,v) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \varphi(x,y)$$

où $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ est une application (1,1)-périodique.

Puisque le problème ne change pas par un difféomorphisme linéaire, on peut supposer que $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = id$, donc F est déterminée par 2 fonctions $u(x,y)$, $v(x,y)$ sur $\mathbb{R}^2$ qui vérifient :

$$u(x+1,y) = u(x,y) + 1, \quad v(x+1,y) = v(x,y)$$

$$u(x,y+1) = u(x,y) \quad , \quad v(x,y+1) = v(x,y)+1$$

Donc le problème se ramène au problème suivant :

soient $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction (1,1)-périodique et γ une constante.

On cherche une application

$$F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x,y) \longrightarrow (u(x,y),v(x,y))$$

telle que :

(1) $u - \gamma v = G(x - \gamma y)$ (G est une fonction inconnue).

(2) $u(x+1,y) = u(x,y) + 1$, $u(x,y+1) = u(x,y)$.

$$v(x+1,y) = v(x,y), \quad v(x,y+1) = v(x,y) + 1$$

$$F_*(f(x,y) \left[\gamma\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\right]) = k \left(\gamma\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v}\right),$$

k est une constante inconnue.

Une astuce naturelle : puisque en composant l'isomorphisme cherché avec l'isomorphisme linéaire :

$(x,y) \longrightarrow (x - \gamma y, y) = (\xi,\eta)$, on se ramène au cas du feuilletage $\xi = 0$, il faut donc poser

$$u(x,y) = U(x-\gamma y,y)$$

$$v(x,y) = V(x-\gamma y,y)$$

Alors (1) devient

$$U(x-\gamma y,y) - \gamma V(x-\gamma y,y) = G(x-\gamma y) \text{ c.à.d. } \forall \xi,\eta,$$

$$U(\xi,\eta) - \gamma V(\xi,\eta) = G(\xi),$$

(2) devient

$$U(\xi+1,\eta) = U(\xi,\eta) + 1,\ U(\xi-\gamma,\eta+1) = U(\xi,\eta),$$

$$V(\xi+1,\eta) = V(\xi,\eta),\ V(\xi-\gamma,\eta+1) = V(\xi,\eta) + 1,$$

(3) dit : $(F_*X)(u,v) = Y(u,v)$, c.à.d.,

$$Y(u(x,y),\ v(x,y)) = dF(x,y)\ X(x,y), \text{ où}$$

$$X(x,y) = f(x,y)\ \left(\gamma \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\right), \text{ donc}$$

$$Y(u(x,y),v(x,y)) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma f(x,y) \\ f(x,y) \end{pmatrix}$$

donc :

$$Y(u,v) = f(x,y)\ \left[\left(\gamma \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial u}{\partial y}(x,y)\right) \frac{\partial}{\partial u} + \right.$$

$$\left. + \left(\gamma \frac{\partial v}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial v}{\partial y}(x,y)\right) \frac{\partial}{\partial v}\right].$$

Mais $\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial u}{\partial \xi}(\xi,\eta)$, $\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial v}{\partial \xi}(\xi,\eta)$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = -\gamma \frac{\partial u}{\partial \xi}(\xi,\eta) + \frac{\partial u}{\partial \eta}(\xi,\eta)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}(x,y) = -\gamma \frac{\partial v}{\partial \xi}(\xi,\eta) + \frac{\partial v}{\partial \eta}(\xi,\eta),$$

donc

$$\gamma \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = \gamma \frac{\partial U}{\partial \xi} - \gamma \frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{\partial U}{\partial \eta} = \frac{\partial U}{\partial \eta}$$

$$\gamma \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \gamma \frac{\partial V}{\partial \xi} - \gamma \frac{\partial V}{\partial \xi} + \frac{\partial V}{\partial \eta} = \frac{\partial V}{\partial \eta} .$$

Donc

$$Y(u,v) = f(x,y) \left[\frac{\partial U}{\partial \eta}(\xi,\eta) \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial V}{\partial \eta}(\xi,\eta) \frac{\partial}{\partial v}\right],$$

mais

$$\frac{\partial U}{\partial \eta} - \gamma \frac{\partial V}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \eta} G(\xi) = 0,$$

donc

$$Y(u,v) = f(x,y) \frac{\partial V}{\partial \eta}(x-\gamma y,y) \left[\gamma \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v}\right] ,$$

et la condition (3) devient

$f(x,y) \frac{\partial V}{\partial \eta} (x-\gamma y,y) = k$ (constante inconnue).

Posons $f(x,y) = \varphi(x - \gamma y,y)$.

Alors, puisque f est (1,1) périodique, $\varphi(\xi+1,\eta) = \varphi(\xi-\gamma,\eta+1) = \varphi(\xi,\eta)$

La condition (3) est donc $\varphi(\xi,\eta) \frac{\partial V}{\partial \eta}(\xi,\eta) = k$, $\forall \xi,\eta$.

Puisque $V(x,y)$, $f(x,y) \neq 0$, $\varphi(\xi,\eta) \neq 0$, pour tous (ξ,η)

Donc $\frac{\partial V}{\partial \eta}(\xi,\eta) = \frac{k}{\varphi(\xi,\eta)}$, et

$$V(\xi,\eta) = \int_0^\eta \frac{k}{\varphi(\xi,\zeta)} d\zeta + R(\xi).$$

La condition $V(\xi+1,\eta) = V(\xi,\eta)$ du (2) implique que $R(\xi)$ est une fonction 1-périodique.

La condition $V(\xi-\gamma,\eta+1) = V(\xi,\eta) + 1$ du (2) donne :

$$\int_0^{\eta+1} \frac{k}{\varphi(\xi-\gamma,\zeta)}\, d\zeta + R(\xi-\gamma) = \int_0^{\eta} \frac{k}{\varphi(\xi,\zeta)}\, d\zeta + R(\xi) + 1,$$

mais

$$\int_0^{\eta+1} \frac{k}{\varphi(\xi-\gamma,\zeta)}\, d\zeta = \int_0^{\eta+1} \frac{k}{\varphi(\xi,\zeta-1)}\, d\zeta = \int_{-1}^{\eta} \frac{k}{\varphi(\xi,\zeta)}\, d\zeta,$$

donc,

$$R(\xi-\gamma) - R(\xi) = 1 - \int_{-1}^{0} \frac{k}{\varphi(\xi,\zeta)}\, d\zeta = S(\xi).\text{(par définition)}$$

Alors $S(\xi)$ est une fonction 1-périodique (car φ est périodique en ξ).
Donc si on l'intègre sur une période on a $\int_0^1 S(\xi)\, d\xi = 0$, ceci détermine k, donc $S(\xi)$ est connue.

Les autres conditions sont alors automatiquement vérifiées.
Donc on est ramené au problème standard de petits dénominateurs avec l'équation aux différences.

$$R(\xi-\gamma) - R(\xi) = S(\xi)$$

où $S(\xi)$ est une fonction 1-périodique donnée et on doit trouver R 1-périodique.

<u>1er cas</u> : γ rationnel, $\gamma = p/q$.
Alors $R(\xi-\frac{p}{q}) - R(\xi) = S(\xi)$

$$R(\xi-\frac{2p}{q}) - R(\xi-\frac{p}{q}) = S(\xi-\frac{p}{q})$$

- - - - - -

$$R(\xi-q\frac{p}{q}) - R(\xi-(q-1)\frac{p}{q}) = S(\xi-(q-1)\frac{p}{q}).$$

Donc $\sum_{i=0}^{q-1} S(\xi - i\frac{p}{q}) = 0$; on a des conditions très astreignantes, donc il n'y a pas de solutions dans le cas général.

<u>2e cas</u> : γ irrationnel.

Supposons que $S(\xi)$ est assez lisse, alors on a :

$$S(\xi) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{2i\pi n\xi}.$$

$a_0 = 0$ puisque

$$\int_0^1 S(\xi)\, d\xi = 0$$

On cherche $R(\xi)$ formellement sous la forme

$$R(\xi) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n e^{2i\pi n\xi}$$

Alors, on a l'équation

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n e^{2i\pi n(\xi-\gamma)} - \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n e^{2i\pi n\xi} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{2i\pi n\xi},$$

donc, pour tout $n \neq 0$,

$$b_n = \frac{a_n}{e^{-2i\pi n\gamma}-1}.$$

(On voit déjà que, même formellement, il n'y a pas de solution si γ est rationnel, car alors ce dénominateur peut être nul).

Mais cette série ne converge pas toujours :

<u>Exemple</u> :

$$\gamma = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{10^{k_n}}, \quad k_0 = 1,$$

$k_{n+1} - k_n = k_n\, 10^{k_n}$. Alors γ est un irrationnel (parce qu'il n'a pas de période dans la représentation décimale) (en fait, il est un nombre transcencant).

On doit évaluer le dénominateur $e^{-2i\pi\, n\gamma} - 1$. Soit $\{x\}$ la distance du nombre x à l'ensemble $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$, alors $|e^{-2i\pi\, n\gamma} - 1| \sim \{n\gamma\}$.

On a :

$$10^{k_n}\gamma = \overbrace{\frac{10^{k_n}}{10^{k_0}} + \frac{10^{k_n}}{10^{k_1}} + \dots \frac{10^{k_n}}{10^{k_n}}}^{\text{entier}} + \frac{10^{k_n}}{10^{k_{n+1}}}\left(1 + \frac{1}{10^{k_{n+2} - k_{n+1}}} + \dots\right),$$

$$\text{donc } \{10^{k_n}\gamma\} \leq \frac{2}{10^{k_{n+1} - k_n}} = \frac{2}{(10^{k_n})\,10^{k_n}}$$

et quand n est assez grand,

$$|e^{-2\pi\, 10^{k_n}\gamma} - 1| \leq \frac{\text{Cte}}{(10^{k_n})\; 10^{k_n}}$$

Soit $S(\xi)$ la trace sur S^1 de la fonction analytique

$$S(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{2i\pi\, n\xi}}{n!} = e^{e^{2i\pi\xi}} - 1,$$

alors $a_{10^{k_n}} = \dfrac{1}{(10^{k_n})!}$ et

$$|\, b_{10^{k_n}} | \geq \text{Cte}\; \frac{(10^{k_n})\; 10^{k_n}}{(10^{k_n})!}$$

donc $b_{10^{k_n}}$ ne tend pas vers zéro quand n tend vers $+\infty$, et la série ne converge pas.

Donc il existe des champs de vecteurs analytiques sur T^2 dont les trajectoires sont des droites, qui ne peuvent pas être transformés par changement de coordonnées différentiable en un champ constant. On peut proposer un exemple explicite de tels champs (exercice !)

$$X = e^{\cos 2\pi x + \cos 2\pi y}\left(\gamma \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\right),$$

avec le γ ci-dessus.

Résolution pour de "bons" γ :

On doit évaluer $b_n = \dfrac{a_n}{e^{-2i\pi n\gamma} - 1} = \dfrac{a_n}{e^{-2i\pi (n\gamma - m)} - 1}$,

mais

$$|e^{-2i\pi(n\gamma-m)} - 1| \sim 2\pi\ |n\gamma-m| \text{ si } \gamma \sim \frac{m}{n}$$

est petit, donc on cherche des nombres γ tels que $\forall n,m$, $|n\gamma-m|$ > quelque chose ou encore $|\gamma - \frac{m}{n}|$ > quelque chose (c.à.d. est mal approximé par les rationnels).

Lemme : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble A_ε de mesure de Lebesgue nulle dans $[0,1]$ tel que pour tout $\gamma \notin A_\varepsilon$, $\gamma \in [0,1]$, il existe $C > 0$ tel que pour tous entiers p,q, $|\gamma - \frac{p}{q}| > \dfrac{C}{q^{2+\varepsilon}}$

Démonstration :

Soit $B_r = \{\gamma \in [0,1]\ ,\ \exists q \in \mathbb{Z},\ q > 0,\ \forall p \in \mathbb{Z},\ p < q,\ |\gamma - \frac{p}{q}| < \dfrac{r}{q^{2+\varepsilon}}\}$.

B_r est l'union d'intervalles de longueurs $\dfrac{2r}{q^{2+\varepsilon}}$ centrés sur les rationnels,

et de deux intervalles de longueur $\dfrac{r}{q^{2+\varepsilon}}$ aux extrémités de $[0,1]$.

Si q est fixé, alors, la somme des longueurs de ces intervalles est

$$\frac{(q-1)2r}{q^{2+\varepsilon}} + \frac{r}{q^{2+\varepsilon}} + \frac{r}{q^{2+\varepsilon}} = \frac{2qr}{q^{2+\varepsilon}} = \frac{2r}{q^{1+\varepsilon}} ,$$

donc

$$m(B_r) = 2r\ (\sum_{\substack{q \in \mathbb{Z} \\ q > 0}} \frac{1}{q^{1+\varepsilon}}) = 2rs\ (s = \sum_{\substack{q \in \mathbb{Z} \\ q > 0}} \frac{1}{q^{1+\varepsilon}}$$

est un nombre fini).

Si γ ne satisfait la condition du lemme pour aucun C, c.à.d.

$\forall C > 0, \exists q \in \mathbb{Z}, q > 0,$

tel que $|\gamma - \frac{p}{q}| < \frac{C}{q^{2+\varepsilon}}$, alors $\gamma \in \bigcap_{r>0} B_r$; mais $m(\bigcap_{r>0} B_r) < 2rs, \forall r > 0$

(s est un nombre > 0 fixé), donc $m(\bigcap_{r>0} B_r) = 0$. Q.E.D.

<u>Remarque</u> : pourtant, $A_\varepsilon = \bigcap_{r>0} B_r$ est l'intersection dénombrable d'ouverts denses, car chaque B_r est un ouvert dense dans $[0,1]$. Donc A_ε est petit pour la mesure mais grand pour la catégorie de Baire !).

<u>Définition</u> :

on dit que chaque $\gamma \in D_\varepsilon = [0,1] - A_\varepsilon$ satisfait une condition diophantienne ($D_\varepsilon \subset [0,1]$ est de mesure de Lebesgue 1 dans $[0,1]$).

<u>Conséquence de l'hypothèse $\gamma \in D_\varepsilon$</u>:

$\forall \gamma \in D_\varepsilon, \exists C > 0, \forall q \in \mathbb{Z}, q > 0, \forall p \in \mathbb{Z}_+,$

$|q\gamma - p| > \frac{C}{q^{1+\varepsilon}}$, donc

$|b_n| \leq C^{te} |a_n| \, |n|^{1+\varepsilon}$.

<u>Cas où $S(\xi)$ est de classe C^k $(k \geq 3)$</u> :

Si $\gamma \in D_\varepsilon$ pour un $0 < \varepsilon < 1$ et si S est de classe C^k $(k \geq 3)$, il existe une et une seule R qui est de classe C^{k-3}, en particulier, si S est de classe C^∞ alors R est aussi de classe C^∞. (en fait la perte réelle de différentiabilité n'est que $1+\varepsilon'$, $\forall \varepsilon' >> \varepsilon$; voir thèse d'Herman).

En effet, si S est de classe C^k(p. ex. si $f(x,y)$ est de classe C^k), on a $|a_n| \leq \frac{Cte}{|n|^k}$, donc $|b_n| \leq \frac{Cte}{|n|^{k-1-\varepsilon}}$ et la série correspondant à b_n

converge (puisque $k \geq 3$, $0 < \varepsilon < 1$).

De plus, les coefficients de Fourier de la dérivée d'ordre ℓ de

$$R(\xi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n \; e^{2i\pi n\xi} \quad \text{sont de la forme} \quad \text{const.} \sum_{n=-\infty}^{\infty} n^{\ell} \, b_n \, e^{2i\pi n\xi},$$

donc $R(\xi)$ est ℓ-fois dérivable dès que $|n^{\ell} \, b_n| \leq \dfrac{\text{Cte}}{|n|^{k-\ell-1-\varepsilon}}$,

donc si $k - \ell > 3$, tout va bien

<u>Cas où $f(x,y)$ analytique</u> :

Alors $S(\xi)$ est analytique ; S a un prolongement analytique pour $z = \xi + i\lambda$, $|\mathrm{Im} z|$ petit, donc il existe $\delta > 0$ tel que $S(z)$ est holomorphe pour $|\mathrm{Im} z| < \delta$ (parce que S^1 est compact !).

On a encore le résultat précédent : pour S analytique, il existe une et une seule R et R est analytique (v. Sternberg).

<u>Références</u> :

1. S. Sternberg : Celestial mechanics, Vol. II, Benjamin New-York (1969).

2. D.V. Arnold : Small dénominators
   - YMH Vol. 18, 6 (1968) p. 91-196
   - MAH 25,1 (1961) p. 21-86.

Chapitre II

NOMBRE DE ROTATION

Si un difféomorphisme du cercle S^1 est conjugué à une rotation, l'angle de rotation est bien déterminé. L'idée de déterminer cet angle remonte à H. Poincaré. La démonstration que nous donnerons ici est un peu différente, basée sur la notion de mesure invariante.

Référence : Thèse de Michael Herman (Paris 1976).

§ 1.

Notations :

Nous identifions $S^1 = T^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

Notons :

$\mathrm{Diff}^r_+(T^1) = \{\bar{f} : T^1 \longrightarrow T^1$, difféomorphisme de T^1 de classe C^r conservant l'orientation$\}$. (Remarquons que la condition de conservation de l'orientation ici est équivalente à la condition d'homotopie à l'identité).

$D^r(T^1) = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, difféomorphisme de $\mathbb{R}$ de la forme $f = \mathrm{id} + \varphi$,

$\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une application de classe C^r, périodique,

$\varphi(x+1) = \varphi(x)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}\}$.

Nous avons une application

$$D^r(T^1) \longrightarrow \mathrm{Diff}^r_+(T^1),$$

qui est en fait un revêtement universel de fibre $\mathbb{Z}$; par exemple, la rotation $\bar{R}_\alpha$ de l'angle α de T^1 se relève en $R_\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longrightarrow x+\alpha+k$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Dans ce qui suit, nous identifierons une fonction 1-périodique sur $\mathbb{R}$ et une fonction sur T^1.

§ 2.

Théorème fondamental II.1.

Soit $f \in D^0(T^1)$, $f = id + \varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ un homéomorphisme (φ 1-périodique). Alors la suite de fonctions

$\frac{f^k - Id}{k}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ quand $k \longrightarrow \infty$ vers une fonction constante dont la valeur est notée par $\rho(f)$; $\rho(f)$ est appelé nombre de rotation de f.

Remarque : le nom est bien naturel, car si la rotation $\bar{f} = \bar{R}_\gamma$ de l'angle γ est relevée en la translation $f = Id + \gamma$, on a $f^k = Id + k\gamma$,

$\frac{f^k - Id}{k} = \gamma$, donc $\rho(f) = \gamma$.

Démonstration :

Si le théorème est vrai, $\left|\frac{f^k - Id}{k} - \rho(f)\right|_0 \longrightarrow 0$ (ici, pour $\varphi : T^1 \longrightarrow \mathbb{R}$, on pose $|\varphi|_0 = \sup_{x \in T^1} |\varphi(x)|$).

Mais $\left|\frac{f^k - Id}{k} - \rho\right|_0 = \frac{1}{k} |f^k - Id - k\rho|_0$,

il suffit donc de trouver ρ tel que $|f^k - Id - k\rho|$ soit borné uniformément.

(1) Lemme. $\forall k, \forall \rho$, $\mathrm{Max}\,(f^k - Id - k\rho) - \mathrm{Min}(f^k - Id - k\rho) < 1$.

Démonstration :

Soient $\psi = f^k - Id - k\rho$, $g = f^k - k\rho$.

Alors $g = Id + \psi$ est un homéomorphisme de $\mathbb{R}$ (le lemme est en fait vrai pour tout $\psi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ périodique tel que $Id + \psi$ soit un homéomorphisme de $\mathbb{R}$).

Soient $M = \text{Max}\ \psi$, $m = \text{Min}\ \psi$, x_M, $x_m \in \mathbb{R}$ tels que $\psi(x_M)=M$, $\psi(x_m) = m$,

$0 \leq x_M - x_m < 1$:

Pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 \leq x_m \leq x_M \leq x_0+1$,

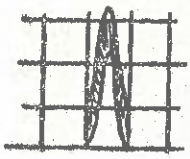
$$g : [x_0, x_0+1] \longrightarrow [g(x_0), g(x_0)+1],$$

g est croissante (parce que g est un homéomorphisme conservant l'orientation),

donc $0 \leq g(x_M) - g(x_m) < 1$, mais $g(x_M) = x_M + M$, $g(x_m) = x_m+m$, donc

$0 \leq (M-m) + (x_M-x_m) < 1$, et ainsi, $M - m < 1$.

<u>Remarque</u> :



Ce lemme est faux sur T^n, $n \geq 2$, c.à.d. pour $g = Id + \psi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$,

ψ $\mathbb{Z}^n$-périodique, g homéomorphisme de R^n, on n'a pas

$\text{Max}\ \psi - \text{Min}\ \psi \leq 1$ (voir le dessin pour $n = 2$).

<u>Conséquence</u> :

donc, pour démontrer le théorème, il suffit de trouver ρ tel que $\forall k$, $\exists x \in \mathbb{R}$,

$f^k(x) - x - k\rho$ soit borné uniformément (indépendamment de k) ou encore

il suffit de prouver qu'il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que

$$\lim_{k \to \infty} \frac{f^k(x) - x}{k} \text{ existe } (= \rho).$$

(2) Puisque $f = Id + \varphi$, on a $f^2 = f \circ f = (Id+\varphi) \circ f = f + \varphi \circ f = Id + \varphi + \varphi \circ f$,

$f^3 = (Id + \varphi + \varphi \circ f) \circ f = f + \varphi \circ f + \varphi \circ f^2 = Id + \varphi + \varphi \circ f + \varphi \circ f^2$, etc...

et par récurrence, on a

$$\frac{f^k - Id}{k} = \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} \varphi \circ f^i$$

(donc apparait la moyenne de φ sur l'orbite de f).

Théorème ergodique de Birkhoff:

Soient $\bar{f} \in \mathrm{Diff}^0_+(T^1)$ et $\mu \in C^0(T^1)'$ une mesure de Radon invariante par $\bar{f}$ (c.à.d. $\bar{f}_*\mu = \mu$), alors pour tout $\varphi \in L^1_\mu$, la somme

$$\frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} \varphi \circ \left(\bar{f}\right)^i \text{ converge } \mu\text{-presque partout.}$$

Dans notre situation, nous ne demandons que la convergence en un point. Donc nous cherchons une démonstration directe. Remarquons que si on trouve ρ tel que $f^k - \mathrm{Id} - k\rho$, s'annule en un point, (pour tout k !), alors on gagne.

Théorème : Soit $\bar{f} \in \mathrm{Diff}^0_+(T^1)$, alors il existe une mesure de probabilité μ sur T^1 (c.à.d. $\mu \in C^0(T^1)'$ (espace des mesures de Radon sur T^1), $\mu \geq 0$, $\mu(T^1) = 1$), invariante par $\bar{f}$ (c.à.d. $\bar{f}_*\mu = \mu$).

Supposons que ce théorème soit démontré.

Alors

$$\frac{f^k - \mathrm{Id}}{k} = \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} \varphi \circ \bar{f}^i, \quad \mu(f^k - \mathrm{Id}) = \sum_{i=0}^{k-1} \mu(\varphi \circ \bar{f}^i).$$

Mais $\bar{f}_*\mu = \mu$, donc $\bar{f}_*\mu(\psi) = \mu(\psi \circ \bar{f}) = \mu(\psi)$, et ainsi $\mu(\varphi \circ \bar{f}^i) = \mu(\varphi)$ pour tout i ; donc $\mu(f^k - \mathrm{Id}) = k\mu(\varphi)$; $\mu(f^k - \mathrm{Id} - k\mu(\varphi)) = 0$ (puisque $\mu(T^1) = 1$). Posons $\rho(f) = \mu(\varphi)$, alors $\rho(f)$ satisfait le théorème : en effet, puisque $\mu \geq 0$, $\forall k$, $\exists x_k$, $f^k(x_k) - x_k - k\mu(\varphi) = 0$, donc $\forall k$, $\forall x$, $|f^k(x) - x - k\mu(\varphi)| < 1$, d'où on a la convergence uniforme.

Remarque : On peut donc calculer théoriquement $\rho(f)$. Par exemple, pour $f(x) = x + \alpha$, on peut prendre pour μ la mesure de Lebesgue et on trouve bien $\rho(f) = \frac{1}{2\pi}\int \alpha ds = \int_0^1 \alpha dx = \alpha$.

(3) Il ne reste donc qu'à démontrer le théorème précédent de l'existence d'une mesure de probabilité invariante. (Voir N. Bourbaki : Esp. vect. topol. 1. appendice).

<u>Théorème de Markov-Kakutani</u> : Soient E un espace vectoriel topologique séparé, K un compact convexe non vide de E, Γ un ensemble d'applications affines $E \longrightarrow E$ qui vérifient les conditions suivantes :

1) $\forall f, g \in \Gamma$, $f \circ g = g \circ f$,

2) $\forall f \in \Gamma$, $f(K) \subset K$,

3) $\forall f \in \Gamma$, $f_{|K}$ est continue.

Alors, il existe un point $x_0 \in K$ tel que $f(x_0) = x_0$, $\forall f \in \Gamma$.

<u>Démonstration de ce théorème</u> :

On cherche à résoudre $(Id - f)(x) = 0$. L'idée pour trouver x est de faire une moyenne à partir d'un point quelconque : soit $x = \frac{1}{n}(y + f(y) + \ldots + f^{n-1}(y))$, alors $x - f(x) = \frac{1}{n}(y - f^n(y))$, on voit bien à quoi va servir la convexité.

Soient $f \in \Gamma$, n entier > 0 ; on pose $f_n(x) = \frac{1}{n}(x + f(x) + \ldots + f^{n-1}(x))$;

On définit ainsi une application affine $f_n : E \longrightarrow E$. Puisque K est convexe et que $f(K) \subset K$, on a $f_n(K) \subset K$, et $f_{n|K}$ est continue.

Notons $\Gamma' = \{$produit d'un nombre fini d'applications f_n, $f \in \Gamma$, $n \in \mathbb{N}\}$.

Alors Γ' vérifie aussi les 3 hypothèses du théorème (évident !).

Notons $\Delta' = \{g(K) \mid g \in \Gamma'\}$; alors Δ' est une base de filtre sur K, c.à.d., si $A \in \Delta'$, $B \in \Delta'$, il existe $C \in \Delta'$, $C \subset A \cap B$. En effet, si $A = g_1(K)$, $B = g_2(K)$, alors $C = g_1 \circ g_2(K) \subset A \cap B$ (la permutabilité sert ici !)

Puisque chaque $A \in \Delta'$ est compact, et Δ' est une base de filtre sur K,

$\bigcap_{A \in \Delta'} A \neq \phi$. Soit $x \in \bigcap_{A \in \Delta'} A$, alors pour tout n et pour tout $f \in \Gamma$, il existe $y \in K$ (y peut dépendre de n et de f), tel que $x = f_n(y)$).

(donc $x - f(x) = \frac{1}{n}(y - f^n(y))$.

Quand $n \to \infty$, $x - f(x)$ est dans tout voisinage de 0, donc $x = f(x)$ car E est séparé [si V est un voisinage équil. de 0 dans E, $K - K$ est compact (image de $K \times K$ par l'application $(x,y) \to (x-y)$, donc il existe $\alpha > 0$ tel que $\alpha(K - K) \subset V$. Si $\frac{1}{n} < \alpha$, alors $f(x) - x \in V$].

Donc tout $x \in \bigcap_{A \in \Delta'} A$ est un point fixe pour toute $f \in \Gamma$. Q.E.D.

<u>Applications</u> :

1) Il existe des moyennes invariantes sur tout groupe commutatif.

2) <u>Application à notre problème</u>. Soient X un espace topologique compact métrisable, $f : X \to X$ une application continue. On munit l'espace $C^0(X)$ de la topologie de la convergence uniforme. Alors l'application $f_* : C^0(X)' \to C^0(X)'$ est continue pour la topologie faible, $C^0(X)'$ étant l'espace des mesures de Radon sur X. Soit K le sous-espace des mesures de probabilité sur X. (c.à.d. $\mu > 0$ et $\mu(1) = 1$). Alors il est clair que K est convexe. K est faiblement compact car : $\mu(1) = 1, \mu \geq 0$, donc $||\mu|| = \sup_{||\varphi|| = 1} |\mu(\varphi)| \leq 1$; rappelons que $||\varphi|| = \sup_{x \in X} |\varphi(x)|$ et puisque $\mu \geq 0$, $\mu(\varphi) \leq \mu(1) = 1$; K est donc un fermé de la boule unité (pour la topologie faible) de $C^0(X)'$; mais la boule unité de $C^0(X)'$ est faiblement compacte (ceci découle du théorème d'Ascoli), donc K est faiblement compact.

Si $\{f_i\}_{i \in I}$ est une famille d'applications continues de X dans X, $f_i \circ f_j = f_j \circ f_i$, $\forall i, j \in I$, alors d'après le théorème de Markov-Kakutani, il existe une mesure de probabilité μ sur X, telle que $f_{i*}\mu = \mu$, $\forall i \in I$. Q.E.D.

§ 3.

PROPRIETES DU NOMBRE DE ROTATION DE T^1.

1) L'application $D^0(T^1) \xrightarrow{\rho} \mathbb{R}$

$$f \longmapsto \rho(f) = \mu(\varphi)$$

$$(f = Id + \varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R})$$

est une application continue. (Remarquons que μ n'est pas unique. Par exemple si $f = R_\alpha$, $\alpha \notin \mathbb{Q}$, alors μ doit être la mesure de Lebesgue, mais avec $\alpha = \frac{1}{q}$, μ peut être la mesure de Lebesgue ou bien une mesure de la forme : $\frac{1}{q}\,\delta$ en tous les points $\frac{p}{q}$, $p = 0,1,\ldots,q-1$. Mais en tout cas, $\mu(\varphi) = \rho(f)$ est bien défini). L'application ρ est continue car elle est la limite uniforme (en f) des applications continues

$$f \longmapsto \frac{f^k - Id}{k}.$$

Si on passe au quotient (on peut passer au quotient car pour $p \in \mathbb{Z}$, $\mu(\varphi+p) = \mu(\varphi)+p$, c.à.d. $\rho(R_p o f) = \rho(f) + p$), on a une application.

$$Diff^0_+(T^1) \xrightarrow{\rho} T^1$$

qui est continue pour la C^0-topologie.

2) Pour tout $f \in D^0(T^1)$, l'application $f^k - Id - k\rho(f) = f^k \circ R_{-k\rho(f)}$ a un point fixe (c'est la propriété qui caractérise $\rho(f)$: voir la démonstration du théorème II.1.).

Si $\rho(f) = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, on prend $k = -q$ et alors il existe x tel que $f^q \circ R_{-p}(x) = x$ donc $\bar{f}^q(x) = x$, c.à.d. $\bar{f}^q$ a un point fixe.

Réciproquement, s'il existe x, $\bar{f}^q(x) = x$, alors $f^q(x) = R_p(x)$, $f^{nq}(x) = R_{np}(x)$, donc $\frac{f^{nq}(x) - x}{nq} = \frac{x + pn - x}{nq} = \frac{p}{q}$.

Mais d'après le théorème fondamental II.1., pour calculer $\rho(f)$, on peut calculer la limite pour un point quelconque ; ici nous choisissons x pour ce point et on a $\rho(f) = \frac{p}{q}$.

Donc on a <u>le lemme II.2.</u> : $\rho(f)$ est rationnel si et seulement si f a un point périodique. (C'est déjà intéressant car si nous retournons à l'équation différentielle sur le tore T^2, dans ce cas, nous avons une courbe intégrale fermée (une trajectoire périodique)).

3) Inégalité du nombre de rotation :

$|f^k - Id - k\rho(f)| < 1$

(car cette fonction s'annule et max - min < 1).

4) Invariance par conjugaison :

Si $f, g \in D^0(T^1)$ et si $h = Id + \varphi : R \longrightarrow R$ est une application continue telle que $h \circ f = g \circ h$, alors $\rho(f) = \rho(g)$. (Nous ne demandons pas que h soit nécessairement un homéomorphisme c.à.d. $h \in D^0(T^1)$. Si c'est le cas, alors f et g sont conjugués).

<u>Démonstration</u> : $h \circ f = g \circ h$; par récurrence on a $h \circ f^n = g^n \circ h$. Puisque $h = Id + \varphi$, on a $f^n + \varphi \circ f^n = g^n \circ h$, donc :

$$\frac{f^n - Id}{n} + \frac{\varphi \circ f^n}{n} = \frac{g^n \circ h - Id}{n} = \frac{g^n \circ h - h}{n} + \frac{h - Id}{n}.$$

Mais $h - Id = \varphi$ est une fonction périodique continue, donc φ est bornée

et ainsi $\left|\frac{\varphi}{n}\right| \longrightarrow 0$, $\left|\frac{\varphi \circ f^n}{n}\right| \longrightarrow 0$ quand $n \to \infty$; et puisque

$$\lim_{n\to\infty} \frac{g^n \circ h - h}{n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{g^n - Id}{n} \circ h\right) = \rho(\sigma),$$

on a bien $\rho(f) = \rho(g)$.

5) Corollaire :

Si f est conjuguée à R_α, $\rho(f) = \alpha$ parce que $\rho(R_\alpha) = \alpha$.

6) Si $f,g \in D^0(T^1)$, $f \circ g = g \circ f + p$, $p \in \mathbb{Z}$, alors $\rho(f \circ g) = \rho(f) + \rho(g)$ et $p = 0$.

En effet, puisque $\bar{f} \circ \bar{g} = \bar{g} \circ \bar{f}$, d'après le théorème de Markov-Kakutani, il existe une mesure de probabilité μ sur T^1, invariante par $\bar{f}$ et $\bar{g}$: $\bar{f}_*\mu = \mu = \bar{g}_*\mu$, donc invariante par $\bar{f} \circ \bar{g}$.

On écrit $f = Id + \varphi$, $g = Id + \psi$, on a $f \circ g = g + \varphi \circ g = Id + \psi + \varphi \circ g$.

Donc $\rho(f \circ g) = \mu(\psi + \varphi \circ g) = \mu(\psi) + \mu(\varphi \circ g) = \mu(\psi) + \mu(\varphi) = \rho(f) + \rho(g)$.

On a pour la même raison $\rho(g \circ f) = \rho(g) + \rho(f)$.

Mais d'après l'hypothèse, $f \circ g = g \circ f + p$, donc $\rho(f \circ g) = \rho(g \circ f) + p$.

Donc $p = 0$.

§ 4.

UN EXEMPLE FONDAMENTAL.

(L'exemple d'Arnold). Pour tous $a,b \in \mathbb{R}$, considérons l'application

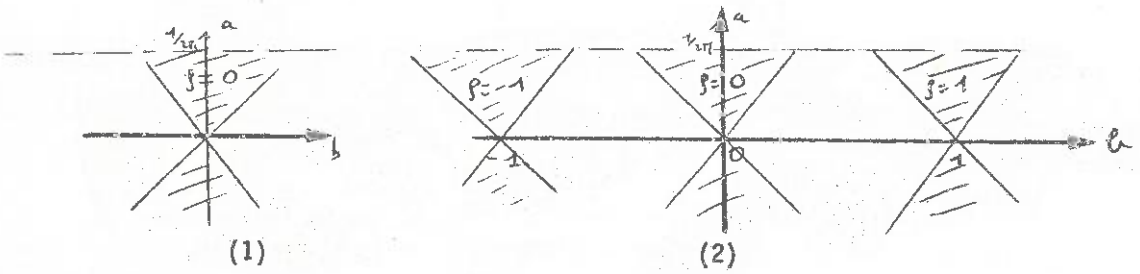
$f_{a,b} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f_{a,b}(x) = x + a \sin 2\pi x + b$.

Alors : $f_{a,b} = R_b \circ f_{a,0}$; pour $|a| < \frac{1}{2\pi}$, $f_{a,b}$ est injective ; donc nous supposons toujours que $|a| < \frac{1}{2\pi}$, et alors $f_{a,b} \in D^0(T^1)$.

1) Si $|b| < |a|$, il est clair que $f_{a,b}$ a un point fixe.

Donc pour tout (a,b) dans ce domaine de $\mathbb{R}^2$ (v. le dessin 1), $f_{a,b}$ vérifie $\rho(f_{a,b}) = 0$ (puisque $\rho(f) = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R},\ f^q(x) - R_p(x) = 0 \Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R},\ f^q(x) - x - p = 0$).

Puisque $\rho(R_p \circ f) = \rho(f) + p$ $(p \in \mathbb{Z})$, les domaines dans $\mathbb{R}^2$ tels que pour (a,b) dans ces domaines, $\rho(f_{a,b}) \in \mathbb{Z}$ sont comme sur le dessin 2 :



(1) (2)

Puisque pour a fixé l'application $h_a : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$b \longmapsto \rho(f_{a,b})$$

est continue, on applique le théorème des valeurs intermédiaires et on a le :

<u>Corollaire</u> : pour a fixé (toujours $|a| < \frac{1}{2\pi}$), pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $\rho(f_{a,b}) = \alpha$.

<u>Remarque</u> : $\rho(f_{0,\alpha}) = \alpha$ car $f_{0,\alpha} = R_\alpha$.

<u>2) Proposition II.3.</u> Pour a fixé $\neq 0$ ($|a| < \frac{1}{2\pi}$), pour tout $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, $h_a^{-1}(\frac{p}{q})$ est un intervalle fermé d'intérieur non vide.

<u>Démonstration</u> : L'application $b \longmapsto h_a(b) = \rho(f_{a,b})$ étant continue, $h_a^{-1}(b)$ est fermé.

Pour montrer que $h_a^{-1}(b)$ est connexe, on montre que h_a est monotone.

Cela résulte de la proposition générale :

<u>Proposition</u> : Soit $f \in D^r(T^1)$, alors l'application

$h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $b \longmapsto h(b) = \rho(R_b \circ f)$ est continue monotone (non décroissante).

<u>Démonstration</u> : (évidente) : Soit $b_1 < b_2$, alors pour tout x, $R_{b_1}(f(x)) < R_{b_2}(f(x))$, donc, par récurrence, $(R_{b_1} \circ f)^n < (R_{b_2} \circ f)^n$, donc $\rho(R_{b_1} \circ f) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(R_{b_1} \circ f)^n - Id}{n} \leq$

$$\leq \lim_{n\to\infty} \frac{(R_{b_2} \circ f)^n - Id}{n} = \rho(R_{b_2} \circ f). \qquad \text{Q.E.D.}$$

Donc il reste à voir que $h_a^{-1}(\frac{p}{q})$ est d'intérieur non vide si $a \neq 0$. Supposons que $h_a^{-1}(\frac{p}{q}) = \{b_0\}$. On sait que $f^q_{a,b_0} - R_p$ s'annule quelque part. Il est clair que $f^q_{a,b_0} - R_p$ ne peut changer de signe en s'annulant, car la propriété de changement de signe en s'annulant est une propriété ouverte dans la C^0-topologie : pour b assez proche de b_0, $f^q_{a,b} - R_p$ s'annulerait et $\rho(f_{a,b})$ serait égal à $\frac{p}{q}$ donc $h_a^{-1}(\frac{p}{q}) \neq \{b_0\}$.

On a donc ou bien $f^q_{a,b_0} - R_p \geq 0$, ou bien $f^q_{a,b_0} - R_p \leq 0$.

Montrons que forcément $f^q_{a,b_0} - R_p \equiv 0$.

En effet, supposons par exemple que $f^q_{a,b_0} - R_p \geq 0$.

On a $f_{a,b_0} = R_{b_0-b} \circ f_{a,b}$. Ici on a un lemme :

<u>Lemme</u> : Si $\lambda > 0$, n entier, on a $R_\lambda \circ f^n \leq (R_\lambda \circ f)^n$ (démonstration par récurence : $f < R_\lambda \circ f \Rightarrow (R_\lambda \circ f^n)(f(x)) < (R_\lambda \circ f)^n (R_\lambda \circ f)(x)$).

Donc si $b_0 - b > 0$ on a :

$$f^q_{a,b} - R_p < (R_{b_0-b}) \circ f^q_{a,b} - R_p \text{ (car } b_0 - b > 0)$$

$$< (R_{b_0-b}) \circ f_{a,b})^q - R_p \text{ (par le lemme)}$$

$$\| $$

$$(f_{a,b_0})^q - R_p.$$

Donc, si $f^q_{a,b_0} - R_p \not\equiv 0$, $f^q_{a,b} - R_p$ a un zéro (avec changement de signe) pour $b_0 - b > 0$ petit, donc $\rho(f_{a,b}) = \frac{p}{q}$ pour $b_0 - b > 0$ petit ce qui contredit l'hypothèse $h^{-1}(\frac{p}{q}) = \{b_0\}$.

Il reste à montrer que si $a \neq 0$, $f^q_{a,b_0} - R_p \not\equiv 0$.

Cela vient (Herman) de ce que $f(x) = f_{a,b}(x) = x + a \sin 2\pi x + b$ se prolonge en une fonction entière de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$. Si $f^q(x) = R_p(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, on a $f^q(z) = R_p(z)$, $\forall z \in \mathbb{C}$, donc

$(R_{-p} \circ f^q)(z) = z$, $\forall z \in \mathbb{C}$, donc $(R_{-p} \circ f^{q-1}) \circ f = Id_{\mathbb{C}}$.

Mais $R_{-p} \circ f^{q-1}$ est une fonction entière (car $q \geq 1$) et il en est de même de f, donc f est un difféomorphisme biholomorphe $\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, et f doit être de la forme $f(z) = \alpha z + \beta$, $\alpha \neq 0$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

Mais $f(z) = z + \varphi(z)$, donc φ = const, et $a = 0$.

Nous avons donc démontré la proposition II.3.

Remarque 1.

On vient en fait de montrer que si $a \neq 0$ et si $\rho(f_{a,b}) = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, alors f n'est jamais conjugée à $R_{p/q}$.

Ceci vient du

Lemme II.4.

Soit $f \in D^0(T^1)$ avec $\rho(f) = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$. Il existe $h \in D^0(T^1)$ tel que $f = h^{-1} \circ R_{p/q} \circ h$ si et seulement si $f^q - R_p \equiv 0$.

Démonstration.

1) $f = h^{-1} \circ R_{p/q} \circ h \Rightarrow f^q - R_p \equiv 0$.

Puisque $f = h^{-1} \circ R_{p/q} \circ h$, on a $f^q = h^{-1} \circ R_p \circ h$, donc $h \circ f^q = R_p \circ h = h \circ R_p$, d'où $f^q = R_p$.

($R_p \circ h = h \circ R_p$ car $h = Id + \varphi$ (φ 1-périodique), $R_p \circ h(x) = x + \varphi(x) + p$, $h \circ R_p(x) = x + p + \varphi(x+p) = x + p + \varphi(x)$).

2) $f^q - R_p \equiv 0 \Rightarrow \exists h \in D^0(T^1)$, $f = h^{-1} \circ R_{p/q} \circ h$.

Si $f^q \equiv R_p$, on pose $h = \frac{1}{q}\left(\sum_{i=0}^{q-1} (f^i - i\frac{p}{q})\right)$; alors,

$h \circ f = \frac{1}{q}\left(\sum_{i=0}^{q-1} (f^{i+1} - i\frac{p}{q})\right)$, $R_{p/q} \circ h = \frac{1}{q}\left(\sum_{i=0}^{q-1} (f^i - i\frac{p}{q})\right) + \frac{p}{q}$.

donc $h \circ f - R_{p/q} \circ h = \frac{1}{q} \sum_{i=0}^{q-1} (f^{i+1} - f^i)) - \frac{p}{q} = \frac{1}{q}(f^q - id) - \frac{p}{q} = 0$, car $f^q - id = p$,

donc $h \circ f = R_{p/q} \circ h$. Il ne reste qu'à démontrer que $h = \frac{1}{q}\left(\sum_{i=0}^{q-1}(f^i - i\frac{p}{q})\right)$ est un homéomorphisme.

Puisque f est une application croissante, alors chaque f^i est croissante, et par conséquent chaque $f^i - i\frac{p}{q}$ est croissante, donc le barycentre $h = \frac{1}{q}\left(\sum_{i=0}^{q-1} (f^i - i\frac{p}{q})\right)$ de ces applications croissantes est une application croissante.

Mais h est continue, donc h est un homéomorphisme.

Remarque 2.

Nous allons démontrer que pour a fixé non nul, $|a| < \frac{1}{2\pi}$, int $h_a^{-1}(\mathbb{Q})$ est un ouvert dense dans $\mathbb{R}$. Celà est déduit immédiatement de la

Proposition II.5.

Pour a fixé non nul, $|a| < \frac{1}{2\pi}$, $h_a^{-1}(\alpha) = \{b_\alpha\}$ est réduit à un point pour tout $\alpha \notin \mathbb{Q}$.

Démonstration :

i) Dans le chapitre III, nous démontrerons le théorème de Denjoy :
Soit $f \in D^2(T^1)$, $\rho(f) = \alpha \notin \mathbb{Q}$, alors il existe un homéomorphisme $h \in D^0(T^1)$ tel que $f = h^{-1} \circ R_\alpha \circ h$.

2) Proposition générale :(d'Arnold)
Soit $f \in D^0(T^1)$, $\rho(f) = \alpha \notin \mathbb{Q}$. Alors, si $\rho(R_\lambda \circ f) = \rho(f)$, on a $\lambda = 0$.
Si cette proposition est démontrée, on en déduit facilement la proposition II.5. car si $\rho(f_{a,b}) = \rho(f_{a,b'}) = \rho(R_{b'-b} \circ f_{a,b}) = \alpha \notin \mathbb{Q}$, alors $b'-b = 0$, donc $h^{-1}(\alpha) = \{b\}$.

3) Nous allons démontrer la proposition générale (d'Arnold) dans le cas particulier où $f = h \circ R_\alpha \circ h^{-1}$ (Dans notre situation, $f_{a,b}$ est analytique, donc d'après le théorème de Denjoy, nous sommes dans le cas) (et pour le cas général, voir § 4, chapitre III).

Si $\rho(R_\lambda \circ f) = \rho(f) = \alpha$, $R_\lambda \circ f - R_\alpha$ s'annule.
De même, pour tout $h \in D^0(T^1)$,
$\rho(h^{-1} \circ R_\lambda \circ f \circ h) = \rho(R_\lambda \circ f) = \alpha$, donc $h^{-1} \circ R_\lambda \circ f \circ h - R_\alpha$ s'annule aussi. Donc $R_\lambda \circ f - h \circ R_\alpha \circ h^{-1}$ s'annule, c.à.d. $(R_\lambda \circ f) \circ (h \circ R_\alpha \circ h^{-1})^{-1}$ a un point fixe. Si donc $f = h \circ R_\alpha \circ h^{-1}$, on trouve que R_λ a un point fixe. D'où $\lambda = 0$.

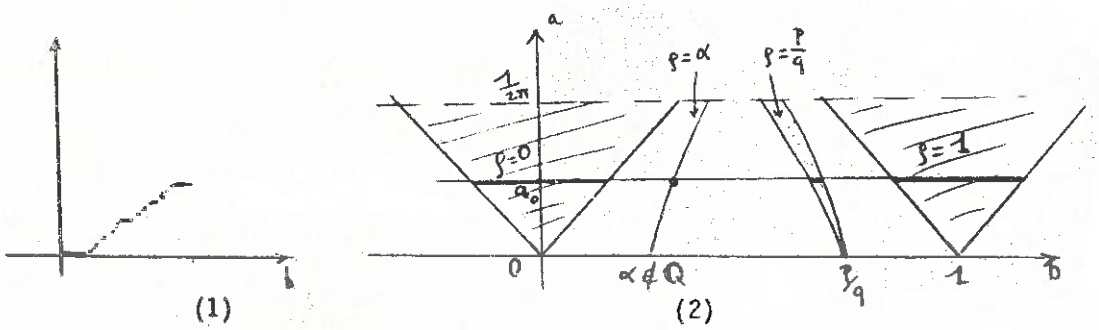
QED

Remarque.

Pour $a \neq 0$, $|a| < \frac{1}{2\pi}$, la fonction $h_a : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $b \longmapsto \rho(f_{a,b})$ est celle dans le contre-exemple du cours de J.L. Verdier à Hanoï (1-2/1977), elle n'est pas différentiable.

C'est une "fonction de Lebesgue", monotone continue et localement constante au voisinage des rationnels (v. dessin 1)

Donc nous avons le dessin 2 suivant :



Pour $a \neq 0$, $|a| < \frac{1}{2\pi}$

$h_a : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ et $K_a = [0,1] - \mathrm{Int}\, h_a^{-1}(\mathbb{Q})$ est un Cantor.

V. I. Arnold a montré que si $|a| \longrightarrow 0$, $m(K_a)$ (la mesure de Lebesgue de K_a) $K_a) \longrightarrow m([0,1]) = 1$.

Herman a montré que pour tout $a \neq 0$, $|a| < \frac{1}{2\pi}$, on a $m(K_a) > 0$ (Voir chapitre III).

Herman nous a encore donné les résultats suivants :

Pour $0 \leq r \leq w^r w$ (signifie analytique) pour tout $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, le fermé

$F^r_{p/q} = \{f \in D^r(T^1) \mid \rho(f) = \frac{p}{q}\}$ est connexe et d'intérieur non vide dans $D^r(T^1)$.

De plus,

$O^r_{p/q} = \{f \in D^r(T^1) \mid f^q = R_p\} = \{g^{-1} \circ R_{p/q} \circ g \mid g \in D^r(T^1)\}$

est un fermé contenu dans la frontière de Int $(F^r_{p/q})$ dans $D^r(T^1)$.

Comme Int $(F^w_{p,q}) \neq \emptyset$ (et même connexe), on peut construire dans Int $(F^w_{p,q})$ des chemins analytiques non constants $t \in [a,b] \longmapsto f_t \in D^w(T^1)$ vérifiant $\frac{\partial f_t}{\partial t} > 0$, mais tels que f_t ne soit C^0-conjugué à la rotation $R_{p/q}$ pour aucun $t \in [a,b]$, puisque $(f_t)^q \neq R_p$.

De plus, l'ouvert $U^r = \bigcup_{p/q \in \mathbb{Q}} \text{Int}\,(F^r_{p,q})$ est dense dans $D^r(T^1)$ et si $r \geq 1$, U^r contient l'ouvert dense des difféomorphismes structurellement stables.

Si $t \in [a,b] \longmapsto f_t \quad D^0(T^1)$ est un chemin continu avec $\rho(f_a) \neq \rho(f_b)$, on doit s'attendre à ce qu'en général la fonction $t \in [a,b] \longmapsto \rho(f_t)$ reste constante sur un intervalle d'intérieur non vide chaque fois que $\rho(f_t) \in \mathbb{Q}$.

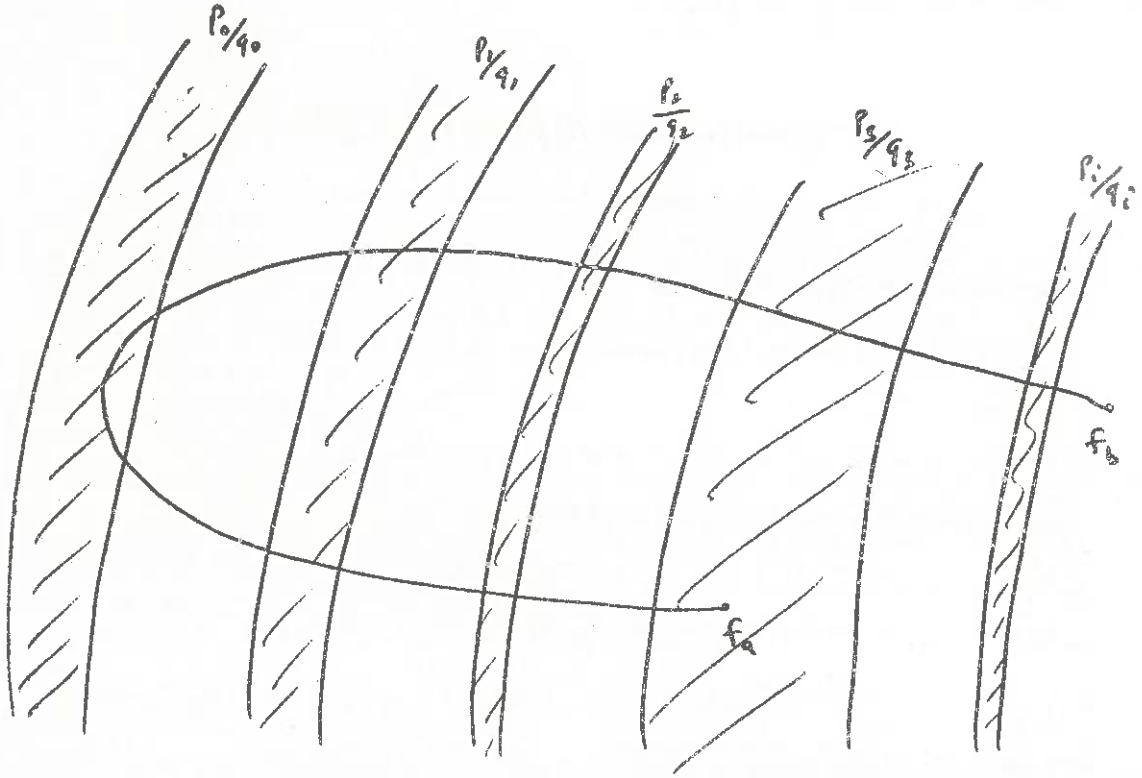
On a cependant le théorème suivant, qui généralise l'étude de l'exemple d'Arnold (voir chap III § 7).

<u>Théorème</u> : Si $3 \leq r \leq w$ et $t \in [a,b] \longmapsto f_t \in D^r(T^1)$ un chemin de classe C^1 avec $\rho(f_a) \neq \rho(f_b)$ alors $m\,\{t \in [a,b] \mid f_t$ est C^{r-2}- conjugué à une rotation irrationnelle$\} > 0$.

Ce théorème est très fort dans la mesure où il n'exige aucune hypothèse de généricité sur le chemin considéré. Remarquons que pour un chemin générique, le complémentaire de cet ensemble de mesure positive contient un ouvert dense (valeurs de t pour lesquelles f_t est structurellement stable !). On voit bien le conflit entre les notions de mesure et de catégorie et la difficulté qu'il y a à définir ce qu'est un difféomorphisme "général".

<u>Référence</u> : - M. R. Herman : Thèse: sur la conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle à des rotations. A paraître aux publications de l'I.H.E.S. n° 49.

- M. R. Herman : Mesure de Lebesgue et nombre de rotation. Lect. Notes math. 597. Springer Verlag, berlin 1977, p. 271.293.


P_0/q_0
P_1/q_1
P_2/q_2
P_3/q_3
P_i/q_i
f_b
f_a

Chapitre 3.

THEOREME DE DENJOY ET THEOREMES D'HERMAN

Rappellons que nous avons noté

$D^0(T^1) = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \mid f$ homéomorphisme de $\mathbb{R}$ de la forme $Id + \varphi$, φ 1-périodique$\}$,

$Diff^0_+(T^1) = \{f : T^1 \longrightarrow T^1 \mid f$ homéomorphisme du tore à une dimension T^1, conservant l'orientation (c.à.d. isotope à l'identité)$\}$,

$D^0(T^1) \longrightarrow Diff^0_+(T^1)$ est le revêtement universel.

Dans ce chapitre nous étudierons $F^0_\alpha = \{f \in D^0(T^1)$ avec $\rho(f) = \alpha \notin \mathbb{Q}\}$.

§ 1.

Lemme III.1. (Jacobi).

Si $x_0 \in T^1$, $\{R^n_\alpha(x_0)\}$ est dense dans T^1 pour $\alpha \notin \mathbb{Q}$.

(Donc pour un champ de vecteurs sur T^2 dont les orbites sont des droites de pente irrationnelle α, chaque orbite est dense dans le tore T^2).

Démonstration.

Si $\alpha \in \mathbb{Q}$ il est clair que l'orbite est finie.

Si $\alpha \notin \mathbb{Q}$, les $R^n_\alpha(x_0)$ sont tous différents, car

$R^n_\alpha(x_0) = R^m_\alpha(x_0) \Rightarrow R^{n-m}_\alpha(x_0) = x_0 \Rightarrow (n-m)\alpha$ est un entier,

mais $\alpha \notin \mathbb{Q}$, donc $n=m$. L'ensemble des $R^n_\alpha(x_0)$ a donc un point d'accumulation sur le compact T^1, c.à.d. $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n,m$, $n \neq m$, $|R^n_\alpha(x_0) - R^m_\alpha(x_0)| < \varepsilon$. Mais R_α conserve la mesure de Lebesgue sur T^1, on en déduit que $|R^{|n-m|}_\alpha(x_0) - x_0| < \varepsilon$, puis $|R^{2|n-m|}_\alpha(x_0) - R^{|n-m|}_\alpha(x_0)| < \varepsilon$, donc x_0, $R^{|n-m|}_\alpha(x_0)$, $R^{2|n-m|}_\alpha(x_0)$,...

décomposent T^1 en intervalles de longueur $< \varepsilon$.

Q.E.D.

§ 2.

QUE SE PASSE-T-IL POUR $f \in D^0(T^1)$, $\rho(f) = \alpha \notin \mathbb{Q}$?

Lemme III.2.

Soit $f \in D^0(T^1)$, $\rho(f) = \alpha \notin \mathbb{Q}$. Alors pour x_0 fixé, on a $f^n(x_0) + k < f^m(x_0) + j \Rightarrow n\alpha + k < m\alpha + j$ (c.à.d. les $\tilde{f}^n(x_0)$ sur T^1 dans le même ordre que les $\tilde{R}^n_\alpha(x_0)$).

Démonstration :

Puisque f^{-m} est un homéomorphisme croissant de $\mathbb{R}$ (car f est croissant), l'hypothèse équivaut à

$$f^{-m}(f^n(x_0) + k) < f^{-m}(f^m(x_0) + j),$$

donc équivaut à $f^{n-m}(x_0) + k < x_0 + j$, car $f = id + \varphi$,

$f^{-m} = Id + \varphi_m$, $f^{-m}(f^n(x_0) + k) = f^n(x_0) + k + \varphi_m(f^n(x_0) + k) =$

$= f^n(x_0) + k + \varphi_m(f^n(x_0)) = f^{n-m}(x_0) + k.$

On est donc ramené à démontrer que

$$f^p(x_0) + k < x_0 + j \Rightarrow p\alpha + k < j, \ (p = n-m).$$

Puisque $\rho(f) = \alpha \notin \mathbb{Q}$, f n'a pas de point périodique, c.à.d.

$\forall y, f^p(y) - y \notin \mathbb{Z}$.

De $f^p(x_0) - x_0 < j-k$, on déduit donc que $\forall y, f^p(y) - y < j-k$,

(car si $\exists y, f^p(y) - y > j-k$, alors $\exists y_0, f^p(y_0) - y_0 \in \mathbb{Z}$) : Rappellons-nous une propriété fondamentale du nombre de rotation : $\forall y$,

$\text{Min}\ (f^p(y) - y - p\alpha) = -\alpha_p \leq f^p(y) - y - p\alpha \leq \beta_p =$

$= \text{Max}\ (f^p(y) - y - p\alpha),\ \alpha_p, \beta_p \geq 0,\ \ \alpha_p + \beta_p < 1.$

Donc $\text{Max}\ (f^p(y) - y) = p\alpha + \beta_p < j-k$, implique $p\alpha < j-k$.

Q.E.D.

Corollaire :

Soit $f \in D^0(T^1)$, $\rho(f) = \alpha \notin \mathbb{Q}$. S'il existe x_0 tel que $\{\tilde{f}^n(x_0)\}$ est dense dans T^1, alors la correspondance $f^n(x_0) \longrightarrow n\alpha$ se prolonge en un homéomorphisme g conjuguant f à R_α.

Donc le problème est : quand les orbites de x_0 sont-elles denses ?
Poincaré avait conjecturé que ce n'est pas forcément vrai, même si f est analytique. Mais le théorème de Denjoy dit que c'est vrai dès que $\tilde{f}$ est un difféomorphisme de T^1 de classe C^1 avec Df à variation bornée !!!
D'où le corollaire : toute orbite est dense pour tout champ de vecteurs $\bar{X}$ sur T^2 de classe C^2 n'ayant pas de zéros et d'orbites fermées (ce corollaire généralise le théorème de Poincaré - Bendixson).
Nous allons étudier tout celà.

§ 3.

Proposition III.3.

Soit $f \in D^0(T^1)$, $\rho(f) = \alpha \notin \mathbb{Q}$. Alors il existe une application $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue monotone non décroissante de la forme $g = Id + \varphi$, $\varphi \in C^0(T^1)$ telle que $g \circ f = R_\alpha \circ g$

Remarques :

1) "en général" (dans un sens à préciser), g n'est pas un homéomorphisme.

2) L'utilisation d'une mesure de probabilité μ invariante par $\tilde{f}$ permet de ne plus parler de l'ordre des points comme dans le lemme précédent et clarifie les démonstrations :

Démonstration de la proposition.

Soit μ une mesure de probabilité sur T^1, invariante par $\bar{f}$ (Nous verrons dans la suite que, si $\rho(f) = \alpha \notin \mathbb{Q}$, alors μ est unique, mais nous n'utilisons pas cette propriété). Puisque $\rho(f) = \alpha \notin \mathbb{Q}$, $\bar{f}$ est sans point périodique, donc μ est sans masse atomique. Il en résulte que si on pose $g(x) = \int_0^x d\mu$, g est une application continue ; elle est non décroissante (car $\mu \geq 0$).

On a $g(0) = 0$, $g(x+p) = g(x) + p$ si $p \in \mathbb{Z}$ (car $\int_0^1 d\mu = 1$),

$$g(f(x)) - g(f(0)) = \int_{f(0)}^{f(x)} d\mu = \int_0^x d\,(\bar{f}^{-1}_{*}\mu) = \int_0^x d\mu,$$

(puisque μ est invariante par $\bar{f}$) $= g(x) - g(0)$.

Soit $c = g(f(0)) - g(0)$, alors $g \circ f = R_c \circ g$. Mais on a vu qu'il en résulte que $c = \alpha = \rho(f)$. Q.E.D.

Proposition III.4.

Ce g est un homéomorphisme si et seulement si supp $\mu = T^1$ (où supp désigne le support de μ).

Démonstration : g est alors strictement monotone. Q.E.D.

Proposition III.5.

Si $F = \text{supp}\,\mu \neq T^1$, alors F est un Cantor (invariant par $\bar{f}$) ; c'est l'unique fermé invariant minimal de $\bar{f}$. [On retrouve bien la discussion du début : pour que g ne soit pas un homéomorphisme il faut que les orbites de x_0 sous $\bar{f}$ ne soient pas denses (c.à.d. il existe un fermé invariant $\neq T^1$].

Démonstration :

1) F n'a pas de point isolé c.à.d. μ n'a pas de masse atomique, car $\bar{f}$ n'a pas de point périodique.

2) L'application $g(x) = \int_0^x d\mu$ donne l'application $\bar{g} : T^1 \longrightarrow T^1$, et $\bar{g} \circ \bar{f} = \bar{R}_\alpha \circ \bar{g}$. On a $\bar{g}(F) = \bar{g}(T^1) = T^1$ et $\bar{g}_{|F}$ est injective sauf sur l'ensemble dénombrable D des extrémités des composantes connexes de $T^1 - F$. Soit M un fermé invariant par $\bar{f}$: $\bar{f}(M) = M$. On a $\bar{g}(\bar{f}(M)) = \bar{R}_\alpha(\bar{g}(M))$, donc $\bar{g}(M) = \bar{R}_\alpha(\bar{g}(M))$, c.à.d. $\bar{g}(M)$ est un fermé invariant par $\bar{R}_\alpha$; mais $\alpha \notin \mathbb{Q}$, donc $\bar{g}(M) = T^1$. Puisque $\bar{g}(F) = T^1$, $\bar{g}(T^1-F) = \bar{g}(D)$, $\bar{g}(F-D) \cap \bar{g}(D) = \phi$, et que $\bar{g}|F-D$ est injective, on en déduit que $M \supset F-D$.
Mais F n'a pas de point isolé, $\overline{F-D} = F$, donc si $M \supset F-D$, alors $M \supset F$, c.à.d. F est l'unique ensemble minimal invariant.

3) par hypothèse $F \neq T^1$; si Int $F \neq \phi$, Fr(Int F) serait invariant par $\bar{f}$. Donc Int $F = \phi$, c.à.d. F est un Cantor (car il n'a pas de point isolé et l'intérieur de F est vide).

§ 4. SUITE DE LA DEMONSTRATION DE LA PROPOSITION D'ARNOLD (v. Chap. II § 4).

Proposition III.6. (d'Arnold) : Soit $f \in D^0(T^1)$ avec $\rho(f) = \alpha \in \mathbb{R}-\mathbb{Q}$.
Alors $\rho(R_\lambda \circ f) = \rho(f)$ implique que $\lambda = 0$.

Démonstration :

1) Nous avons démontré la proposition dans le cas où f est C^0-conjugué à R_α (§ 4, Chapitre II) démonstration de la proposition II.4.).

2) Lemme : Soit $f \in D^0(T^1)$, avec $\rho(f) = \alpha \in \mathbb{R}-\mathbb{Q}$; supposons que f n'est pas C^0-conjugué à R_α. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x \in \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0 \in \mathbb{N}$ (resp. $p_1 \in \mathbb{Z}$, $n_1 \neq 0$ $\mathbb{N}$) tels que

a) $x - \varepsilon + p < f^n(x) < x+p$,

b) (resp. $x + p_1 < f^{n_1}(x) < x + \varepsilon + p_1$).

Démonstration du lemme :

d'après la proposition III.3., il existe $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $g = Id + \varphi$, $\varphi \in C^0(T^1)$ g continue, monotone non décroissante telle que $g \circ f = R_\alpha \circ g$.

On suppose que g n'est pas un homéomorphisme. Soit F sur T^1 l'unique ensemble fermé minimal invariant par $\bar{f}$ °(F est le support de l'unique mesure de probabilité invariante par $\bar{f}$) : $\bar{g}$ est constante sur chaque composante connexe de $T^1 - F$. Soit D l'ensemble des extrémités de composantes connexes de $T^1 - F$. Soit $x \in F-D$. Comme F est un ensemble minimal pour $\bar{f}$, $\{\bar{f}^n(x) \mid n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans F. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe donc $n \neq 0 \in \mathbb{N}$ (resp. $n_1 \in \mathbb{N}$) tel que (resp. $x - \varepsilon < \bar{f}^n(x) < x$, $x < \bar{f}^{n_1}(x) < x + \varepsilon$). (on a donné T^1 comme un intervalle).

En relevant à $\mathbb{R}$, le lemme en résulte. Q.E.D.

Remarque : le lemme reste valable si f est C^0-conjugué à R_α (dans ce dernier cas, tout $x \in \mathbb{R}$ fait l'affaire).

3) Démonstration de la proposition lorsque f n'est pas C^0-conjugué à R_α : pour tout $\varepsilon > 0$ (resp. $\varepsilon < 0$), on va trouver λ_0 avec $0 < \lambda_0 \leq \varepsilon$ (resp. $\varepsilon \leq \lambda_0 < 0$) tel que $\rho(R_{\lambda_0} \circ f) \in \mathbb{Q}$, donc $\rho(R_{\lambda_0} \circ f) \neq \rho(f) \in \mathbb{R}-\mathbb{Q}$; alors, comme $\lambda \longmapsto \rho(R_\lambda \circ f)$ est monotone non décroissante, on voit bien que $\rho(R_\lambda \circ f) = \rho(f)$ implique $\lambda = 0$.

Considérons $\varepsilon > 0$ et $(R_\varepsilon \circ f)^n$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $(R_\varepsilon \circ f)^n(x) \geq \varepsilon + f^n(x)$ (voir un lemme dans la démonstration de la proposition II.3.). $\varepsilon > 0$ étant donné, soient x et n donnés par le lemme précédent. On a : $\varepsilon + f^n(x) \geq x+p$ et aussi $f^n(x) < x+p$. Comme $\lambda \in [0,\varepsilon] \longmapsto (R_\lambda \circ f)^n(x) \in \mathbb{R}$ est continue en λ (par la continuité de $\lambda \longmapsto (R_\lambda \circ f)^n$) et comme $f^n(x) = (R_0 \circ f)^n(x) < x+p$, il existe λ_0 (par le théorème de la valeur intermédiaire) tel que $(R_{\lambda_0} \circ f)^n(x) = x+p$, donc $\rho(R_{\lambda_0} \circ f) = \frac{p}{n} \in \mathbb{Q}$.

La même démonstration marche si $\varepsilon < 0$.

§ 5.

UN EXEMPLE (de Denjoy) :

$\bar{f} : T^1 \longrightarrow T^1$ est un difféomorphisme de classe C^1, $\rho(f) = \alpha \notin \mathbb{Q}$ (α quelconque)

$F = \text{supp}\ \mu \neq T^1$ (alors $\bar{f}$ n'est pas C^0-conjuguée à $\bar{R}_\alpha$).

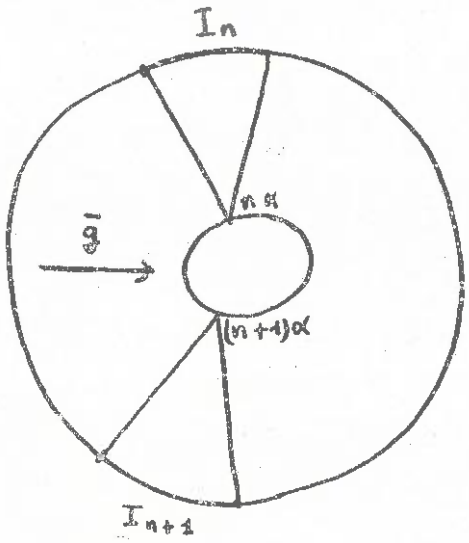
Référence : J. Milnor (Strasbourg 1972), H. Rosenberg (Bourbaki)).

Idée :

$T^1 \supset \bigcup_{n=-\infty}^{+\infty} I_n$, I_n intervalles ouverts dans le même ordre sur T^1 que les $n\alpha$,

tels que $\sum_{n \in \mathbb{Z}}$ longueur (I_n) = longueur T^1 et $\bar{f} : I_n \longrightarrow I_{n+1}$ difféomorphisme

de classe C^∞ ; on prolonge ces difféomorphismes en un difféomorphisme de classe C^1 de T^1 (en fait on commence par se donner les dérivées de $\bar{f}$ sur les I_n). De façon imagée, on grossit les points $n\alpha$ de façon que l'ensemble minimal soit le Cantor complémentaire de $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} I_n$.



<u>Réalisation</u> :

1) On se donne $\ell_n > 0$, $n \in \mathbb{Z}$, tel que $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \ell_n = 1$, $\lim_{n \to \pm\infty} \frac{\ell_{n+1}}{\ell_n} = 1$.

(par exemple $\ell_n = 1/(1+n^2) \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$).

$\alpha \notin \mathbb{Q}$ donné, on pose $\alpha_n \equiv n\alpha$ (modulo $\mathbb{Z}$), $0 \leq \alpha_n < 1$.

$I_n = (b_n, c_n)$ sur $[0,1]$, $b_0 = 0 \equiv 1$, $b_n = \sum_{\{m \mid \alpha_m < \alpha_n\}} \ell_m$,

$c_n = \sum_{\{m \mid \alpha_m \leq \alpha_n\}} \ell_m$, alors longueur $I_n = \ell_n$.

Les I_n, $n \in \mathbb{Z}$ sont disjoints et sont ordonnés sur T^1 comme les $\alpha_n \equiv n\alpha \pmod{\mathbb{Z}}$,

car si $\alpha_n < \alpha_p$, alors $b_p = \sum_{\{m \mid \alpha_m < \alpha_p\}} \ell_m < 1$, $c_n = \sum_{\{m \mid \alpha_m \leq \alpha_n\}} \ell_m < 1$,

donc $c_n < b_p$.

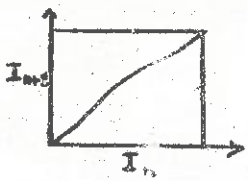
$\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} I_n$ est dense dans T^1 (car $\sum \ell_n = 1$).

2) Idée de Construction de $f : I_n \longrightarrow I_{n+1}$ qui se prolonge en $\bar{f} : T^1 \longrightarrow T^1$;

pour avoir un prolongement C^0, il suffit que f soit linéaire ; pour avoir un prolongement C^1, on prend f tel que le graphe soit comme dans le dessin

(c.à.d. $\frac{df}{dt} \longrightarrow 1$ uniformément lorsque

$\frac{\ell_{n+1}}{\ell_n} \longrightarrow 1$) puis on étend par continuité.



Réalisation :

(On définit la dérivée de f).

On définit :

$f'_n : I_n \longrightarrow]0,+\infty[$ continue avec

(i) $f'_n(t) \longrightarrow 1$ si $t \longrightarrow b_n$ et $t \longrightarrow c_n$.

(ii) $f'_n(t) \longrightarrow 1$ uniformément quand $n \longrightarrow \pm\infty$ (on peut faire ça car $\frac{\ell_{n+1}}{\ell_n} \longrightarrow 1$).

(iii) $\int_{I_n} f'_n \, dx = \ell_{n+1}$

On étend en $f' : \mathbb{R} \longrightarrow]0,+\infty[$ par

$$f'(t) = 1 \text{ pour } t \in [0,1] - \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} I_n$$

$$f'(t+1) = f'(t) \text{ (périodique).}$$

Puis on définit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ par $f(t) = b_1 + \int_0^t f'(s)\, ds$.

Alors, f est un difféomorphisme de classe C^1, $f(t+1) = f(t)+1$ (c.à.d. $f = Id + \varphi$, φ périodique) car $f(t+1) = b_1 + \int_0^{t+1} f'(s)\, ds$

$= f(t) + \int_t^{t+1} f'(s)\, ds = f(t) + \int_0^1 f'(s)\, ds = f(t) + \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_{I_n} f'(s)\, ds =$

$f(t) + \sum_{n\in\mathbb{Z}} \ell_{n+1} = f(t) + 1.$

Lemme : $f(I_n) = \begin{cases} I_{n+1} \text{ si } \alpha_n < 1-\alpha \\ I_{n+1} \text{ translaté de 1 si } \alpha_n \geq 1-\alpha. \end{cases}$

<u>Démonstration</u> : Il suffit de montrer l'assertion sur $f(b_n)$ car

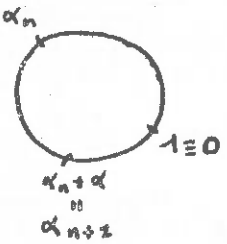
$$\int_{I_n} f'(s)ds = \ell_{n+1}.$$

On a $f(b_n) = b_1 + \int_0^{b_n} f'(s)\, ds = b_1 + \sum_{\{m \mid \alpha_m < \alpha_n\}} \ell_{m+1}$

(on regarde les I_n qui sont avant b_n).

1) $\alpha_n < 1-\alpha$ ($\Leftrightarrow \alpha_{n+1} = \alpha_n+\alpha$)

(1)



$\{m \mid \alpha_m < \alpha_n\} = \{m \mid \alpha_{m+1} < \alpha_{n+1}\} - \{m \mid \alpha_{m+1} < \alpha_1 = \alpha\}$

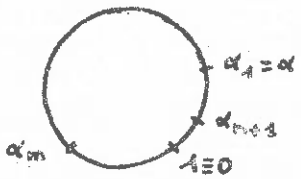
car

a) si $\alpha_m < \alpha_n$, $\alpha_{m+1} = \alpha_m + \alpha < \alpha_n + \alpha = \alpha_{n+1} < 1$,

b) si $\alpha_{m+1} < \alpha_{n+1}$ et si $\alpha_m \geq \alpha_n$, alors $\alpha_{m+1} < \alpha_n + \alpha =$

$= \alpha_{n+1} \leq \alpha_m+\alpha$, donc $\alpha_{m+1} < \alpha_m+ \alpha$, donc $\alpha_{m+1} = \alpha_m + \alpha - 1 < \alpha$.

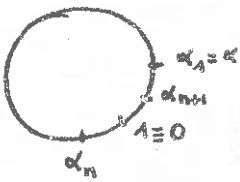
(2)



Donc $f(b_n) = b_1 + \sum_{\{m \mid \alpha_{m+1} < \alpha_{n+1}\}} \ell_{m+1} - \sum_{\{m \mid \alpha_{m+1} < \alpha_1\}} \ell_{m+1} = b_1 + b_{n+1} - b_1 = b_{n+1}$.

2) $\alpha_n > 1-\alpha$ ($\Leftrightarrow \alpha_{n+1} = \alpha_n+\alpha-1$). Alors,

(1)

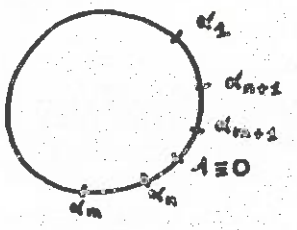


$\{m \mid \alpha_m < \alpha_n\} = \{m \mid \alpha_{m+1} < \alpha_{n+1}\} \cup \{m \mid \alpha_{m+1} \geq \alpha_1\}$.

En effet, $\alpha_{n+1} = \alpha_n + \alpha - 1$.

<u>1er cas</u> : $\alpha_{m+1} < \alpha_{n+1}$, cas où $\alpha_{m+1} = \alpha_m + \alpha - 1$ (v. dessin 2)

(2)



<u>2ème cas</u> : $\alpha_{m+1} \geq \alpha_{n+1}$, cas où $\alpha_{m+1} = \alpha_m + \alpha \geq \alpha$ (v. dessin 3).

Donc

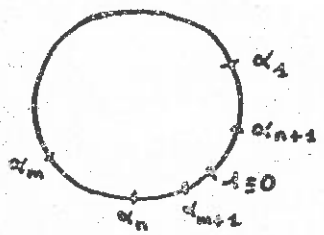
$$f(b_n) = b_1 + \sum_{\{m \mid \alpha_{m+1} < \alpha_{n+1}\}} \ell_{m+1} + \sum_{\{m \mid \alpha_{m+1} \geq \alpha_1\}} \ell_{m+1}$$

$$= b_1 + b_{n+1} + \sum_{m \in \mathbb{Z}} \ell_{m+1} - \sum_{\{m \mid \alpha_{m+1} < \alpha_1\}} \ell_{m+1}$$

$$= b_1 + b_{n+1} + 1 - b_1 = b_{n+1} + 1.$$

Q.E.D.

(3)



<u>Lemme</u> : $\rho(f) = \alpha$.

<u>Démonstration</u> : On fait les calculs en $b_0 = 0$.

Par récurrence : $f(0) = b_1, \ldots, f^n(0) = [n\alpha] + b_n$ (on sait bien à priori que $f^n(0) = b_n +$ entier). En effet,

$$f^{n+1}(0) = f([n\alpha]+b_n) = [n\alpha]+f(b_n) = \begin{cases} [n\alpha] + b_n & \text{si } \alpha_n < 1-\alpha \\ [n\alpha] + b_n+1 = [(n+1)\alpha] + b_n & \text{si } \alpha_n \geq 1-\alpha. \end{cases}$$

Donc $|f^n(0) - n\alpha| = |b_n - \alpha_n| < 1$. Q.E.D.

<u>Exercice</u> : Voir que f' n'est pas à variation bornée.

§ 6. THEOREME DE DENJOY III.7. :

Si $\bar{f} \in \mathrm{Diff}_+^{1\ v.b}(T^1)$ c.à.d. $\bar{f}$ est de classe C^1 et $D\bar{f}$ à variation bornée (en particulier si $\bar{f}$ est de classe C^2) et si $\rho(f) = \alpha \notin \mathbb{Q}$, alors $\bar{f}$ est topologiquement conjugué à R_α.

<u>Démonstration</u> :

- D'après les propositions III.3, 4,5, il suffit de montrer qu'il n'existe pas d'ensemble minimal invariant (Cantor) $\neq T^1$ c.à.d. il n'existe pas $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} I_n$, ouvert contenu dans le complémentaire d'un Cantor tel que $\bar{f} : I_n \longrightarrow I_{n+1}$.

- Remarque fondamentale : Si $\bar{f} : I_n \longrightarrow I_{n+1}$ de classe C^1,

$(\bar{f})^i : \begin{matrix} I_0 \longrightarrow I_i \\ I_i \longrightarrow I_0 \end{matrix}$ mais $\ell(I_i) \underset{i \to \pm\infty}{\longrightarrow} 0$, $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \ell(I_n) = 1$, donc $D\bar{f}^i$ ne peut être minorée ni majorée uniformément en fonction de $i \in \mathbb{Z}$.

Donc $\bar{f}$ est topologiquement conjuguée à $R_{\rho(f)}$ dès qu'il existe une suite $q_n \longrightarrow +\infty$ et des constantes C, D telles que $\forall x, \forall i, 0 < D < |Df^{q_n}(x)| < C$,

à fortiori dès qu'il existe une suite $q_n \to \infty$, une constante K telles que $\forall x, |\log Df^{q_n}(x)| < K$.

Mais $\log Df^n(x) = \sum_{i=0}^{n+1} \log Df(f^i x))$ car

$Df^2(x) = D(f(f(x)) = Df(f(x))\ Df(x)$, etc... (récurrence).

Donc on est ramené à montrer que :

Si $f \in D^1(T^1)$, Df à variation bornée, il existe une suite $q_n \longrightarrow +\infty$ et une constante K telles que $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\left| \sum_{i=0}^{q_n-1} \log Df\,(f^i(x)) \right| \leq K.$$

Posons $\varphi = \log Df$; φ est périodique, c.à.d. $\varphi : T^1 \longrightarrow \mathbb{R}$.

Par hypothèse, Df est à variation bornée, donc φ est à variation bornée.

On se ramène donc à montrer le

<u>Lemme fondamental</u> :

Si $\varphi : T^1 \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue à variation bornée et si $f \in D^0(T^1)$, $\rho(f) = \alpha \notin \mathbb{Q}$, alors il existe une suite $q_n \longrightarrow +\infty$ et une constante K telles que

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\left|\sum_{i=0}^{q_n-1} \varphi(f^i(x))\right| \leq K$ (en fait on pourra prendre $K = \mathrm{Var}(\varphi)$).

<u>Démonstration du lemme fondamental</u> :

a) <u>Inégalité de Denjoy-Koksma</u>.

Soient $f \in D^0(T^1)$, $\rho(f) = \alpha \notin \mathbb{Q}$, $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, $\frac{p}{q}$ irréductible, $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2}$,

$\varphi : T^1 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction à variation bornée (même pas forcément continue),

μ une mesure de probabilité sur T^1 telle que $\bar{f}_* \mu = \mu$.

Alors on a

$$\sup_{x \in T^1} \left| \sum_{i=0}^{q-1} \varphi(\bar{f}^i(x)) - q\mu\,(\varphi) \right| \leq \mathrm{Var}(\varphi).$$

b) Fin de la démonstration du lemme fondamental en admettant l'inégalité de Denjoy-Koksma :

1) $\forall \alpha \notin \mathbb{Q}$, il existe une suite $q_n \to \infty$ et une suite p_n (entiers) telles que $\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{(q_n)^2}$ ($\frac{p_n}{q_n}$ irréductible) : on prend les réduites du développement en

fraction continue de α :

$$\alpha = [a_0 ; a_1, \dots, a_n, \dots] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \dots}}$$

$a_i \in \mathbb{Z}$, $a_i > 0$ pour $i > 0$.

$$\frac{p_n}{q_n} = [a_0 ; a_1, \dots, a_n]$$

Alors $|\alpha - \frac{p_n}{q_n}| < \frac{1}{q_n\, q_{n+1}}$ (voir Khinchin : Fractions continues, Moscou 1935).

<u>Exercice</u> : donner une autre démonstration par la méthode des tiroirs de Dirichlet.

2) Si $\varphi = \log Df$, μ une mesure de probabilité invariante par $\bar{f}$, alors $\mu(\varphi) = 0$.

En effet, l'inégalité de Denjoy-Koksma montre que

$\frac{1}{q_n} \sum_{i=0}^{q_n-1} \varphi(\bar{f}^i(x))$ converge uniformément (*) vers $\mu(\varphi)$ lorsque $n \to +\infty$

mais si $\varphi = \log Df$, $\frac{1}{q_n} \sum_{i=0} \varphi(\bar{f}^i(x)) = \frac{1}{q_n} \log Df^{q_n}(x)$.

(i) Supposons que $\mu(\varphi) > 0$, alors $\log Df^{q_n}(x)$ converge uniformément vers $+\infty$

donc $Df^{q_n}(x)$ tend uniformément vers $+\infty$.

(ii) si $\mu(\varphi) < 0$ alors $\log Df^{q_n}(x)$ converge uniformément vers $-\infty$, donc

$Df^{q_n}(x)$ tend uniformément vers 0.

(*) Cette propriété est en fait vraie beaucoup plus généralement et ne requiert pas Denjoy Koksma (unique ergodicité des homéomorphismes du cercle de nombre de rotation irrationnel) voir thèse d'Herman et remarque ci-dessous.

Mais $\forall n$, $\displaystyle\int_0^1 Df^{q_n}(x)\,dx = f^{q_n}(1) - f^{q_n}(0) = 1$,

ce qui contredit (i) et (ii),

Donc $\mu(\varphi) = 0$.

(3) Donc d'après l'inégalité de Denjoy-Koksma,

on a $\displaystyle|\log Df^{q_n}(x)| = \left|\sum_{i=0}^{q_n-1} \log Df\,(f^i(x)) - 0\right| \leq \mathrm{Var}(\varphi)$

Q.E.D.

<u>Remarque</u> : (dont nous n'aurons pas besoin) :

si $f \in D^0(T^1)$, $\rho(f) = \alpha \notin \mathbb{Q}$, alors il n'y a qu'une mesure de probabilité invariante sur T^1 par $\bar{f}$, car l'inégalité de Denjoy-Koksma montre que

$\displaystyle\frac{1}{q_n}\sum_{i=0}^{q_n-1} \varphi(f^i(x))$ converge uniformément vers $\mu(\varphi)$ pour toutes fonctions φ à variation bornée (les q_n étant comme dans l'inégalité Denjoy-Koksma).

Nous pouvons démontrer ça directement : Soient μ, μ_1 deux mesures de probabilités invariantes par $\bar{f}$: $\bar{f}_*\mu = \mu$, $\bar{f}_*\mu_1 = \mu_1$. Rappellons que si nous posons $g(x) = \displaystyle\int_0^x d\mu$ alors $g(x)$ est une fonction croissante et $g \circ f = R_\alpha \circ g$. Donc $\bar{g}_*\mu = \bar{g}_*\bar{f}_*\mu = (\bar{R}_\alpha)_*\,\bar{g}_*\mu$, c.à.d.

$\bar{g}_*\mu$ est invariante par $\bar{R}_\alpha, \alpha \notin \mathbb{Q}$. On peut démontrer facilement qu'alors $\bar{g}_*\mu$ doit être la mesure de Lebesgue m (grâce à la théorie des séries de Fourier). Donc $\bar{g}_*\mu = \bar{g}_*\mu_1 = m$.

Mais μ et μ_1 ont même support F et $g|F-D$ est injective ; D étant dénombrable et μ, μ_1 n'ayant pas de masse atomique, on obtient la conclusion : $\mu = \mu_1$.

Démonstration de l'inégalité de Denjoy-Koksma :

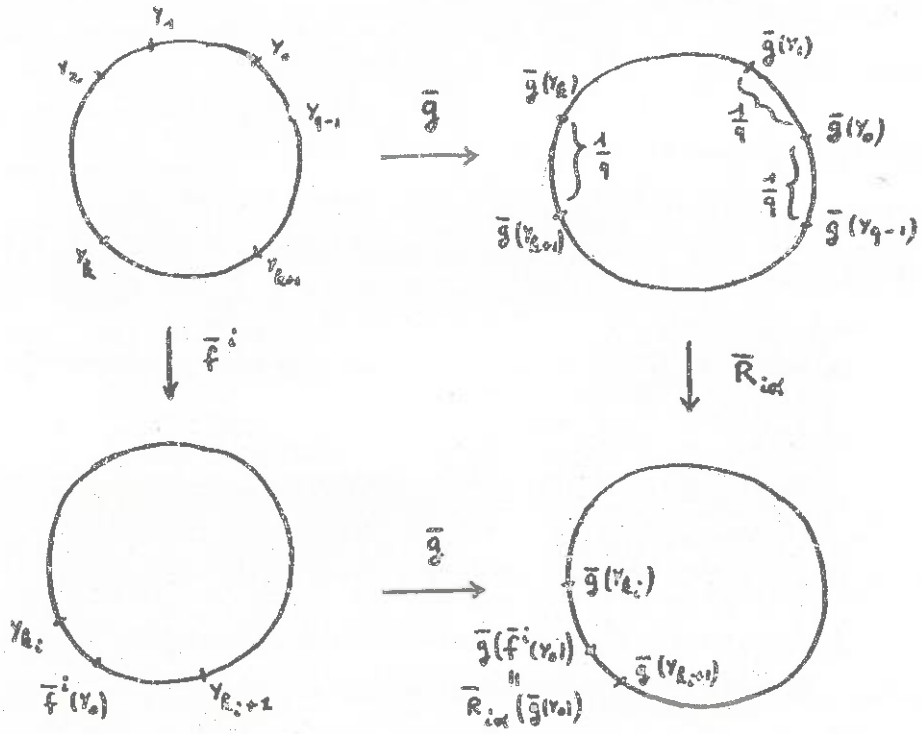
1) à quoi sert $|\alpha - \frac{p}{q}| < \frac{1}{q^2}$

Lemme : Soit $\alpha_i \equiv i\alpha \pmod 1$, $0 \leq \alpha_i < 1$.
Alors il existe un et un seul α_i $(1 \leq i \leq q)$ dans chaque intervalle $]\frac{k}{q}, \frac{k+1}{q}[$ $(0 \leq k \leq q-1)$.

En effet, on peut supposer que $0 < \alpha - \frac{p}{q} < \frac{1}{q^2}$, (on a le même raisonnement pour $-\frac{1}{q^2} < \alpha - \frac{p}{q} < 0$).
Alors $0 < i\alpha - i\frac{p}{q} < i/q^2 \leq 1/q$ (car $i \leq q$) ; Puisque $\frac{p}{q}$ est irréductible les $\frac{ip}{q} \pmod 1$ $(0 \leq i \leq q-1)$ sont tous distincts et partagent donc $[0,1]$ en intervalles de longueur $\frac{1}{q}$; l'inégalité précédente dit que chacun de ces intervalles contient un et un seul point α_i

2) Nous découpons le cercle en morceaux de longueur $\frac{1}{q}$; on choisit y_0 quelconque, on considère $\bar{g}(y_0)$; puis on prend $y_1, y_2, \ldots, y_{q-1}$ tels que l'intervalle $[\bar{g}(y_k), g(y_{k+1})]$ ait la longueur $\frac{1}{q}$ (g est la fonction $g(x) = \int_0^x d\mu$).
Puisque $g \circ f = R_\alpha \circ g$, le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd} T^1 \arrow[r, "\bar{g}"] & T^1 \\ T^1 \arrow[u, "\bar{f}^i"] \arrow[r, "\bar{g}"] & T^1 \arrow[u, "\bar{R}_\alpha^i"'] \end{tikzcd}$$



D'après le lemme précédent, il y a un et un seul point $\bar{R}^i_\alpha\ (\bar{g}(y_0))$, $i \neq 0$, dans l'intervalle $[\bar{g}(y_{k_i}), \bar{g}(y_{k_i+1})]$, donc il y a un et un seul point $\bar{f}^i(y_0)$ dans l'intervalle $[y_{k_i}, y_{k_i+1}]$.

$\int_{y_k}^{y_{k+1}} d\mu = g(y_{k+1}) - g(y_k) = \frac{1}{q}$; posons $y_0 = x$ (en se rappelant qu'il a été choisi quelconque).

$$\left|\sum_{i=0}^{q-1} \varphi(\bar{f}^{i}(x)) - q\mu(\varphi)\right| = \left|\sum_{i=0}^{q-1} \varphi(\bar{f}^{i}(x)) - q\int_0^1 \varphi(t)\,d\mu(t)\right| =$$

$$= \left|\sum_{i=0}^{q-1} \left(\varphi(\bar{f}^{i}(x)) - q\int_{y_{k_i}}^{y_{k_i+1}} \varphi(t)\,d\mu(t)\right)\right| =$$

$$= \left|\sum_{i=0}^{q-1} \left(q\cdot\int_{y_{k_i}}^{y_{k_i+1}} (\varphi(\bar{f}^{i}(x)) - \varphi(t))\,d\mu(t)\right)\right| \leq$$

$$\leq \sum_{i=0}^{q-1} q\cdot\left|\int_{y_{k_i}}^{y_{k_i+1}} (\varphi(\bar{f}^{i}(x)) - \varphi(t))\,d\mu(t)\right|$$

$$\leq \sum_{i=0}^{q-1} q\cdot\frac{1}{q} \sup_{t\in[y_{k_i},y_{k_i+1}]} |\varphi(\bar{f}^{i}(x)) - \varphi(t)| \leq \mathrm{Var}(\varphi).$$

Q.E.D.

Nous avons donc démontré le théorème de Denjoy. Sacksteder a généralisé ce théorème : Si G est un sous-groupe de type fini du groupe $\mathrm{Diff}^2(T^1)$ avec ensemble de Cantor minimal, alors il existe un point x sur ce minimal et il existe un élément $g \in G$ tel que x soit un point fixe hyperbolique pour g. (Réf. Sacksteder : Foliations and pseudogroups, Amer. J. Math. 87 (1965) p. 79.102).

Si ce groupe n'a qu'un générateur, $G = \{f^i \mid i \in \mathbb{Z}\}$, on a le théorème de Denjoy.

D'autre part, il existe des sous-groupes (aussi des sous-groupes n'ayant que 2 générateurs) de $\mathrm{Diff}^{\omega}(T^1)$ qui ont un Cantor invariant minimal.

(Réf. : Arnold-Avez : Problèmes ergodiques de la mécanique classique, Gauthier-Villars, Paris 1967).

A l'aide de ce théorème, Remond construit des feuilletages sur des variétés de dimension 3 ayant des ensembles minimaux exceptionnels.
Le théorème de Denjoy considère la C^0-conjugaison d'un élément $f \in D^0(T^1)$.
Arnold en 1961 a montré que si f est un difféomorphisme C^ω "suffisamment proche" de R_α, avec α satisfaisant une condition diophantienne et si $\rho(f) = \alpha$, alors f est C^ω-conjuguée à R_α. Il a posé la conjecture d'Arnold : il existe $A \subset T^1 - \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ de mesure de Haar 1 tel que si $\bar{f} \in \mathrm{Diff}_+^{\omega}(T^1)$ et $\rho(f) = \alpha \in A$, alors $\bar{f}$ est C^ω-conjugué à $\bar{R}_\alpha$.
Hermann a démontré cette conjecture :

<u>Théorème fondamental d'Herman</u> :
Soit $f \in D^r(T^1)$ avec $r \geq 3$. Alors il existe un ensemble $A \subset \mathbb{R}-\mathbb{Q}$, $m(R-A) = 0$ (m est la mesure de Lebesgue) tel que si $\rho(f) = \alpha \in A$, il existe $g \in D^{r-1-\beta}(T^1)$ (pour tout $\beta > 0$) tel que $f = g \circ R_{\rho(f)} \circ g^{-1}$.
[Pour $r \in \mathbb{R}_+$, nous disons que g est de classe C^r si elle est de classe $C^{[r]}$ et si elle vérifie une condition d'Hölder d'exposant $r-[r]$, c.à.d. $|g(x) - g(y)| \leq C^{te} . |x-y|^{r-[r]}$]. En particulier si $f \in C^\infty$, alors $g \in C^\infty$; si f est analytique, alors g est analytique.

Herman donne une construction de A : $\alpha \in A$ si dans son développement en fraction continue

$$\alpha = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \dots}}, \quad \lim_{B \to +\infty} \lim_{N \to +\infty} \left(\frac{\sum\limits_{a_i \geq B,\ 1 \leq i \leq N} \log(1+a_i)}{\sum\limits_{1 \leq i \leq N} \log(1+a_i)} \right) = 0$$

§ 7. CHEMINS DE DIFFEOMORPHISMES DU CERCLE.

Nous voulons démontrer ici, à condition d'admettre la conjecture d'Arnold démontrée par Herman et énoncée au paragraphe précédent, un autre théorème d'Herman dont nous avons parlé à la fin du chapitre II :

Théorème III.8.

Soit $\begin{array}{l}[a,b] \longrightarrow D^r(T^1) \\ t \longrightarrow f_t\end{array}$ $(r \geq 3)$ un chemin de classe C^1 (c.à.d. si $f_t = id + \varphi_t$, alors $t \longrightarrow \varphi_t$ est une application $[a,b] \longrightarrow C^r(T^1,\mathbb{R})$ de classe C^1). (Remarquons que si $r < \infty$, $C^r(T^1,\mathbb{R})$ est un Banach ; si $r = \infty$, $C^r(T^1,\mathbb{R})$ est un Fréchet). Si $\rho(f_a) \neq \rho(f_b)$, alors $m(\{t \in [a,b] \mid f_t$ est $C^{r-1-\beta}$ conjugée à une rotation irrationnelle$\}) > 0$ pour tout $\beta > 0$ (m désigne la mesure de Lebesgue).

Remarques :

1) Si on pose $E = \{t \in [a,b] \mid f_t$ est $C^{r-1-\beta}$ conjuguée à une rotation irrationnelle$\}$, alors E est mesurable : en fait, E est souslinien (i.e. image continue d'espace topologique métrisable séparable :

$$\begin{array}{ccc}(T^1 - \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \times \mathrm{Diff}^s(T^1) & \longrightarrow & \mathrm{Diff}^s(T^1) \\ (\alpha,h) & \longmapsto & h^{-1} \circ R_\alpha \circ h.\end{array}$$

et même borelien) donc il est universellement (pour toute mesure de Radon) mesurable.

2) L'hypothèse implique que $J = \{\rho(f_t) \mid t \in [a,b]\}$ est un intervalle de mesure > 0. L'intersection $J \cap A$ de J avec l'ensemble A pour lequel est vraie la conjecture d'Arnold est donc aussi de mesure positive. Tout le problème

est de contrôler la régularité de l application $t \longmapsto \rho(f_t)$. L'exemple artificiel qui suit montre la nécessité d'hypothèses de régularité sur le paramétrage du chemin de difféomorphismes.

On prend un Cantor C de mesure positive dans $[0,1]$, et une fonction $\varphi : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $\varphi \geq 0$, de classe C^∞, $\int_{[0,1]} \varphi(x)\, dx = 1$, et $\varphi(x) = 0 \Leftrightarrow x \in C$ (on peut construire une telle fonction à l'aide du théorème de Whitney car C est fermé). Puis on pose $\psi(x) = \int_0^x \varphi(s)\, ds$.

Alors $\psi'(x) = \varphi(x) = 0 \Leftrightarrow x \in C$. ψ est de classe C^∞, $\psi(C)$ est de mesure nulle (d'après le lemme de Sard) ; en fait $\psi(C)$ est aussi un Cantor car ψ est un homéomorphisme (monotone strict puisque $\mathring{C} = \phi$). Donc $\psi^{-1} : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ envoie un Cantor de mesure nulle $\psi(C)$ sur un Cantor de mesure positive C.

Soit donc $C = [0,1] - \mathrm{Int}\ \rho_a^{-1}(\mathbb{Q})$, $|a| < \frac{1}{2\pi}$,

où $\rho_a : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$t \longmapsto \rho(R_t \circ f_a),$$

$f_a \in D^\omega(T^1)$, $f_a(x) = x + a \sin 2\pi x$,

(dans l'exemple d'Arnold II.4). On a $m(C) > 0$. Soit ψ l'homéomorphisme considéré précédemment. Alors le chemin

$$[0,1] \longrightarrow D^\omega(T^1)$$

$$t \longmapsto R_{\psi^{-1}(t)} \circ f_a$$

est continu mais

$$m\left(\{ t \in [0,1] \mid \rho(R_{\psi^{-1}(t)} \circ f_a) \in \mathbb{R}-\mathbb{Q} \}\right) = m(\psi(C)) = 0.$$

<u>Proposition 1</u>. $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, ρ est une fonction lipschitzienne en R_α de rapport de Lipschitz égal à 1 c.à.d.

$$|\rho(f) - \rho(R_\alpha)| \leq |f - R_\alpha|_0.$$

Démonstration :

Soit $f = Id + \alpha + \varphi$, c'est à dire, $f - R_\alpha = \varphi$.

Alors, $\rho(f) = \lim\limits_{k \to +\infty} \frac{1}{k}(f^k - Id) = \lim\limits_{k \to +\infty} \frac{1}{k} \cdot \sum\limits_{i=0}^{k-1} (\alpha+\varphi)(f^i) =$

$= \alpha + \lim\limits_{k \to +\infty} \frac{1}{k} \cdot \sum\limits_{i=0}^{k-1} (\varphi \circ f^i)$, donc $|\rho(f) - \rho(R_\alpha)| \leq \frac{k}{k}|\varphi|_0 = |f-R_\alpha|_0$ Q.E.D.

Proposition 2.

Soit $f_t = Id + \alpha + \varphi_t$ avec

$$\begin{array}{lll} [a,b] & \longrightarrow & C^0(T^1) \\ t & \longmapsto & \varphi_t \end{array}$$

de classe C^1, et $\varphi_0 = 0$.

Alors $\left|\frac{\rho(f_t) - \rho(f_0)}{t}\right| \leq C = \sup\limits_{x,t} \left|\frac{\partial f_t}{\partial t}(x)\right|$.

(où $\frac{\partial f_t}{\partial t}(x)$ est par définition $\frac{\partial \varphi_t}{\partial t}(x)$).

Démonstration :

$|\rho(f_t) - \rho(f_0)|_0 = |\rho(f_t) - \rho(R_\alpha)|_0 \leq |\varphi_t - \varphi_0| \leq C|t|$ Q.E.D.

Proposition 3.

Soit $$\begin{array}{lll} [a,b] & \longrightarrow & D^0(T^1) \\ t & \longmapsto & f_t \end{array}$$

un chemin de classe C^1. S'il existe $t_0 \in [a,b]$ avec $f_{t_0} = h^{-1} \circ R_\alpha \circ h$, $h \in D^1(T^1)$,

alors $\left|\frac{\rho(f_t) - \rho(f_{t_0})}{t-t_0}\right| \leq$ Constante $= |Dh|_0 \cdot \sup\limits_{x,t} \left|\frac{\partial f_t}{\partial t}(x)\right|$

Démonstration :

$h \in C^1$, f_t est un chemin de classe C^1, donc $g_t = h \circ f_t \circ h^{-1}$ est un chemin

de classe C^1 d'homéomorphismes ; $g_{t_0} = R_\alpha$ et $\rho(g_t) = \rho(f_t)$. D'après la proposition 2, $\left| \dfrac{\rho(f_t) - \rho(f_{t_0})}{t - t_0} \right| \leq \sup\limits_{x,t} \left| \dfrac{\partial g_t}{\partial t}(x) \right|$.

Mais $\dfrac{\partial g_t}{\partial t} = (Dh \circ f_t \circ h^{-1}) \cdot \left(\dfrac{\partial f_t}{\partial t} \circ h^{-1}\right)$, d'où la proposition.

$$\begin{tikzcd}
 & & T\mathbb{R} \arrow[r, "Dh"] \arrow[d] & T\mathbb{R} \arrow[d] \\
\mathbb{R} \arrow[r, "h^{-1}"] \arrow[urr, bend left, "\frac{\partial f_t}{\partial t} \circ h^{-1}"] & \mathbb{R} \arrow[r, "f_t"] \arrow[ur, "\frac{\partial f_t}{\partial t}"] & \mathbb{R} \arrow[r, "h"] & \mathbb{R}
\end{tikzcd}$$

Q.E.D.

Conclusion :

Sur un chemin d'homéomorphismes f_t avec f_{t_0} C^1-conjugué à une rotation, la fonction $t \longmapsto \rho(f_t)$ est lipschitzienne au point t_0.

Proposition 4.

Soit $[a,b] \longrightarrow D^1(T^1)$

$t \longmapsto f_t$

un chemin de classe C^0.

Alors il existe une suite de compacts (éventuellement vides)

$D_1 \subset D_2 \subset \ldots \subset D = \bigcup\limits_k D_k \subset [a,b]$

telle que $t \in D \Leftrightarrow f_t$ est $C^{1+\varepsilon}$-conjugué à $R_{\rho(f_t)}$ et si $t \in D_k$,

alors $f_t = h_t^{-1} \circ R_{\rho(f_t)} \circ h_t$ avec $h_t \in C^{1+\varepsilon}$ et $|Dh_t|_\varepsilon \leq k$.

Démonstration :

Soit $\eta(t) = \sup\limits_{n \in \mathbb{Z}} |Df_t^n|_\varepsilon \in \mathbb{R} \cup \infty$. Alors $t \longmapsto \eta(t)$ est une fonction semi-

continue inférieurement (le supremum de fonctions continues), donc, chaque $D_k = \{t \mid \eta(t) \leq k\}$ est un fermé.

1) D_k est compact car D_k fermé $\subset [a,b]$,

2) $D = \bigcup_k D_k = \{t \mid \eta(t) < \infty\}$.

Proposition 4' :

Soit f de classe C^1, $\sup_{i \in \mathbb{Z}} |Df^i|_\varepsilon = k < \infty$

Alors f est $C^{1+\varepsilon}$-conjugué à une rotation.

Démonstration :

L'hypothèse implique l'équicontinuité des f^i ; on en déduit :

(1) f est alors C^0-conjugué à une rotation :

a) Cas $\rho(f) \notin \mathbb{Q}$: c'est Denjoy trivialisé (pour avoir la conclusion du théorème de Denjoy, il suffit en effet qu'il existe une suite $n_i \to +\infty$ telle que les f^{n_i} soient équicontinus : en effet, ou bien il existe un Cantor minimal invariant K, ou bien f est C^0-conjugué à une rotation ; s'il existe K, alors il y a une composante connexe de T^1-K, qui est un intervalle ouvert non vide U tel que la longueur de $f^{n_i}(U) \to 0$, ce qui contredit l'équicontinuité).

b) Cas $\rho(f) \in \mathbb{Q}(\rho(f) = \frac{p}{q})$: alors $(\bar{f})^q$ a un point fixe dans T^1, et définit donc un élément de Diff $[0,1]$ dont les itérés sont équicontinus : mais il n'existe pas de sous-groupe non trivial de Diff $[0,1[$ qui soit équicontinu (pts fixes), donc $f^q \equiv R_p$ et f est conjugué à une rotation. (rappelons que dans ce cas $h = \frac{1}{q} \sum_{i=0}^{q-1} (f^i - i\frac{p}{q})$ qui est $C^{1+\varepsilon}$).

(2) Il reste à montrer que dans le cas où $\rho(f) = \alpha \notin \mathbb{Q}$, C^0-conjugué $\Rightarrow C^{1+\varepsilon}$-conjugué :

La suite $h_n = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} (f^i - i\alpha)$ est bornée dans $C^{1+\varepsilon}$, donc il existe une sous-suite qui converge vers $h : T^1 \longrightarrow T^1$ de classe C^1 (d'après le théorème d'Ascoli qui implique la compacité de l'inclusion de $C^{1+\varepsilon}$ dans C^1).

<u>Lemme</u> : $h \circ f = R_\alpha \circ h$.

En effet,

$$\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} (f^i - i\alpha) \circ f = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=0}^{n-1} (f^{i+1} - i\alpha) \right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (f^i - (i-1)\alpha),$$

$$R_\alpha \circ h_n = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} (f^i - (i-1)\alpha),$$

$$h_n \circ f = R_\alpha \circ h_n = \frac{1}{n} \left[f^n - (n-1)\alpha - id - \alpha \right] = \frac{1}{n} \left[f^n - id - n\alpha \right],$$

mais $f^n - id - n\alpha$ est uniformément borné (propriété du nombre de rotation), donc $h \circ f - R_\alpha \circ h = 0$. Q.E.D.

<u>Lemme</u> :

h est un <u>difféomorphisme</u> de classe C^1 (c.à.d. Dh ne s'annule pas).

sinon , en dérivant $h \circ f^i = R_{i\alpha} \circ h$, on a $(Dh \circ f^i).Df^i = Dh$.

Mais f est C^0-conjugué à R_α, $\alpha \notin \mathbb{Q}$, les $\bar{f}^i(x)$ sont denses dans T^1 puisque Dh est continu, on en déduit que $Dh \equiv 0$, et donc que h n'est pas un homéomorphisme. Il y a bien une contradiction. Q.E.D.

<u>Lemme</u> : $h \in C^{1+\varepsilon}$

On calcule : $|Dh(x) - Dh(y)|$ = |limite uniforme de

$\frac{1}{n} \left[\sum (Df^i(x) - Df^i(y)) \right] | \leq k \; |x-y|^\varepsilon$. Q.E.D.

La proposition 4' est ainsi démontrée ainsi que la partie $\Rightarrow$ de la proposition 4. La partie $\Leftarrow$ de la proposition 4 est évidente.

La démonstration du théorème III.8: d'après le théorème fondamental d'Herman il existe un sous-ensemble A de $\mathbb{R}$ vérifiant $m(\mathbb{R}-A) = 0$, tel que si $\rho(f_t) \in A$, f_t est $C^{r-1-\beta}$ conjugué à $R_{\rho(f_t)}$.

Si $J = \{\rho(f_t) \mid t \in [a,b]\}$, on a $m(A \cap J) = m(J) > 0$. Soit t avec $\rho(f_t) \in A \cap J$, f_t est alors $C^{r-1-\beta}$ conjugué (pour tout β) à $R_{\rho(f_t)}$ et est en particulier $C^{1+\varepsilon}$ -conjugué à $R_{\rho(f_t)}$ si $r \geq 3$.

On en déduit que $t \in D$ (celui de la proposition 4), c'est-à-dire $\rho(D) \supset A \cap J$ (ρ désigne ici l'application $t \longleftrightarrow R(f_t)$).

Donc $\lim\limits_{k \to +\infty} m(\rho(D_k)) \geq m(A \cap J) = m(J) > 0$.

Or, $\rho|_{D_k} : D_k \to J$ est lipschitzienne de rapport $(k+1)C$, où $C = \sup\limits_{x,t} \left|\frac{\partial f_t}{\partial t}(x)\right|$.

Ceci vient de la Proposition 3 car $|Dh|_\varepsilon \leq k$ implique $|Dh|_0 < k+1$), car il existe $x \in T^1$ tel que $Dh(x) = 1$.

Mais alors il existe un compact $B \subset [a,b]$ et un entier k tels que

1) $\rho(B) \subset A$

2) $B \subset D_k$

3) $m(\rho(B)) > 0$.

[On peut prendre (pour k assez grand) $B = \rho^{-1}(A) \cap D^k$.
$\rho(B) = A \cap \rho(D_k)$ de mesure > 0].

Donc $m(B) \geq \frac{1}{(k+1)C} m(\rho(B)) > 0$ (il y a lieu de démontrer ceci, par exemple en prolongeant $\rho|_{D_k}$ à $\mathbb{R}$ en une fonction lipschitzienne de rapport $(k+1)C$).

Références :

- M.R. Herman :

1) Thèse : Sur la conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle à des rotations (à paraître aux publications de l'I.M.E.S. n° 49).

2) Mesure de Lebesgue et nombre de rotation. Lect. Notes in Math. 597 Springer Verlag, Berlin (1977), p. 271-293.

3) Conjugaison C^{∞} des difféomorphismes du cercle pour presque tout nombre de rotation (CR Acad. Sc. Paris, série A t. 283 p. 579-582).

- P. Deligne : Les difféomorphismes du cercle (d'après M.R. Herman) Séminaire N. Bourbaki, 28ème année 1975/76 Février 1976 Exposé 477.

Chapitre IV.

BIFURCATION DE HOPF.

§ 1.

On considère un champ de vecteurs X_μ dépendant d'un paramètre réel μ sur $\mathbb{R}^n$ (on suppose que X_μ est assez régulier).

On suppose (*) l'existence d'une orbite périodique Γ_μ variant continûment avec μ.

Soit $w \in \Gamma_\mu$. On considère une hypersurface P_μ transverse à Γ_μ en w, au voisinage de w. Il existe un voisinage V de w dans P_μ tel que $\forall\, x_0 \in V$, l'orbite issue de x_0 reste dans un voisinage tubulaire de Γ_μ pour $t \in [0,T]$, T étant l'instant de premier retour sur P_μ : T existe et est une fonction régulière de x_0 ; $T = T_0$ pour $x_0 = w$ (T_0 est la période de Γ_μ). Soit Φ_μ l'application de Poincaré, définie sur un voisinage de w dans P_μ, $x = x(0) \longmapsto x(T)$.

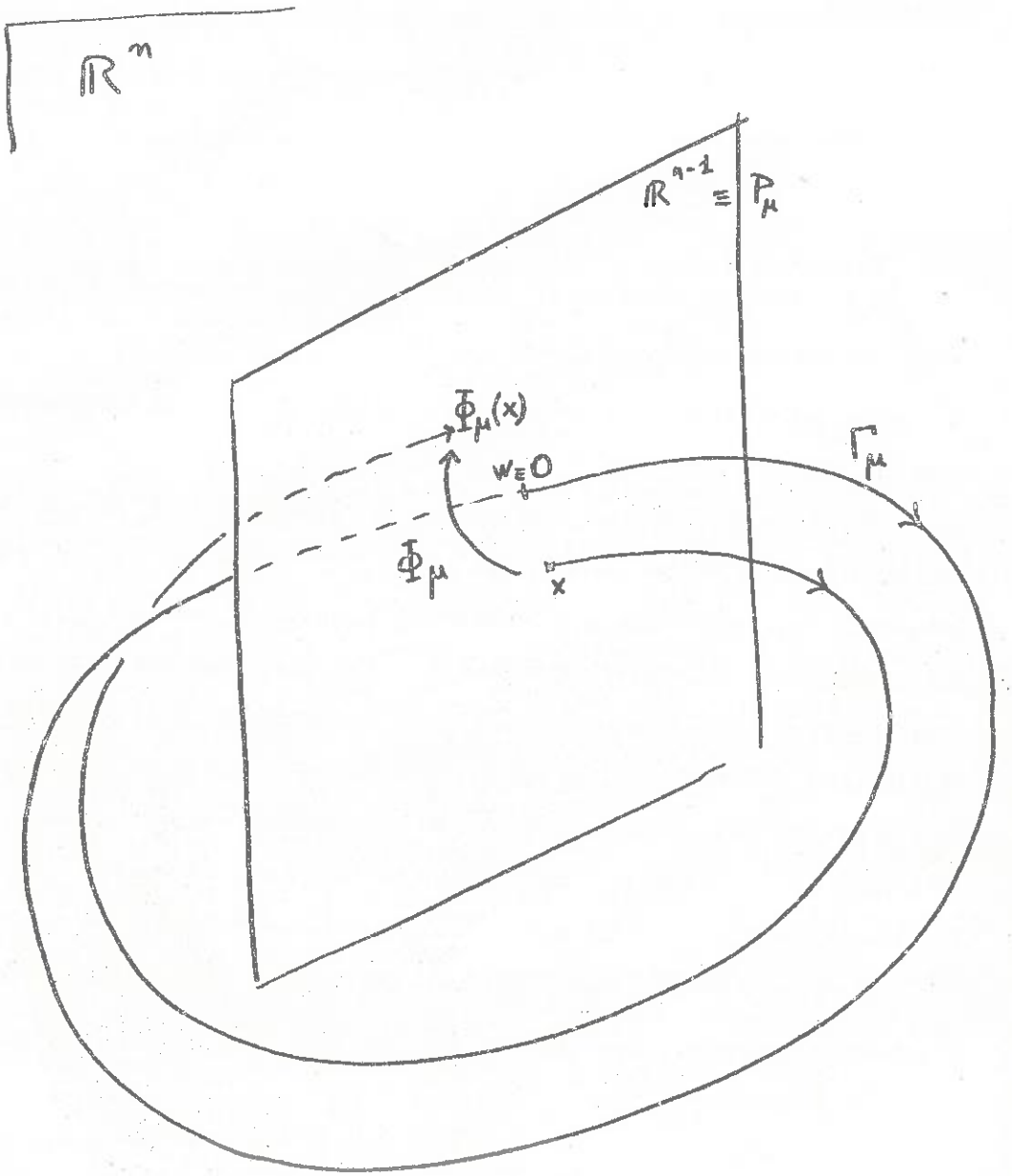
Le comportement asymptotique des trajectoires quand $t \to \infty$ (par exemple) sera connu si l'on connaît le comportement de Φ_μ^n, $n \in \mathbb{N}$, $n \to \infty$.

On dit que l'orbite Γ_μ est (asymptotiquement) stable si la distance $d(\Phi_\mu^n(x_0),w) \longrightarrow 0$ quand $n \to \infty$. Et on dit que Γ_μ est instable s'il existe $\varepsilon > 0$ et un voisinage V de w dans P_μ tels que $\forall x_0 \in V$, il existe n tel que $\mathrm{dist}(\Phi_\mu^n(x_0),w) > \varepsilon$.

Dans la pratique, on prend pour P_μ un hyperplan $\mathbb{R}^{n-1}$ dont l'origine est en w et on obtient une application ϕ_μ définie sur un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^{n-1}$ vérifiant $\phi_\mu(0) = 0$.

(*) Supposons que X_{μ_0} ait une orbite périodique Γ_{μ_0}.

Si pour $\mu = \mu_0$ l'application de Poincaré définie plus bas a une dérivée en son point fixe qui n'admet pas 1 comme valeur propre, l'existence d'une orbite périodique Γ_μ pour X_μ, μ voisin de μ_0, est une simple conséquence du théorème des fonctions implicites.



Application de Poincaré
d'une orbite périodique.

Nous savons (d'après la théorie classique) que :

1) Si $D\phi_\mu(0) = L_\mu$ a un rayon spectral < 1, alors 0 est un point fixe (asymptotiquement) stable.

2) Si L_μ possède des valeurs propres de module plus grand que 1 et aucune valeur propre sur le cercle unité, alors 0 est instable.

Supposons que pour tout $\mu < 0$, le spectre de L_μ soit dans $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ (donc 0 est stable) :

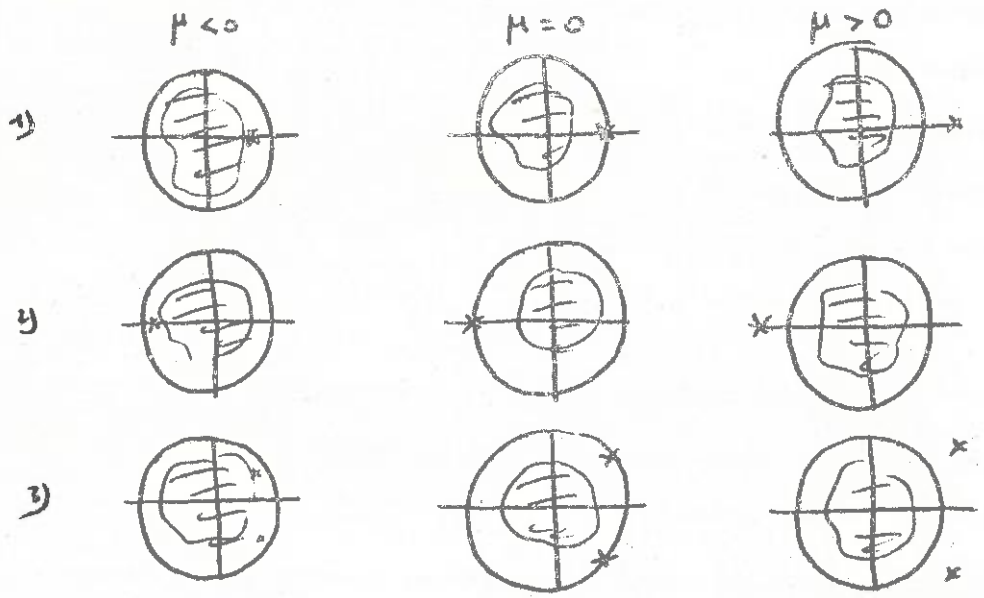
trois cas génériques surviennent lorsque μ traverse 0,

si 0 devient instable pour $\mu > 0$:

1) une valeur propre réelle passe par 1 transversalement au cercle $|z| = 1$.

2) une valeur propre réelle passe par -1 transversalement au cercle $|z| = 1$.

3) un couple de valeurs propres complexes conjuguées traverse transversalement le cercle $|z| = 1$.



On veut savoir ce que deviennent les orbites ?

On va, pour simplifier, se placer en dimension 1 pour l'étude des cas 1) et 2) et en dimension 2 pour l'étude du cas 3.

En fait, on a un théorème (théorème de la variété centrale) qui permet de ramener le problème de la recherche des ensembles invariants par φ_μ^n, $n \in \mathbb{N}$, à un problème en dimension 1 pour les cas 1°, 2°) et à un problème en dimension 2 pour le cas 3). (Réf. (*) : Iooss : Variétés invariantes et systèmes dynamiques, Séminaire de Nice 1975 : quelques erreurs dans les majorations).

Le cas 3) correspond à ce qui est appelé bifurcation de Hopf pour les applications.

§ 2.

CAS 1er :

La valeur propre simple qui s'échappe peut être supposée de la forme $\lambda(\mu) = 1+\mu$ (car $\frac{d\lambda}{d\mu}\Big|_0 \neq 0$, et puisque λ passe transversalement au cercle $|z| = 1$, on peut toujours se ramener à cette forme par changement de paramètre (**)). Alors,

$$\varphi_\mu(x) = (1+\mu)x + ax^2 + O(\mu|x|^2, |x|^3), \quad (x \in \mathbb{R}).$$

D'une manière générique, on peut supposer que $a \neq 0$. On se pose alors la question de savoir si φ_μ^n a des points fixes. On a :

$$\varphi_\mu^n(x) = \lambda^n x + nax^2 + O(\mu|x|^2, |x|^3),$$

(*) Voir aussi Hirsh, Pugh, Shub : Invariant manifolds, Lect. Notes in Math. 583, Springer Verlag, Berlin 1977.

(**) Plus généralement, on pourrait prendre comme paramètre la différence $\lambda-1$ (même s'il n'y a pas transversalité)..

et si l'on veut $x = \Phi_\mu^n(x)$ avec $|x|$ voisin de 0 et μ voisin de 0, on s'aperçoit qu'il suffit de résoudre : $\Phi_\mu(x) = x$, pour avoir tous les points fixes non triviaux.

Donc :

$$x = (1+\mu)x + ax^2 + x^2 f(x,\mu)$$

$x = 0$ est la solution triviale

$\mu + ax + xf(x,\mu) = 0$ donne une solution non triviale (par le théorème des fonctions implicites) :

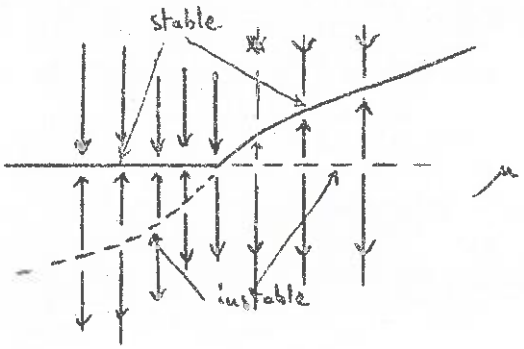
$$x(\mu) = -\frac{\mu}{a} + O(\mu^2).$$

On veut savoir la stabilité de ce point $x(\mu)$: par changement de coordonnées $x = x(\mu) + \tilde{x}$, on a

$$\Phi_\mu(x) = x(\mu) + \tilde{\Phi}_\mu(\tilde{x})$$

$$\tilde{\Phi}_\mu(\tilde{x}) = (1+\mu + 2ax(\mu) + O(\mu^2))\tilde{x} + O(|\tilde{x}|^2)$$

$$= (1-\mu+O(\mu^2))\tilde{x} + O(|\tilde{x}|^2).$$



Puisque $1-\mu+O(\mu^2) < 1$ pour $\mu > 0$ petit, $x(\mu)$ est donc un point fixe stable pour $\mu>0$ et instable pour $\mu<0$. On a donc un échange des stabilités entre 0 et $x(\mu)$ quand μ traverse 0.

§ 3.

CAS 2ème :

La valeur propre simple de $D\Phi_\mu(0)$ peut s'écrire

$$\lambda(\mu)=-(1+\mu).$$

On a :

$$\Phi_\mu(x) = -(1+\mu)x + ax^2 + bx^3 + O(\mu|x|^2, |x|^4),$$

$$\Phi_\mu^n(x) = (-1)^n(1+\mu)^n x + O(|x|^2),$$

On ne peut obtenir un point fixe de Φ_μ^n, voisin de 0 pour μ voisin de 0, que si n est pair.

Pour n=2, on a

$$\Phi_\mu^2(x) = -(1+\mu)[-(1+\mu)x + ax^2 + bx^3] + a[-(1+\mu)x +$$

$$+ ax^2 + bx^3]^2 + b(-1)(1+\mu)^3 x^3 + O(\mu|x|^2, |x|^4).$$

$$= (1+\mu)^2 x + a(1+\mu)\mu x^2 - 2(b+a^2)x^3 + O(\mu|x|^2, |x|^4)$$

$$= (1+\mu)^2 x - 2(b+a^2)x^3 + O(\mu|x|^2, |x|^4).$$

Donc les points fixes non triviaux de $\Phi_\mu^2(x)$ sont définis par :

$$x = (1+\mu)^2 x - 2(b+a^2)x^3 + x^2 f(\mu,x), \quad x \neq 0,$$

ou par : $2\mu+\mu^2 - 2(b+a^2)x^2 + xf(\mu,x) = 0.$

Par le théorème des fonctions implicites, on peut résoudre en μ :

$$\mu = (b+a^2)x^2 + O(x^3).$$

Donc si $b + a^2 > 0$, $x(\mu) = \pm(b+a^2)^{-1/2}\mu^{1/2} + O(\mu)$,

si $b + a^2 < 0$ $x(\mu) = \pm(-b-a^2)^{-1/2}(-\mu)^{1/2} + O(\mu)$.

Soit $x_1(\mu)) = (b+a^2)^{-1/2}\mu^{1/2} + O(\mu)$; alors

$$\Phi_\mu(x_1(\mu)) = -(b+a^2)^{-1/2}\mu^{1/2} + O(\mu) = x_2(\mu),$$

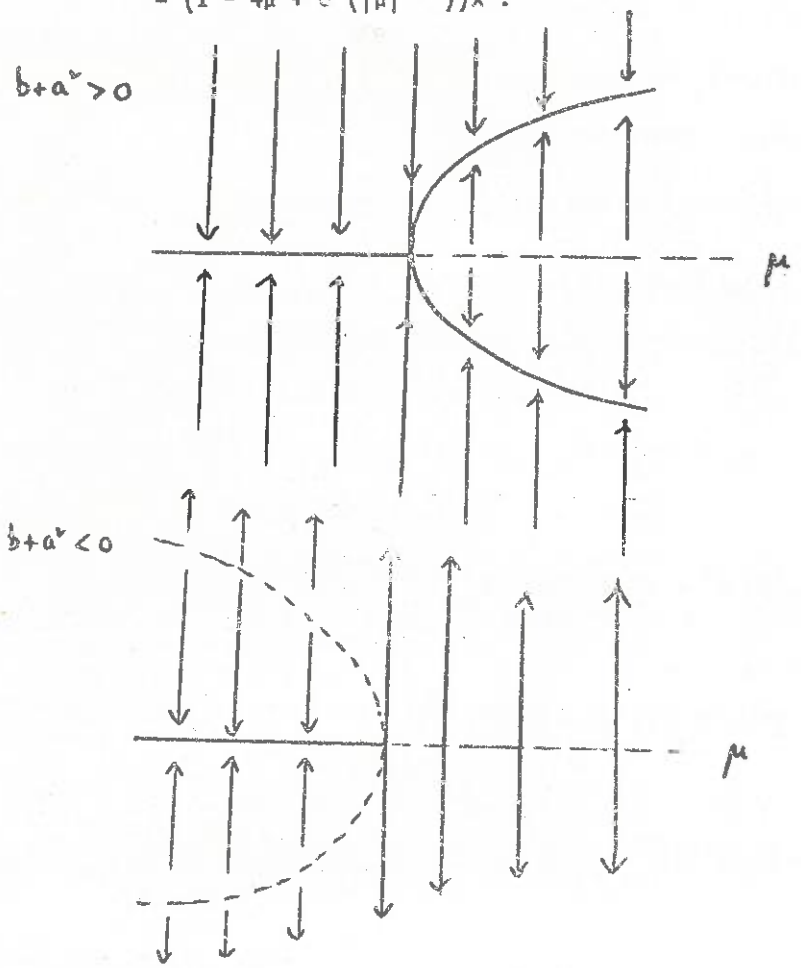
donc on a un couple de points périodiques d'ordre 2 pour Φ_μ .

Pour voir la stabilité de ces points, on fait le changement de coordonnées $x = x(\mu) + \tilde{x}$; alors

$$\Phi_\mu^2(x(\mu) + \tilde{x}) = \tilde{\Phi}_\mu(\tilde{x}) = ((1+\mu)^2 - 6(b+a^2)\, x(\mu)^2 + O(|\mu|^{3/2}))\tilde{x}$$

$$= (1 + 2\mu - 6\mu + O(|\mu|^{3/2}))\tilde{x}$$

$$= (1 - 4\mu + O(|\mu|^{3/2}))\tilde{x} .$$



Donc ce point est stable si $\mu > 0$ et instable si $\mu < 0$.

§ 4.

Cas 3ème :

On est dans $\mathbb{R}^2$, qu'on identifie à $\mathbb{C}$.

Par changement de paramètre, on peut supposer que :

$\Phi_\mu(z) = \lambda(\mu)z + O(|z|^2)$, où $\lambda(\mu) = (1+\mu)\, e^{2\pi i\theta(\mu)}$

On cherche à simplifier Φ_μ en changeant de coordonnées afin de faire apparaître simplement les ensembles invariants.

D'abord on fait formellement ce qui suit (on ne considère pas la convergence)

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C} \arrow[r, "\Phi_\mu"] \arrow[d, "\psi_\mu"'] & \mathbb{C} \arrow[d, "\psi_\mu"] \\ \mathbb{C} \arrow[r, "\Phi'_\mu"] & \mathbb{C} \end{tikzcd}$$

On écrit :

$$\Phi_\mu(z) = \lambda(\mu)z + a_{20}(\mu)\, z^2 + a_{11}(\mu)\, z\bar{z} + a_{02}(\mu)\, \bar{z}^2 + O(|z|^3)\ ,$$

et on cherche ψ_μ de la forme

$$\psi_\mu(z) = z + \gamma_{20}(\mu)\, z^2 + \gamma_{11}(\mu)\, z\bar{z} + \gamma_{02}(\mu)\, \bar{z}^2.$$

Alors,

$$z = \psi_\mu^{-1}(z') = z' - \gamma_{20}(\mu)\, z'^2 - \gamma_{11}(\mu)\, z'\bar{z}' - \gamma_{02}(\mu)\, \bar{z}'^2 + O(|z'|^3),$$

donc

$$\Phi'_\mu(z') = \psi_\mu \circ \Phi_\mu(z) = \psi_\mu\Big[\lambda(\mu)z + \sum_{i+j=2} a_{ij}(\mu)\, z^i\, \bar{z}^j + O(|z|^3)\Big]$$

$$= \lambda(\mu)z + \sum_{i+j=2} a_{ij}(\mu)\, z^i\, \bar{z}^j + \sum_{i+j=2} \gamma_{ij}(\mu)\, \lambda(\mu)^i\, \overline{\lambda(\mu)}^j\, z^i\, \bar{z}^j + O(|z|^3)\ ,$$

$$\Phi'_\mu(z') = \lambda(\mu)z' - \lambda(\mu) \sum_{i+j=2} \gamma_{ij}(\mu)\, z'^i\, \bar{z}'^j +$$

$$+ \sum_{i+j=2} a_{ij}(\mu)\, z'^{i}\, \bar{z}'^{j} + \sum_{i+j=2} \gamma_{ij}(\mu)\, \lambda(\mu)^{i}\, \overline{\lambda(\mu)}^{j}\, z'^{i}\, \bar{z}'^{j} + O(|z'|^{3}).$$

Le coefficient de $z'^{i}\, \bar{z}'^{j}$ dans cette expression est

$$\gamma_{ij}(-\lambda + \lambda^{i}\, \bar{\lambda}^{j}) + a_{ij}.$$

Si on pose (formellement)

$$\gamma_{ij} = \frac{a_{ij}}{\lambda - \lambda^{i}\, \lambda^{j}},$$

on peut exclure le terme $z'^{i}\, \bar{z}'^{j}$ dans $\phi'_{\mu}(z')$. Mais on voit facilement qu'on ne peut pas faire cela par exemple pour $i=2$, $j=1$ (le dénominateur sera 0 pour $\mu=0$), ou plus généralement, pour $i=j+1$. Si pour tout autre i,j, on peut faire ça, c'est-à-dire si $\lambda(0)$ n'est pas racine de l'unité, un changement de coordonnées <u>formel</u> nous ramène au cas où

$$\Phi_{\mu}(z) = z\, \sigma_{\mu}(|z|^{2}), \text{ avec}$$

$\sigma_{\mu}(r) = (1+\mu)\, e^{2i\pi\theta(\mu)} + \sum_{k=1}^{+\infty} s_{k}(\mu)\, r^{k}$, série formelle à coefficients $s_{k}(\mu) \in \mathbb{C}$.

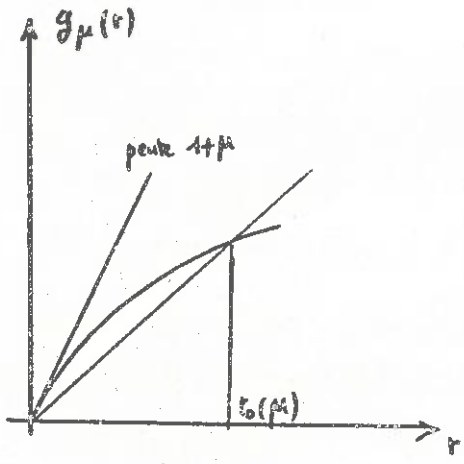
Sous cette forme, Φ_{μ} transforme un cercle $|z| = \text{cste}$ en un cercle $|z| = \text{cste}$.

Si on écrit $\sigma_{\mu}(r) = g_{\mu}(r)\, e^{2i\pi\, h_{\mu}(r)}$,

$$g_{\mu}(r) = 1+\mu + \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_{k}(\mu)\, r^{k},\quad h_{\mu}(r) = \theta(\mu) + \sum_{k=1}^{+\infty} \beta_{k}(\mu)\, r^{k},$$

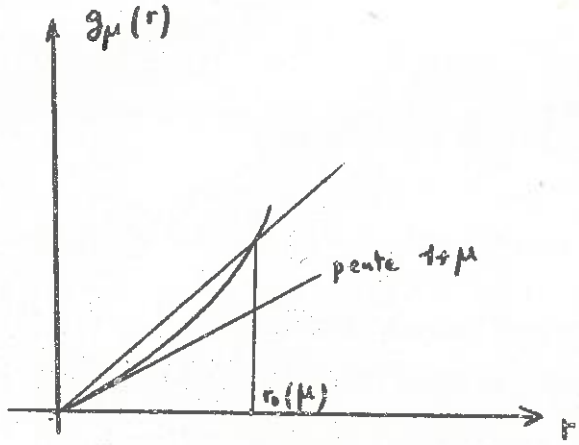
séries formelles à coefficients réels, la recherche d'un cercle invariant $|z| = r_{0}(\mu)$ de Φ_{μ} se ramène à la résolution de l'équation $g_{\mu}(r) = r$.

En général $\alpha_{1}(0) \neq 0$, et cette équation a une solution $r = r_{0}(\mu) = \sqrt{\frac{\mu}{\alpha_{1}}} + O(|\mu|)$



$\alpha_1 < 0$

Solution pour $\mu > 0$



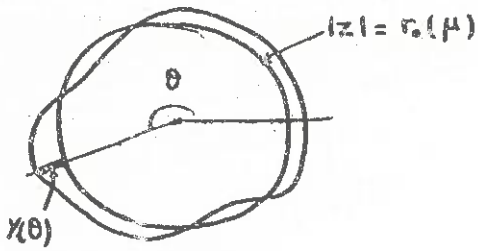
$\alpha_1 > 0$

Solution pour $\mu < 0$

Remarquons que la restriction de Φ_μ au cercle $|z| = r_0(\mu)$ n'est autre que la rotation d'angle $h_\mu(r_0(\mu))$.

Cependant, il est bien connu en mécanique céleste que la série formelle donnant ψ_μ ne converge pas en général, même si Φ_μ est analytique.

On se contente alors d'effectuer le changement de variables défini par l'application ψ_μ obtenue en ne gardant que les premiers termes du développement formel ; par exemple, si $\lambda_0^i \neq 1$ pour $1 \leq i \leq 5$, on peut se ramener (par un ψ_μ polynomial) à $\Phi_\mu(z) = \lambda(\mu)z + a(\mu)\, z^2\bar{z} + O(|z|^5)$.



S'il n'y a pas le terme $O(|z|^5)$, alors, comme nous l'avons vu, Φ_μ a en général un cercle invariant $|z| = r_0(\mu)$; nous cherchons donc une courbe fermée invariante au voisinage de ce cercle. Si on identifie un voisinage tubulaire du cercle $|z| = r_0(\mu)$ au produit $T^1 \times \mathbb{R}$, une telle courbe est le graphe d'une application $y : T^1 \longrightarrow \mathbb{R}$ assez proche de 0 (dans une topologie de Lipschitz par exemple). La formule Φ_μ (graphe y) = graphe $(\bar{\Phi}_\mu(y))$ fait de Φ_μ un opérateur $\bar{\Phi}_\mu$ (non linéaire) sur l'espace de ces applications ; Si on choisit bien cet espace, $\bar{\Phi}_\mu$ est une contraction, et possède donc un point fixe par le théorème classique du même nom ; ce point fixe donne la courbe invariante cherchée. (voir Ruelle-Takens).

Bien entendu, la restriction de Φ_μ à cette courbe n'est plus à priori conjuguée à une rotation.

Conclusion pour le champ de vecteurs X_μ :

1er cas : échange de stabilité entre 2 orbites périodiques.

2ème cas : Si $b+a^2 > 0$, apparition d'une orbite périodique stable de période environ double de l'orbite périodique initiale (si $b+a^2 < 0$, disparition d'une telle orbite périodique instable).

3ème cas : Si $\alpha_1 < 0$, apparition d'un tore invariant stable de dimension deux. Si $\alpha_1 > 0$, disparition d'un tore invariant instable de dimension deux.

§ 5. Problèmes :

Les indications du paragraphe précédent permettent de répondre à la question suivante : que se passe-t-il "en général" lorsque, dans une famille d'équations différentielles autonomes(*), une orbite périodique asymptotiquement stable perd sa stabilité (le lecteur remarquera que, si $\lambda(0) \neq 1$, la persistance

(*) "équation différentielle" autonome et "champ de vecteurs" sont synonymes pour nous.

d'une orbite périodique pour μ voisin de 0 est une simple conséquence du théorème des fonctions implicites).

Les mêmes démonstrations (dans le cas plus simple où Φ_μ est dans un groupe à 1 paramètre de difféomorphismes) nous disent également ce qui se passe "en général" lorsqu'un équilibre stable perd sa stabilité (le cas classique de bifurcation de Hopf est celui où apparait une orbite périodique stable pour l'équation différentielle ; voir à ce propos les récentes démonstrations topologiques de Alexander et Yorke).

Remarquons que dans ces deux cas, le mot "en général" a une signification très forte : il suffit qu'un nombre fini d'égalités ne soient pas vérifiées.

La question suivante est naturellement :

que se passe-t-il "en général" lorsqu'un tore invariant stable de dimension deux perd sa stabilité ?

Ici, au contraire, la signification à donner au mot "en général" est beaucoup moins claire (voir dans le chapitre précédent antagonisme entre mesure et catégorie de Baire pour définir une équation différentielle "générale" sur le tore de dimension deux).

Si au moment où le tore invariant cesse d'être attractant il existe sur ce tore des orbites périodiques, il se peut qu'un tore invariant régulier cesse d'exister pour $\mu>0$; la description précise du champ de vecteurs pour $\mu>0$ petit est sans doute très compliquée en général (attracteurs étranges, voir l'exposé de R.Bowen dans le séminaire de Berkeley sur la turbulence en 1976, Lect. Notes 615, Springer).

Etant donnés les résultats du chapitre précédent, le cas où, pour $\mu = 0$, la restriction du champ de vecteurs X_0 au tore invariant est quasi-périodique (avec périodes rationellement indépendantes) ne peut être regardé comme exceptionnel et doit être étudié.

En vue des théories déterministes de la turbulence hydrodynamique (Landau, Ruelle et Takens) nous cherchons si dans certains cas il apparait pour $\mu >> 0$ un tore invariant de dimension 3 asymptotiquement stable : ce problème a été étudié dans [Chenciner-Iooss : bifurcations de tores invariants, à paraître dans Archives of Rational mechanics and analysis 1979].

Supposons pour simplifier que l'équation différentielle considérée soit dans $\mathbb{R}^4$. D'après l'hypothèse, il existe une courbe fermée Γ_0 transverse au champ X_0 sur le tore de dimension deux T_0 invariant par X_0, et l'application de Poincaré f_0 est conjuguée à une rotation d'angle irrationnel α .

Supposons que la restriction à Γ_0 du fibré normal de T_0 dans $\mathbb{R}^4$ soit triviale, c'est-à-dire isomorphe à $\Gamma_0 \times \mathbb{R}^2 \cong T^1 \times \mathbb{R}^2$.

L'application de Poincaré s'étend en une application de premier retour $F_0 : \Gamma_0 \times \mathcal{V} \longrightarrow \Gamma_0 \times \mathbb{R}^2$ définie sur un voisinage $\Gamma_0 \times \mathcal{V}$ de $\Gamma_0 \times 0$ dans $\Gamma_0 \times \mathbb{R}^2$.

Le problème devient alors le suivant : On considère une famille à 1 paramètre d'applications régulières de $T^1 \times \mathcal{V}$ dans $T^1 \times \mathbb{R}^2$ ($\mathcal{V}$ voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^2$).
On suppose que, pour $\mu \leq 0$ petit, F_μ laisse invariante (globalement) une courbe fermée Γ_μ linéairement asymptotiquement stable pour $\mu < 0$, variant continûment avec μ , et coïncidant avec $T^1 = 0$ pour $\mu = 0$.
On suppose que, pour $\mu = 0$, la restriction de Φ_0 à $\Gamma_0 = T^1 \times 0$ est la rotation R_α, α irrationnel, autrement dit on a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
T^1 \times \mathcal{V} & \xrightarrow{F_0} & T^1 \times \mathbb{R}^2 \\
(\theta, x) & \longmapsto & (f_0(\theta, x), \Phi_0(\theta, x)) \\
\uparrow & & \uparrow \\
T^1 \times 0 & \xrightarrow{R_\alpha} & T^1 \times 0 \\
\theta & \longmapsto & \theta + \alpha
\end{array}$$

avec $f_0(\theta,x) + \theta + \alpha + O(|x|)$

$$\Phi_0(\theta,x) = A_0(\theta)x + O(|x|^2),$$

$A_0(\theta) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^2)$.

On suppose enfin que, pour $\mu>0$, F_μ ne possède plus de cercle invariant asymptotiquement stable proche de $T^1 x 0$.

<u>1ère question</u> : (persistance).

F_μ possède-t-elle encore une courbe fermée invariante proche de $T^1 x 0$. (non asymptotiquement stable par hypothèse) pour $\mu>0$ petit ?

<u>2ème question</u> : (bifurcation).

Sous quelles conditions apparaît-il pour $\mu > 0$ petit un tore de dimension deux invariant par F_μ et asymptotiquement stable sur lequel la restriction de F_μ soit homotope à l'identité ? (ce dernier point pour que le tore corresponde effectivement à un tore de dimension 3 invariant par le champ X_μ).

<u>3ème question</u> : Quelle est la situation "générale" ?

<u>Remarque</u> : Bien entendu ces questions peuvent également être posées lorsque la restriction à $T^1 x 0$ de F_0 n'est pas une rotation R_α, mais par exemple un difféomorphisme structurellement stable.

Le problème fondamental est le suivant :

le rôle joué par la dérivée en 0 $d\Phi_0(0)$ de l'application de Poincaré dans la bifurcation de Hopf est joué ici par l'application "skew-produit"

$$G_0 : T^1 x \mathbb{R}^2 \longrightarrow T^1 x \mathbb{R}^2$$

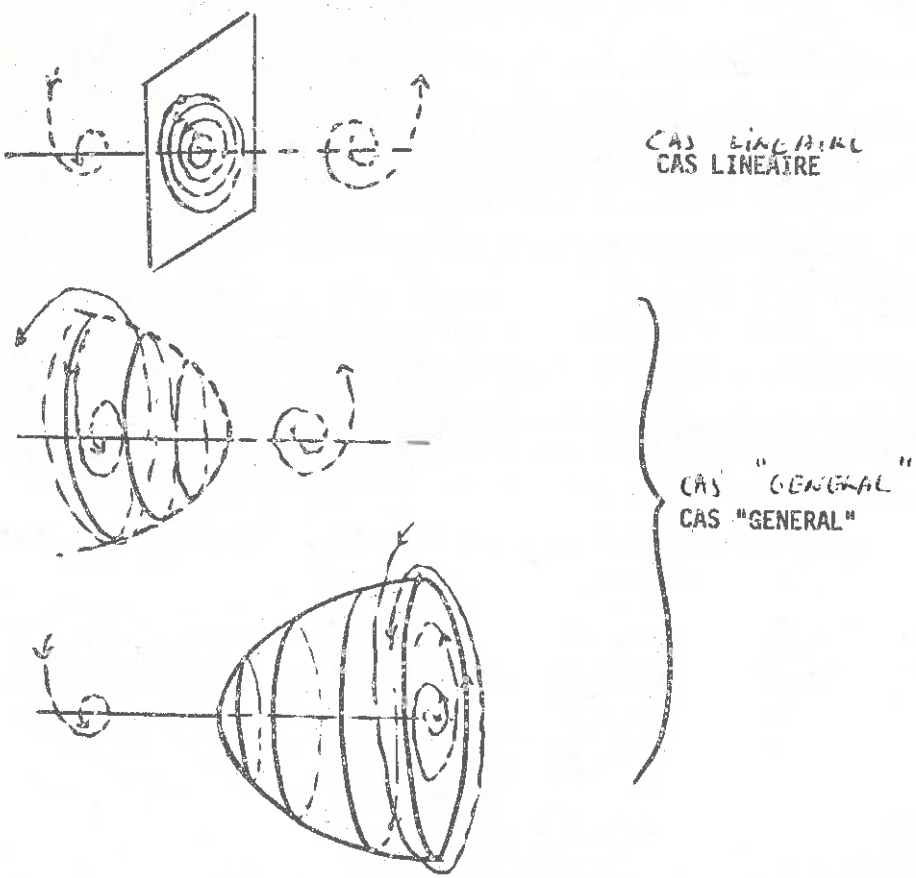
$$(\theta,x) \longmapsto (\theta+\alpha,\ A_0(\theta)x)$$

(famille d'applications linéaires au-dessus d'une rotation irrationnelle).

Alors que sous les hypothèses du théorème de bifurcation de Hopf (existence d'une paire de valeurs propres imaginaires conjuguées de module 1) $d\Phi_0(0)$ laisse globalement invariants les éléments d'une famille à un paramètre d'ellipses, G_0 peut très bien, sous nos hypothèses, avoir une orbite dense.

Mais cette propriété de $d\Phi_0(0)$ est fondamentale : on peut en effet considérer que la famille des courbes Γ_μ (invariantes par Φ_μ) donnée par le théorème de bifurcation de Hopf n'est autre q'un "déploiement" dans la direction $\mu>0$ (ou $\mu < 0$) de cette famille d'ellipses laissées invariantes par $d\Phi_0(0)$.

Ceci se voit bien si on compare le cas d'une famille d'applications Φ_μ linéaires dont le spectre vérifie les hypothèses du théorème de bifurcation de Hopf au cas "général" où le théorème s'applique (voir figures).



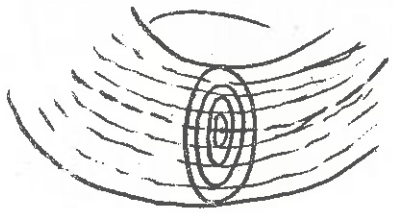
Une théorie de perturbation analogue à celle de la bifurcation de Hopf doit commencer par supposer que G_0 laisse invariant les éléments d'une famille à un paramètre de tores de dimension deux entourant $T^1 \times 0$. Ceci est en particulier le cas si $A_0(\theta)$ peut être rendu égal à une rotation indépendante de θ par un changement de coordonnées. Cette dernière condition équivaut à l'existence d'une application du cercle dans $GL(\mathbb{R}^2)$, $\theta \longmapsto H(\theta)$, telle que la matrice $H(\theta+\alpha)^{-1} A(\theta) H(\theta)$ soit indépendante de θ.

Ce problème est analogue, en plus compliqué, au problème de conjugaison d'un difféomorphisme du cercle à une rotation : par exemple, si les matrices $A(\theta)$ sont assez proches de la matrice constante C = Rotation d'angle β on peut montrer à l'aide du théorème de fonctions implicites de Nash-Moser (rendu C^∞ par F. Sergeraert) que, si α n'est pas trop bien approché par les nombres rationnels et si le couple (α,β) vérifie certaines hypothèses diophantiennes, il existe une matrice constante D proche de Id et une application $\theta \longmapsto H(\theta)$ de T^1 dans $GL(R^2)$ telles que
$A(\theta) = D.H(\theta+\alpha).\ C.H(\theta)^{-1}$.

Décider quand $D \equiv 0$ demanderait un analogue du nombre de rotation (comparer à $f = R_\lambda \circ g \circ R_\alpha \circ g^{-1}$, où, si $\alpha \notin \mathbb{Q}$, $\lambda = 0$ équivaut à $\rho(f) = \alpha$).

Dans le cas où $A(\theta) = R_\beta$ on peut, moyennant certaines hypothèses techniques de nature diophantienne, trouver un théorème de bifurcation (voir Chenciner-Iooss).

Mais ceci ne représente en aucun cas la "situation générale".
La théorie des familles à un paramètre d'équations différentiables est bien riche !



R E F E R E N C E S

J.C. ALEXANDER, J.A. YORKE — Global bifurcation of periodic orbits, preprint u. of Maryland 1978.

A. CHENCINER — Cours à l'E.N.S. en 1977-78, rédigé par D. Bennequin, à paraître.

A. CHENCINER — Hopf bifurcation for invariant tori, conférence à la session du C.I.M.E. sur les systèmes dynamiques, Bressanone, Juin 1978.

A. CHENCINER, G. IOOSS — Bifurcations de tores invariants à paraître aux Archives of Rational mechanics and analysis en 1975.

G. IOOSS — Cours à Minneapolis en 1978, miméographié.

D. RUELLE, F. TAKENS — On the nature of turbulence. Comm. Math. Phys. 20, (1971), p. 167.192.

R.J. SACKER — On invariant surfaces and bifurcation of periodic solutions of ordinary differential equations. New-York Univ. IMM. N.Y.U. 333 (1964).

G.R. SELL — Bifurcation of higher dimensional torii, preprint University of Minnesota, Minneapolis 1978.