

# Minima de l'intégrale d'action du Problème newtonien de 4 corps de masses égales dans $R^3$ : orbites "hip-hop"

Alain Chenciner<sup>\*,\*\*</sup> et Andrea Venturelli<sup>\*</sup>

<sup>\*</sup>Astronomie et Systèmes Dynamiques, IMCCE  
UMR 8028 du CNRS, Bureau des Longitudes,  
77, avenue Denfert-Rochereau, 75014 Paris

<sup>\*\*</sup>Département de Mathématiques  
Université Denis Diderot (Paris VII)  
16, rue Clisson 75013 Paris

**Résumé.** *Nous considérons le problème de 4 corps de même masse dans  $R^3$  pour le potentiel newtonien en  $r^{-1}$ . Nous nous intéressons aux minima absolus de l'intégrale d'action dans l'espace des lacets (anti)symétriques de classe  $H^1$  dont la période est fixée. C'est le cas le plus simple dans lequel les résultats de [4] (rectifiés dans [5]) ne s'appliquent pas : les minima absolus ne peuvent être les solutions d'équilibre relatif dont la configuration est un minimum absolu du potentiel parmi les configurations dont le moment d'inertie par rapport à leur centre de gravité est fixé. En effet, le tétraèdre régulier ne peut avoir un mouvement d'équilibre relatif dans  $R^3$  (voir [2]). Nous montrons que les minima absolus de l'action ne sont pas des mouvements homographiques. Nous montrons également que si l'on restreint les configurations à avoir un certain type de symétrie d'ordre 4, le minimum absolu est une orbite sans collision dont la configuration "hésite" en quelque sorte entre la configuration centrale du carré et celle du tétraèdre. Nous appelons "hip-hop" ces orbites. Un résultat analogue vaut pour une symétrie d'ordre 3 dans laquelle la configuration centrale du triangle équilatéral avec masse au centre de gravité remplace celle du carré.*

**Abstract.** *We consider the problem of 4 bodies of equal masses in  $R^3$  for the newtonian  $r^{-1}$  potential. We address the question of the absolute minima of the action integral among (anti)symmetric loops of class  $H^1$  whose period is fixed. It is the simplest case for which the results of [4] (corrected in [5]) do not apply : the minima cannot be the relative equilibria whose configuration is an absolute minimum of the potential among the configurations having a given moment of inertia with respect to their center of mass. This is because the regular tetrahedron cannot have a relative equilibrium motion in  $R^3$  (see [2]). We show that the absolute minima of the action are not homographic motions. We also show that if we force the configuration to admit a certain type of symmetry of order 4, the absolute minimum is a collisionless orbit whose configuration "hesitates" between the central configuration of the square and the one of the tetrahedron. We call "hip-hop" these orbits. A similar result holds in case of a symmetry of order 3 where the central configuration of the equilateral triangle with a body at the center of mass replaces the square.*

**Introduction.** Toute solution périodique du problème des  $n$  corps est un point critique de l'intégrale d'action lagrangienne considérée comme définie sur l'espace de tous les lacets de classe  $H^1$ , de période fixée, dans l'espace de configuration. Nous ne considérons ici que les solutions (anti)symétriques\*, c'est-à-dire telles qu'à la mi-période chacun des corps occupe la position symétrique de sa position initiale par rapport au centre de gravité du système. Se restreindre aux lacets de l'espace de configuration ayant cette propriété garantit la "coercivité" de l'action : si la taille du système devient grande au cours du temps, il en est de même de l'action. Remarquons que, dans le cas de deux corps, de toutes les solutions elliptiques, seules les solutions circulaires possèdent la propriété d'(anti)symétrie. Pour le potentiel newtonien, il existe malheureusement d'autres points critiques (dans un sens généralisé) de l'action formés de morceaux de solution aboutissant à des collisions. Les plus simples sont les solutions du problème des deux corps qui au cours d'une demi-période effectuent un mouvement colinéaire d'ejection-collision et le répètent symétriquement, c'est-à-dire avec échange des deux corps, au cours de la demi-période suivante. Dans ce cas, on sait depuis Gordon [6] que l'action d'un quelconque point critique comportant des collisions est supérieure à celle de la solution circulaire ayant la même période. Ceci conduit à penser que, quel que soit le nombre de corps, les solutions périodiques (anti)symétriques minimisant l'action doivent être des "équilibres relatifs", généralisation naturelle des solutions circulaires du problème des deux corps. Le résultat démontré dans ([4],[5]) est que c'est bien le cas pour le problème dans le plan (et plus généralement dans tout espace de dimension paire). Le présent article est consacré au cas le plus simple encore non compris, celui de quatre corps de masses égales dans  $R^3$ .

**Notations.** Ce sont celles de [4]. Nous considérons 4 corps de masse unité dans l'espace euclidien  $R^3$ , s'attirant mutuellement suivant la loi de Newton. L'espace des phases peut être identifié au fibré tangent de l'espace  $\hat{\mathcal{X}}$  des configurations,

$$\hat{\mathcal{X}} = \mathcal{X} \setminus \{\text{collisions}\} = \left\{ x = (\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_4) \in (R^3)^4, \sum_{i=1}^4 \vec{r}_i = 0 \right\} \setminus \{x, \exists i \neq j, \vec{r}_i = \vec{r}_j\}.$$

Sur  $\mathcal{X}$ , le "produit scalaire des masses" s'écrit  $\sum_{i=1}^4 \vec{r}_i \cdot \vec{s}_i$  (le point représente le produit scalaire euclidien de  $R^3$ ). Sur l'espace des phases (identifié au produit cartésien  $\hat{\mathcal{X}} \times \mathcal{X}$ , dont on notera  $(x, y)$  les éléments), on définit les fonctions

$$I = x \cdot x, \quad J = x \cdot y, \quad K = y \cdot y, \quad U = U(x), \quad H = \frac{1}{2}K - U, \quad L = \frac{1}{2}K + U,$$

respectivement égales au *moment d'inertie par rapport au centre de gravité*, à la moitié de sa dérivée par rapport au temps, au double de l'*énergie cinétique dans un repère fixant le centre de gravité*, à la *fonction potentiel*, à l'*énergie totale* et au *Lagrangien*. La *taille*  $r = I^{\frac{1}{2}}$  des configurations est une norme sur  $\mathcal{X}$ . La "fonction de force"  $U$ , opposée de l'énergie potentielle, s'écrit  $U = g \sum_{i < j} |\vec{r}_i - \vec{r}_j|^{-1}$  et on choisit les unités de façon que la constante de gravitation  $g$  soit égale à 1.

---

\* Cette dénomination hybride vient de ce qu'à cause du signe moins dans l'équation qu'elles vérifient, ces solutions sont appelées antisymétriques par les analystes alors qu'elles sont manifestement symétriques pour les géomètres. On oubliera dans la suite le préfixe (anti).

Les points critiques de la fonction homogène de degré zéro  $\tilde{U} = I^{\frac{1}{2}}U = rU$ , qui sont aussi les points critiques des restrictions de  $U$  aux sphères d'équation  $I = \text{constante}$ , sont appelés *configurations centrales*. Rappelons (voir [2],[8]) que ces configurations sont définies par le fait qu'elles admettent des mouvements *homothétiques* dans lesquels la configuration s'effondre homothétiquement sur son centre de gravité. Si la dimension de l'espace est paire, elles admettent de plus des mouvements périodiques *homographiques* dans lesquels la configuration reste semblable à elle-même, ce qui signifie qu'elle ne change que par isométrie et homothétie, chaque corps ayant autour du centre de gravité un mouvement elliptique keplerien. Dans le cas particulier des mouvements circulaires uniformes, où la configuration reste constante à isométrie près, on parle d'*équilibre relatif*.

**Le cadre fonctionnel.** Soit  $H^1$  l'espace de Sobolev des fonctions qui sont, ainsi que leur dérivée première au sens des distributions, de carré sommable. Soit  $T$  un nombre réel positif. On note

$$\begin{cases} \Lambda = H^1(R/TZ, \mathcal{X}), \mathcal{A} : \Lambda \rightarrow R \cup \{\infty\}, \mathcal{A}(x) = \int_0^T L(x(t), \dot{x}(t)) dt, \\ \Lambda_a = \{x \in H^1(R/TZ, \mathcal{X}), x(t + T/2) = -x(t)\}, \mathcal{A}_a = \mathcal{A}|_{\Lambda_a}. \end{cases}$$

La restriction à  $\Lambda_a$  est une manière classique de rendre coercive la fonctionnelle d'action qui, sur  $\Lambda$  atteint son minimum 0 "à l'infini" (corps infiniment séparés avec vitesses nulles). Elle implique en effet que si la taille de la configuration devient grande, il en est de même de la longueur du lacet et donc de l'action. On déduit alors comme dans [6] de la semi-continuité inférieure faible de la fonctionnelle l'existence d'un minimum de  $\mathcal{A}_a$ . On déduit d'autre part de l'invariance du lagrangien par la symétrie  $(x, y) \mapsto (-x, -y)$  qu'un point critique de  $\mathcal{A}_a$  est aussi un point critique de  $\mathcal{A}$ . Rappelons la principale difficulté de l'approche variationnelle du cas newtonien : il découle des estimations de Sundman (voir [3]) que l'action d'un segment d'orbite aboutissant à une collision reste finie. Un minimum de  $\mathcal{A}_a$  peut donc inclure de tels segments.

Parmi les mouvements homographiques, seuls sont symétriques (i.e. appartiennent à  $\Lambda_a$ ) les mouvements d'équilibre relatif. Il est cependant naturel d'élargir le sens du mot "mouvement" : ainsi, à un mouvement homothétique d'éjection-collision  $x(t)$  de "période"  $T/2$ , i.e. tel que, à une translation près de  $t$ ,  $x(0) = x(T/2) = 0$ , on associera le *mouvement homothétique symétrique* défini par  $x(t)$  si  $0 \leq t \leq T/2$  et par  $-x(t)$  si  $T/2 \leq t \leq T$ .

La concavité de l'action  $\alpha = \text{cste} \times T^{\frac{1}{3}}$  comme fonction de la période dans le problème des deux corps implique que l'action d'un *mouvement homothétique symétrique* est strictement supérieure à celle d'un mouvement homothétique d'éjection-collision ayant même période et même configuration. En effet, le premier a pour action le double de celle d'un mouvement homothétique d'éjection-collision de période moitié (c'est l'argument de Gordon [6]). Mais, dans le cas newtonien qui nous occupe, l'action reste constante sur la famille à un paramètre de mouvements périodiques homographiques de même période allant de l'équilibre relatif au mouvement homothétique d'éjection-collision. On en déduit que : *l'action d'un mouvement homothétique symétrique est strictement supérieure à celle d'un mouvement d'équilibre relatif de même période et même configuration*.

**Une surprise.** Dans le problème qui nous occupe, le minimum  $U_0$  de  $\tilde{U}$  est atteint par le tétraèdre régulier, qui n'admet pas de mouvement d'équilibre relatif dans  $R^3$  (voir [2]). C'est en posant la question à laquelle répond le lemme ci-dessous que V. Coti Zelati a mis en évidence l'oubli de ce fait dans [4] et a par la même provoqué le présent article :

**Lemme 1.** *L'action d'un mouvement homothétique symétrique du tétraèdre régulier est strictement supérieure à celle d'un mouvement d'équilibre relatif de même période du carré.*

**Démonstration.** Soit  $l_0$  la longueur du côté du tétraèdre régulier qui admet, dans  $R^4$ , un mouvement d'équilibre relatif de période  $T$ . Soit de même  $l_1$  la longueur du côté d'un carré admettant un mouvement d'équilibre relatif de période  $T$ . On déduit des formules données dans [4] que

$$\frac{4\pi^2}{T^2} = \tilde{U}I^{-\frac{3}{2}} = \frac{U}{I} = 4l_0^{-3} = \frac{4 + \sqrt{2}}{8}4l_1^{-3}.$$

L'action de ces mouvements est respectivement

$$a_0(T) = 3(2\pi^2)^{\frac{1}{3}}(U_0/2)^{\frac{2}{3}}T^{\frac{1}{3}} \quad \text{et} \quad a_1(T) = 3(2\pi^2)^{\frac{1}{3}}(U_1/2)^{\frac{2}{3}}T^{\frac{1}{3}},$$

où  $U_0 = 4(3/2)^{\frac{3}{2}} = 3\sqrt{6}$  et  $U_1 = 4 \times \frac{4 + \sqrt{2}}{8} \times 2^{\frac{3}{2}} = 4\sqrt{2} + 2$  sont les valeurs de  $\tilde{U}$  sur les deux mouvements. Le lemme découle de ce que  $2U_0 > U_1$ , qui implique que  $2a_0(T/2) > a_1(T)$ .

**Lemme 2.** *Un mouvement d'équilibre relatif du carré dans un plan de  $R^3$  n'est pas un minimum local de l'action  $\mathcal{A}_a$ .*

**Démonstration.** On calcule le hessien de l'action  $\mathcal{A}_a$  en un tel mouvement, noté  $x(t)$ , en se restreignant aux variations  $z(t) = (z_1(t), \dots, z_4(t))$  "verticales", c'est-à-dire orthogonales au plan du mouvement.

$$\begin{aligned} d^2\mathcal{A}(x(t))(z(t), z(t)) &= \int_0^T [|\dot{z}|^2 + d^2U(x(t))(z(t), z(t))] dt \\ &= \frac{1}{4} \sum_{i < j} \int_0^T (|\dot{z}_i - \dot{z}_j|^2 - 4|\vec{r}_i - \vec{r}_j|^{-3}|z_i - z_j|^2) dt. \end{aligned}$$

Les fonctions périodiques de moyenne nulle  $z_i(t) - z_j(t)$  vérifient

$$\int_0^T |\dot{z}_i - \dot{z}_j|^2 dt \geq \frac{4\pi^2}{T^2} \int_0^T |z_i - z_j|^2 dt,$$

avec égalité si et seulement si  $z_i(t) - z_j(t)$  est de la forme  $\alpha \cos \frac{2\pi}{T}t + \beta \sin \frac{2\pi}{T}t$ . Finalement,

$$d^2\mathcal{A}(x(t))(z(t), z(t)) \geq \sum_{i < j} (l_0^{-3} - |\vec{r}_i - \vec{r}_j|^{-3}) \int_0^T |z_i - z_j|^2 dt,$$

avec égalité si et seulement si  $z(t)$  est de la forme ci-dessus.

Le choix

$$z_1(t) = z_3(t) = \cos \frac{2\pi t}{T}, \quad z_2(t) = z_4(t) = -\cos \frac{2\pi t}{T}$$

conduit à

$$\begin{aligned} d^2 \mathcal{A}(x(t))(z(t), z(t)) &= 4(l_0^{-3} - l_1^{-3}) \int_0^T 4 \cos^2 \frac{2\pi t}{T} dt \\ &= 4 \left( \frac{4 + \sqrt{2}}{8} - 1 \right) l_1^{-3} \int_0^T 4 \cos^2 \frac{2\pi t}{T} dt < 0, \end{aligned}$$

ce qui termine la démonstration.

**Corollaire.** *Dans le problème de quatre corps de masses égales dans  $R^3$ , un mouvement homographique ne peut être un minimum absolu de  $\mathcal{A}_a$ .*

**Démonstration.** Un mouvement homographique ne peut appartenir à  $\mathcal{A}_a$  que s'il est d'équilibre relatif ou homothétique symétrique. Pour les lacets dont la configuration habite un plan fixé, on déduit de [4] que le minimum absolu de  $\mathcal{A}_a$  est réalisé par un mouvement d'équilibre relatif. Un calcul explicite montre que c'est le mouvement d'équilibre relatif du carré. Notons que ce calcul n'est possible que parce qu'Albouy [1] a déterminé toutes les configurations centrales de quatre masses égales. Compte-tenu du lemme 1, le mouvement d'équilibre relatif du carré est donc le seul mouvement homographique qui puisse prétendre à la minimalité. Mais le lemme 2 exclut cette possibilité.

**Symétries.** Le calcul de hessien fait ci-dessus suggère fortement l'étude du sous-espace  $\Lambda_{Z/4Z}$  de  $\Lambda_a$  formé des lacets dont la configuration à chaque instant est invariante par l'action de  $Z/4Z$  sur  $R^3$  engendrée par l'isométrie

$$(x_1, x_2, x_3) \mapsto (-x_2, x_1, -x_3).$$

Ces configurations sont caractérisées par les deux propriétés suivantes (voir figure) :

- 1) leur projection sur le plan horizontal  $(x_1, x_2)$  est un carré;
- 2) deux points se projetant sur les extrémités d'une même diagonale du carré sont à la même hauteur  $x_3$ .

Nous noterons  $\mathcal{A}_{Z/4Z}$  la restriction de  $\mathcal{A}_a$  à  $\Lambda_{Z/4Z}$ . Comme précédemment pour  $\mathcal{A}_a$ , l'invariance par isométrie du Lagrangien implique qu'un point critique de  $\mathcal{A}_{Z/4Z}$  est également un point critique de  $\mathcal{A}$ . Le sous-espace  $\Lambda_{Z/4Z}$  contient à la fois le mouvement d'équilibre relatif d'un carré dans le plan horizontal et le mouvement homothétique symétrique d'un tétraèdre ayant une face horizontale. On déduit immédiatement des démonstrations précédentes que le minimum de  $\mathcal{A}_{Z/4Z}$  n'est pas atteint par un mouvement homographique.

Définissons des coordonnées cylindriques  $(\rho, \varphi, \zeta)$  dans  $R^3$  par les formules :

$$x_1 = \frac{\rho}{2} \cos \varphi, \quad x_2 = \frac{\rho}{2} \sin \varphi, \quad x_3 = \frac{\zeta}{2}.$$

Une configuration  $Z/4Z$  symétrique pour l'action définie ci-dessus est entièrement définie par la position du premier corps. Les mouvements ne comportant que de telles configurations sont les solutions d'un sous-problème invariant à trois degrés de liberté du problème des quatre corps, qui peut être défini par le Lagrangien

$$L(\rho, \varphi, \zeta, \dot{\rho}, \dot{\varphi}, \dot{\zeta}) = \frac{1}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{\zeta}^2) + \frac{4\sqrt{2}}{(\rho^2 + 2\zeta^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{2}{\rho}.$$

Les coordonnées  $\rho$  et  $\zeta$  sont respectivement la racine carrée de la somme des moments d'inertie par rapport à leurs centres de gravité respectifs des deux amas  $\{1, 3\}$  et  $\{2, 4\}$  (taille totale des deux amas) et, au signe près, la taille du système formé des centres de gravité de ces deux amas, munis chacun de la masse totale 2 de l'amas. Ainsi,  $r^2 = \rho^2 + \zeta^2$ . Le problème est encore invariant par les rotations d'axe vertical, ce qui se manifeste par l'absence de  $\varphi$  dans le Lagrangien. Passant au hamiltonien

$$H(R, \Phi, Z, \rho, \varphi, \zeta) = \frac{1}{2}(R^2 + \frac{\Phi^2}{\rho^2} + Z^2) - \frac{4\sqrt{2}}{(\rho^2 + 2\zeta^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{2}{\rho},$$

où  $R = \dot{\rho}$ ,  $\Phi = \rho^2 \dot{\varphi}$ ,  $Z = \dot{\zeta}$ , on en déduit l'invariance du moment cinétique  $\Phi$ , ce qui conduit à un système réduit à deux degrés de liberté dépendant du paramètre  $\Phi$ .

**Proposition 1.** *Un minimum de  $\mathcal{A}_{Z/4Z}$  est un lacet sans collision.*

**Démonstration.** S'il existe une collision, la  $Z/4Z$  symétrie de la configuration implique que c'est une collision totale ou une collision double simultanée.

Que ce ne soit pas une collision totale se démontre par un argument classique que nous répétons ici pour le confort du lecteur en le renvoyant à [3] pour les notions introduites.

**Lemme 3.** *Un minimum de  $\mathcal{A}_a$  parmi les lacets  $x \in \Lambda_a$  tels que  $x(0) = (\vec{0}, \vec{0}, \vec{0}, \vec{0})$  est nécessairement un mouvement homothétique symétrique du tétraèdre régulier.*

**Démonstration.** L'inégalité de Sundman s'écrit  $K \geq \dot{r}^2$ , où  $r = I^{\frac{1}{2}}$  est la taille de la configuration : elle revient à ne retenir dans la "décomposition de Saari" de la vitesse que la composante d'"homothétie", à l'exclusion de la composante de rotation (pour une solution présentant une collision totale le moment cinétique est nécessairement nul) et de la composante de déformation (qu'on ne sait pas estimer). Puisque  $U_0$  est le minimum de  $\tilde{U} = rU$ , on en déduit que le Lagrangien est à chaque instant minoré par celui d'un problème de Kepler sur la droite :

$$L = \frac{1}{2}K + U \geq \frac{1}{2}\dot{r}^2 + \frac{U_0}{r},$$

avec égalité si et seulement si l'inégalité de Sundman est une égalité et la configuration un tétraèdre régulier. Mais dans  $\Lambda_a$ , la condition  $x(0) = 0$  implique  $x(T/2) = 0$  et le lemme se déduit de ce que sur la droite, le minimum de l'action  $\alpha = \int_0^{T/2} \left( \frac{1}{2} \dot{r}^2 + \frac{U_0}{r} \right) dt$  du problème de Kepler parmi les lacets de classe  $H^1$  vérifiant  $r(0) = r(T/2) = 0$ , est atteint par l'unique orbite d'éjection-collision ayant la période  $T/2$  : c'est le raisonnement de Gordon [6], qui argue de la concavité de l'action  $\alpha = \text{cste} \times T^{\frac{1}{3}}$  comme fonction de la période pour exclure l'existence de collisions intermédiaires.

Joint au lemme 1, le lemme 3 implique l'absence de collision totale dans un lacet réalisant le minimum de l'action, qu'il s'agisse de  $\mathcal{A}_a$  ou de  $\mathcal{A}_{Z/4Z}$ . Restent à exclure les collisions doubles simultanées. Un élément  $x(t)$  de  $\Lambda_{Z/4Z}$  peut être identifié aux seules coordonnées  $(x_1(t), x_2(t), x_3(t))$  de la première masse. Il présente à l'instant 0 une collision double simultanée si et seulement s'il vérifie  $x_1(0) = x_2(0) = 0$  et  $x_3(0) \neq 0$ . Il en résulte que  $x_1(T/2) = x_2(T/2) = 0$  et  $x_3(T/2) = -x_3(0)$ . Si  $x = (x_1 = \frac{\rho}{2} \cos \varphi, x_2 = \frac{\rho}{2} \sin \varphi, x_3 = \frac{\zeta}{2})$  minimise l'action parmi les lacets de  $\Lambda_{Z/4Z}$ , il est constitué d'un ensemble fini ou dénombrable de morceaux de solutions des équations de Newton issus de et aboutissant à une collision double simultanée (on vient d'exclure les collisions totales). Mais, le long d'un tel morceau de solution, le moment cinétique  $\Phi$  est constant ainsi que l'énergie  $h$ . En particulier,

$$\frac{\Phi^2}{2\rho^2} - \left( \frac{4\sqrt{2}}{(\rho^2 + 2\zeta^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{2}{\rho} \right) = h - \frac{1}{2}(\dot{\rho}^2 + \dot{\zeta}^2) \leq h.$$

On en déduit que  $\Phi = 0$  faute de quoi la coordonnée  $\rho$  ne peut s'annuler. Chaque morceau de solution est donc contenu dans un plan vertical d'équation  $\varphi = \text{cste}$ . Finalement, en effectuant éventuellement sur chacun une rotation verticale qui ne change pas l'action, on peut supposer que tout le lacet est contenu dans le plan vertical d'équation  $x_2 = 0$ . Le lemme fondamental découle alors du

**Lemme 4.** *Un lacet  $x = (x_1, x_2, x_3) \in \Lambda_{Z/4Z}$  contenu dans un plan vertical ne minimise pas l'action  $\mathcal{A}_{Z/4Z}$ .*

**Démonstration.** Elle est explicite. Utilisant les estimations de Sundman sur le comportement d'une solution du problème des  $n$  corps au voisinage d'une collision (voir [3]), on montre qu'une petite rotation d'axe horizontal du plan contenant le lacet fait décroître son action et supprime toute collision. Supposons que  $x$  soit contenu dans le plan d'équation  $x_2 = 0$ . Autrement dit,

$$x_1(t) = \pm \frac{\rho}{2}(t), \quad x_2(t) = 0, \quad x_3(t) = \frac{\zeta}{2}(t),$$

le signe dépendant du quadrant dans lequel se trouve le corps à un instant donné. Nous appliquons à  $x$  une rotation d'angle  $\epsilon$  et d'axe  $\vec{O}x_1$  et notons  $\bar{x}$  le résultat. L'énergie cinétique totale est la somme de celles de chaque corps, c'est-à-dire quatre fois celle-ci. Elle est donc invariante par l'action d'une isométrie sur le premier corps :

$$\bar{K} = \frac{1}{2}(\dot{\bar{\rho}}^2 + \dot{\bar{\zeta}}^2 + \bar{\rho}^2 \dot{\bar{\varphi}}^2) = \frac{1}{2}(\dot{\rho}^2 + \dot{\zeta}^2) = K.$$

Quant au potentiel, il devient

$$\bar{U} = \frac{4\sqrt{2}}{(\bar{\rho}^2 + 2\bar{\zeta}^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{2}{\bar{\rho}} = \frac{4\sqrt{2}}{(\rho^2 + 2\zeta^2 - (\sin \epsilon)^2 \zeta^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{2}{(\rho^2 + (\sin \epsilon)^2 \zeta^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Ecrivons  $\bar{U} - U = A + B$  avec

$$\begin{cases} A = \frac{4\sqrt{2}}{(\rho^2 + 2\zeta^2 - (\sin \epsilon)^2 \zeta^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{4\sqrt{2}}{(\rho^2 + 2\zeta^2)^{\frac{1}{2}}} > 0, \\ B = \frac{2}{(\rho^2 + (\sin \epsilon)^2 \zeta^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{2}{(\rho^2)^{\frac{1}{2}}} < 0. \end{cases}$$

Si le lacet considéré minimise l'action, chaque morceau sans collision est une solution des équations de Newton. On peut supposer que  $\zeta(0) = \zeta(T/2) = 0$ . Puisqu'il n'y a pas de collision totale,  $\rho(0) \neq 0$ . Soit  $t_0$  le premier temps positif tel que  $\rho(t_0) = 0$ . Nécessairement,  $0 < t_0 < T/2$ . La différence  $\Delta\mathcal{A} = \bar{\mathcal{A}} - \mathcal{A}$  entre l'action du lacet après rotation et l'action initiale est égale à  $2 \int_0^{T/2} (A + B) dt$ . Le développement limité

$$A = \frac{2\sqrt{2} \zeta^2}{(\rho^2 + 2\zeta^2)^{\frac{3}{2}}} (\sin \epsilon)^2 + O((\sin \epsilon)^4),$$

où le  $O$  est uniforme tout au long du chemin d'intégration montrer que  $2 \int_0^{T/2} A dt$  est un  $O((\sin \epsilon)^2)$ . D'autre part, on déduit des estimations de Sundman (voir [3]) que pour  $t < t_0$  assez voisin de  $t_0$ , on a

$$\rho(t) \sim \rho_0 |t - t_0|^{\frac{2}{3}}, \quad \zeta \sim \zeta_0, \quad \rho_0 \neq 0 \text{ et } \zeta_0 \neq 0$$

(on ne dit rien pour  $t > t_0$  car il pourrait y avoir accumulation de collisions). On en déduit que, si  $\tau$  est assez petit,  $\int_{t_0-\tau}^{t_0} \frac{1}{|\rho|} dt \sim \frac{3}{\rho_0} \tau^{1/3}$ . L'évaluation de l'autre terme intervenant

dans  $\int_{t_0-\tau}^{t_0} B dt$  se fait par un développement limité de l'intégrand au voisinage de  $\rho = 0$  pourvu que  $\tau$  soit choisi de façon à ce que sur tout le domaine d'intégration  $\rho^2$  reste bien inférieur à  $(\sin \epsilon)^2 \zeta^2$ , par exemple si  $\tau = \tau_0 (\sin \epsilon)^3$  avec  $\tau_0$  suffisamment petit. On obtient  $\int_{t_0-\tau}^{t_0} \frac{1}{(\rho^2 + (\sin \epsilon)^2 \zeta^2)^{\frac{1}{2}}} dt \sim O\left(\frac{\tau}{|\sin \epsilon|}\right) + O(\tau)$ . Finalement,  $B$  étant partout négatif, le choix de  $\tau = \tau_0 (\sin \epsilon)^3$  avec  $\tau_0$  suffisamment petit conduit à

$$\Delta\mathcal{A} \leq -\frac{6}{\rho_0} |\sin \epsilon| + O((\sin \epsilon)^2) < 0 \quad \text{si } \epsilon \text{ est assez petit.}$$

Ceci termine la démonstration de la Proposition 1.



Soit

$$x(t) = \left( \frac{\rho(t)}{2} \cos \varphi(t), \frac{\rho(t)}{2} \sin \varphi(t), \frac{\zeta(t)}{2} \right)$$

un élément de  $\Lambda_{Z/4Z}$  minimisant l'action. Par réduction de la symétrie de rotation d'axe  $O\vec{x}_3$ , il lui correspond une *orbite périodique réduite*

$$x_{red}(t) = \left( \frac{\rho(t)}{2}, \frac{\zeta(t)}{2} \right),$$

qui est une solution du système réduit, de hamiltonien

$$H_{\Phi}(R, Z, \rho, \zeta) = \frac{1}{2}(R^2 + Z^2) + \frac{\Phi^2}{2\rho^2} - \frac{4\sqrt{2}}{(\rho^2 + 2\zeta^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{2}{\rho},$$

où  $\Phi \neq 0$  est la valeur du moment cinétique de la solution considérée.

Soient  $p$  et  $q$  deux entiers positifs premiers entre eux. Nous dirons que  $x(t)$  est de type  $(p, q)$  si, au cours d'une période,  $\varphi$  parcourt  $p \times 2\pi$  pendant que  $x_{red}$  parcourt  $q$  fois son orbite. En particulier,  $T = qT_{red}$ .

**Proposition 2.** *Un minimum de  $\mathcal{A}_{Z/4Z}$  est un lacet de type  $(1, 1)$ .*

**Démonstration.** A une orbite périodique  $x \in \Lambda_{Z/4Z}$  de type  $(p, q)$ , associons le lacet

$$\begin{cases} \tilde{x}(t) = \left( \frac{\tilde{\rho}(t)}{2} \cos \tilde{\varphi}(t), \frac{\tilde{\rho}(t)}{2} \sin \tilde{\varphi}(t), \frac{\tilde{\zeta}(t)}{2} \right), \text{ où} \\ \tilde{\rho}(t) = \rho\left(\frac{t}{q}\right), \tilde{\varphi}(t) = \frac{q}{p} \varphi\left(\frac{t}{q}\right), \tilde{\zeta} = \zeta\left(\frac{t}{q}\right). \end{cases}$$

L'ensemble

$$\mathcal{P} = \left\{ \tau \in R, \forall t \in R, \rho(t + \tau) = \rho(t) \quad \text{et} \quad \zeta(t + \tau) = -\zeta(t) \right\}$$

contient  $\frac{T}{2}$ . Son plus petit élément positif  $t_0$  vérifie

$$t_0 < T_{red} \quad \text{et} \quad \frac{T}{2} = q \frac{T_{red}}{2} = t_0 + kT_{red},$$

où  $k$  est entier. Donc  $q$  est impair,  $k$  est la partie entière de  $q/2$  et  $t_0 = \frac{T_{red}}{2}$ . Autrement dit, l'orbite réduite est elle aussi symétrique. On en déduit que

$$\tilde{\rho}(t + T/2) = \rho\left(\frac{t}{q} + \frac{T_{red}}{2}\right) = \rho\left(\frac{t}{q}\right) = \tilde{\rho}(t), \quad \tilde{\zeta}(t + T/2) = \zeta\left(\frac{t}{q} + \frac{T_{red}}{2}\right) = -\zeta\left(\frac{t}{q}\right) = -\tilde{\zeta}(t),$$

et enfin

$$\tilde{\varphi}(t + T/2) = \frac{q}{p} \varphi\left(\frac{t}{q} + \frac{T_{red}}{2}\right) = \frac{q}{p} \left[ \varphi\left(\frac{t}{q}\right) + \frac{p}{q} \times \pi \right] = \tilde{\varphi}(t) + \pi.$$

En effet, de  $\varphi(t + T) = \varphi(t) + p \times 2\pi$  et de la symétrie du lacet  $x$  par rapport à l'origine, on déduit que  $\varphi(t + T/2) = \varphi(t) + p \times \pi$  (ce qui force  $p$  à être impair). Utilisant la formule

$$\varphi(t_2) - \varphi(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\Phi}{\rho(t)^2} dt \quad \text{et le fait que } r(t) \text{ est } \frac{T_{red}}{2} (= \frac{1}{q} \times \frac{T}{2})\text{-périodique, on voit alors}$$

que  $\varphi\left(t + \frac{T_{red}}{2}\right) = \varphi(t) + \frac{p}{q} \times \pi$ . Le lacet  $\tilde{x}$  appartient donc à  $\Lambda_{Z/4Z}$ . Montrons que son action  $\bar{\mathcal{A}}$  est inférieure à l'action  $\mathcal{A}$  de  $x$ .

Le changement de variables  $t = q\tau$  transforme

$$\bar{\mathcal{A}} = \int_0^{qT_{red}} \left[ \frac{1}{2} \left( \dot{\tilde{\rho}}^2(t) + \dot{\tilde{\zeta}}^2(t) \right) + \frac{1}{2} \tilde{\rho}^2(t) \dot{\tilde{\varphi}}^2(t) + U(\tilde{\rho}(t), \tilde{\zeta}(t)) \right] dt$$

en

$$\bar{\mathcal{A}} = q \int_0^{T_{red}} \left[ \frac{1}{2q^2} \left( \dot{\rho}^2(\tau) + \dot{\zeta}^2(\tau) \right) + \frac{1}{2p^2} \rho^2(\tau) \dot{\varphi}^2(\tau) + U(\rho(\tau), \zeta(\tau)) \right] d\tau,$$

qui est strictement inférieur à

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \int_0^T \left[ \frac{1}{2} \left( \dot{\rho}^2(\tau) + \dot{\zeta}^2(\tau) \right) + \frac{1}{2} \rho^2(\tau) \dot{\varphi}^2(\tau) + U(\rho(\tau), \zeta(\tau)) \right] d\tau \\ &= q \int_0^{T_{red}} \left[ \frac{1}{2} \left( \dot{\rho}^2(\tau) + \dot{\zeta}^2(\tau) \right) + \frac{1}{2} \rho^2(\tau) \dot{\varphi}^2(\tau) + U(\rho(\tau), \zeta(\tau)) \right] d\tau \end{aligned}$$

dès que  $p$  ou  $q$  est supérieur à 1. Une orbite minimisant  $\mathcal{A}_{Z/4Z}$  est donc nécessairement de type (1, 1).

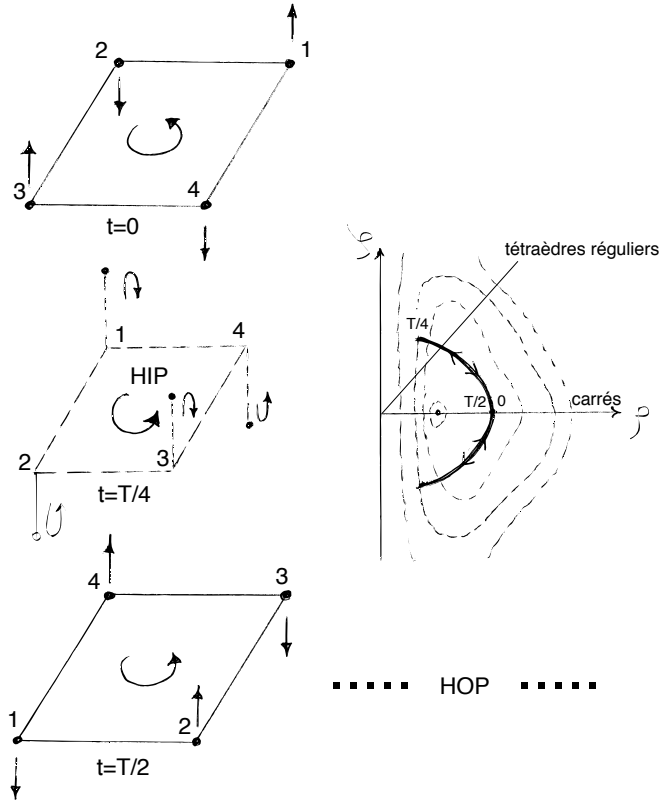
### Remarques. 1) Orbites de type “brake”

**Définition.** L'orbite  $x_{red}$  est dite (de type) “brake” s'il existe un temps  $t_0$  tel que :

$$\forall t, \begin{cases} \rho(t_0 + t) = \rho(t_0 - t), \zeta(t_0 + t) = \zeta(t_0 - t), \\ \rho(t_0 + \frac{T}{2} + t) = \rho(t_0 + \frac{T}{2} - t), \zeta(t_0 + \frac{T}{2} + t) = \zeta(t_0 + \frac{T}{2} - t) \end{cases}.$$

La deuxième ligne est une conséquence de la première dès que le lacet  $x$  est symétrique puisqu'alors  $\rho(t + T/2) = \rho(t)$  et  $\zeta(t + T/2) = -\zeta(t)$ . Une orbite “brake” est donc un arc symétrique par rapport à l'axe des  $\rho$ , dont les bords appartiennent à l'équipotentielle  $\frac{\Phi^2}{2\rho^2} - \left( \frac{4\sqrt{2}}{(\rho^2 + 2\zeta^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{2}{\rho} \right) = h$  du système réduit, où  $\Phi$  et  $h$  sont le moment cinétique et l'énergie de la solution (voir la figure).

Nous conjecturons que si  $x$  minimise  $\mathcal{A}_{Z/4Z}$ , l'orbite  $x_{red}$  est “brake” et que le long de l'arc correspondant, la fonction  $\zeta$  ne change de signe que deux fois : une première fois en faisant “hip”, une deuxième fois en faisant “hop”, d'où son nom. A défaut d'une preuve de cette conjecture (que les essais numériques de Jacques Laskar semblent confirmer), montrons au moins qu'une orbite  $x$  dont l'orbite réduite soit de type brake existe toujours. Il suffit pour cela de minimiser l'action sur le sous-espace  $\Lambda_{Z/4Z}^B$  de  $\Lambda_{Z/4Z}$  formé des lacets possédant la symétrie temporelle renforcée suivante :  $x(t + \frac{T}{2}) = -x(t)$  et il existe  $t_0$  (on peut se restreindre au cas où  $t_0 = 0$ ) tel que  $x(t_0 + t)$  et  $x(t_0 - t)$  soient symétriques par rapport au plan vertical contenant  $x(t_0)$  (qu'on peut fixer arbitrairement). Qu'un minimum de l'action dans le sous-espace  $\Lambda_{Z/4Z}^B$  soit encore formé de morceaux de solution aboutissant éventuellement à des collisions est une propriété générale venant de l'invariance du lagrangien. Quant au fait que le minimum n'a pas de collision, il se démontre comme dans  $\Lambda_{Z/4Z}$ .



Une orbite hip-hop de type “brake”

**2) Autres symétries.** Une proposition en tout point semblable à celle de la proposition 1 vaut pour d’autres groupes de symétrie. Le groupe  $Z/3Z$  est associé à la décomposition en amas  $3 + 1$  du problème de quatre corps de masses égales dans  $R^3$ . Les configurations  $Z/3Z$  symétriques sont celles dans lesquelles l’un des corps se déplace sur la verticale du centre de gravité du triangle équilatéral horizontal formé par les trois autres. Appelant  $\rho$  et  $\zeta$  les tailles respectives de l’amas de trois corps et du système formé des centres de gravités des deux amas, on obtient le lagrangien

$$L(\rho, \varphi, \zeta, \dot{\rho}, \dot{\varphi}, \dot{\zeta}) = \frac{1}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{\zeta}^2) + \frac{3\sqrt{3}}{(\rho^2 + 4\zeta^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{3}{\rho}.$$

Notons qu’en sus de l’unique configuration centrale spatiale, seules deux des trois configurations centrales planes du problème de quatre corps de masses égales sont intervenues. Ce sont les plus symétriques, elles-mêmes composées de configurations centrales des deux amas.

Le groupe  $Z/2Z$  est naturellement associé à la décomposition en amas  $2 + 1$  du problème isocèle de trois corps de masses égales dans  $R^3$ . Avec les mêmes notations, son lagrangien est

$$L(\rho, \varphi, \zeta, \dot{\rho}, \dot{\varphi}, \dot{\zeta}) = \frac{1}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{\zeta}^2) + \frac{2\sqrt{2}}{(\rho^2 + 3\zeta^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{\sqrt{2}\rho}.$$

Le lecteur construira les lagrangiens associés à d’autres groupes abéliens de symétrie.

**Remerciements** Les auteurs remercient chaleureusement Jacques Laskar pour ses efficaces et souriantes vérifications numériques. En particulier, le fait que l'action d'une orbite "brake" de collision de type (1, 1) soit supérieure, pour une période donnée, à celle d'une orbite analogue sans collision a été mis en évidence numériquement avant que la Proposition 1 ne soit démontrée.

### **Bibliographie.**

- [1] A. Albouy *Symétrie des configurations centrales de quatre corps*, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 320, p. 217–220 (1995) et *The symmetric central configurations of four equal masses*, *Contemporary Mathematics*, vol. 198, pp. 131–135 (1996)
- [2] A. Albouy-A. Chenciner, *le problème des  $n$  corps et les distances mutuelles*, *Inventiones Mathematicæ*, 131, pp. 151-184 (1998)
- [3] A. Chenciner, *Collisions totales, Mouvements complètement paraboliques et réduction des homothéties dans le problème des  $n$  corps*, *Regular and chaotic dynamics*, V.3, 3, pp.93-106 (1998)
- [4] A. Chenciner-Desolneux *Minima de l'intégrale d'action et équilibres relatifs de  $n$  corps*, *C.R.A.S. t. 326, Série I, p. 1209-1212, 1998*
- [5] A. Chenciner-Desolneux *Correction à [4]*, *C.R.A.S. t. 327, Série I, p. 193, 1998*
- [6] W.B. Gordon *A Minimizing Property of Keplerian Orbits*, *American Journal of Math.* vol. 99, n<sup>o</sup>15, pp. 961-971, 1977
- [7] Serra, S. Terraccini, *Collisionless Periodic Solutions to Some Three-Body Problems*, *Arch. Rational Mech. Anal.*, 120, pp. 305-325 (1992)
- [8] A. Wintner, *The Analytical Foundations of Celestial Mechanics*, *Princeton University Press* (1942)

**Complément sur quelques travaux antérieurs (ajouté en mai 2000).** Après que cet article ait été écrit, les auteurs ont pris connaissance de deux articles très intéressants ([9] et [10]). Ceux-ci contiennent chacun la description d'une famille de solutions très symétriques du problème de  $n$  corps de masses égales dans l'espace à laquelle appartient le Hip-Hop de type "brake". Numériquement, la solution dont nous prouvons l'existence était donc connue depuis 1983.

- [9] I. Davies, A. Truman, D. Williams *Classical periodic solutions of the equal-mass  $2n$ -body problem,  $2n$ -ion problem and the  $n$ -electron atom problem*, *Physics letters* vol. 99A, n<sup>o</sup>1, pp. 15-18 (14 November 1983)
- [10] G. Hoynant *Des orbites en forme de rosette aux orbites en forme de pelotte*, *Sciences*, 99-2, pp. 3-8 (1999)

29 novembre 1999, révisé le 21 mai 2000