

Lexique

Le lexique, textes et dessins, est l'œuvre de Alain Chenciner, professeur à l'université Paris VII.

Bien que définies sur des **variétés** de toutes dimensions, les notions examinées dans ce lexique ne sont illustrées que dans le cas des surfaces, et même des surfaces plongées dans l'espace euclidien \mathbb{R}^3 par lequel les mathématiciens caricaturent l'espace à trois dimensions dont nous avons la pratique quotidienne. Deux exceptions sont respectivement la description de la **sphère topologique** de dimension trois (voir **structure fibrée**) et celle de l'hypercube de dimension quatre (voir **produit**). Enfin, les **fonctions** considérées sont toujours des fonctions « altitude », c'est-à-dire la restriction à une surface plongée dans \mathbb{R}^3 d'une fonction « coordonnée » sur \mathbb{R}^3 , disons la fonction $(x_1, x_2, x_3) \rightarrow x_3$. C'est alors la complexité du plongement de la surface qui traduit la complexité de la fonction.

Il est conseillé de regarder les dessins et de ne lire le commentaire qu'en dernier ressort. On notera qu'afin de ne pas illustrer un exercice fameux de l'Oulipo, on s'est permis dans chaque article d'utiliser sans paraphrase les mots définis dans les autres ¹.

Variété

Généralise les notions de courbe et de surface : c'est un « espace » qui ressemble localement, mais localement seulement, à l'espace à n dimensions \mathbb{R}^n (voir **produit**). Une variété peut être définie par un **atlas** formé de **cartes** qui décrivent une partie ressemblant à (un morceau de) \mathbb{R}^n et définissent des **coordonnées locales** (figure 1).

¹Deux articles de synthèse plus techniques : « Singularités des fonctions différentiables » et « Systèmes dynamiques » dans l'*Encyclopædia Universalis*.

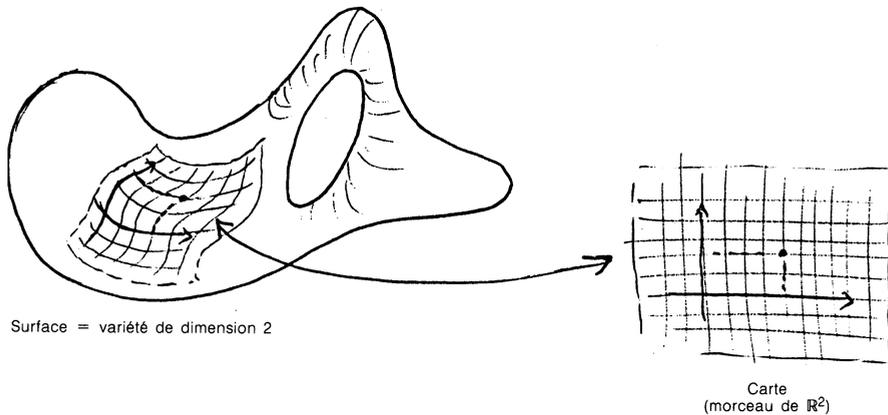


FIG. 1 –

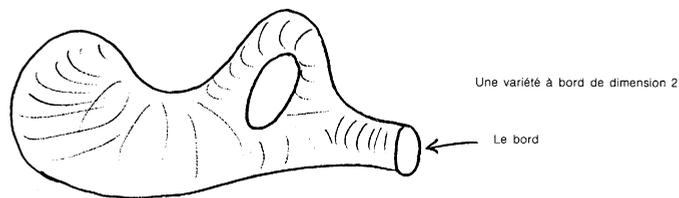


FIG. 2 –

Suivant la nature (simplement continue ou bien k fois différentiable) des applications faisant passer d'une carte à une autre, on parle de variété **topologique** ou **différentielle de classe C^k** . Ces dernières possèdent un calcul différentiel qui globalise celui de \mathbb{R}^n .

Une variété peut ou non avoir un **bord** qui est une variété sans bord de dimension d'une unité inférieure (la relation « *le bord d'un bord est vide* » est la relation fondamentale de la « *topologie algébrique* ») (figure 2).

Sphère topologique (resp. différentielle) de dimension n

Variété pouvant, après une éventuelle déformation continue (resp. différentiable), être appliquée sur la sphère « standard » S^n , ensemble des points situés à la distance unité de l'origine dans l'espace euclidien \mathbb{R}^{n+1} à $(n + 1)$ dimensions (chaque point de S^n est repéré par $(n + 1)$ nombres réels $(x_1, x_2, \dots, x_{n+1})$)

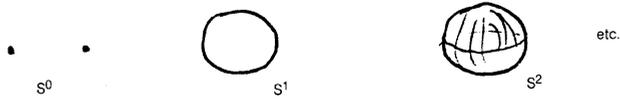


FIG. 3 –

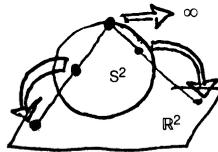


FIG. 4 –

tels que $\sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1$). S^n est le bord du « disque » D^{n+1} de dimension $n + 1$, ensemble des points à une distance ≤ 1 de l'origine dans \mathbb{R}^{n+1} (figure 3).

Le bord d'un cube est une sphère topologique de dimension 2 et le cube lui-même un disque topologique de dimension 3. Une « projection stéréographique » fournit une « carte » (voir **variété**) du complémentaire du point de projection, et permet donc d'écrire S^n comme union de \mathbb{R}^n et d'un point, souvent noté ∞ (figure 4).

Exercice (voir **produit** et, pour S^3 , **structure fibrée**) (figure 5)

De même, S^3 est obtenue en recollant deux « tores pleins » sur leur bord (on recolle les parallèles de l'un aux méridiens de l'autre) :

$$S^3 = S^1 \times D^2 \cup D^2 \times S^1$$

$$S^2 = \left[(\cdot \cdot) \times \text{torus} \right] \cup \left[\text{torus} \times \text{circle} \right] = S^0 \times D^2 \cup D^1 \times S^1$$

FIG. 5 –

Produit de deux variétés (figure 6)

Dans le produit $A \times B$ de deux **variétés** A et B , chaque point est repéré par des « coordonnées généralisées » (a, b) , couple d'un élément a de A et d'un élément b de B . Les applications $P_1 : (a, b) \rightarrow a$ et $P_2 : (a, b) \rightarrow b$ sont appelées première et deuxième « projection ».

Itérée, cette construction fournit des espaces de « dimension » arbitrairement grande, en particulier \mathbb{R}^n où chaque point est repéré par n coordonnées appartenant à la droite \mathbb{R} . Bien entendu, la même définition vaut pour le produit de deux ensembles quelconques.

Structure fibrée (ou fibration)

Ressemble localement à un **produit** mais peut avoir une « torsion globale » (figure 7).

On notera que, dans le cas de la bande de Möbius, il n'existe pas d'analogue continu de la deuxième projection P_2 . Cependant, si on enlève une fibre quelconque, une telle projection existe et on obtient à nouveau un **produit** (le vérifier avec des ciseaux).

En considérant la **sphère topologique** de dimension trois S^3 comme bord du « complexifié » (ça, c'est pour les initiés !) du ruban de Möbius, on obtient la **fibration de Hopf** ou comment remplir cette sphère avec des spaghettis circulaires. La base est une **sphère topologique** de dimension deux S^2 . La réunion des fibres dont la projection sur la base appartient à un même parallèle est un tore sur lequel ces fibres sont des « cercles de Villarceau » faisant un tour du tore dans chaque direction. La réunion de ces tores remplit le complémentaire dans $S^3 = \mathbb{R}^3 \cup \infty$ des deux fibres qui se projettent respectivement sur le pôle Nord (la droite verticale à laquelle s'ajoute le point ∞) et le pôle Sud (le cercle horizontal).

Là aussi, il suffit d'enlever une fibre pour obtenir un produit, mais ce fait est loin d'être général (figure 8).

Tore

Le **produit** de deux cercles (= sphères topologiques ou différentielles de dimension 1). Un cercle topologique pouvant être obtenu par recollement des extrémités d'un segment, on obtient le mode de fabrication suivant d'un tore à partir d'un rectangle (figure 9).

Bien entendu, on aura de petits problèmes de « plis » et de « fronces » dus à la courbure. Le tore $S^1 \times S^1$ est le bord du « tore plein » $S^1 \times D^2$ (ou celui de $D^2 \times S^1$).

Voici enfin différents plongements d'un tore dans l'espace à trois dimensions (figure 10).

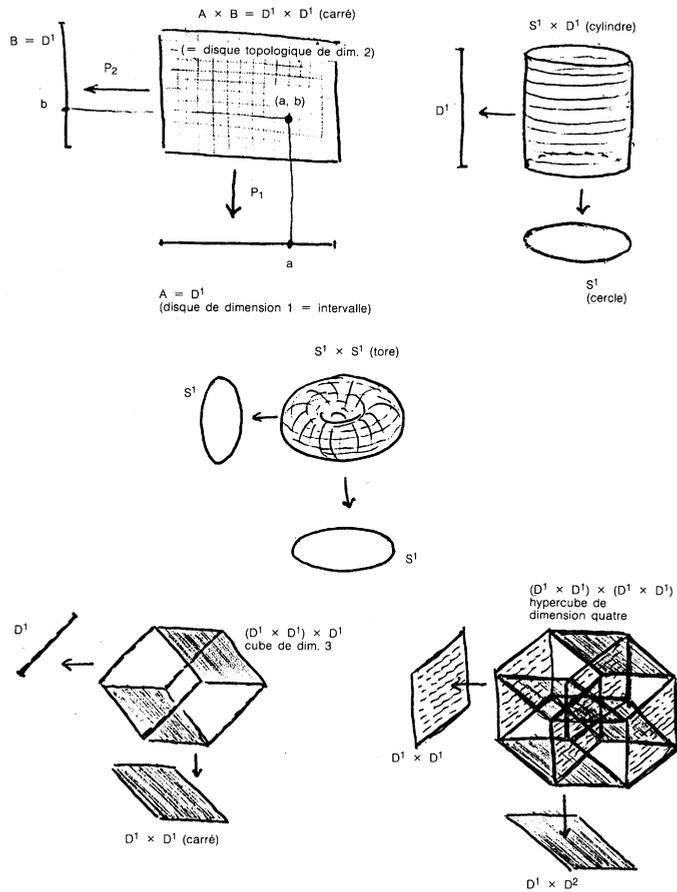


FIG. 6 -

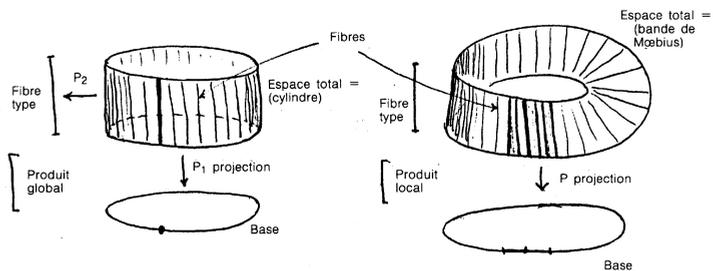


FIG. 7 -

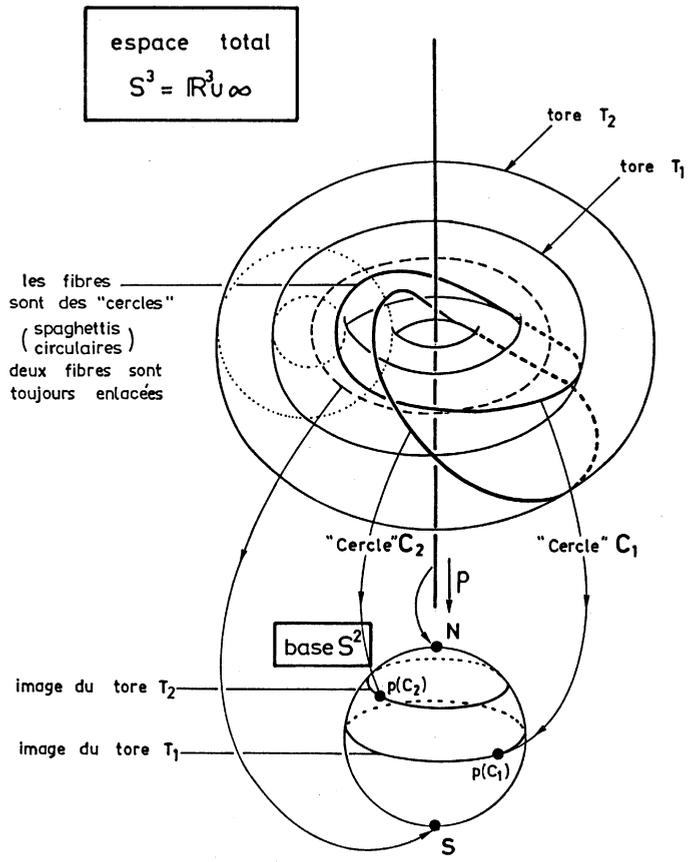


FIG. 8 -

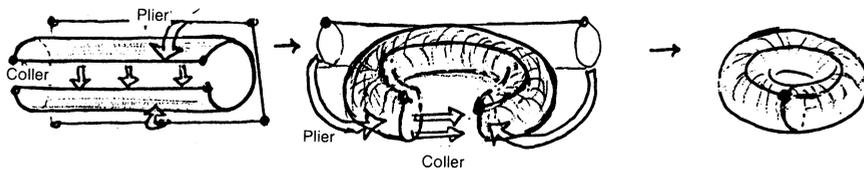


FIG. 9 -

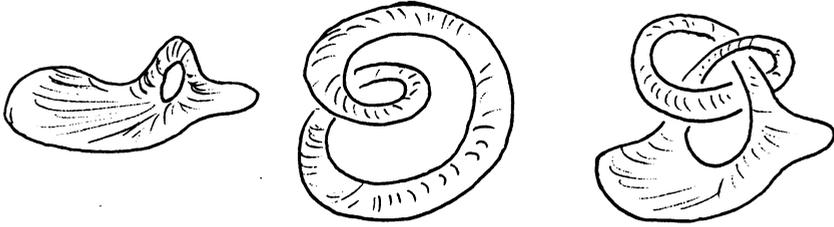


FIG. 10 –

Fonction de classe C^k sur une variété différentielle de classe C^k

Associe à chaque point x de la **variété** un nombre réel $f(x)$, la « valeur » de la fonction f au point x , de façon que, dans chaque « carte » d'un « atlas » (voir variétés), f soit représentée par une fonction de classe C^k sur \mathbb{R}^n , c'est-à-dire une fonction bien approchée au voisinage de chaque point par un polynôme à n variables de degré k .

L'ensemble des points ayant la même valeur est une « ligne de niveau » (penser aux cartes d'Etat-major où sont représentées les lignes de niveau de la fonction « altitude par rapport au niveau de la mer » ; comme nous l'avons dit en exergue, c'est toujours ce type de fonctions que nous représenterons) (figure 11).

Points critiques (ou singularités) d'une fonction de classe $C^{k \geq 2}$ sur une variété ; fonctions de Morse

Reprenant la fonction de l'article **fonction**, représentons-la, comme R. Thom aime à le faire, après rotation de 90° : on cherche à projeter, à appliquer (application est synonyme de fonction) la surface sur une portion de droite. Les **points critiques** sont les points de résistance, les points où « ça crie », ceux où les lignes de niveau subissent un changement qualitatif, ceux au voisinage desquels f refuse d'être une **fibration**.

Sur l'exemple, ce sont ceux où le plan tangent à la surface est parallèle au plan $x_1 O x_2$ (figure 12), (penser à une application constante, appliquant toute la variété sur un même point), mais une légère « perturbation » de la fonction permet de se ramener au cas où, comme dans l'exemple que nous avons choisi, tous les points critiques sont « non dégénérés » (on dit alors que f est

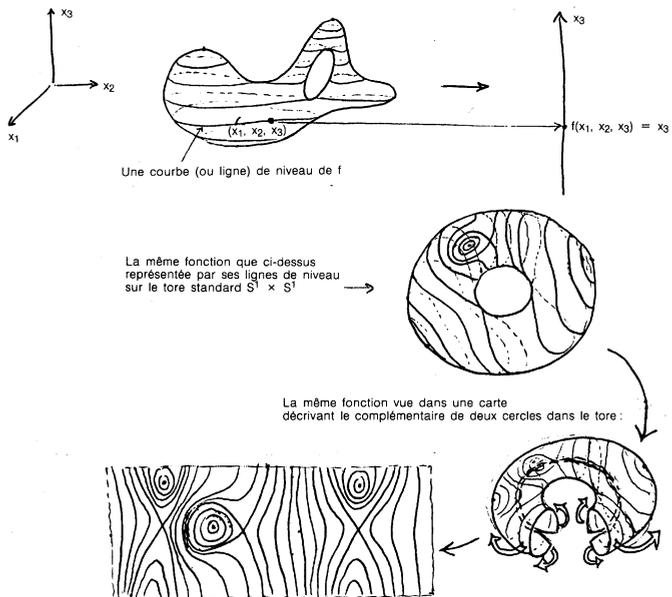
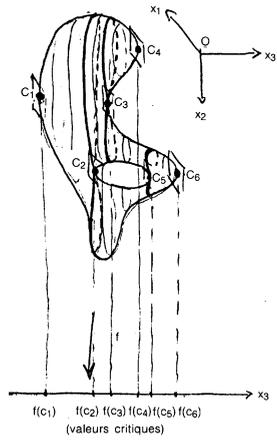
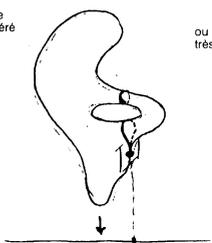


FIG. 11 -



Un point critique
peut être dégénéré



ou même
très dégénéré

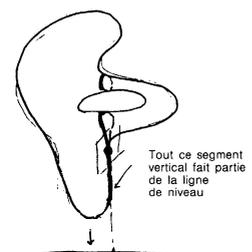


FIG. 12 -

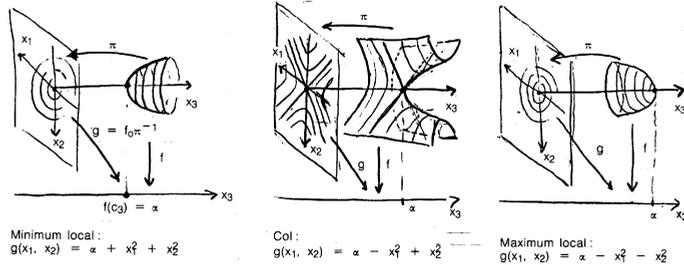


FIG. 13 –

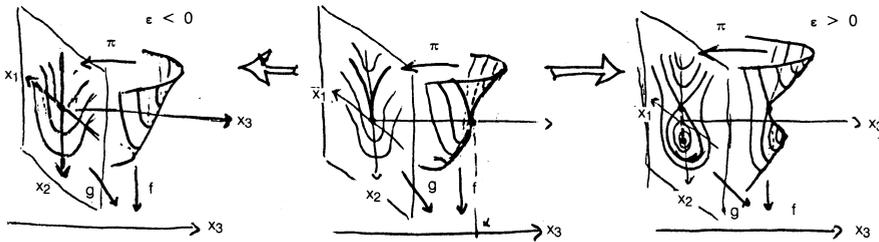


FIG. 14 –

une **fonction de Morse**). Cela signifie qu'au voisinage de chacun d'eux, f ressemble à un polynôme de degré 2 (c'est pour ça que f doit être au moins de classe C^2) qui, dans le cas d'une surface, doit être de l'un des trois types suivants (on a utilisé comme « carte » – voir **variété** – au voisinage du point critique la projection π de la surface sur le plan x_1Ox_2 ; la surface devient donc localement le « graphe » de l'avatar $g = f \circ \pi^{-1}$ de f dans cette carte) (figure 13).

(Pour simplifier l'écriture, on a supposé que la projection du point critique sur le plan x_1Ox_2 était l'origine, ce à quoi on peut toujours se ramener par translation).

Exercice : voir qu'en un point « régulier » (c'est-à-dire non critique) un modèle local est simplement la projection $g(x_1, x_2) = x_1$, alors que dans notre premier exemple de point critique dégénéré, un modèle local est $g(x_1, x_2) = \alpha - x_1^2 - x_2^3$. Vérifier que suivant le signe de $\epsilon \neq 0$, $g(x_1, x_2) = \alpha - x_1^2 - x_2^3 + \epsilon x_2$ a 0 ou 2 points critiques, tous non dégénérés (figure 14).

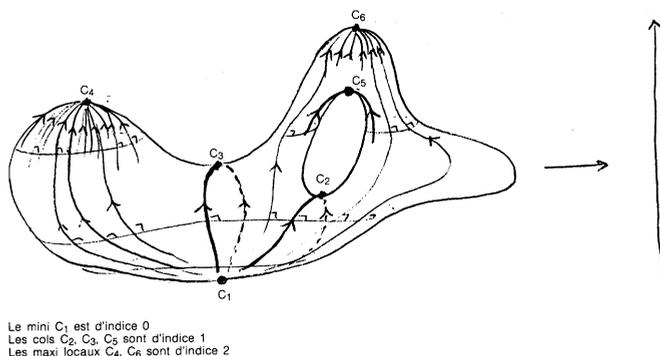


FIG. 15 –

Lignes de gradient et indice des points critiques non dégénérés

Dans le cas d'une fonction « altitude », ce sont les « lignes de plus grande pente », orientées dans le sens des altitudes croissantes, suivant lesquelles la fonction augmente le plus rapidement.

Le fait qu'elles soient perpendiculaires aux lignes de niveau montre qu'une mesure des longueurs sur la surface sous-tend cette notion (ici, c'est la longueur euclidienne d'une courbe sur la surface considérée comme une courbe dans \mathbb{R}^3).

L'union des lignes de gradient qui aboutissent en un point critique non dégénéré est un **disque topologique** (voir **sphère topologique**) privé de son bord (voir **Théorie de Morse à la Thom**). La dimension de ce disque est l'**indice** du point critique. Quant au disque, on l'appelle **cellule de Thom** ou **nappe descendante** du point critique (figure 15, page 140).

Le remplacement de f par $-f$ change un indice i en $2 - i$ et les nappes descendantes en nappes ascendantes.

Théorie de Morse à la Morse

Développée à partir de 1925 par Marston Morse, en partie inspiré par des travaux de Georges-David Birkhoff. Il s'agit de tirer autant de renseignements que possible sur la « topologie » (c'est-à-dire la forme globale) d'une **variété différentielle**, de la connaissance d'une **fonction de Morse** sur cette variété.

Le cœur de la théorie est fourni par les **inégalités de Morse** qui, dans le cas d'une surface, s'écrivent :

$$m_0 \geq b_0,$$

$$m_1 - m_0 \geq b_1 - b_0,$$

$$m_2 - m_1 + m_0 = b_2 - b_1 + b_0.$$

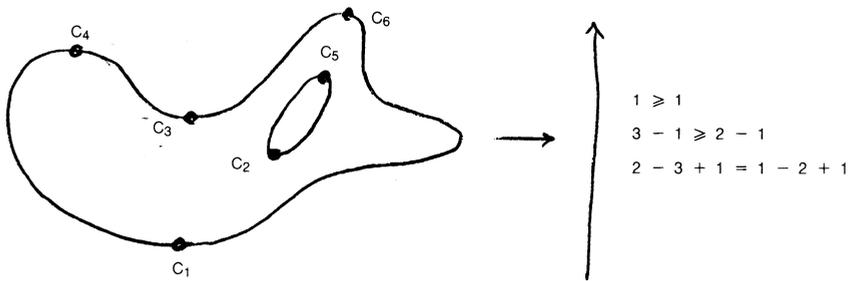


FIG. 16 -

m_i est le nombre de points critiques d'indice i et les b_i sont les « nombres de Betti » de la surface : b_0 est le nombre de morceaux (1 pour le tore ou la sphère), b_1 est le double du nombre de « trous » (ou genre) (0 pour une sphère, 2 pour un tore, plus de 2 pour un bretzel), et b_2 est égal à b_0 si la surface n'a pas de bord et est « orientable » (c'est-à-dire ne contient pas de ruban de Mœbius, ce qui est bien le cas du tore). Dans notre exemple favori, on a bien (figure 16) :

La quantité $b_2 - b_1 + b_0$ est la « caractéristique d'Euler-Poincaré » de la surface (2 pour la sphère, 0 pour le tore). Elle s'écrit aussi $t_2 - t_1 + t_0$ où t_0 , est le nombre de sommets, t_1 le nombre d'arêtes, t_2 le nombre de faces (triangles) d'une « triangulation » quelconque de la surface.

Théorie de Morse à la Thom

Décomposition en « cellules » (c'est-à-dire disques privés de leur bord) associée à une **fonction de Morse** sur une variété (voir **lignes de gradient**) (figure 17).

C_i est la cellule associée au point critique c_i . Pour voir les cellules, il est commode de découper le tore suivant les **cercles topologiques** $C_2 \cup C_1$ et $C_5 \cup C_1$ (comparer à **tore** et **fonction de classe C^k**) (figure 18).

Théorie de Morse à la Smale

On construit la variété en ajoutant des **anses** successives, collées sur le bord de ce qui est déjà construit. C'est ce point de vue qui a conduit Smale à démontrer au début des années soixante la *Conjecture de Poincaré* en grande dimension : si une variété sans bord de dimension supérieure ou égale à six possède une fonction de Morse n'ayant que deux points critiques, c'est une **sphère topologique** (figure 19).

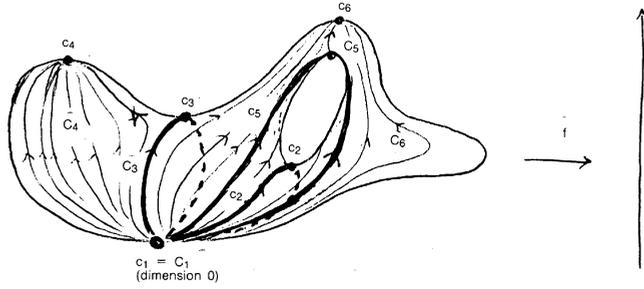
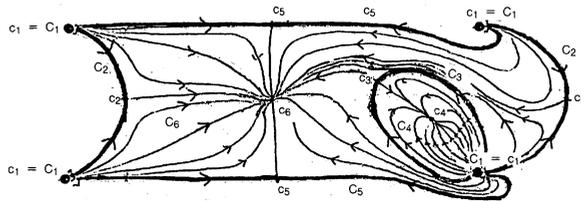


FIG. 17 -



Remplaçant f par $-f$, on obtient la décomposition de Thom «dual»

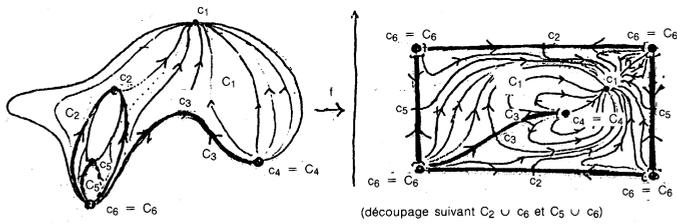


FIG. 18 -

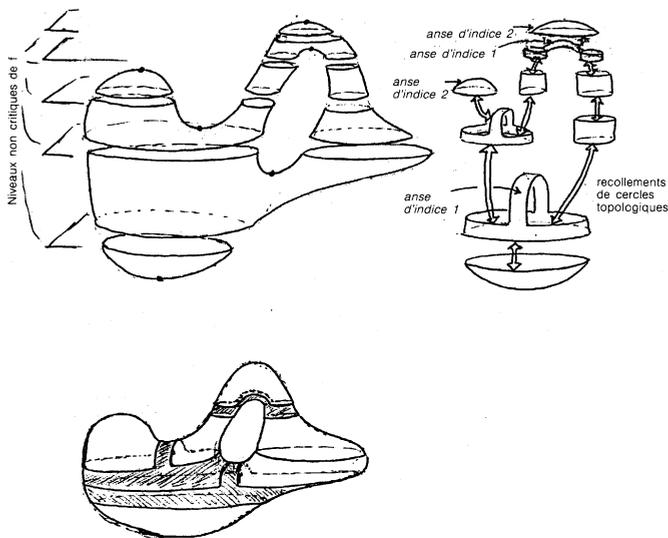


FIG. 19 –

Cobordisme

Suivant Thom, c'est l'art d'arrondir les angles en toutes dimensions ; plus précisément, on part du « cône » sur une variété, union des segments joignant un point extérieur à un point de la variété et on essaie de transformer le résultat en variété (figure 20).

On dit que deux surfaces sans bord sont **cobordantes** s'il existe une variété de dimension trois dont le bord soit la réunion des deux surfaces. Les exemples ci-dessus sont des cobordismes respectivement entre un cercle et la surface vide \emptyset , et entre deux cercles et \emptyset .

Le cylindre peut se décomposer en un cobordisme entre deux cercles et un cercle, et un cobordisme entre un cercle et \emptyset (figure 21).

Revoir dans cet esprit les figures de **théorie de Morse à la Smale** qui décomposent le tore en **cobordismes triviaux** (possédant une fonction sans point critique, constante sur chaque bord) et **cobordismes élémentaires** (possédant une fonction ayant un unique point critique, constante sur chaque bord).

Exercice : comment arrondir les angles du cône sur le tore ?

Singularités génériques

On a déjà vu ce que sont les singularités (ou **points critiques**) d'une fonction sur une **variété**. Plus généralement, on peut définir les **singularités** d'une

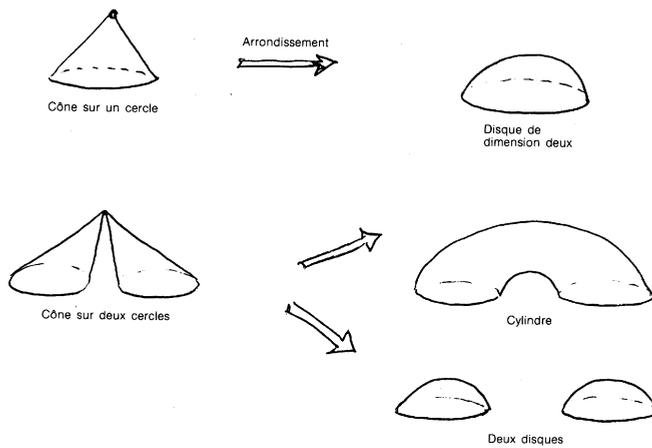


FIG. 20 -



Cercles et 1 cercle, et 1 cobordisme entre 1 cercle et \emptyset

FIG. 21 -

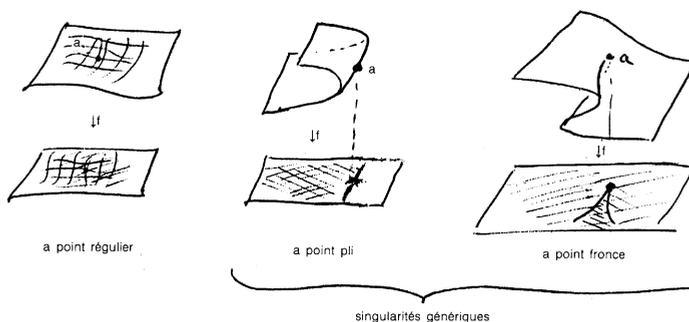


FIG. 22 –

application d'une variété dans une autre. Par exemple, une singularité d'une application d'une surface dans une autre est un point au voisinage duquel un système de **coordonnées locales** (voir **variété**) n'est pas envoyé sur un système de **coordonnées locales**.

Une singularité générique est une singularité en laquelle toute singularité peut être transformée par une perturbation arbitrairement petite. Les singularités génériques des fonctions sur les variétés sont les **points critiques non dégénérés** (voir les dessins à la fin de l'article **point critique**). Les singularités génériques des applications d'une surface sur une surface ont été étudiées par Whitney qui est l'un des inspirateurs de Thom (figure 22).

Pour les fonctions et les applications entre surfaces, les singularités génériques sont **structurellement stables** : une perturbation suffisamment petite ne les fait pas changer qualitativement (voir également l'article **objets analytiques**).

Théorie homologique

Théorie fournissant une mesure de la différence qui existe entre une situation globale et une situation locale.

Par exemple, un « petit » **lacet** (c'est-à-dire un **cercle topologique**) tracé sur une surface est le bord d'un **disque topologique**. Un « grand » lacet ne l'est pas forcément (figure 23).

A l'instar de la théorie du **cobordisme**, on peut déclarer « équivalents » deux lacets tracés sur la surface qui bordent un morceau de la surface (figure 24).

En modifiant légèrement les règles du jeu pour admettre des objets un peu moins réguliers, on définit des classes d'équivalence de lacets dont l'ensemble est le **premier groupe d'homologie** de la surface (groupe car, en mettant bout

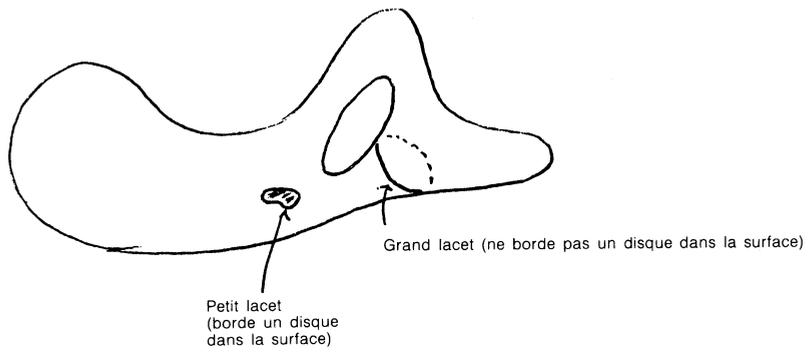


FIG. 23 -

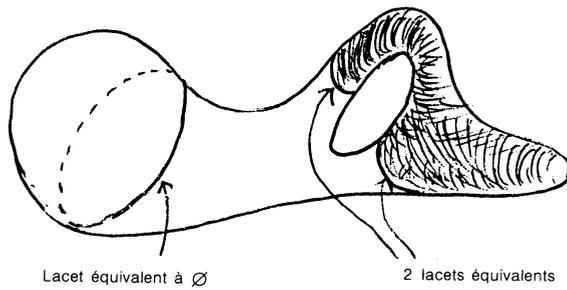


FIG. 24 -

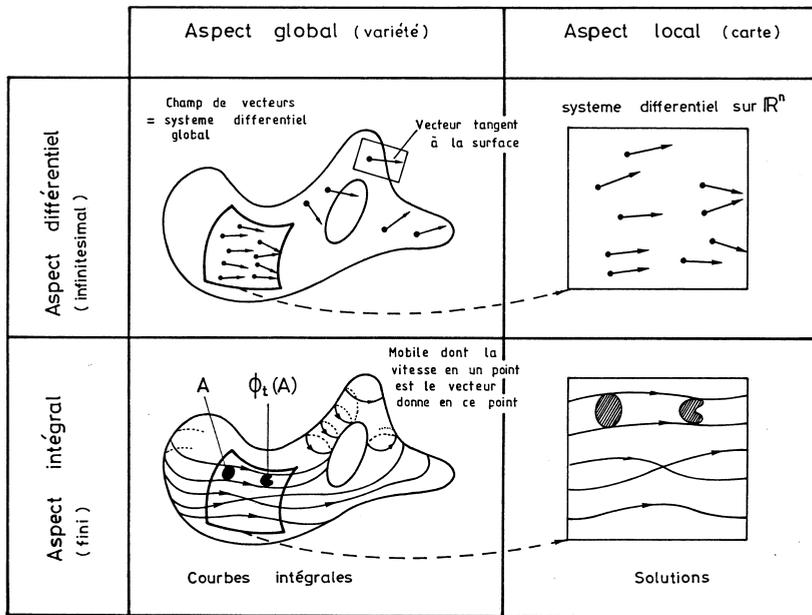


FIG. 25 -

à bout des lacets, on peut les composer), dont le rang (en gros le nombre de classes « engendrant » le groupe) est le **premier nombre de Betti b_1** (voir **Théorie de Morse à la Morse**).

Systèmes différentiels, dynamique de gradient, dynamique hamiltonienne (figure 25)

En suivant les courbes intégrales pendant un temps t donné, on définit une application φ_t de la surface sur elle-même. Si l'on peut faire ça pour tout t , on obtient une famille d'applications φ_t appelée le **système dynamique** associé au champ de vecteurs donné.

Le monde des systèmes différentiels se partage en deux grands types :

- les systèmes **dissipatifs** dont le parangon est fourni par les **dynamiques de gradient** qui ont pour courbes intégrales les **lignes de gradient** d'une fonction (si cette fonction, ou plutôt son opposé, est pensée comme étant une « énergie », on voit que l'énergie se dissipe au cours du mouvement) (figure 26) ;
- les systèmes **conservatifs** (figure 27) dont l'exemple le plus important est fourni par les **dynamiques hamiltoniennes** obtenues à partir d'une dynamique de gradient en faisant tourner chaque vecteur de $\frac{\pi}{2}$: l'énergie f est alors conservée (cette description vaut pour des surfaces ; en dimension -

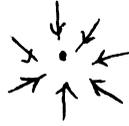


FIG. 26 –

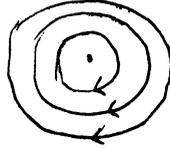


FIG. 27 –

paire – supérieure, la rotation de $\frac{\pi}{2}$ doit se faire dans différentes directions : c'est l'opération de **gradient symplectique**).

Exemple : le système hamiltonien qui décrit un couple d'**oscillateurs harmoniques** non couplés de même période a pour **variétés** d'énergie constante ($f = \text{constante}$) des sphères de dimension trois. Dans chacune de ces sphères, les courbes intégrales du système sont les fibres d'une **fibration de Hopf** (voir **structure fibrée**).

Pour un autre exemple, voir **géodésiques**.

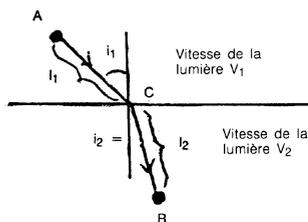
C'est une partie de la vision de Thom que de considérer qu'un système différentiel général peut se décrire à deux niveaux : un niveau grossier du type gradient, et un niveau plus fin du type conservatif (voir également **bassins et attracteurs**).

Bassins et attracteurs

Un exemple de décomposition d'une variété en **bassins d'attracteurs** est fourni par la décomposition en cellules de Thom associée à une fonction de Morse. Le système différentiel est celui défini par le gradient de f , les attracteurs sont les maxima locaux (voir **lignes de gradient, systèmes différentiels, théorie de Morse à la Thom**). Les courbes intégrales des points appartenant à une cellule de dimension deux convergent vers le maximum local auquel est associée cette cellule. Plus généralement, les **attracteurs** sont des ensembles de courbes intégrales caractérisés par le fait que la courbe intégrale de (presque) tout point suffisamment voisin converge vers eux. Leur structure topologique est simple en dimension deux mais extrêmement complexe dès la dimension trois. Quant aux bassins des différents attracteurs, leurs frontières peuvent



FIG. 28 –



Exemple = la réfraction

$$\frac{l_1}{V_1} + \frac{l_2}{V_2} \text{ minimum} \Leftrightarrow \frac{\sin i_1}{V_1} = \frac{\sin i_2}{V_2}$$

FIG. 29 –

s'imbriquer de façon très complexe, et n'ont aucune raison de remplir toute la variété.

Boîte noire (figure 28)

BKW (Brillouin, Kramers, Wentzel)

Une méthode, datant de 1925, qui fournit des solutions asymptotiques d'équations différentielles ou aux dérivés partielles.

En anglais, WKB (sic !)

Principe de Heisenberg

Plus on éclaire un électron pour voir par quel trou il passe, plus on le bombarde de photons, ce qui le perturbe. Pour une merveilleuse description du principe d'incertitude qui interdit de mesurer simultanément avec une précision parfaite la position et la quantité de mouvement d'une particule, voir les *Feynman Lectures in Physics*, volume III.

Principe de Fermat

La lumière parcourt toujours un chemin qui réalise le minimum de « chemin optique » entre deux de ses points. Exemple : la réfraction (figure 29).

Caustique

Enveloppe de rayons lumineux (figure 30).

Comparer à la singularité « fronce » dans **singularités génériques**.

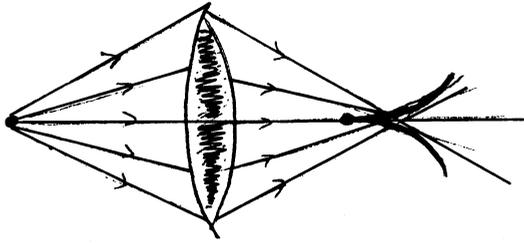


FIG. 30 –

Explication : regarder la surface engendrée par les rayons lumineux lorsqu'on met chacun à une hauteur correspondant à son inclinaison : la caustique est le **contour apparent** de cette surface, image des **singularités** de la projection sur le plan horizontal (figure 31).

Métrie hyperbolique

Modèle de la géométrie de Lobatchevski dans lequel la mesure des longueurs est le « chemin optique » (voir **Principe de Fermat**) dans un demi-plan formé d'un empilement de bandes minces dans lesquelles la vitesse de la lumière est égale à leur altitude. Les **géodésiques** (c'est-à-dire les « droites » de la géométrie) suivies par la lumière, sont définies par la loi de la réfraction (figure 32).

On vérifie facilement que ce sont des demi-cercles ou des demi-droites orthogonaux à la bande inférieure. Dans cette géométrie, une « droite » a une infinité de parallèles passant par un point donné. Un modèle **conforme** (c'est-à-dire dans lequel les angles sont conservés) de cette géométrie, obtenu à l'aide de deux projections stéréographiques, est le **disque de Poincaré** dans lequel les **géodésiques** sont les demi-cercles orthogonaux au bord et les diamètres (pour plus de détails, lire le très beau livre de Hilbert et Cohn-Vossen : *Geometry and the Imagination* dont nous adaptons la figure) (figure 33).

De même qu'on peut définir une **métrie plate** sur le **tore** en le décrivant comme un « rectangle » de \mathbb{R}^2 dont les côtés sont identifiés deux à deux et en mesurant les longueurs comme dans \mathbb{R}^2 (attention, rien à voir avec la mesure des longueurs sur un tore de révolution héritée de \mathbb{R}^3), on peut définir une **métrie hyperbolique** sur le **tore à p trous** pourvu que p soit ≥ 2 . Voici la recette pour un tore à deux trous : on part d'un « octogone hyperbolique régulier » dont la somme des angles aux sommets soit égale à 2π (ça existe!) et on identifie les côtés deux à deux comme sur la figure. Les huit sommets

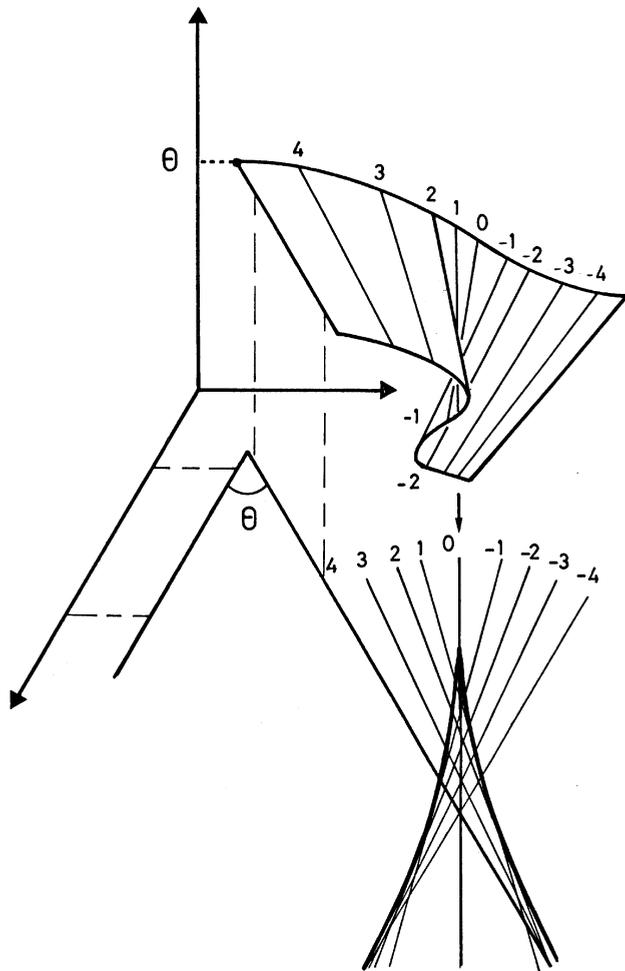


FIG. 31 -

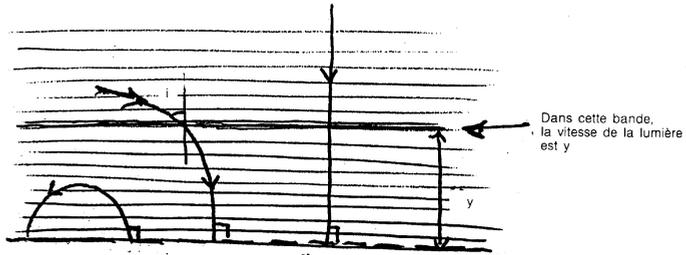


FIG. 32 -

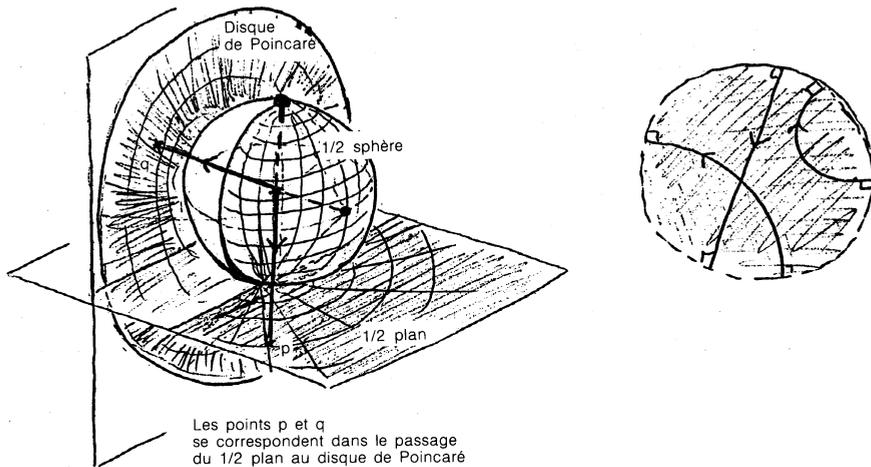


FIG. 33 -

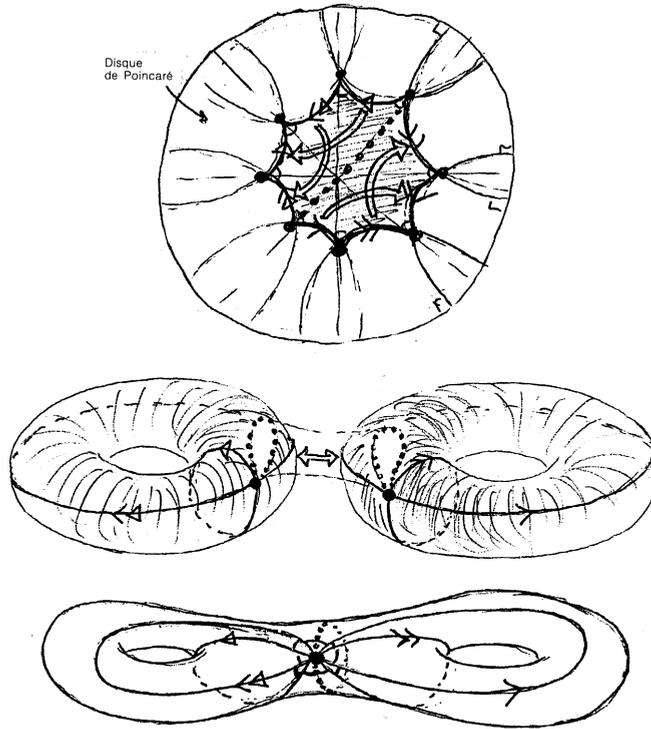


FIG. 34 –

deviennent un unique point, de même que les quatre sommets du rectangle deviennent un unique point du **tore** ; c'est ce qui nécessite la condition sur les angles. On comprend mieux le résultat de l'identification en partageant en deux l'octogone par une ligne pointillée : chaque moitié devient un tore « troué » ; le recollement des deux est un **tore à deux trous** (figure 34).

Les images des « droites » dans cette identification sont les **géodésiques** du tore à deux trous pour sa métrique hyperbolique. Leur comportement, dont l'étude a débuté à la fin du siècle dernier par les travaux de Hadamard et a été poursuivie en particulier par Morse, est d'une extrême complexité : la plupart passent arbitrairement près de n'importe quel point de la surface dans des directions arbitrairement proches de chaque direction possible. C'est l'exemple typique d'un **système ergodique**. Comme le note Thom avec beaucoup de justesse, il n'y a rien de « chaotique » là-dedans, mais au contraire une dynamique certes complexe mais parfaitement ordonnée et comprise !

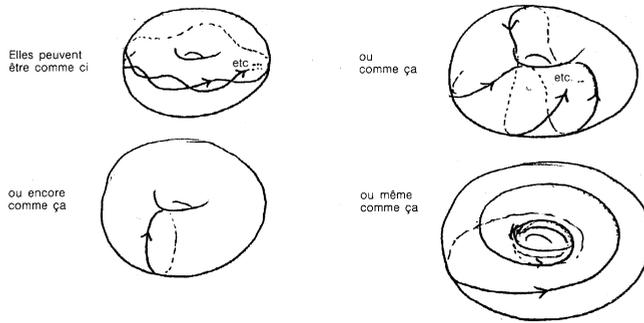


FIG. 35 –

Géodésiques sur une surface

Choisissons une « métrique » sur une surface, c'est-à-dire une façon de mesurer la longueur des courbes tracées sur la surface. Ce peut être la métrique « induite » par un plongement de la surface dans \mathbb{R}^3 la longueur est celle mesurée dans \mathbb{R}^3 , ce peut être une **métrique hyperbolique** sur un **tore à deux trous**, etc.

Une **géodésique** est alors une courbe γ tracée sur la surface qui possède la propriété suivante : étant donnés deux points a et b de γ suffisamment proches l'un de l'autre, la longueur de l'arc de γ compris entre a et b est inférieure ou égale à celle de tout arc tracé sur la surface entre a et b :

- les droites sont les géodésiques de la métrique « euclidienne » (c'est-à-dire ordinaire) sur \mathbb{R}^3 ;
- les grands cercles sont les géodésiques de la sphère ronde ;
- sur un tore de révolution muni de la métrique induite par \mathbb{R}^3 , les géodésiques sont déjà assez complexes (figure 35).

Les géodésiques d'une surface de \mathbb{R}^3 munie de la métrique induite par \mathbb{R}^3 sont les courbes suivies par une particule astreinte à se déplacer sur la surface sans être sujette à la pesanteur. C'est l'exemple de base de **système hamiltonien** (mais défini sur une variété de dimension 4, l'espace des vecteurs tangents à la surface considérée).

Espace de Hilbert

Comme l'espace euclidien \mathbb{R}^n mais en dimension infinie : chaque point est repéré par une infinité de coordonnées $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$ et sa distance à l'origine est donnée par le « théorème de Pythagore » généralisé.

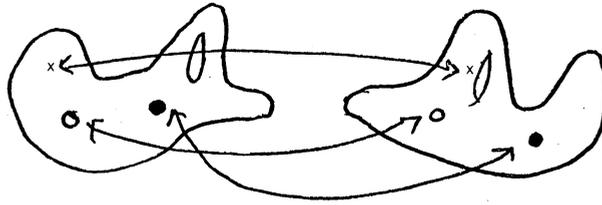


FIG. 36 -

Distance de 0 à $x = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 + \dots}$

Les « points » x de l'espace sont ceux dont la distance à l'origine est finie.

L'exemple paradigmatique est l'**espace de Fourier** dont les « points » sont les fonctions périodiques intégrables sur une période, et les « coordonnées » les « coefficients de Fourier » (amplitudes des harmoniques).

Transfinis de Cantor (cardinaux)

Appelons équivalents deux « ensembles » dont les éléments peuvent être mis en correspondance. Un nombre **transfini** est une « classe d'équivalence » d'ensembles. Les classes d'équivalence des ensembles finis sont les nombres ordinaires $0, 1, 2, \dots$ Quant aux autres, il y en a beaucoup, beaucoup, beaucoup ! (figure 36).

Objets analytiques, stratification, équisingularité

Une partie de \mathbb{R}^n définie par une ou plusieurs « équations » n'est pas toujours une **variété**. La « forme » d'un tel objet peut être très compliquée, en fait à peu près quelconque si les équations sont simplement différentiables. Cependant, dans le cas d'équations « polynomiales » (ou plus généralement « analytiques », c'est-à-dire en gros polynomiales de degré infini), les formes obtenues sont remarquablement structurées : elles admettent des **stratifications** (encore une notion chérie de Thom), décompositions en variétés de différentes dimensions (les **strates**) qui en permettent l'analyse géométrique. Pour être utiles, ces stratifications doivent vérifier certaines conditions qui remontent à Whitney et assurent l'**équisingularité** de l'objet le long de chaque strate : au voisinage de chaque point d'une strate, le paysage est le même.

L'illustration représente une **queue d'aronde** (l'une des **catastrophes élémentaires** de Thom) (figure 37).

Remarque : un objet régulier comme une **variété** admet également des stratifications : la décomposition en cellules de Thom (voir **Théorie de Morse à la Thom**) en est un exemple.

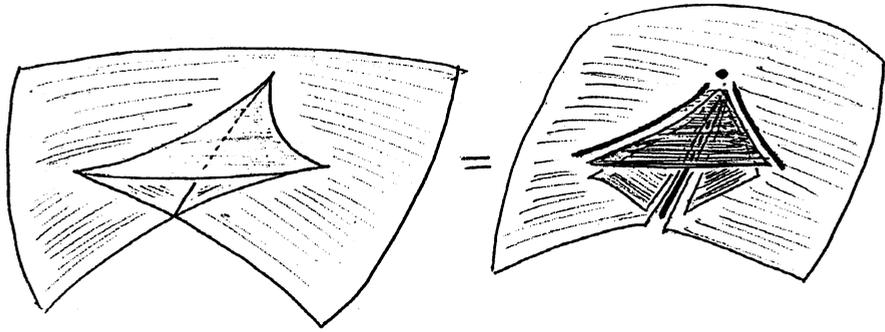


FIG. 37 –

Dans le même esprit, la « classification » des fonctions sur une variété suivant les types de points critiques qu'elles présentent se fait en **stratifiant** l'« espace » (de dimension infinie) de toutes ces fonctions ; les plus grosses **strates**, dont l'union est « presque » tout l'espace, contiennent les **fonctions de Morse**, dont les valeurs critiques sont distinctes (voir **points critiques**), c'est-à-dire les fonctions **structurellement stables** (voir **singularités génériques**).