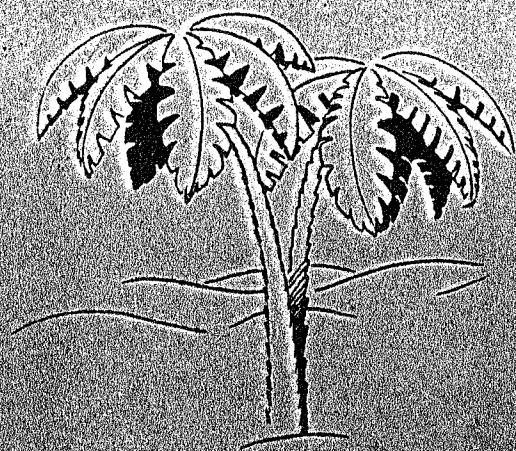




Fascicule



PENSEES DE SAGES



Problèmes d'évolution,

non

Linéaires

Séminaire de Nice

1974 ~ 1975

1975 ~ 1976

TABLE DES MATIERES

<u>EXPOSÉ N° 15</u>	P. 1 à 37	<u>A. CHENCINER</u> Aspects géométriques de l'étude des chocs dans les lois de conservation
<u>EXPOSÉ N° 16</u>	P. 1 à 20	<u>M. ZERNER</u> Sur une inégalité de Poincaré
<u>EXPOSÉ N° 17</u>	P. 1 à 10	<u>C. BARDOS, P. PENEL, U. FRISCH and</u>
<u>EXPOSÉ N° 18</u>	P. 1 à 8	<u>P.L. SULEM</u> Modified dissipativity for a non linear evolution equation arising in turbulence
<u>EXPOSÉ N° 19</u>	P. 1 à 10	<u>J. P. KAHANE</u> Mesures et dimensions
<u>EXPOSÉ N° 20</u>	P. 1 à 13	<u>John M. CHADAM</u> The classical equations of quantum field theory
<u>EXPOSÉ N° 21</u>	P. 1 à 9	<u>John M. CHADAM</u> Time dependent hartree-fock equations

ASPECTS GEOMETRIQUES DE L'ETUDE DES CHOCs DANS LES LOIS DE CONSERVATION

I - INTRODUCTION

Nous étudierons essentiellement le problème de Cauchy pour une équation hyperbolique quasilinéaire à une variable d'espace : il s'agit de déterminer $u(x,t)$ pour $x \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}^+$, vérifiant

$$(E) \quad \begin{cases} (1) & \frac{\partial u}{\partial t} + a(u) \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ (2) & u(x,0) = \varphi(x) \end{cases}$$

Pour les motivations, voir l'exposé n°1 de C. Bardos [1] et surtout la remarquable mise au point de Gelfand [3].

La généralisation au cas de plusieurs variables d'espace est bien comprise grâce au travail de Kruckov (voir les exposés n° 6,7,8 de C. Bardos [1]) ; par contre, le cas des systèmes est beaucoup plus coriace.

Le but des exposés est avant tout de comprendre la relation entre la "complexité" de la fonction $a(u)$ (par exemple nombre et nature de ses points critiques si elle est suffisamment dérivable) et la "complexité" de la solution de (E) (structure générique des chocs en particulier).

Par exemple, si $a(u) \equiv a$ est une constante, l'équation (1) est linéaire et les solutions de (E) s'écrivent

$$u(x,t) = \varphi(x-at)$$

la donnée initiale se propage sans se déformer à la vitesse a , ce qui revient à dire que u reste constante sur les caractéristiques (d'équation $(x-x_0) = a(t-t_0)$) ; en

particulier, une discontinuité de φ (ou de $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$) se propage le long des caractéristiques de l'équation (1).

Si $a(u)$ est linéaire on retrouve l'équation étudiée dans l'exposé n° 1 [1] (limite de l'équation de Burgers lorsque la viscosité est nulle) ; même si φ est très régulière, (E) n'a pas de solution régulière sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ tout entier : il apparaît des discontinuités (chocs) qui ne se propagent pas le long des caractéristiques de (1).

Ce cas est cependant encore assez simple : le théorème de Lax [7] ramène la résolution de (E) (mis sous forme "conservative", voir plus loin) à la recherche des minima absolus d'une famille de fonctions de u paramétrées par t et x ; on en déduit (Golubitsky et Schaeffer [4], [11]) la structure des chocs pour "presque toute" donnée initiale $\varphi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.

Si $a(u)$ est quelconque, la situation est encore plus complexe, ainsi que nous le constaterons sur des exemples ; pour une description de ce qui peut arriver génériquement, voir Guckenheimer [5].

II - CONDITIONS DE SAUT ET CONDITIONS D'ENTROPIE

II.1. PROBLEME DE CAUCHY LOCAL :

Si une fonction $u(x,t)$ dérivable dans un ouvert Ω de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ vérifie (1) dans cet ouvert, le graphe de u dans Ω est une surface réglée dont les génératrices sont des droites de la forme $u = u_0, x - x_0 = a(u_0)(t - t_0)$; en effet, on vérifie immédiatement que u est constante le long des courbes intégrales dans Ω de l'équation différentielle $\frac{dx}{dt} = a(u(x,t))$.

En particulier, s'il existe un voisinage ouvert Ω de $\mathbb{R} \times \{0\}$ dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ sur lequel (C) admet une solution dérivable, le graphe de cette solution est la partie située au-dessus de Ω de la surface $(S) \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ d'équation

$$(3) \quad S(x,t,u) \equiv \varphi(x - a(u)t) - u = 0$$

$$\text{Si } \varphi \text{ et } a \text{ sont dérivables, } \frac{\partial S}{\partial u}(x,t,u) = -ta'(u)\varphi'(x-a(u)t) - 1$$

Si de plus φ est bornée, il en est de même de u , donc de $a'(u)$, ce qui montre (théorème des fonctions implicites) l'existence d'un temps $t_0 \neq 0$ tel que la partie de (S) au-dessus de $\mathbb{R} \times [0, t_0[$ soit un graphe : il y a donc existence et unicité d'une solution dérivable de (C) pour tout temps $t < t_0$.

La projection (K) sur le plan (x,t) de la courbe (Σ) d'équations

$$(4) \quad \begin{cases} S(x,t,u) = 0 \\ \frac{\partial S}{\partial u}(x,t,u) = 0 \end{cases}$$

est le contour apparent de (S) sur le plan (x,t) ; c'est aussi l'enveloppe de la famille des droites d'équation $x - x_0 = a(\varphi(x_0))t$, paramétrées par $x_0 \in \mathbb{R}$ (figure 1).

Une équation paramétrique de (K) est donc

$$(5) \quad \begin{cases} t = \frac{-1}{a'(\varphi(x_0)) \varphi'(x_0)} \\ x = x_0 - \frac{a(\varphi(x_0))}{a'(\varphi(x_0)) \varphi'(x_0)} \end{cases}$$

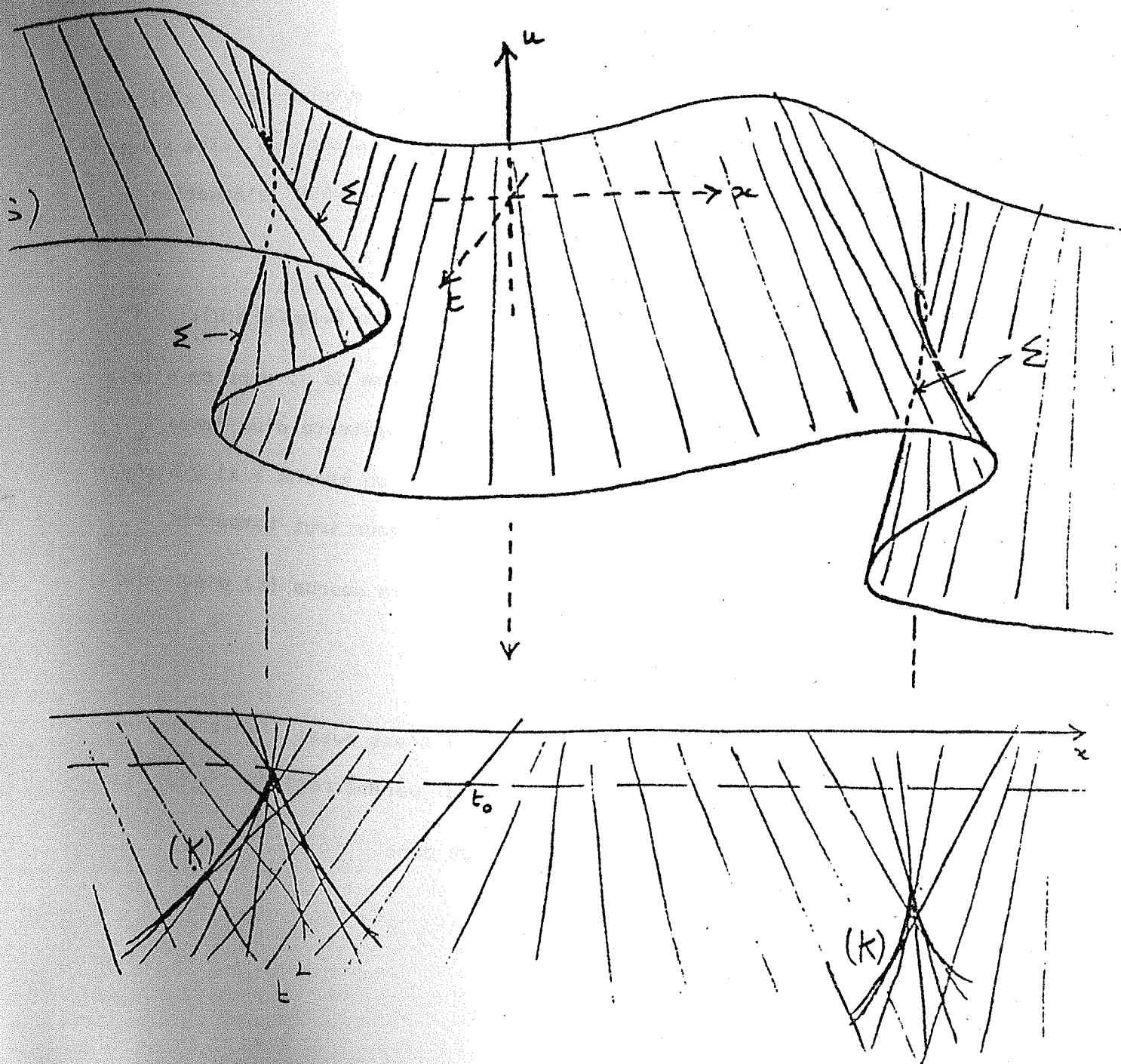
Les points singuliers de (K) (éventuelles origines d'un choc) sont les points de la forme ci-dessous tels que

$$(6) \quad \sigma(x_0) \equiv a''(\varphi(x_0))(\varphi'(x_0))^2 + a'(\varphi(x_0)) \varphi''(x_0) = 0$$

Le temps t_0 maximum pour lequel il existe une solution dérivable de (E) sur $\mathbb{R} \times [0, t_0[$ est donc

$$(7) \quad t_0 = \inf \left\{ \frac{-1}{a'(\varphi(x_0)) \varphi'(x_0)} > 0, x_0 \in \mathbb{R}, \sigma(x_0) = 0 \right\}.$$

Figure 1.



REMARQUE :

Même si (S) n'est pas un graphe, elle peut apparaître comme une solution généralisée de (E) de la manière suivante : au lieu de chercher $u = u(x,t)$, on cherche $z(x,t,u)$ qui s'annule si u est solution de (E) ; on est amenés à résoudre

$$(S) \quad \begin{cases} \frac{\partial z}{\partial t} + a(u) \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \\ z(x,0,u) = \varphi(x) - u \end{cases}$$

L'unique solution de cette équation linéaire est bien entendu

$$z(x,t,u) = \varphi(x-a(u)t) - u$$

II.2. PROBLEME DE CAUCHY GLOBAL ; CONDITIONS DE SAUT :

Ce qui précède nous amène à chercher des solutions de (E) sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ ayant certaines discontinuités (chocs). Le produit de deux distributions n'étant pas toujours défini, la notion de solution au sens des distributions n'est à priori pas définie pour une équation non linéaire. On s'en tire dans le cas présent en écrivant (E) sous la forme

$$(E') \quad \begin{cases} (1') & \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(u) = 0 \text{ (forme conservative de (1))} \\ (2) & u(x,0) = \varphi(x) \end{cases}$$

et en l'interprétant de la manière suivante :

$$\forall g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, C^\infty \text{ à support compact,} \\ \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+} \left(\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) + \frac{\partial}{\partial x} f(u(x,t)) \right) g(x,t) dx dt = 0,$$

c'est à dire

$$(8) \quad \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+} \left(u(x,t) \frac{\partial g}{\partial t}(x,t) + f(u(x,t)) \frac{\partial g}{\partial x}(x,t) \right) dx dt + \int_{\mathbb{R}} u(x,0) g(x,0) dx = 0$$

On peut aussi introduire la 1-forme différentielle

$$\omega(x,t,u) = u dx - f(u) dt$$

et remarquer que si $i : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^3$, défini par $i(x,t) = (x,t,u(x,t))$, est le graphe d'une solution dérivable de (1'), on a $d(i^* \omega) = i^* d\omega = 0$.

On peut alors montrer que $u = u(x,t)$ est solution de (1') au sens des distributions (on dit aussi solution faible) si et seulement si

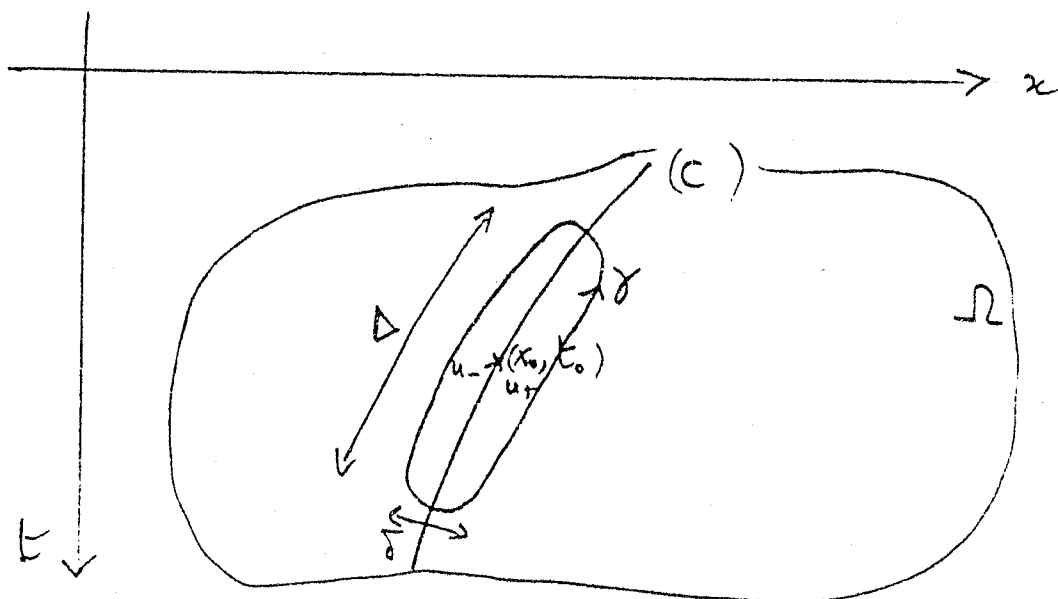
$$(9) \quad \forall \gamma \text{ lacet dérivable par morceaux dans } \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \quad \int_{\gamma} i^* \omega = 0.$$

Ce nouveau point de vue rend très intuitive la démonstration des conditions de saut de Rankine-Hugoniot (voir Gelfand [3]) :

Soit (C) un segment de courbe régulière dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$; soit $(x_0, t_0) \in (C)$; on suppose qu'une solution faible $u = u(x,t)$ de (1') est définie dans un voisinage Ω de (x_0, t_0) , et continue dans le complémentaire de (C) ; on suppose de plus que les limites de $u(x,t)$ lorsque (x,t) tend vers (x_0, t_0) d'un côté ou l'autre de (C) existent et valent respectivement u_- et u_+ (supposés distincts) ; alors la pente de (C) en (x_0, t_0) vérifie

$$(R.H.) \quad \frac{dx}{dt}(x_0, t_0) = \frac{f(u_+) - f(u_-)}{u_+ - u_-}$$

Figure 2.

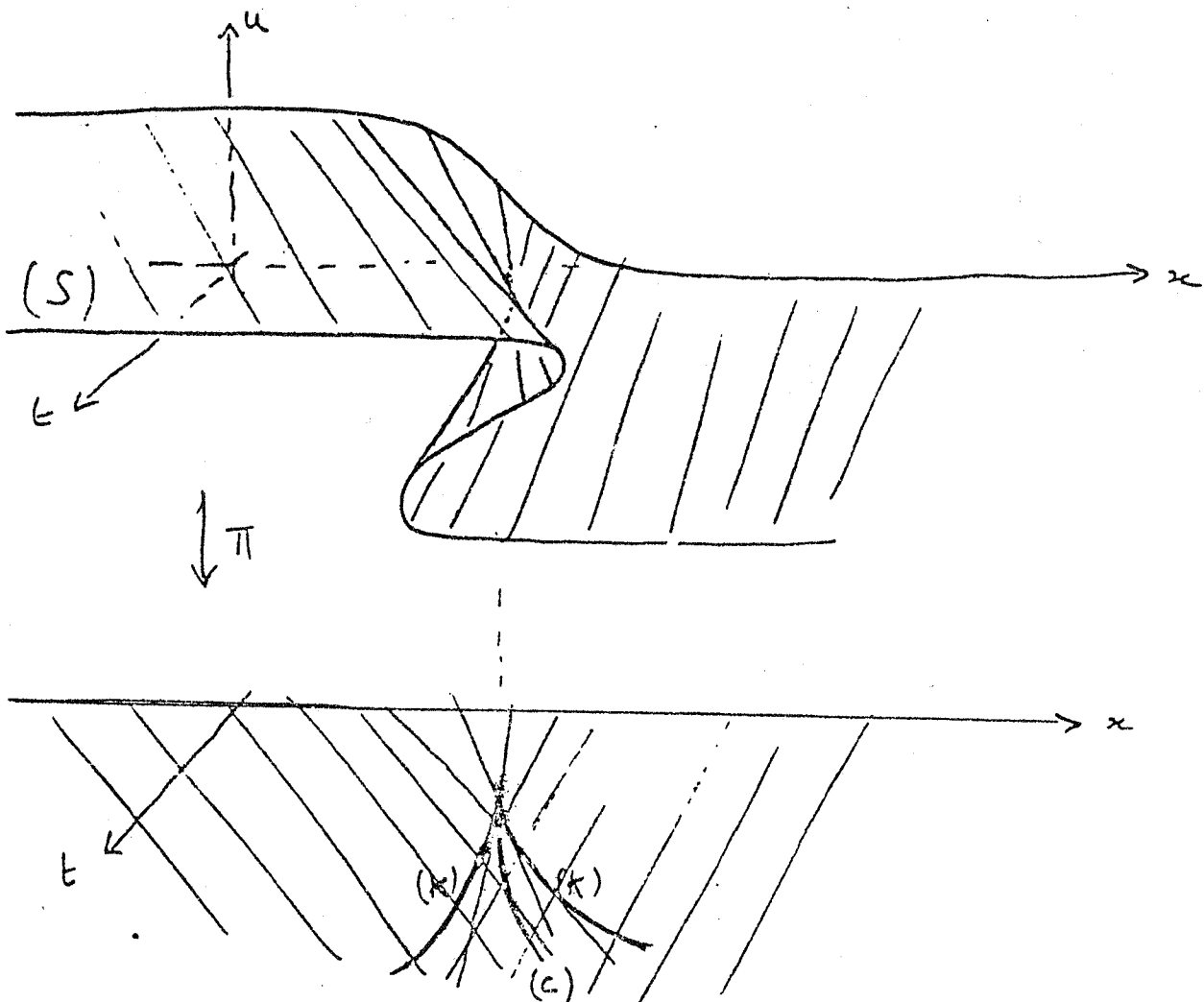


La démonstration revient à écrire $\int_{\gamma} i^* \omega = 0$ pour un lacet comme celui tracé sur la figure 2, puis à faire tendre γ vers le point (x_0, t_0) tout en s'arrangeant pour faire tendre vers zéro le rapport $\frac{\delta}{\Delta}$ (voir figure 2).

L'exemple qui suit semble montrer qu'étant donnée une fonction φ assez régulière, $(\mathcal{E}')$ admet une unique solution dérivable dans le complémentaire de certaines courbes de choc, et vérifiant (R.H.) sur la partie non singulière de ces courbes ; nous verrons cependant qu'il en est rien.

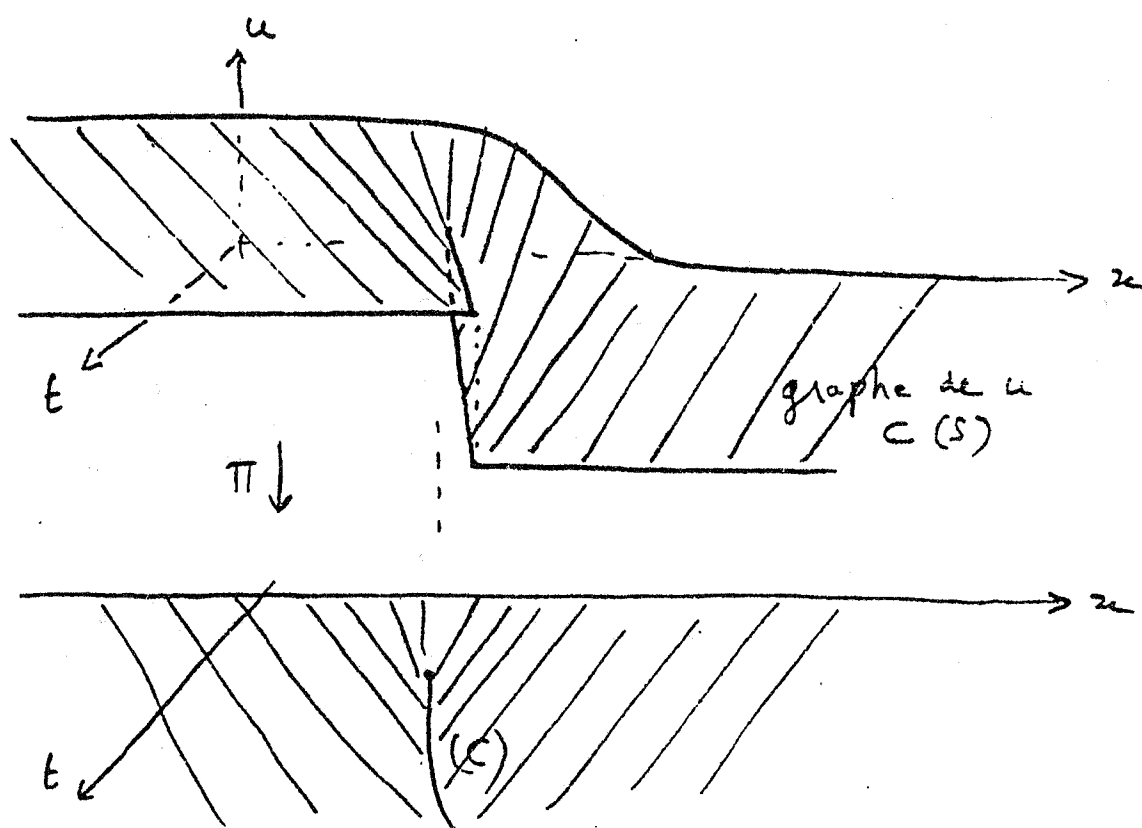
Exemple : $f(u) = \frac{u^2}{2}$, $\varphi(x)$ décroissante.

Figure 3.



On peut voir que pour "presque toute" φ décroissante la condition (R.H.) définit une unique courbe (C) difféomorphe à une demi-droite ; on obtient donc une solution faible de $(\mathcal{E})$ dont le graphe est contenu dans (S) et dont les seules discontinuités se produisent le long de (C) (voir figure 4).

Figure 4.



REMARQUES :

① On voit sur ce type d'exemples que les discontinuités de φ ne se propagent pas en général suivant les caractéristiques (droites d'équation $x-x_0 = f'(u)(t-t_0)$, u fixé) ;

Par contre, les discontinuités de $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ se propagent suivant les caractéristiques : on peut le voir par un raisonnement analogue à celui qui fournit (R.H.) (passage à la limite lorsque $u_+, u_- \rightarrow u$), ou bien directement en écrivant que de part et d'autre d'une ligne de discontinuité de $\frac{\partial u}{\partial x}$, les accroissements infinitésimaux de u sont les mêmes (continuité de u).

② Tout ce qui précède se généralise immédiatement aux équations $\frac{\partial}{\partial t} g(u) + \frac{\partial}{\partial x} f(u) = 0$; l'exemple suivant (Gelfand [3]) montre que deux équations de ce type ayant les mêmes solutions C^1 n'ont pas forcément les mêmes solutions faibles :

$$(i) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u^2}{2} \right) = 0, \quad (ii) \quad \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{u^2}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u^3}{3} \right) = 0$$

en effet, la condition (R.H.) s'écrit suivant les cas

$$(i) \quad \frac{dx}{dt} (x_0, t_0) = \frac{1}{2} \frac{u_+^2 - u_-^2}{u_+ - u_-}, \quad (ii) \quad \frac{dx}{dt} (x_0, t_0) = \frac{2}{3} \frac{u_+^3 - u_-^3}{u_+^2 - u_-^2}$$

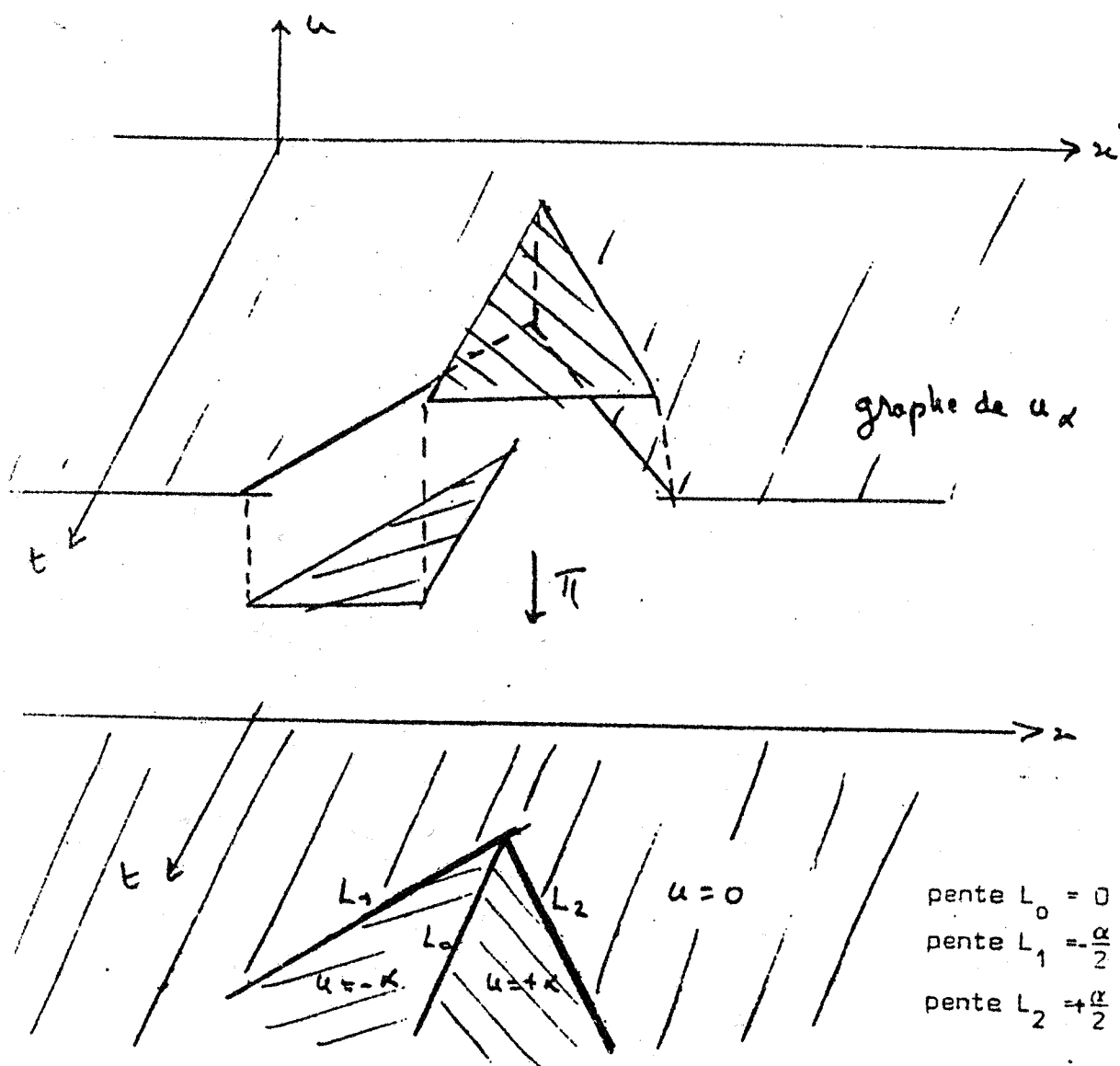
Le modelage de l'équation a donc une importance décisive, mais ceci est du ressort des physiciens.

③ Enfin, la condition (R.H.) ne suffit pas à assurer l'unicité de la solution de (E') (si elle existe) : la notion de solution faible n'est donc pas assez restrictive ; voici un exemple suggestif tiré de L. Brun [2] :

Il existe une infinité de solutions faibles de l'équation $\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u^2}{2} \right) = 0$ telles que $u(x, 0) \equiv 0$; un exemple d'une telle solution non triviale u_α est donné sur la figure 5 (α est un paramètre réel arbitraire).

En changeant la donnée initiale, on peut construire d'autres exemples (Lax [6]).

Figure 5.



Il faut donc une condition supplémentaire pour sélectionner la solution "physique" (hum !). Dans le cas présent, les solutions du type u_α , $\alpha \neq 0$ sont éliminées par des considérations de stabilité (voir plus loin).

Remarquons que si $\alpha \neq 0$, le graphe de u_α n'est pas contenu dans (S) ; en fait, dès qu'il existe une composante connexe de l'ensemble des points de continuité de u ne contenant aucun point $(x, 0)$, il est a priori possible que le graphe de u ne soit pas contenu dans (S) ;

Ce phénomène se produira effectivement pour la solution de $(\mathcal{E})$ que nous allons sélectionner, sauf dans le cas où $f''(u)$ ne s'annule jamais.

3. UNICITE ET STABILITE ; LES CONDITIONS D'ENTROPIE

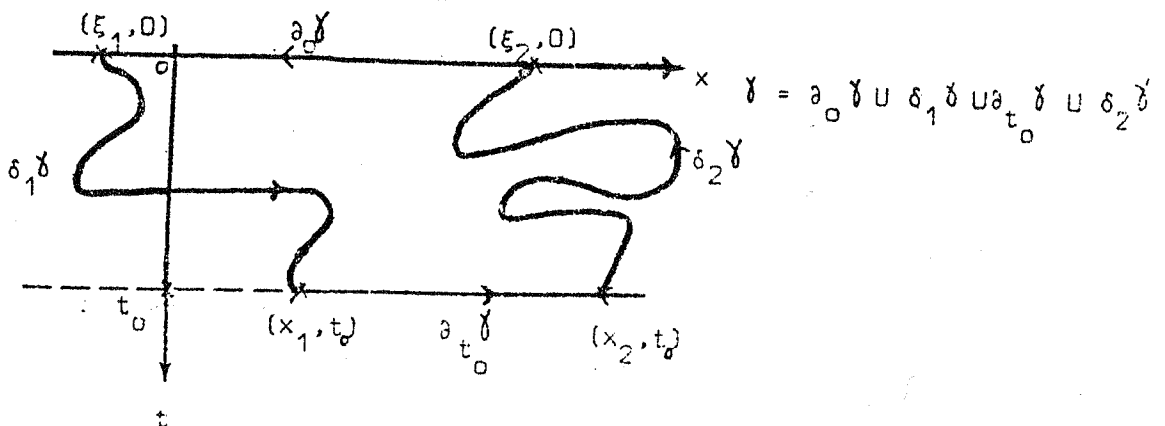
Suivant Oleïnik [9], remarquons qu'un théorème d'unicité pour $(\mathcal{E})$ découle immédiatement de l'existence de majorations du type suivant :

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall u, v \text{ solutions de (1')}, \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, \forall t_0 \in \mathbb{R}^+, \forall \varepsilon > 0, \\ \text{il existe } \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R} \text{ tels que} \\ \left| \int_{x_1}^{x_2} (u(x, t_0) - v(x, t_0)) dx - \int_{\xi_1}^{\xi_2} (u(x, 0) - v(x, 0)) dx \right| \leq \varepsilon \end{array} \right.$$

Bien entendu, une telle inégalité sur $\mathbb{R}$ entier serait insuffisante puisqu'on intègre $u-v$ et non pas $|u-v|$.

Pour obtenir (10), on écrit (9) $\int_{\gamma} i^* \omega = 0$ pour u et v , en choisissant le lacet γ astucieusement (figure 6).

Figure 6.



Il vient par différence (avec un léger abus de notation)

$$\int_{\gamma} (u-v) dx - (f(u) - f(v)) dt = 0$$

c'est-à-dire

$$(11) \quad \begin{aligned} & \int_{x_1}^{x_2} (u(x, t_0) - v(x, t_0)) dx - \int_{\xi_1}^{\xi_2} (u(x, 0) - v(x, 0)) dx \\ &= \int_{\delta_1 \gamma} (u-v) dx - (f(u) - f(v)) dt + \int_{\delta_2 \gamma} (u-v) dx - (f(u) - f(v)) dt \end{aligned}$$

L'idée d'Oleinik est de choisir $\delta_1 \gamma$ et $\delta_2 \gamma$ solutions de l'équation différentielle

$$(12) \quad \frac{dx}{dt} = \frac{f(u(x, t)) - f(v(x, t))}{u(x, t) - v(x, t)}$$

dans un ouvert Ω où $u(x, t) - v(x, t)$ est différent de 0 et dérivable

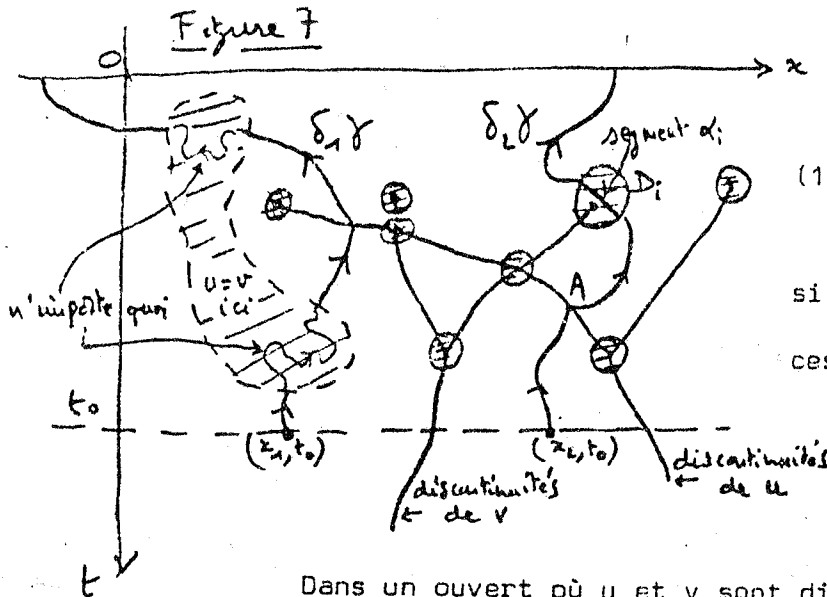
(si f est 2 fois dérivable, on peut aussi prolonger par $\frac{dx}{dt} = f'(u(x, t))$).

Pour majorer les contributions au second membre de (11) venant du complémentaire de Ω , on est amenés à faire l'hypothèse suivante :

(H) $\left\{ \begin{array}{l} \text{La solution } u \text{ (resp. } v \text{) est dérivable en dehors d'un nombre} \\ \text{fini de points et d'un nombre fini de courbes régulières ;} \\ \text{en chaque point (sauf éventuellement un nombre fini)} \\ \text{d'une de ses courbes de discontinuité, } u \text{ (resp. } v \text{) admet} \\ \text{des limites } u_-, u_+ \text{ (resp. } v_-, v_+) \text{ de part et d'autre de la} \\ \text{courbe.} \end{array} \right.$

Commençons de plus par supposer que l'intersection des courbes de discontinuité de u avec celles de v est réduite à un nombre fini de points.

On entoure chacun de ces points ainsi que les points exceptionnels mentionnés ci-dessus d'un disque assez petit pour avoir une majoration



$$(13) \left| \int_{\alpha_i} (u-v) dx + f(u) - f(v) dt \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

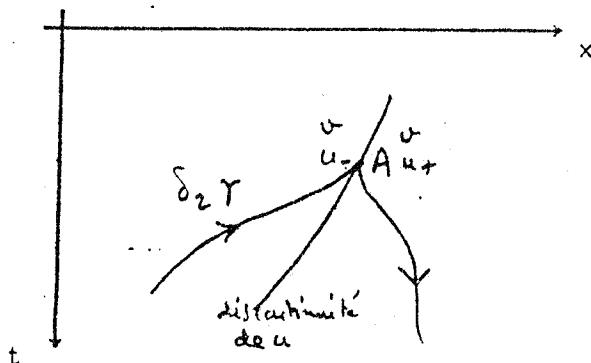
si α_i est un segment dans le $i^{\text{ème}}$ de ces disques D_i .

Dans un ouvert où u et v sont différentiables, les courbes intégrales de (12) sont des graphes de fonctions $x(t)$;

Si on ne rencontre pas de discontinuité de u ou v , on peut donc joindre la droite $t=t_0$ à la droite $t=0$ par une telle courbe intégrale. Si on rencontre un des disques D_i , on prolonge la courbe intégrale par un segment $\alpha_i CD_i$, et on continue (voir figure 7).

Les problèmes commencent lorsqu'on rencontre un point où par exemple v est continue et u discontinue (le point A de la figure 7) : une façon d'être sûr que l'on peut atteindre $t=0$ par des morceaux de courbe intégrale de (12) est d'éviter la situation représentée sur la figure 8, qui correspond (via (R.H.)) à

Figure 8.



$$(14) \frac{f(u_-) - f(v)}{u_- - v} < \frac{f(u_-) - f(u_+)}{u_- - u_+} < \frac{f(u_+) - f(v)}{u_+ - v}$$

(au point A).

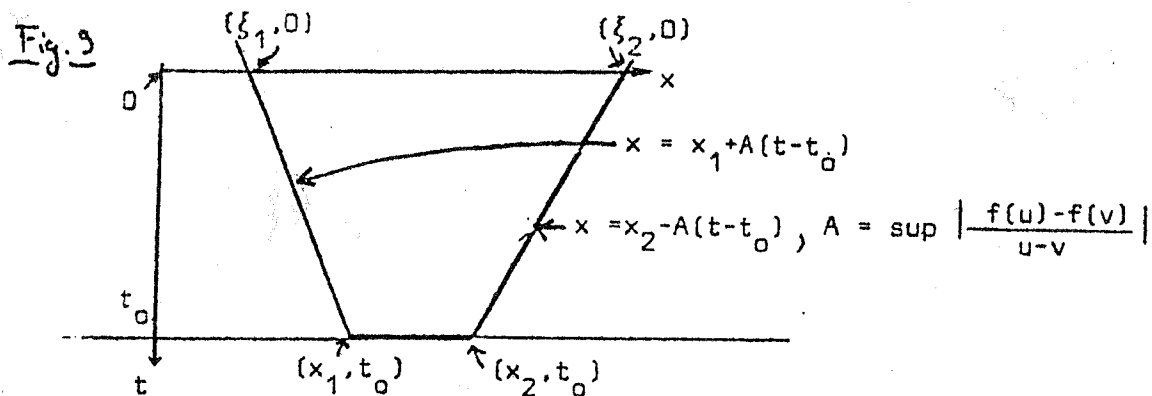
Il est donc naturel d'introduire la condition suivante, dite condition d'entropie d'Oleïnik, qui évite exactement cette situation :

(E) $\left\{ \begin{array}{l} \text{Si } u_+ < u_- \text{ (resp. } u_- < u_+) \text{ le graphe de } f \text{ est au-dessous} \\ \text{(resp. au-dessus) du segment joignant les points} \\ (u_-, f(u_-)) \text{ et } (u_+, f(u_+)). \end{array} \right.$

Si (E) est vérifiée par u (resp. v) en tous ses points de discontinuité (sauf éventuellement un nombre fini)^(*), et si les hypothèses qui précèdent sont satisfaites, il n'y a plus d'obstruction à construire δ_1 et δ_2 de façon que le second membre de (11) soit majoré par ε , ce qui démontre (10) pour des solutions u et v vérifiant (X) (il faudrait en fait traiter aussi le cas où l'intersection des courbes de discontinuités de u et de v n'est pas finie : on s'en tire en remplaçant u et v par des solutions approchées $\tilde{u}$ et $\tilde{v}$ pour lesquelles cette intersection est finie (voir Oleinik [9])).

REMARQUES :

① On déduit de ce qui précède que si u, v sont deux solutions faibles de (1') vérifiant (X) et (E), on a $u(x, t_0) = v(x, t_0)$ pour tout point (x, t_0) de continuité de u et v tel que $x_1 \leq x \leq x_2$ dès que $u(x, 0) = v(x, 0)$ pour tout point $(x, 0)$ de continuité de u et v tel que $\xi_1 \leq x \leq \xi_2$, où ξ_1 et ξ_2 sont définis sur la figure 9 :



(Comparer à la proposition 3 de l'exposé n° 8 [1] : vitesse finie de propagation).

(*) par abus de langage nous dirons simplement dans ce cas que u (resp. v) vérifie (E).

- (E) implique en particulier la condition (équivalente à (E) si f est convexe)

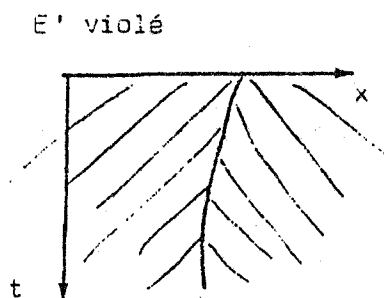
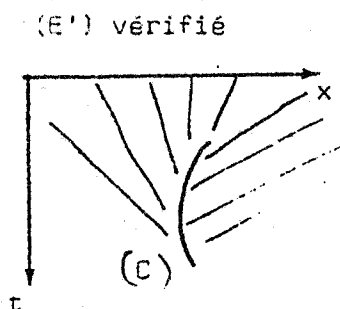
$$(E') \quad f'(u_+) \leq \frac{f(u_-) - f(u_+)}{u_- - u_+} \leq f'(u_-) \quad (\text{si } u_+ < u_-)$$

(forme infinitésimale de la condition au voisinage de u_- et u_+).

Il est clair que la démonstration précédente s'applique avec (E') à la place de (E) si on suppose v proche de u , ce qui démontre la stabilité de solutions vérifiant ~~(E)~~ et (E') (donc à fortiori ~~(E)~~ et (E)).

(E') exprime que les caractéristiques de l'équation (1') "rentrent" dans les courbes de discontinuité de u au cours du temps (figure 10)

Figure 10.



On peut voir directement (Gelfand [3]) que (E') entraîne la stabilité des solutions de (1') du type

$$\begin{cases} u(x,t) = u_- & \text{si } x-ct < 0 \\ u(x,t) = u_+ & \text{si } x-ct > 0 \end{cases} \quad (\text{avec } c = \frac{f(u_+) - f(u_-)}{u_+ - u_-})$$

En effet, si $u+v$ est une solution de (1') proche de u , on a en première approximation, pour v petit,

$$\frac{\partial v}{\partial t} + a \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad \text{où} \quad \begin{cases} a = f'(u_-) & \text{si } x-ct < 0 \\ a = f'(u_+) & \text{si } x-ct > 0 \end{cases}$$

dont la solution est

$$\begin{cases} v \text{ constante sur les caractéristiques de pente } f'(u_-) & \text{si } x-ct < 0 \\ v \text{ constante sur les caractéristiques de pente } f'(u_+) & \text{si } x-ct > 0 \end{cases}$$

Si u vérifie (E'), et si $v(x,0)$ tend vers 0 lorsque $|x| \rightarrow +\infty$, il est clair que $v(x,t)$ tend vers 0 uniformément en x lorsque $t \rightarrow +\infty$.

3 Une solution u de (1') vérifiant ~~(K)~~ vérifie (R.H.) et (E) le long d'une courbe lisse de discontinuité si et seulement si elle vérifie l'inégalité de Kruckov ci-dessous (voir exposé n° 6 [1]) :

$$(K) \quad \begin{cases} \forall k \in \mathbb{R}, \quad \text{signe } (u_+ - k) \times v \left[(u_+ - k) \frac{\partial}{\partial t} + (f(u_+) - f(k)) \frac{\partial}{\partial x} \right] \\ \leq \text{signe } (u_- - k) \times v \left[(u_- - k) \frac{\partial}{\partial t} + (f(u_-) - f(k)) \frac{\partial}{\partial x} \right]. \end{cases}$$

v est la 1-forme dH , $H(x,t)$ étant une équation de la courbe de discontinuité considérée qui vérifie

$$\begin{cases} 1) \quad dH \neq 0 \\ 2) \quad H \text{ croît en passant du côté } u_- \text{ au côté } u_+. \end{cases}$$

$\frac{\partial}{\partial t}$ et $\frac{\partial}{\partial x}$ sont les champs de vecteurs standard du plan (x,t) .

Ceci conduit à une définition plus restrictive de la notion de solution faible de (1'), où l'égalité (8) est remplacée par une famille d'inégalités (exposé n° 6, définition 1 [1]).

Le théorème d'unicité pour ces solutions faibles est démontré dans l'exposé n° 8 [1].

(4) La démonstration géométrique d'Oleinik s'éclaire si on transpose l'équation

Soit $g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$; si u et v sont deux solutions de (1') telles que $u(x,0)=v(x,0)$ presque partout pour $\xi_1 \leq x \leq \xi_2$, et si $(\text{support de } g) \cap \{t=0\} \subset [\xi_1, \xi_2]$, on déduit de (8) l'égalité

$$(15) \quad \iint_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+} \left[\frac{\partial g}{\partial t} \cdot (u-v) + \frac{\partial g}{\partial x} \cdot (f(u) - f(v)) \right] dx dt = 0$$

$$\text{Posons } F(x,t) = \frac{f(u(x,t)) - f(v(x,t))}{u(x,t) - v(x,t)} \quad (\text{discontinu !})$$

(15) devient

$$(16) \quad \iint_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+} \left[\frac{\partial g}{\partial t} + F \cdot \frac{\partial g}{\partial x} \right] (u-v) dx dt = 0$$

Pour montrer que $u=v$ presque partout dans un domaine D du plan tel que $D \cap \{t=0\} \subset [\xi_1, \xi_2]$, il suffit de montrer que $\forall \alpha$ fonction C^∞ à support dans D , l'équation

$$(17) \quad \frac{\partial g}{\partial t} + F \cdot \frac{\partial g}{\partial x} = \alpha$$

a une solution g à support dans D

Dans le cas présent, on prend pour D un domaine dont l'intersection avec $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ est limitée par les droites $x = \xi_1 + At$, $x = \xi_2 - At$, où $A = \sup |F(x,t)|$ (comparer à la remarque (1) et remarquer que les caractéristiques de (17) sont les droites d'équation $\frac{dx}{dt} = F(x,t)$; on se pose alors le problème de Cauchy pour une donnée initiale nulle sur $\partial D \cap \{t > 0\}$).

L'équation (17) est une équation hyperbolique linéaire dont le coefficient F est discontinu là où u et v sont discontinues (on suppose f non linéaire). La condition (E) assure que le problème de Cauchy considéré n'est pas surdéterminé (voir la figure 8 du § 12 de Gelfand [3]).

5 Soient u, v deux solutions faibles de $(\mathcal{E})$ qui vérifient (A) et (E) , telles que $u(x, 0)$ et $v(x, 0)$ soient dans $L^1(\mathbb{R})$.

Soit $x_i(t)$, $i \in \mathbb{Z}$, une partition dénombrable de $\mathbb{R} \times \{t\}$ telle que $u(x, t) - v(x, t)$ soit de signe constant dans $[x_i(t), x_{i+1}(t)]$; soit $\epsilon > 0$ fixé.

La méthode utilisée dans la démonstration d'Oleinik nous permet d'associer à $x_i(t)$ une partition $\xi_i(t)$ de $\mathbb{R} \times \{0\}$ (en intégrant "approximativement" l'équation différentielle $\frac{dx}{dt} = \frac{f(u) - f(v)}{u - v}$) de façon que

$$\forall i, \quad \left| \int_{x_i(t)}^{x_{i+1}(t)} (u(x, t) - v(x, t)) dx - \int_{\xi_i(t)}^{\xi_{i+1}(t)} (u(x, 0) - v(x, 0)) dx \right| \leq \frac{\epsilon}{2|i|+2}$$

On a alors

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |u(x, t) - v(x, t)| dx &= \sum_i \operatorname{sgn}_i(u-v) \int_{x_i(t)}^{x_{i+1}(t)} (u(x, t) - v(x, t)) dx \\ &\leq \sum_i \int_{\xi_i(t)}^{\xi_{i+1}(t)} |u(x, 0) - v(x, 0)| dx + \epsilon \\ &= \int_{\mathbb{R}} |u(x, 0) - v(x, 0)| dx + \epsilon \end{aligned}$$

Cette inégalité, valable pour tout ϵ , nous montre que

$$(17 \text{ bis}) \quad \forall t, \quad \int_{\mathbb{R}} |u(x, t) - v(x, t)| dx \leq \int_{\mathbb{R}} |u(x, 0) - v(x, 0)| dx,$$

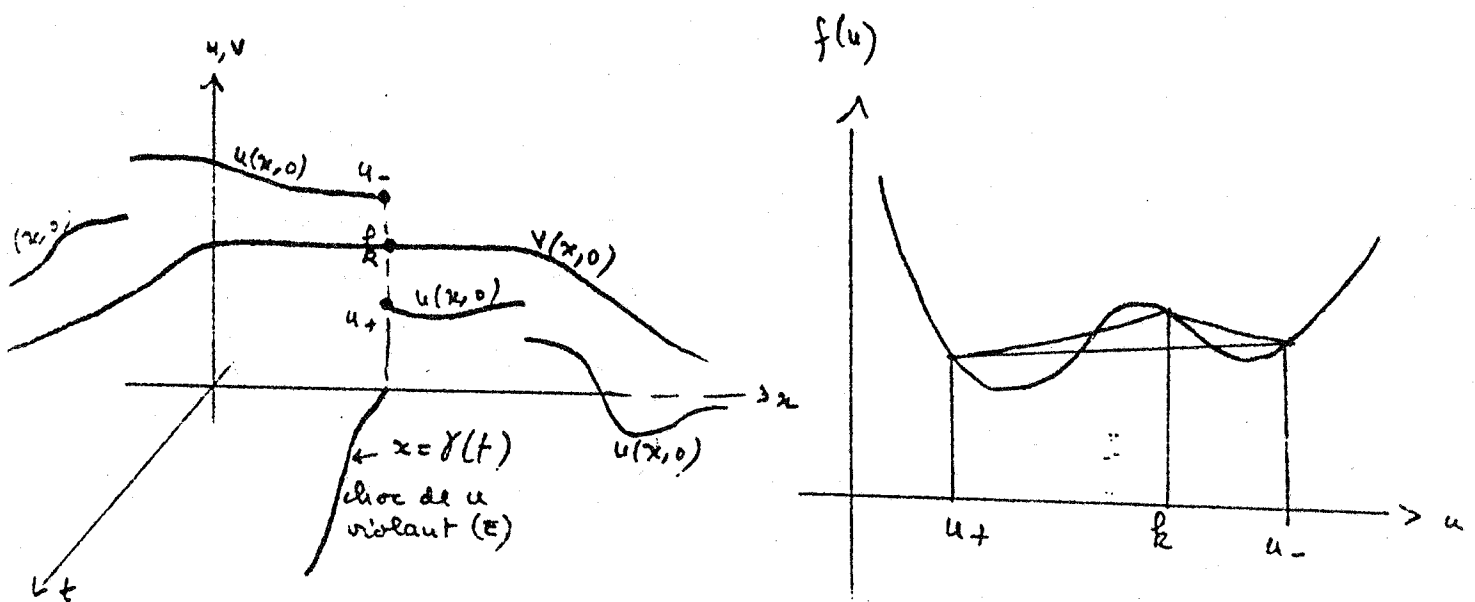
ce qui s'exprime savamment en disant que l'ensemble des "opérateurs solution" de $(\mathcal{E})$ forme un semi-groupe de contractions dans L^1 .

Réciproquement, nous allons montrer que cette propriété équivaut à (E) (voir B.K. Quinn [12]) : si u est une solution dont un des chocs ne vérifie pas (E) , il existe une solution v telle que (17 bis) ne soit pas vérifié.

Quitte à faire une translation sur les temps, on peut supposer qu'il y a en $t=0$ un choc ne vérifiant pas (E).

Soit $v(x,0)$ définie comme sur la figure 10 bis : v a un palier $v(x,0) = k$ au voisinage du choc $x = \gamma(0)$ de $u(x,0)$, et les graphes de $u(x,0)$ et $v(x,0)$ ne s'intersectent pas.

Figure 10 Bis



Si $t > 0$ est assez petit, $v(x,t)$ n'a pas de choc et les graphes de $u(x,t)$ et $v(x,t)$ ne s'intersectent toujours pas. On a donc

$$\int_{\mathbb{R}} |u(x,t) - v(x,t)| dx = \int_{-\infty}^{\gamma(t)} (u(x,t) - v(x,t)) dx - \int_{\gamma(t)}^{+\infty} (u(x,t) - v(x,t)) dx$$

On en déduit

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\int_{\mathbb{R}} |u(x,t) - v(x,t)| dx \right) &= \gamma'(t) (u_-(\gamma(t), t) - v(\gamma(t), t)) + \int_{\gamma(t)}^{\gamma(t)} \frac{\partial}{\partial t} (u(x,t) - v(x,t)) dx \\ &\quad + \gamma'(t) (u_+(\gamma(t), t) - v(\gamma(t), t)) - \int_{\gamma(t)}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial t} (u(x,t) - v(x,t)) dx \\ &\neq \gamma'(0) (u_- - k) - (f(u_-) - f(k)) \\ &\quad + \gamma'(0) (u_+ - k) - (f(u_+) - f(k)) > 0, \end{aligned}$$

ce qui prouve notre affirmation.

III - VISCOSITES

Dans l'exposé n° 7 [1] est démontré un théorème d'existence pour (E') lorsque f est C^2 et $q \in L^\infty(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$.

La solution u est obtenue comme limite au sens des distributions pour $\varepsilon \rightarrow 0$ de solutions u_ε de l'équation parabolique

$$(P_\varepsilon) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(u) = \varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

III.1. Un Exemple :

Nous commencerons par un cas très simple qui aurait pu nous servir à retrouver les conditions (R.H.) et (E) (Gelfand [3]) :

On cherche une solution de (1') de la forme

$$(18) \quad \begin{cases} u(x,t) = u_- & \text{si } x - ct < 0 \\ u(x,t) = u_+ & \text{si } x - ct > 0 \end{cases}$$

comme limite de solutions u_ε de (P_ε) ; puisque u ne dépend que de $x - ct$, il n'est pas absurde de chercher des solutions de (P_ε) de la forme $u_\varepsilon = q(\xi)$, $\xi = \frac{x - ct}{\varepsilon}$, ce qui ramène (P_ε) à l'équation différentielle (indépendante de ε) :

$$(19) \quad -c \frac{dq}{d\xi} + \frac{df(q)}{d\xi} = \frac{d^2 q}{d\xi^2}$$

S'il existe une solution de (19) qui vérifie

$$(20) \quad \begin{cases} q(\xi) \rightarrow u_- & \text{pour } \xi \rightarrow -\infty \\ q(\xi) \rightarrow u_+ & \text{pour } \xi \rightarrow +\infty \\ \frac{dq}{d\xi}(\xi) \rightarrow 0 & \text{pour } |\xi| \rightarrow +\infty \end{cases}$$

il est clair que $u_\varepsilon = q(\xi) \rightarrow u$ défini en (18) pour $\varepsilon \rightarrow 0$ (simple dilatation).

On commence par intégrer une fois (19) pour obtenir

$$(21) -cq + f(q) + K = \frac{dq}{d\xi}$$

La dernière ligne de (20) s'écrit alors

$$\begin{cases} -cu_- + f(u_-) + K = 0 \\ -cu_+ + f(u_+) + K = 0 \end{cases}$$

qui détermine K à condition que (R.H.) soit vérifiée.

Il reste à trouver une condition nécessaire et suffisante d'existence d'une orbite allant de u_- à u_+ (orbite hétéroclinique) pour l'équation

$$(22) \frac{dq}{d\xi} = \phi(q),$$

$$\text{où } \phi(q) = -c(q-u_-) + f(q) - f(u_-) = -c(q-u_+) + f(q) - f(u_+)$$

La première condition est que le champ de vecteur $\phi(q)$ ait la bonne direction en u_- et u_+ , c'est à dire $\phi'(u_-) > 0$ et $\phi'(u_+) \leq 0$ dans le cas où $u_+ < u_-$; on retrouve la condition de stabilité (E').

La deuxième condition est que $\phi(q)$ n'ait pas de zéro pour q entre u_+ et u_- ; on retrouve exactement la condition (E) d'Oleïnik.

REMARQUES:

(1) Si on remplace dans (P_ε) le deuxième membre par une autre viscosité, on peut ne pas trouver de limite ou trouver une limite différente : reprenons l'exemple de Gelfand (II.2 remarque (2)); on obtient une solution faible de l'équation (ii) comme limite de l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\varepsilon}{u} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

On a vu qu'une telle solution n'est pas une solution faible de l'équation $\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0$.

(2) On peut remplacer la méthode de viscosité par un processus aux différences finies.

III.2. LOIS DE CONSERVATION SUPPLEMENTAIRES (D'après Lax [8]) :

Nous allons montrer maintenant que si une solution u de (1') est limite au sens des distributions de solutions u_ϵ de (P_ϵ) , elle vérifie la condition (E) (pour (R.H.) c'est évident). Le lecteur comparera avec l'exposé n° 7 [1], le lien étant fait par la remarque (3) de II.3.).

Soit $U(u)$ une fonction C^1 ; si $F(u)$ vérifie

$$(23) \quad -f'(u) U'(u) + F'(u) = 0, \text{ on a}$$

(24) Pour toute solution u de (1') de classe C^1 ,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial U(u(x,t))}{\partial t} + \frac{\partial F(u(x,t))}{\partial x} = 0 \end{array} \right.$$

Il est facile de vérifier qu'on a déterminé ainsi toutes les lois de conservation supplémentaires vérifiées par les solutions C^1 de (1').

THEOREME (Lax) :

Si u est une solution de (1') limite dans L^∞ de solutions u_ϵ de (P_ϵ) , et si $U(u)$ est convexe, on a (pour F déterminé comme ci-dessus) :

$$(25) \quad \frac{\partial U(u(x,t))}{\partial t} + \frac{\partial F(u(x,t))}{\partial x} \leq 0 \text{ (au sens des distributions)}$$

DEMONSTRATION :

en multipliant (P_ϵ) par $U'(u_\epsilon)$, on obtient

$$(26) \quad \frac{\partial U(u_\epsilon)}{\partial t} + \frac{\partial F(u_\epsilon)}{\partial x} = \epsilon U''(u_\epsilon) \frac{\partial^2 u_\epsilon}{\partial x^2} ;$$

$$\begin{aligned} \text{mais } \frac{\partial^2 U(u_\epsilon)}{\partial x^2} &= U''(u_\epsilon) \left(\frac{\partial u_\epsilon}{\partial x} \right)^2 + U'(u_\epsilon) \frac{\partial^2 u_\epsilon}{\partial x^2} \\ &\geq U'(u_\epsilon) \frac{\partial^2 u_\epsilon}{\partial x^2} \quad \text{si } U(u) \text{ est convexe.} \end{aligned}$$

On a donc

$$(27) \quad \frac{\partial U(u_\epsilon)}{\partial t} + \frac{\partial F(u_\epsilon)}{\partial x} \leq \epsilon \frac{\partial^2 U(u_\epsilon)}{\partial x^2} \text{ qui tend vers 0 au sens des distri-}$$

butions.

CQFD.

APPLICATION : On commence par remarquer qu'en passant à la limite au sens des distributions, il suffit de supposer que U est continue (et convexe) ; on applique alors le théorème avec

$$U_k(u) = \begin{cases} 0 & \text{si } u < k \\ u-k & \text{si } u > k \end{cases}$$

$$F_k(u) = \begin{cases} 0 & \text{si } u < k \\ f(u)-f(k) & \text{si } u > k \end{cases}$$

En utilisant (R.H.) on voit alors que les inégalités

$$\frac{\partial U_k(u)}{\partial t} + \frac{\partial F_k(u)}{\partial x} \leq 0 \quad (k \in \mathbb{R}) \quad \text{équivalent à (E).}$$

IV - LE CAS UNIFORMEMENT CONVEXE.

IV.1. Le Théorème de Lax :

Le but de ce paragraphe est de démontrer le théorème de Lax (voir [7]) qui, dans le cas où $f''(u)$ ne s'annule jamais, exhibe la solution de $(\mathcal{E})$ sous une forme qui permet d'étudier la structure générique des courbes de discontinuité. Les notations sont celles du paragraphe I (avec $a(u) = f'(u)$).

Soit $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'application définie par

$$(28) \quad \phi(y,t) = \left(\underbrace{y + tf'(\phi(y))}_x, \underbrace{t, \phi(y)}_u \right)$$

c'est l'application "caractéristique" de Guckenheimer [5]).

ϕ définit un difféomorphisme de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ sur (S) , ce qui explique que,

si $\omega = u \, dx - f(u) \, dt$, on ait

$$d \phi^* \omega = \phi^* d \omega = 0.$$

Puisque $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ est contractile, il existe $\tilde{F} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\Phi^* \omega = d\tilde{F}$; calculons $\tilde{F}$:

$$\Phi^* \omega = \underbrace{(\varphi(y) + t f''(\varphi(y)) \varphi'(y) \varphi(y)) dy}_{\frac{\partial \tilde{F}}{\partial y}} + \underbrace{(y \varphi(y) f'(\varphi(y)) - f(\varphi(y))) dt}_{\frac{\partial \tilde{F}}{\partial t}}$$

Il vient $\tilde{F}(y, t) = t(\varphi(y) f'(\varphi(y)) - f(\varphi(y))) + g(y)$

$$\frac{\partial \tilde{F}}{\partial y} = t \varphi(y) \varphi'(y) f''(\varphi(y)) + g'(y)$$

donc $g'(y) = \varphi(y)$; supposons $\tilde{F}(0, 0) = 0$, on obtient

$$\tilde{F}(y, t) = t(\varphi(y) f'(\varphi(y)) - f(\varphi(y))) + \int_0^y \varphi(s) ds$$

On remarque que $\tilde{F} = F \circ \Phi$, où $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est définie par

$$(29) \quad F(x, t, u) = t(u f'(u) - f(u)) + \int_0^{x - t f'(u)} \varphi(s) ds$$

Calculons

$$(30) \quad dF(x, t, u) = \omega + [u - \varphi(x - t f'(u))] \cdot [-dx + f'(u) dt + t f''(u) du]$$

On en déduit que

1) sur (S), $dF(x, t, u) = \omega$ (c'était fait pour ça !)

2) Si $t > 0$, $\frac{\partial F}{\partial u}(x, t, u) = 0 \Leftrightarrow f''(u) [u - \varphi(x - t f'(u))] = 0$

autrement dit, si $f''(u)$ ne s'annule jamais (par exemple si f est strictement convexe), $\frac{\partial F}{\partial u}(x, t, u) = 0$ est une équation de (S) pour $t > 0$.

Remarquons enfin que, si $\exists c, f''(u) \geq c > 0$ pour tout u , et si φ est bornée, $\frac{\partial F}{\partial u}(x, t, u)$ tend vers $+\infty$ si $u \rightarrow +\infty$, vers $-\infty$ si $u \rightarrow -\infty$ pour tout couple (x, t) fixé : en effet, $t f''(u)$ reste positif et borné inférieurement par tc , alors que $u - \varphi(x - t f'(u))$ se comporte comme u ; on en déduit que $\forall x, t$, la fonction $u \rightarrow F(x, t, u)$ a un minimum.

On est alors en mesure de prouver le

THEOREME :

Soit f une fonction C^2 uniformément convexe^(*), φ une fonction dérivable et bornée ; l'unique solution de $(\mathcal{E}')$ vérifiant (R.H.) et (E) est donnée par

$$u(x,t) = \min_{u \in \mathbb{R}} F(x,t,u)$$

point crit.

COROLLAIRE :

Le graphe de u est contenu dans (S) (en particulier, si f et φ sont analytiques (C^∞), u est analytique (C^∞) en dehors des chocs).

DEMONSTRATION DU THEOREME :

Cherchons à priori une telle solution u de $(\mathcal{E}')$ dont le graphe soit contenu dans (S), définie ici par $\frac{\partial F}{\partial u}(x,t,u) = 0$, et supposons de plus que u vérifie la condition ~~(X)~~ du paragraphe II.3; alors le long d'une courbe de discontinuité de u , on a $dF(x,t,u_-) = dF(x,t,u_+)$ (c'est exactement (R.H.)).

Dans le cas générique (figures 3 et 4), on a $u_- = u_+$ à l'origine du choc, ce qui montre que tout au long de la courbe de discontinuité, on a $F(x,t,u_-) = F(x,t,u_+)$.

Pour une solution vérifiant les hypothèses précédentes les points de discontinuité sont donc des points $(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ pour lesquels la fonction $u \rightarrow F(x,t,u)$ a deux points critiques ayant même valeur critique.

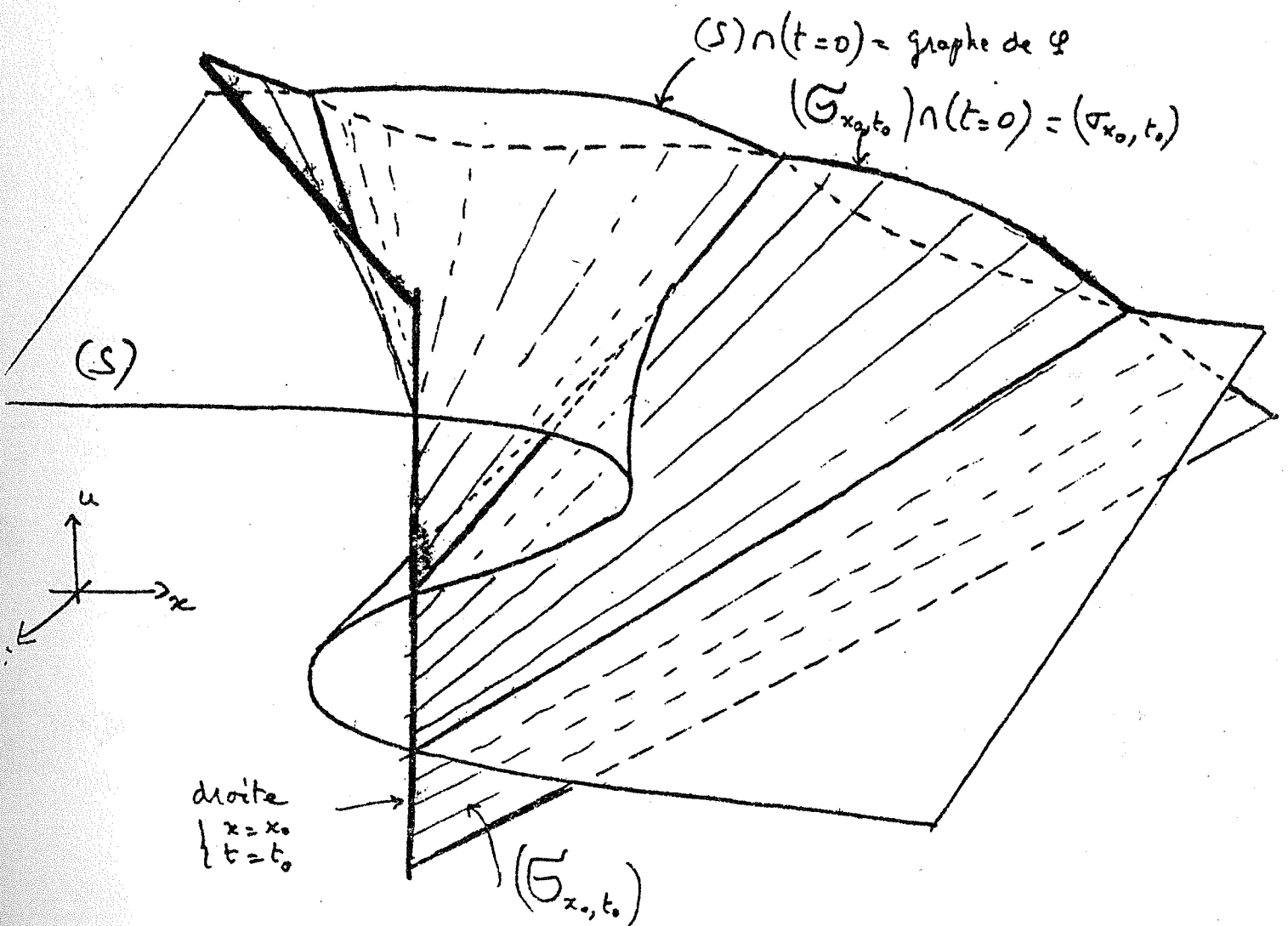
La fonction $\min_{u \in \mathbb{R}} F(x,t,u)$ possède cette propriété (l'ensemble de ses points de discontinuité est l'ensemble de Maxwell de la famille de fonctions $u \rightarrow F(x,t,u)$ paramétrée par (x,t) dans la terminologie de Thom) ; pour cette fonction ce qui précède montre que (R.H.) est vérifié ; quand à (E), qui se réduit à $(\mathcal{E}')$ dans le cas convexe, elle est évidemment vérifiée ; il ne reste plus qu'à invoquer l'unicité démontrée dans le paragraphe II).

(*) i.e. $\exists c, \forall u, f''(u) > c > 0$

Pour prouver le théorème sans hypothèse de régularité sur u , voir Lax [7] :

REMARQUE : Interprétations géométriques de la condition (R.H.) et de la fonction $F(x,t,u)$ (d'après Thom) :

Figure 11.



La Figure 11 représente les deux surfaces (S) et (G_{x_0, t_0}) , la dernière étant engendrée par les droites $(x-x_0) = f'(u_0)(t-t_0)$, $u=u_0$ lorsque u_0 varie.

La trace de (G_{x_0, t_0}) sur le plan $t=0$ sera notée (σ_{x_0, t_0}) .

L'équation de (G_{x_0, t_0}) est $x-x_0 = f'(u)(t-t_0)$, celle de (σ_{x_0, t_0}) est $x = x_0 - t_0 f'(u)$; L'aire $\mathcal{A}$ comprise entre $\sigma(x_0, t_0)$, l'axe des u , et les segments $u=u_+$, $u=u_-$ vaut $\mathcal{A} = x_0(u_- - u_+) - t_0(f(u_-) - f(u_+))$; la condition (R.H.) traduit la constance de cette aire lorsque (x_0, t_0) parcourt une courbe de discontinuité de u et que u_+, u_- sont les valeurs de u de part et d'autre de cette courbe (figure 12).

Figure 12

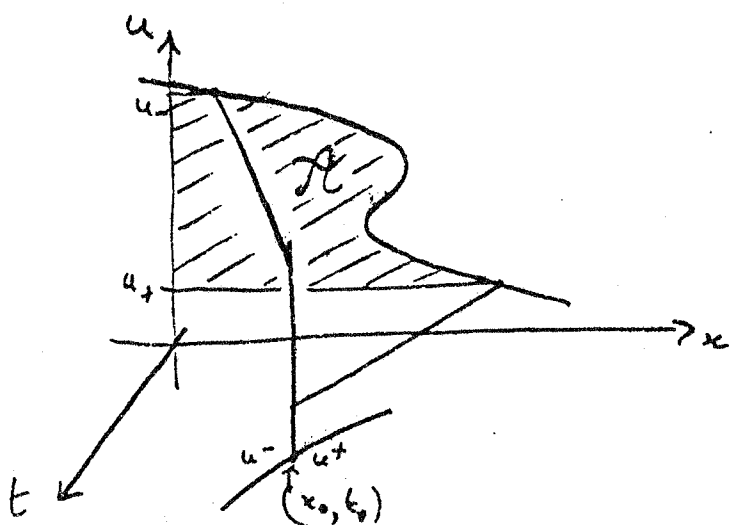
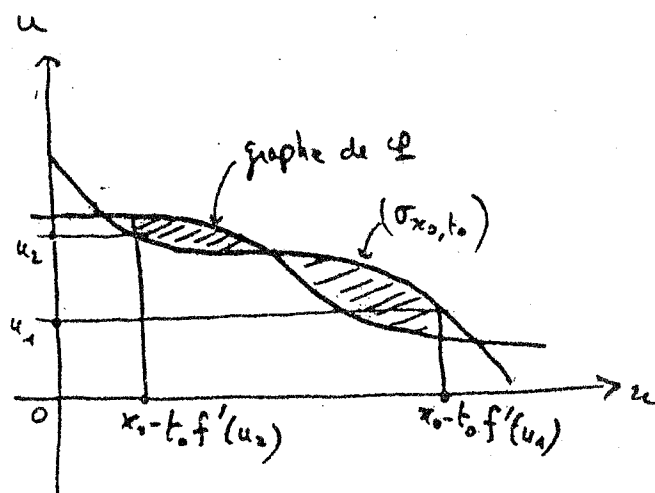


Figure 13.



L'interprétation de $F(x_0, t_0, u)$ est analogue (figure 13) :

$F(x_0, t_0, u_2) - F(x_0, t_0, u_1)$ est l'aire limitée par le graphe de ϕ , (σ_{x_0, t_0}) , et les segments $x = x_0 - t_0 f'(u_1)$, $x = x_0 - t_0 f'(u_2)$.

Le fait que, si f est uniformément convexe, les seuls points critiques de $F(x_0, t_0, u)$ correspondent aux points d'intersection de (σ_{x_0, t_0}) et du graphe de ϕ vient de ce qu'alors la projection de (σ_{x_0, t_0}) sur l'axe des x est partout

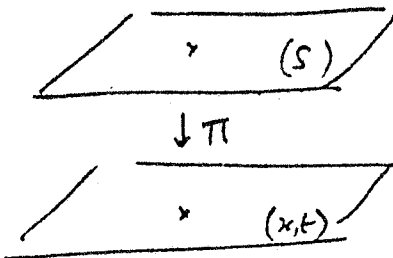
IV.2 - STRUCTURE GÉNÉRIQUE DES SOLUTIONS DANS LE CAS UNIFORMEMENT CONVÈXE :

Les deux références sont [4] et [11] .

Soit $u \rightarrow G(x,t,u)$ une famille de fonctions différentiables paramétrées par x,t ; Si cette famille est suffisamment générale (au sens de Thom [10]), le comportement local de la surface d'équation $\frac{\partial G}{\partial u}(x,t,u) = 0$ vis-à-vis de la projection π sur le plan (x,t) ne peut être que de l'un des trois types suivants (voir [10].) :

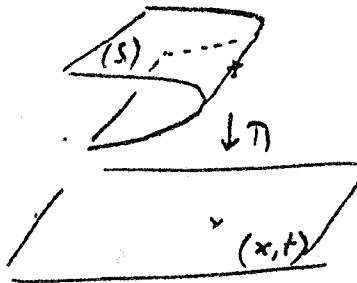
A. Identité

$$G(x,t,u) = u^2$$



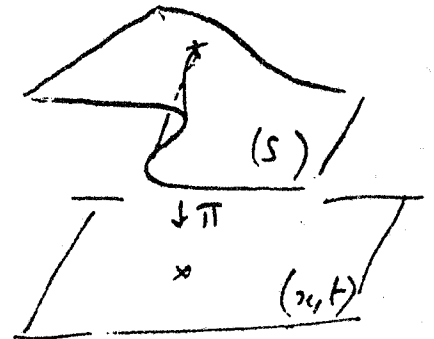
B. Plî

$$G(x,t,u) = u^3 + xu$$



C. Fonce

$$G(x,t,u) = u^4 - tu^2 + xu$$



De plus, le comportement C ne se produit qu'en des points isolés de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$, et le comportement B sur des courbes régulières de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$.

D'un point de vue global, et toujours pour G suffisamment générale, il n'y a aussi que 3 possibilités réalisées respectivement en des points isolés de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$, sur des courbes régulières, et dans le complémentaire :

E. Il y a 3 valeurs u_1, u_2, u_3 qui minimisent $G(x,t,u)$.

F. Il y a 2 valeurs u_1, u_2 qui minimisent $G(x,t,u)$.

G. Il y a 1 seule valeur u_1 qui minimise $G(x,t,u)$.

Dans [11] Schaeffer montre par les techniques usuelles de transversalité, qu'il existe un ensemble de première catégorie $A \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$ tel que si

$\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) - A$ (i.e. pour "presque tout φ ") la famille de fonctions $u \rightarrow F(x,t,u)$ est suffisamment générale au sens précédent, on en déduit que la solution u de (E') est C^∞ par morceaux dès que $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) - A$

voir de
côté

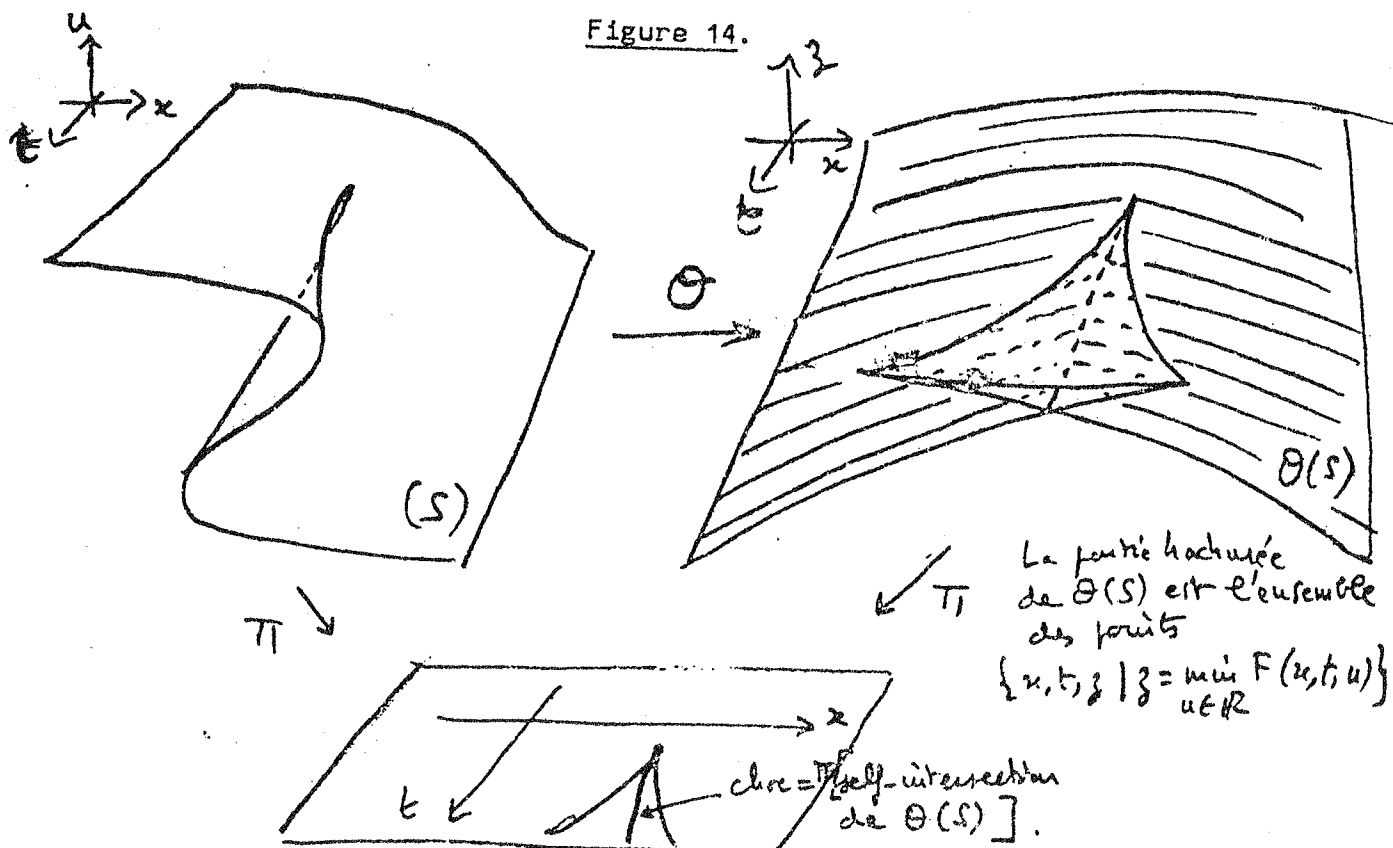
De plus, Schaeffer montre qu'on peut choisir A de façon que, si $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}) - A$ la solution u de $(\mathcal{E}')$ n'ait qu'un nombre fini de lignes de discontinuité.

Dans [4] Schaeffer et Golubitsky, utilisant les mêmes méthodes et le théorème de stabilité infinitésimale de J. Mather, montrent qu'on peut choisir A tel que si $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}) - A$, la solution u de $(\mathcal{E}')$ est stable dans le sens suivant : si v est la solution de $(1')$ correspondant à une donnée initiale $v(x,0)$ assez proche de φ dans $\mathcal{L}(\mathbb{R})$, il existe un difféomorphisme de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ transformant l'ensemble de discontinuité de u en celui de v .

Il nous reste à donner la structure des ensembles de discontinuité des solutions de $(\mathcal{E}')$ dont la donnée initiale est dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}) - A$: il suffit de regarder ce qui peut arriver à $F(x,t,u)$:

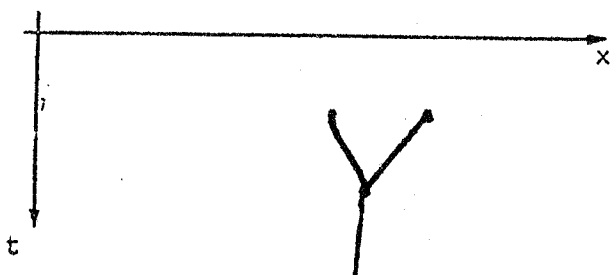
D'un point de vue local seul le type "fronce" donne quelque chose (naissance d'un choc, voir figures 3 et 4); il peut être intéressant de "voir" $F(x,t,u)$ en représentant l'application $(x,t,u) \xrightarrow{\theta} (x,t,F(x,t,u))$ (figure 14).

Figure 14.



Globalement, la seule chose qui puisse arriver à une courbe de discontinuité est d'en rencontrer une autre au cours du temps (Figure 15) : c'est le cas où 3 valeurs u_1, u_2, u_3 de u minimisent $F(x, t, u)$; il émerge de la collision une unique courbe de discontinuité (et aucun des 3 angles n'est nul).

Figure 15

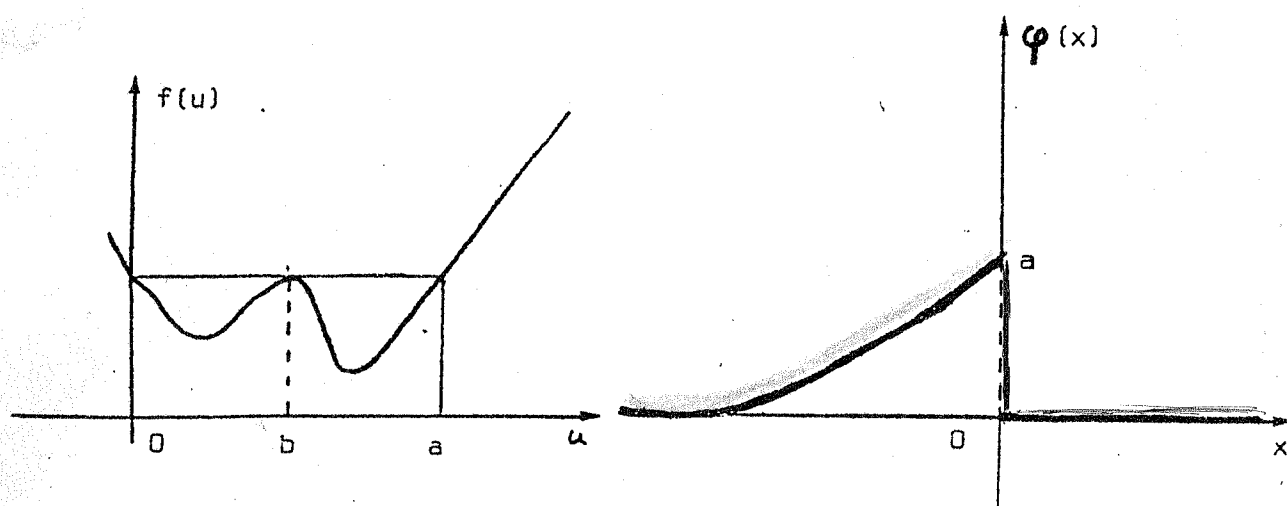


Remarquons que si $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}) - A$, l'étude géométrique qui précède et la finitude du nombre des lignes de discontinuité montrent la connexité de l'ensemble des points de continuité de u ; ceci explique que le graphe de u soit contenu dans la surface (S) .

V - UN EXEMPLE DANS LE CAS NON CONVEXE

V.1 On considère toujours $(\mathcal{E})$ avec des fonctions $f(u)$, $\varphi(x)$ dont les graphes sont représentés sur la figure 16

Figure 16.



La solution vérifiant (R.H.) et (E) se voit bien en utilisant la méthode du § 8 de Gelfand [3] et en remarquant que si la discontinuité initiale de φ ne se dédoublait pas, l'amplitude $u_- - u_+$ du choc serait une fonction strictement décroissante de t ; dès que $t > 0$, la condition (E) serait donc violée (ceci vient du choix de a tel que la droite joignant les points $(0, f(0))$ et $(a, f(a))$ soit tangente au graphe de f au point $(b, f(b))$, et du fait que φ s'écroule à l'infini). Ce raisonnement ne serait pas valable si, par exemple, φ valait 0 pour $x > 0$ et a pour $x < 0$.

Remarquons enfin que si on augmente un peu a , le choc initial vérifie (E) et ne se dédouble qu'au bout d'un certain temps.

La figure 17 représente le graphe de la solution $u(x, t_0)$ pour $t_0 > 0$ petit (en pointillés on a représenté la trace sur le plan $t=t_0$ de la surface (S)) ;

la figure 18 représente les courbes de discontinuité de u et les caractéristiques. On constate que

1) - l'ensemble des points de continuité de u n'est pas connexe (et le graphe de u n'est pas contenu dans la surface (S))^(*).

2) - l'un des chocs a une amplitude $u_- - u_+$ constante (alors que dans le cas convexe cette amplitude tend vers 0, Lax [6]).

Figure 17

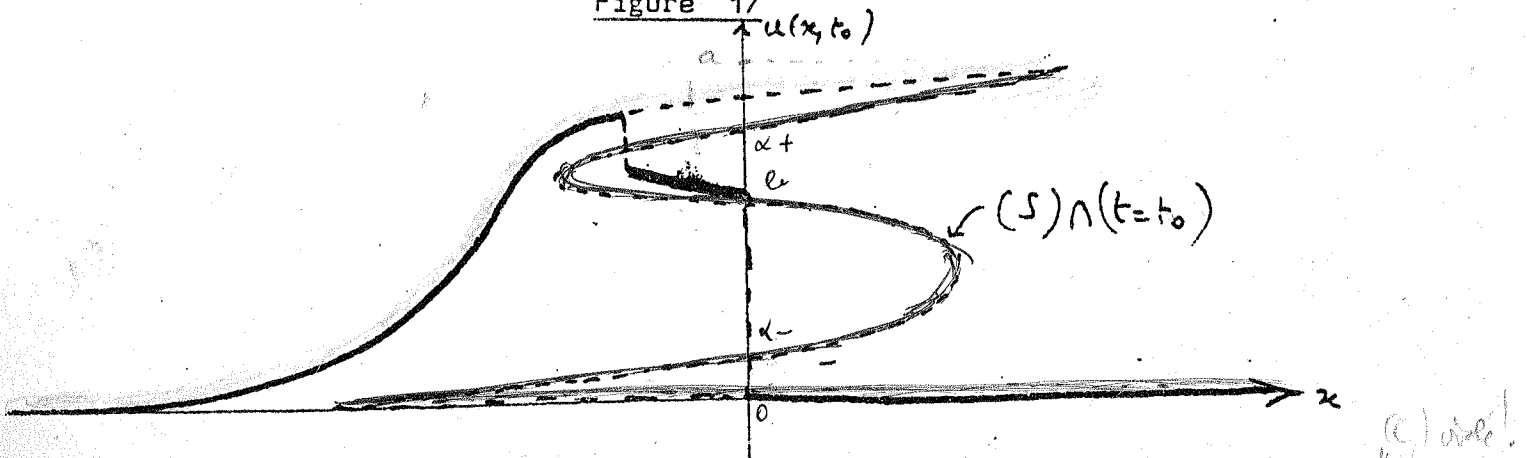
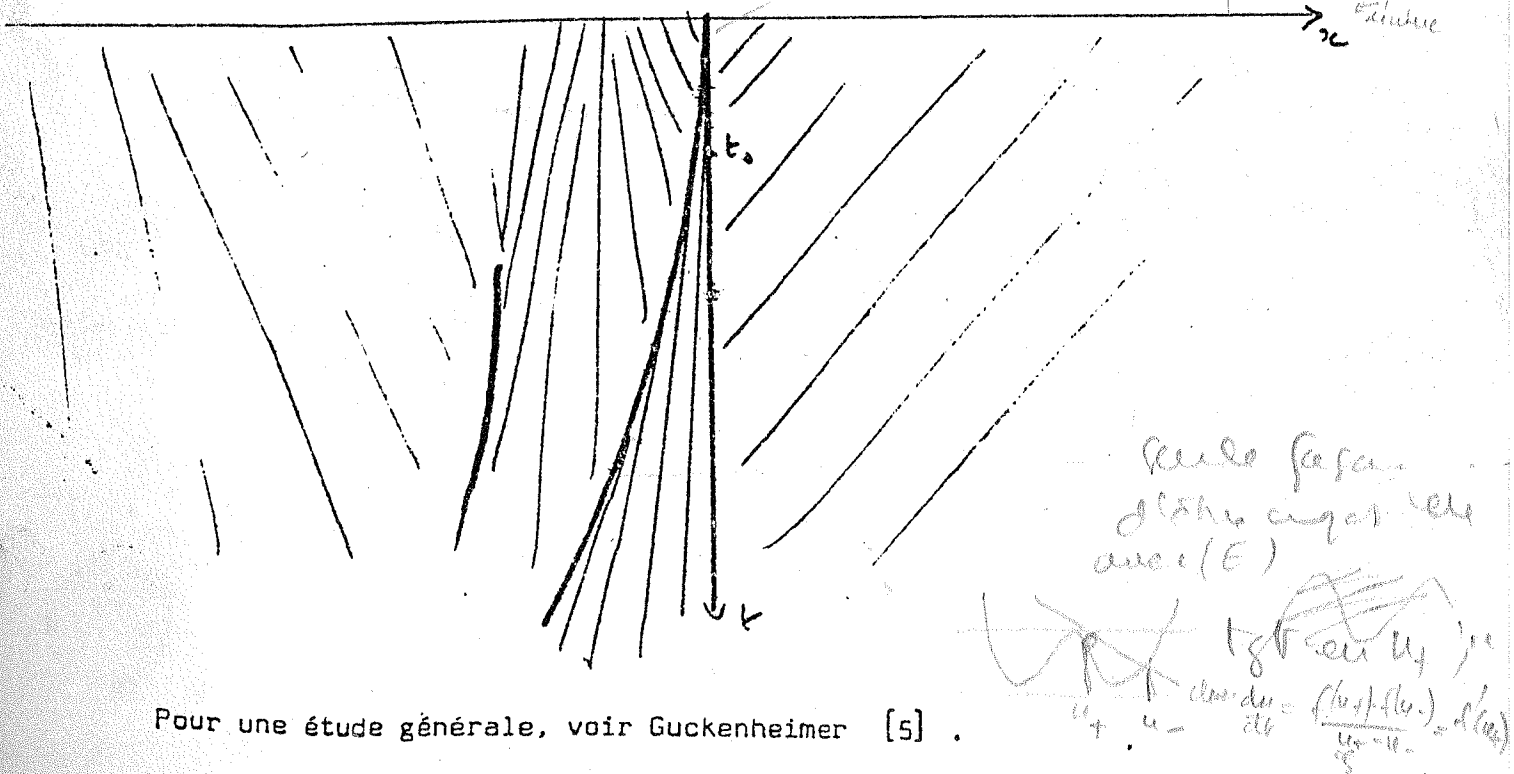
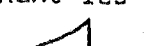


Figure 18



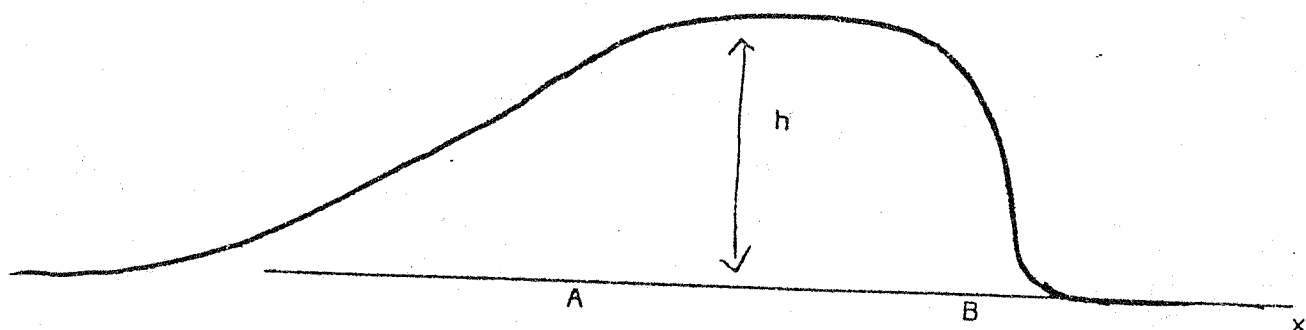
Pour une étude générale, voir Guckenheimer [5].

(*) Si φ est C^1 par morceaux comme dans l'exemple considéré, on généralise (S) en prenant des caractéristiques s'appuyant sur la courbe obtenue à partir du graphe de φ en rajoutant des segments verticaux joignant les valeurs de φ là où elle est discontinue (ex  donne )

V.2. Je dois à David Shaeffer les deux remarques qui suivent :

- ① L'exemple précédent peut être obtenu à partir d'une donnée initiale $\varphi(x)$ régulière (figure 19).

Figure 19.



Un choc se forme aux alentours de B au temps t_1 ; dans une première phase, l'amplitude du choc augmente : si h est assez grand, on peut obtenir le comportement décrit sur la figure 20 (on a représenté pour une suite d'instants t_i la droite joignant les points $(u_-, f(u_-))$ et $(u_+, f(u_+))$, où u_- et u_+ sont les valeurs de part et d'autre du choc au temps t_i .

Figure 20.

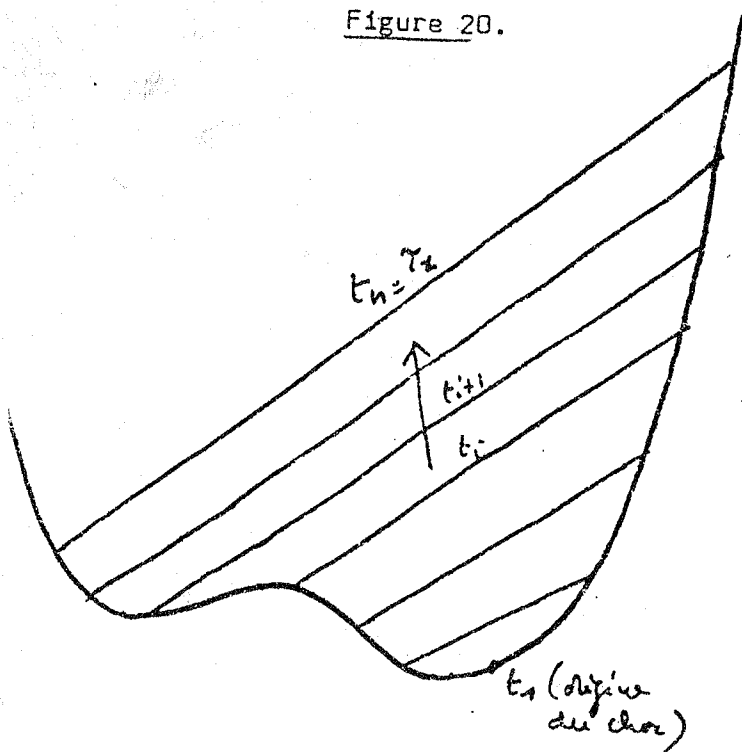
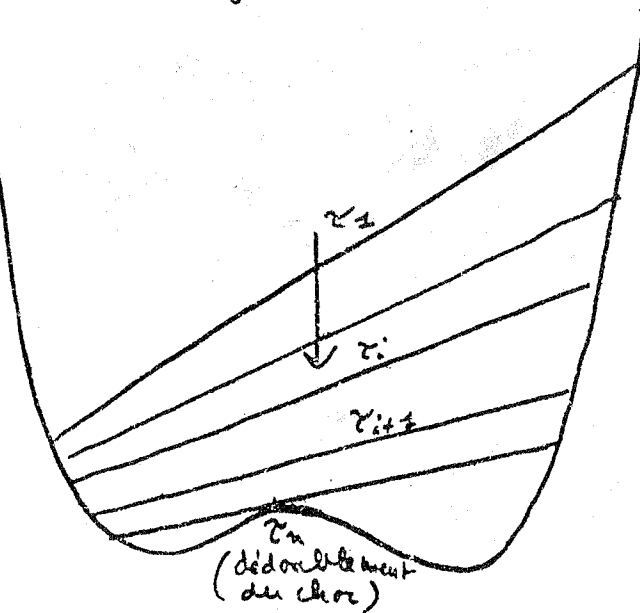


Figure 21



Dans une deuxième étape, les caractéristiques provenant de la partie du graphe de φ correspondant à $x < A$ (figure 19) viennent construire le choc, et l'amplitude commence à décroître, ce qui donne la figure 21 sur laquelle apparaît clairement le phénomène de l'exemple étudié dans V.1.

② Les exemples ci-dessus masquent un phénomène important à cause de la présence d'un choc de chaque côté de l'onde de raréfaction ; L'exemple suivant (fig. 22 et 23) montre que même si la donnée de Cauchy $\varphi(x)$ est analytique par morceaux, la solution n'est en général que continue dans le complémentaire des chocs ; la remarque ① s'applique d'ailleurs pour fournir un exemple analogue avec $\varphi(x)$ analytique.

Figure 22.

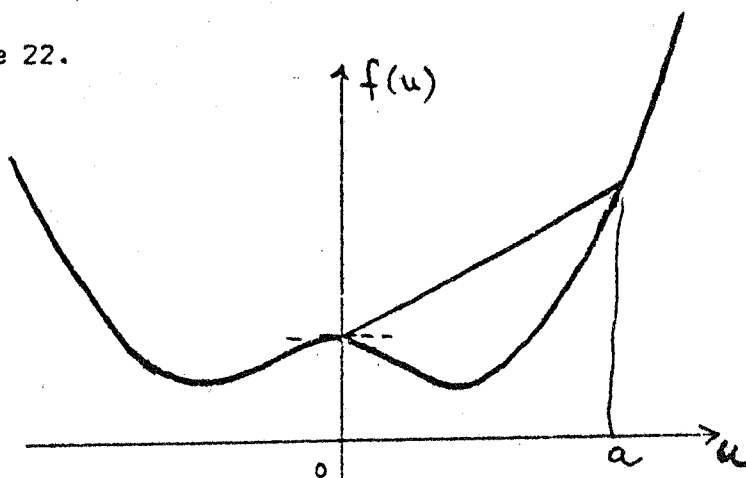
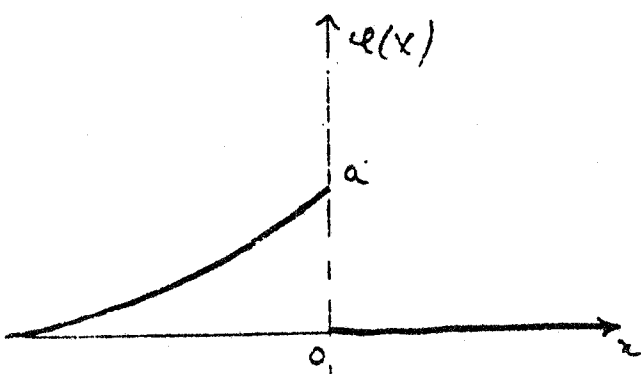


Figure 23.

(graphes de $u(x,t)$; question à 10 centimes : trouver le temps critique)

t petit

t plus grand



REMARQUE : Pour construire cet exemple, une fonction $f(u)$ cubique suffisait déjà.

CONCLUSIONS :

Dans le cas où f est strictement convexe et où φ est analytique, le graphe de la solution u est contenu dans la surface (S) qui est alors analytique ; on en déduit que u est analytique dans le complémentaire des chocs.

L'exemple précédent montre qu'un résultat de ce type n'a de vraisemblance dans le cas général que si on compte comme un choc (d'amplitude zéro) le bord d'une onde de raréfaction.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] C. BARDOS Séminaire Nice 1974-1975. Problèmes d'évolution non linéaires. exposés n° 1,6,7,8.
- [2] L. BRUN Cours école Polytechnique 1975.
- [3] I.M. GELFAND Some problems in the theory of quasilinear equations. A.M.S. translations séries 2, vol 29, 1963.
- [4] M. GOLUBITSKY,
D. SCHAEFFER Stability of shock waves for a single conservation law
Advances in Math. 15 (1975) p. 65.71.
- [5] J. GUCKENHEIMER Solving a single conservation law. Warwick dynamical systems 1974, Lecture notes in Math. Springer 1975.
LN 468 108-134 57 SYM 74
- [6] P.D. LAX The formation and decay of shock waves, American Math. Monthly 79 (1972) p.227.241.
- [7] P.D. LAX Hyperbolic systems of conservation laws II, communication Pure Appl. Math. 10 (1957) p.537, 566.
- [8] P.D. LAX Shock waves and entropy in non linear functional analysis, Proc. Symposium U. of Wisconsin 1971 (Ed. Zarantonello).