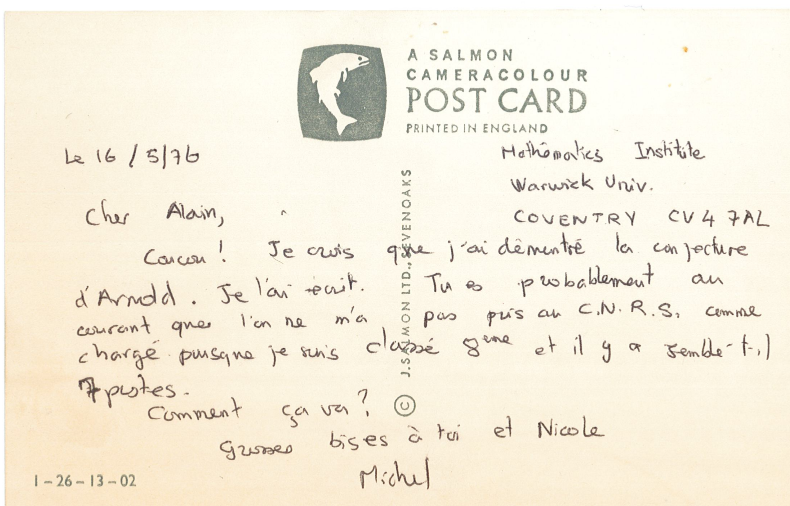
MICHAEL HERMAN

Documents pour une journée à l'Académie des Sciences
dédiée à Michael Herman et Jean-Christophe Yoccoz le 1^{er} octobre 2019

Alain Chenciner

Observatoire de Paris, IMCCE (UMR 8028), ASD
77, avenue Denfert-Rochereau, 75014 Paris, France
alain.chenciner@obspm.fr
&
Département de mathématique, Université Paris VII

1 Un homme


A SALMON
CAMERACOLOUR
POST CARD
PRINTED IN ENGLAND

Le 16/5/76

Mathematics Institute
Warwick Univ.
COVENTRY CV4 7AL

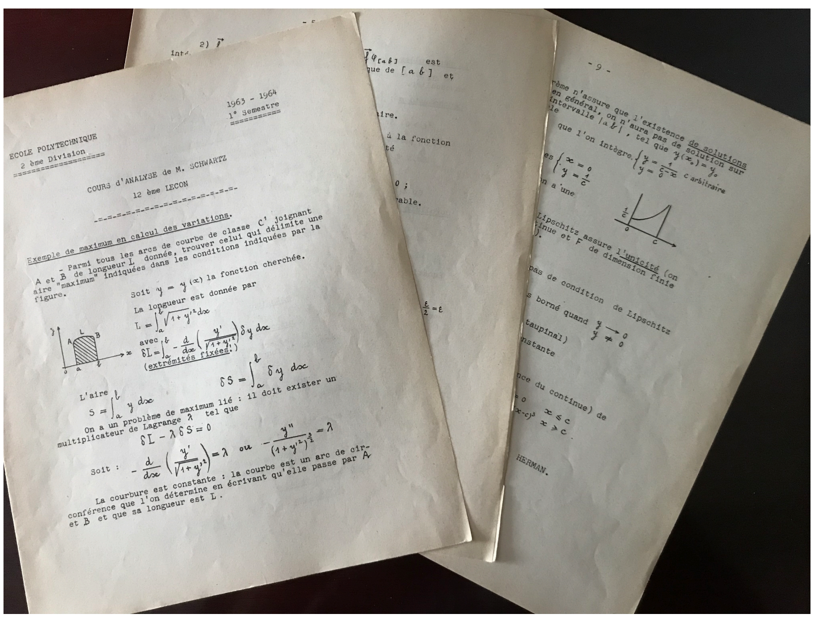
Cher Alain,
Coucou ! Je crois que j'ai démontré la conjecture d'Arnold. Je l'ai écrit. Tu es probablement au courant que l'on ne m'a pas pris au C.N.R.S. comme chargé puisque je suis classé 8ème et il y a semble-t-il 7 postes.
Comment ça va ?
Grosses bises à toi et Nicole
Michel

J. SALMON LTD., SEVENOAKS ©
1-26-13-02

Qui est l'homme qui m'écrit cette carte postale en mai 1976 ? Un mathématicien, certes, et un très grand, mais aussi et surtout une personnalité qui, tel le héros de Musil qu'il aimait tant, ne peut se définir par cette seule qualité. Né en 1942 d'un père nord-américain communiste, Bernard Herman, et d'une mère française journaliste, Diane Vercherre, remariée au peintre Roland Bierge, Michaël Robert Herman est un homme complexe. Insomniaque, sujet à de fréquents accès de dépression, il lit alors que d'autres dorment et sa culture, jamais superficielle, que ce soit en politique[1], en musique, en peinture, en littérature et, bien sûr, en mathématique, émerveille et bien souvent effraye ses interlocuteurs. Difficile de le mettre en défaut, sauf en biologie dit Nicole, ma femme qui avait trouvé cette parade, et malheur à qui n'était pas assuré de ses sources. Dans sa bibliothèque, Voltaire et Musil côtoient Pareto, Adam Smith et un océan d'ouvrages de mathématiques qui, à l'époque où son logement du 17 rue Rollin était trop petit, pouvaient, tels les boîtes de papillons chez Laurent Schwartz, envahir jusqu'aux placards de la cuisine.

2 Laurent Schwartz et le Centre de Mathématique de l' École Polytechnique

Je pense bien sûr à Laurent Schwartz car c'est lui qui, venant d'être réintégré comme professeur à l'Ecole Polytechnique dont il avait été chassé en raison de sa signature du *Manifeste des 121*, a permis à cinq jeunes élèves [2] de se lancer dans la recherche mathématique. Le séminaire qu'il avait organisé à l'Ecole fut le premier acte : voici la rédaction d'un cours signée . . . Herman.



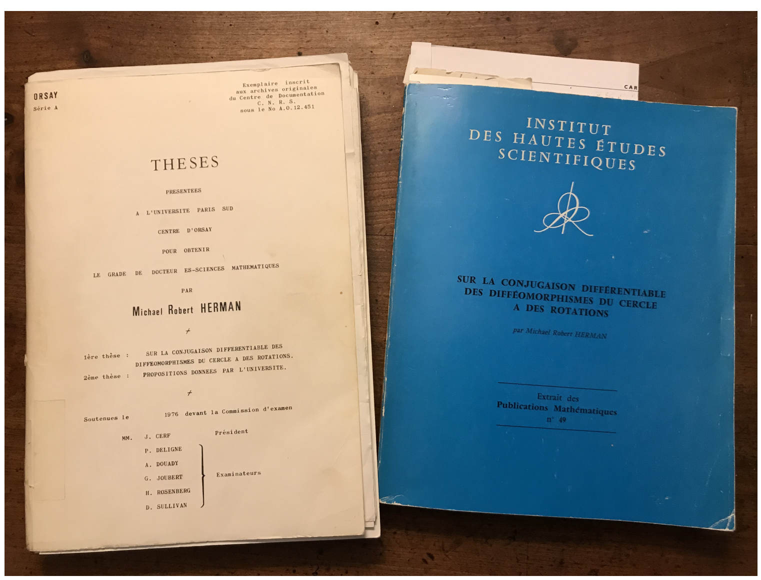
[1]André et Minouche Haefliger, qui on été proches des deux, me rappellent la rencontre vers 1968 de Michel avec le philosophe Bernard Besnier ; la profonde amitié née dans le militantisme gauchiste s'interrompit le jour où Bernard, ayant attendu en vain Michel dans un restaurant, apprit en revenant chez lui que ce dernier venait de mourir. J'ai moi-mme le souvenir d'une visite des deux amis qui, dans le feu des discussions, ne se termina qu'à l'aube.

[2]par ordre alphapétique Alain Chenciner, Jean-Pierre Delale, Michael Herman, François Laudenbach, Dominique Thillaud.

Le deuxième acte avait été la création lors de notre sortie de l'école fin 1965, du *Centre de mathématique de l'Ecole Polytechnique*[3] dont nous avions fièrement pris possession sous l'oeil ferme mais attendri de Mademoiselle Pouderous, responsable du secrétariat. L'anné suivante Laurent Schwartz nous avait tous fait entrer au CNRS (on croît rêver), enfin tous sauf Michel qui, bien qu'ayant obtenu en 1970 sa "réintégration dans la nationalité française", ne put y entrer qu'en 1974 et fut tout d'abord Attaché de recherche au Centre de Mathématique puis Assistant à Paris XIII.

3 La lumière

En 1976, Michel résout enfin la *conjecture d'Arnold* qui l'obsédait depuis tant d'années[4]. Ses amis proches ont le souvenir d'appels téléphoniques – souvent tard dans la nuit – annonçant tantôt une preuve tantôt un contre-exemple qu'il démolissait lui-même le lendemain. Sa démonstration ayant résisté à une dissection aussi implacable qu'admirative par Pierre Deligne, Adrien Douady, Harold Rosenberg et Dennis Sullivan, il peut enfin soutenir sa thèse de Doctorat d'état, intitulée *Sur la conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle à des rotations* : premier résultat non perturbatif sur les *petits diviseurs*, cette thèse est un tour de force technique et conceptuel et, à ceux qui seront frustrés par la présentation succincte que je vais en faire, je ne peux que conseiller la belle description qu'en a donnée Dennis Sullivan dans le numéro 88 d'avril 2001 de la *Gazette des mathématiciens* en grande partie consacré à Michel.



[3]Aujourd'hui *Centre Laurent Schwartz*

[4]Marie-Jo Lécuyer se souvient qu'il avait mis dans son petit bureau du Centre de mathématique une affiche *Ce bureau est réservé à la résolution de la conjecture d'Arnold.*

4 Le défi : décrire sans équation ses travaux

Les travaux de Michel concernent la plupart des aspects des *Systèmes Dynamiques* et chaque fois ses contributions sont d'une exceptionnelle profondeur. En grande partie issues des travaux d'Henri Poincaré sur le *Problème des trois corps*, les questions qu'il a abordées vont de l'analyse (*théorie analytique des équations différentielles*) à la topologie (*étude qualitative du comportement asymptotique des solutions*) et aux probabilités (*théorie ergodique*) en passant par l'arithmétique (*approximations diophantiennes*) et l'algèbre (*structure des groupes de diffomorphismes*)...

Mais voila, Etienne et Harold, organisateurs de cette journée, m'ont demandé d'éviter les équations. S'agissant de Michel, le défi est rude : analyste au plein sens du terme, il vivait dans les équations et les chérissait d'autant plus qu'elles étaient difficiles à analyser. J'ai choisi deux thèmes, tous deux étroitement liés à Arnold : la conjecture d'Arnold, sujet de sa thèse que je viens de mentionner et la stabilité en mesure des systèmes planétaires, objet de ses derniers séminaires dont il n'a pas eu le temps de faire une rédaction définitive.

Conjecture d'Arnold : L'itération d'une application d'un espace dans lui-même est l'analogue discret d'une équation différentielle (penser au temps comme ne prenant que les valeurs $1, 2, 3, \ldots$) comme en stroboscopie : l'exemple fondamental est la rotation d'un certain angle $2\pi\alpha$ du cercle : itérée n fois, elle devient simplement la rotation d'angle $2\pi n\alpha$: si $\alpha = \frac{p}{q}$ est rationnel, l'itérée q-ème est la rotation d'angle $2\pi p$, c'est-à-dire l'Identité et chaque *orbite*[5] est constituée de q points qui sont cycliquement permutés par la rotation : on dit qu'elle est *périodique*). Par contre, si α est irrationnel, il n'est pas difficile de montrer que l'orbite d'un point x quelconque du cercle est *dense* dans le cercle, ce qui signifie qu'elle s'approche arbitrairement près de n'importe quel point du cercle. Remplaçons maintenant la rotation par une transformation "continue" (i.e. sans déchirure) et "bijective" (en particulier sans retour en arrière) quelconque du cercle dans lui-même, dilatant certaines parties et en contractant d'autres, la situation sera bien différente : à une telle transformation, Poincaré avait associé un *nombre de rotation* α en comparant l'ordre circulaire des points de l'orbite à celui qu'il aurait pour la rotation d'angle $2\pi\alpha$ et Denjoy avait donné des exemples de transformation du cercle dont le nombre de rotation est irrationnel mais qui sont très différentes d'une rotation en ce que les orbites, s'accumulant sur un *ensemble de Cantor*, ne sont pas denses ; il avait également montré que ce phénomène ne peut se produire dès que la transformation f est suffisamment *régulière*, par exemple si elle est deux fois dérivable : plus précisément, il montrait l'existence d'un changement de coordonnées continu (i.e. un changement continu de la façon de repérer les points sur le cercle) transformant f en la rotation d'angle $2\pi\alpha$)[6]. Le résultat fondamental que Michel obtient dans les 9 premiers chapitres (sur 17) de sa thèse est que si α est "suffisamment mal

[5] l'*orbite* d'un point x du cercle est l'ensemble des images de x par l'ensemble des itérées de la rotation donnée

[6] On dit que f est continuement conjuguée à la rotation

approché par les nombres rationnels"[7], ce changement de coordonnées est lui aussi d'autant plus régulier que la transformation f l'est, en particulier il est indéfiniment dérivable (resp. analytique) s'il en est ainsi de f. Auparavant, seul un résultat local (i.e. pour des transformations suffisamment près d'être une rotation) de régularité avait été démontré par Vladimir Arnold. Apprécier la force d'un tel résultat exige d'avoir compris le gouffre qui existe entre un changement de coordonnées qui ne serait que continu et un qui serait dérivable : le premier ne nous apprend pas plus que la densité des orbites alors que le deuxième permet l'application de tout l'arsenal de l'analyse et des probabilités.

Petits diviseurs et conditions diophantiennes : Ne pas écrire l'équation cohomologique à l'origine de ses chers *petits diviseurs* auxquels les astronomes s'étaient heurtés dès le $17^{ème}$ siècle, est une gageure que je ne ferai pas même semblant de tenir .... Au commencement est la notion de *résonance*, à la base de l'interdiction faite aux compagnies militaires de marcher au pas sur un pont, une résonance entre la fréquence de leur marche et une fréquence propre de vibration du pont pouvant conduire à des oscillations qui, s'amplifiant sans limite, pourraient provoquer l'écroulement de ce dernier. Pour les astronomes, il peut s'agir de *résonance orbitale*, c'est-à-dire de la (presque) commensurabilité des périodes de rotation de certaines planètes autour du Soleil : Saturne fait à peu près deux révolutions complètes alors que Jupiter en fait cinq, Pluton fait à peu près deux révolutions complètes alors que Neptune en fait trois. Pourquoi est-ce important ? Eh bien, les vitesses de rotation étant différentes, il se trouvera un moment où la distance entre, disons, Jupiter et Saturne (dont on peut supposer que leurs mouvements ont lieu pendant un assez grand nombre de révolutions sur une ellipse Keplerienne) sera la plus petite possible et, si la résonance était parfaite, il en serait exactement de même au bout du temps pendant lequel Saturne aurait accompli deux révolutions et Jupiter cinq. Autrement dit, à des instants se reproduisant à intervalles réguliers, ces planètes s'attireraient avec une force particulière et l'effet cumulatif sur les trajectoires pourrait devenir important alors qu'en l'absence d'une telle résonance ces rencontres proches seraient réparties de façon plus ou moins uniforme dans le temps.

La traduction au niveau des séries qui permettraient de décrire les mouvements à long terme comme une lente évolution, due aux interactions mutuelles, des ellipses Kepleriennes, est l'existence de termes de la forme

$$\frac{a_n}{1 - e^{2\pi i n\omega}}$$

qui deviennent infinis en cas de résonance parfaite ($\omega = \frac{p}{q}$, n multiple de q) et très grands en cas de résonance proche (i.e. si ω, bien que n'étant pas rationnel, est trop bien approché par une suite de nombres rationnels, i.e. ne vérifie pas

[7] c'est Jean-Christophe qui, poursuivant l'œuvre de Michel, donnera la condition définitive, à savoir l'existence de constantes γ et τ telles que, quel que soit le nombre rationnel $\frac{p}{q}$, on ait

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{\gamma}{|q|^{2+\tau}}$$

une condition telle celle de la note 7). Ces termes viennent en particulier de la recherche sous forme de *série de Fourier* d'une solution f périodique de période 1 d'une *équation cohomologique* de la forme

$$f(\theta+\omega)-f(\theta)=g(\theta)$$

où g est une fonction périodique d'intégrale nulle sur $[0,1]$. Ce sont des phénomènes analytiques de ce type qui, déjà présents dans le cas des difféomorphismes du cercle, sont responsables de la non-intégrabilité du problème des trois corps et partant de l'extrême difficulté qu'il y a à décrire ses solutions.

La résonance d'Herman. Un autre type de résonance, exacte cette fois, fut découverte par Michel lorsque dans la deuxième moitié des années quatre-vingt dix il s'attaqua au problème de la stabilité des mouvements planétaires : un célèbre théorème de Vladimir Arnold avait affirmé cette stabilité si les masses planétaires sont suffisamment petites pour la plupart des systèmes à deux planètes lorsque les mouvements de celles-ci autour de la masse centrale sont presque circulaires mais sa démonstration péchait dans le cas de mouvements dans un espace à trois dimensions. Philippe Robutel évoque ce jour de 1994 où, lors d'une des fréquentes visites de Michel dans l'équipe *Astronomie et Systèmes Dynamiques* que Jacques Laskar et moi avions créée à l'Observatoire, il lui avait appris que la démonstration d'Arnold ne valait pas dans le cas spatial : il se souvient aujourd'hui encore du sourire ravi qui avait éclairé le visage de Michel. S'attaquant au problème, ce que Michel découvre dans le cas de mouvements dans l'espace à trois dimensions, est une généralisation à un nombre quelconque de planètes d'une relation connue depuis le temps de Newton dans le problème de la Lune[8] mais curieusement ignorée dans le cas général, en particulier par Arnold 40 ans plus tôt. Lorsqu'on ne tient pas compte dans les équations des termes contenant un produit d'au moins deux masses planétaires (et donc a priori très petits), on trouve que le temps que met l'apogée de la Lune à faire une révolutions complète (dans le sens direct) est exactement égal au temps que met le noeud (intersection du plan de l'orbite avec le plan de l'écliptique) pour faire une révolution (dans le sens rétrograde), c'est-à-dire 18 ans. Techniquement, la trace de la partie quadratique du *Hamiltonien séculaire* est nulle. En fait la véritable période de révolution de l'apogée est d'environ 9 ans, les termes du deuxième ordre ayant une contribution presque égale à ceux du premier[9]. La démonstration générale de stabilité fut exposée par Michel au cours de longues séances de séminaire mais sa mort prématurée ne lui a pas laissé le temps de rédiger sa démonstration dont l'idée centrale est simple et belle[10]. C'est Jacques Féjoz qui, complétant la rédaction, a clos ainsi ce beau morceau de Mécanique céleste.

[8] Dans ce cas, le Soleil, bien que très massif joue le mème rôle perturbatif qu'une petite planète car il est 1000 fois plus éloigné de la Terre que la Lune.

[9] Cette énorme différence, expliquée publiquement par Clairaut et dans un pli secret par d'Alembert, est à l'origine de la *crise de l'apogée* qui, entre 1747 et 1749 , fut à l'origine d'une remise en cause temporaire par Clairaut de la loi newtonienne de l'attraction et de quelques lignes amères de d'Alembert dans l'article *Lune* de l'*Encyclopédie*.

[10] pour les spécialistes, éviter le pénible calcul de la torsion par l'ajout, en fait inoffensif, d'un terme de moment cinétique au Hamiltonien.

5 Le groupe de travail de Mécanique Céleste et une belle idée de Jean-Christophe

Du milieu des années quatre-vingt jusqu'en 1991, Michel a dirigé un groupe de travail qui se runissait en matinée le jour de son séminaire[11] de Systèmes Dynamiques au Centre de Mathématique de l'Ecole Polytechnique. J'en ai parlé dans le numéro 88 déjà cité de la *Gazette des Mathématiciens* et voudrais aujourd'hui en retenir un bel exposé conjectural de Jean-Christophe sur les *configurations centrales de 4 corps* dans lequel le groupe affine joue un rôle inattendu. En voici la première page.

1

Description conjecturale des configurations centrales dans le problème planaire des 4 corps.

J. C. Yoccoz

1. Configurations centrales.

1.1 Définitions et notations.

Soient ν un entier ≥ 1, n un entier ≥ 2, $m_1, \dots, m_n$ des masses ponctuelles (avec $\sum m_i = 1$), de positions respectives $r_1, \dots, r_n$ dans $\mathbb{R}^\nu$. On pose : $r = (r_1, \dots, r_n) \in (\mathbb{R}^\nu)^n$. On définit

$$\Delta_{ij} = \{ r \in (\mathbb{R}^\nu)^n,\ r_i = r_j \}$$

$$\Delta = \bigcup_{i<j} \Delta_{ij}$$

$$r_{ij} = \| r_i - r_j \| \qquad , \qquad R_{ij} = r_{ij}^2$$

$$U(r) = \sum_{i<j} m_i m_j r_{ij}^{-1} \qquad , \qquad r \in (\mathbb{R}^\nu)^n - \Delta .$$

$$I(r) = \frac{1}{2} \sum_{i<j} m_i m_j r_{ij}^2$$

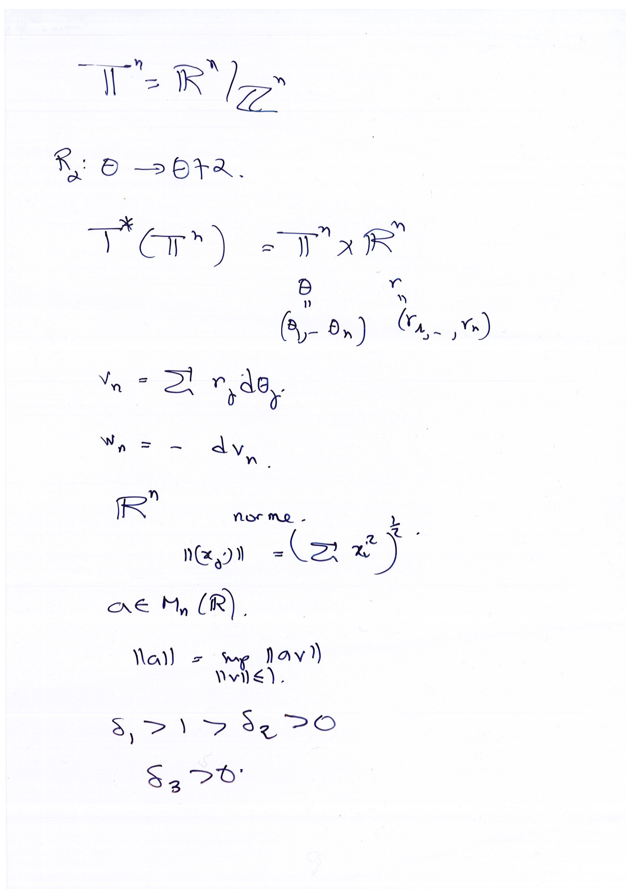
On note O le groupe $O(\mathbb{R}^\nu)$, O^+ le sous-groupe $SO(\mathbb{R}^\nu)$, A le groupe affine de $\mathbb{R}^\nu$, ~~A^+ le sous-groupe préserva~~ H le groupe des homothéties centrées en 0, T le groupe des translations, G (resp G^+) le groupe engendré par O (resp. O^+) et H. Ces groupes agissent sur $(\mathbb{R}^\nu)^n$.

Définitions. Une configuration est un point de $(\mathbb{R}^\nu)^n - \Delta$; une configuration est centrée si $\sum m_i r_i = 0$; une configuration conforme est une orbite pour l'action de G^+ sur l'espace des configurations centrées. Une configuration affine est une orbite de l'action de A dans l'espace des configurations.

[11] Ce séminaire est bien vivant aujourd'hui ; embrassant tout le champ des Systèmes dynamiques, il perpétue l'école que Michel avait créée avec ses élèves.

6 Les transparents

Opéré du genou en 1977 à la suite d'une agression un soir alors qu'il rentrait chez lui, il n'est plus jamais sorti sans une béquille devenue légendaire. Il est vrai qu'il lui est arrivé de rares fois, se levant sous le coup d'une forte excitation, d'oublier celles-ci le temps de quelque pas. Cet accident l'obligeait pour ses conférences à utiliser un rétroprojecteur. Cependant, contrairement à la quasi-totalité des conférenciers utilisant cet outil, il s'en servait comme d'un tableau, écrivant au fur et à mesure sur les transparents vierges. Voici le premier transparent d'une conférence : quiconque a écouté Michel saura au premier coup d'oeil qu'il s'agit de lui. Je l'entends encore prononcer "$\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ est le tore de dimension n, R_α la rotation ..."



$\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$

$R_\alpha : \theta \to \theta + \alpha.$

$T^*(\mathbb{T}^n) = \mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n$

$\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n)$ $\quad r = (r_1, \dots, r_n)$

$v_n = \sum r_j d\theta_j.$

$w_n = - dv_n.$

$\mathbb{R}^n$ norme.

$\|(x_j)\| = \left(\sum x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}.$

$a \in M_n(\mathbb{R}).$

$\|a\| = \sup_{\|v\| \leq 1} \|av\|$

$\delta_1 > 1 > \delta_2 > 0$

$\delta_3 > 0.$

Cette page est caractéristique : les notations sont immédiatement introduites qui permettront d'écrire des énoncés précis ... et de les démontrer.

7 Sans compromis

C'est sans doute la meilleure caractérisation de Michel : j'ai dit en commençant que ses positions étaient toujours étayées par son immense culture, fruit des lectures souvent nocturnes. Impossible dans une conversation avec lui d'avancer une quelconque affirmation ne reposant pas sur des sources explicites, impossible pour ses élèves d'utiliser dans leur travail des résultats qu'ils ne sauraient pas démontrer et ce même s'agissant de résultats dont la validité n'est pas en cause. Et ce qui valait pour les affirmations mathématiques valait également dans la moindre conversation sur l'histoire ou la politique.

CENTRE
DE
MATHÉMATIQUES
Unité Associée au C.N.R.S. n° 169

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
F-91128 PALAISEAU Cedex (FRANCE)
Tél. (1) 69.41.82.00
Télex ÉCOLEX 691.596 F

Palaiseau, le 9 novembre 1987

Monsieur le Professeur
Bernard MAUREY
U.E.R. de Mathématiques
Tour 45-55, 5ème étage
Université Paris VII
2, place Jussieu
75251 PARIS CEDEX 05

Cher Maurey,

J'ai décidé de démissionner de la commission de spécialité et d'établissement (23ème section) de l'U.E.R. de Mathématiques. Ma décision est motivée par des raisons personnelles et tout particulièrement parce qu'il m'est très pénible de porter un jugement sur 4 mutations dans la seule journée du 12 novembre (la réunion commence à 16h). A l'heure où j'écris, je ne connais même pas la liste des candidats aux postes autre que les mutants et encore moins leurs dossiers. Je trouve que la rapidité avec laquelle sont prises les décisions de recrutements des postes à l'U.E.R. de Mathématiques de Paris VII n'est pas conforme à l'idée que je me fais d'une évaluation scrupuleuse et honnête des qualités mathématiques (voir des lacunes) de tous les candidats. La rapidité des décisions a pour conséquence que la lecture de rapports lapidaires, les impressions, les bruits de couloir, les motivations de politiques scientifiques ou extra-scientifiques remplacent l'étude des travaux et des théorèmes de tous les candidats.

En arrivant ce matin 9 novembre au Centre de Mathématiques, je reçois tes lettres du 29 octobre me demandent de remettre pour le mardi 10 novembre au plus tard deux rapports , un sur Martin Zerner et un sur Remi Langevin. Il va sans dire que c'est matériellement impossible. Zerner et Langevin sont des mathématiciens très sérieux qui méritent un travail d'évaluation honnête. Je pense que même en travaillant pendant 10 jours à temps plein, j'aurai du mal à leur rendre justice. D'après mon expérience comme éditeur de revue, les referees mettent souvent 4 à 6 mois à lire un article d'une quarantaine de pages ; il est maintenant de plus en plus fréquent que ces referees envoient des rapports au bout de 6 mois sans avoir lu sérieusement l'article !

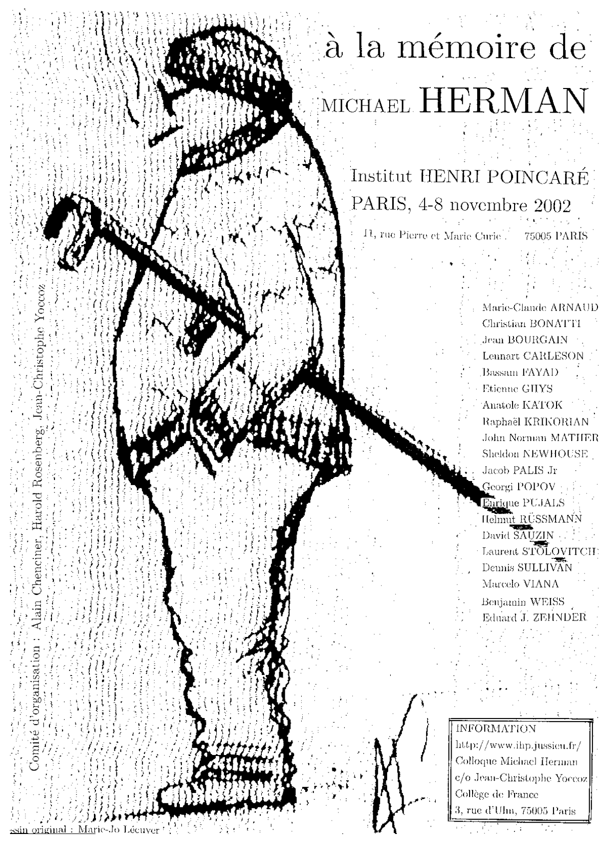
Bien cordialement,

Michel Herman
M. R. HERMAN

8 L'image qui restera

Michèle Lavallette, qui avait pris la suite de Mademoiselle Pouderous dans la direction du secrétariat du Centre de Mathématique, en me rapportant une de ses dernières réactions de mécontentement, a conclu en vrac : c'était Michel, bougon, généreux, odieux et adorable.

Je terminerai sur l'émouvant dessin que Marie-Jo Lécuyer qui avait, avec Michèle Lavallette, dactylographié sa thèse, avait fait lors du colloque international d'hommage qui s'était tenu à l'Institut Henri Poincaré en novembre 2002 : joli pied de nez aux mécréants que Michel et moi étions tous deux, la photocopieuse que j'avais utilisée pour tirer l'affiche du colloque a accouché d'un miracle : la feuille s'est littéralement couverte de fumée sous la forme de zébrures verticales dont l'origine, la perpétuelle cigarette que Michel était en train de fumer, ne fait aucun doute[12]. Impossible en contemplant ce dessin de ne pas apercevoir cette silhouette souriante et pensive au pied du bâtiment de Chevaleret.



[12] une photo du dessin original de Marie-Jo se trouve dans son témoignage *Entre cigarettes et macarons… Brêve évocation d'un matheux perfectionniste et généreux* paru dans le numéro 88 déjà cité de la *Gazette des mathématiciens.*

Michel est mort à 58 ans, comme Poincaré, Jean-Christophe à 59 ans.
H.P 29 avril 1854 - 17 juillet 1912
M.H 6 novembre 1942 - 2 novembre 2000
J.C.Y.29 mai 1957 - 3 septembre 2016