

# Ombres et traces

Documents pour une conférence à la Société des amis de Jean Cavaillès  
le 29 novembre 2014

Alain Chenciner

Observatoire de Paris, IMCCE (UMR 8028), ASD  
77, avenue Denfert-Rochereau, 75014 Paris, France

`chenciner@imcce.fr`

&

Département de mathématique,  
Université Paris 7

## Abstract

Qu'y a-t-il de commun entre le théorème de Desargues, les expressions telles que  $b^2 - 4ac$  ou  $4p^3 + 27q^2$ , la toupie de Kowalewskaia, les pavages quasi-périodiques de Penrose, la famille  $P_{12}$ , ... ? Dans chaque cas, c'est en pénétrant dans une autre dimension, puis en projetant ou en coupant que l'on découvre une simplicité cachée.

*Note liminaire.* Après avoir choisi ce titre, j'ai découvert le roman *De ville en ville : ombres et traces* de Nedim Gürsel, célèbre écrivain turc à qui je pardonne bien volontiers ce plagiat par anticipation.

# 1 Introduction

## 1.1 D'autres dimensions ?

Dans la quatrième et dernière partie de son *Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle*<sup>1</sup>, paru en 1886, Poincaré écrit

Si l'on veut, dans le cas des équations (2), employer le mode de représentation géométrique dont nous avons fait usage jusqu'ici, il faut regarder  $x_1, x_2, \dots, x_n$  comme les coordonnées d'un point dans l'espace à  $n$  dimensions.

La Géométrie n'est plus alors qu'un langage qui peut être plus ou moins avantageux, ce n'est plus une représentation parlant aux sens. Nous pourrions néanmoins être conduits à employer quelquefois ce langage.

Il me semble intéressant de rapprocher cette phrase de la conclusion d'une allocution prononcée par Jean Cavaillès en février 1939 à la *Société de philosophie*, lors d'une confrontation avec Albert Lautman :

Qu'est-ce, pour un objet, qu'exister ? Ici, nous nous trouvons en présence du fait que le type même de la connaissance certaine, rigoureuse, qui est justement la connaissance mathématique, nous empêche de poser des objets comme existant indépendamment du système accompli sur ces objets et même indépendamment d'un enchaînement nécessaire à partir du début même de l'activité humaine. De sorte que nous ne pouvons jamais ni les poser en soi, ni dire exactement : ici est le monde, un monde que nous décrivions. Chaque fois nous sommes obligés de dire : ce sont là des corrélats d'une activité. Tout ce que nous pensons en eux, ce sont les règles de raisonnement mathématique qui sont exigées par les problèmes qui se posent, et il y a même un débordement, une exigence de dépassement qui se trouve dans les problèmes non résolus, qui nous oblige à poser à nouveau d'autres objets ou à transformer la définition des objets primitivement posés.

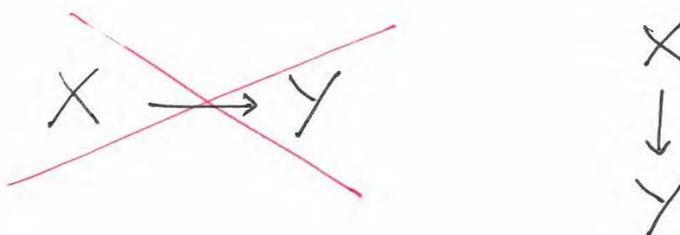
Sans se poser la question de l'existence idéale d'un espace à plus de trois dimensions, je voudrais montrer qu'à l'intérieur même des mathématiques, le mythe de la caverne de Platon a une existence opératoire : le passage à une dimension supérieure (ou plusieurs) peut faire que se révèle une simplicité cachée aux simples habitants des dimensions inférieures.

---

<sup>1</sup>in Œuvres, tome I, page 168 (Dans les deux dernières parties, le titre devient *Sur les courbes définies par les équations différentielles*).

## 1.2 Projeter, couper, border, déployer

René Thom avait coutume de dire qu'il y a en géométrie deux opérations fondamentales : *couper et projeter*, auxquelles on peut associer celles de *bord* et de *contour apparent*. Il insistait en particulier sur l'importance de penser – et donc dessiner – verticalement et non horizontalement la flèche représentant une application : on voit ainsi “où ça crie”, c'est-à-dire où la famille des images réciproques  $\{f^{-1}(y)\}_{y \in Y}$  subit un changement (une *bifurcation*). Ceci rejoint le point de vue de la géométrie algébrique (espace  $X$  au-dessus de l'espace  $Y$ ) mais aussi celui de la *théorie des singularités* et du *déploiement universel* :

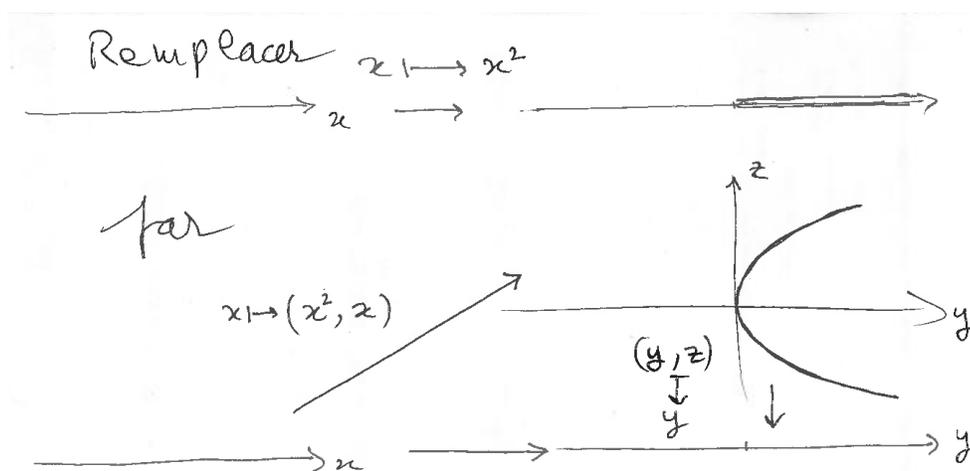


## 2 Projeter

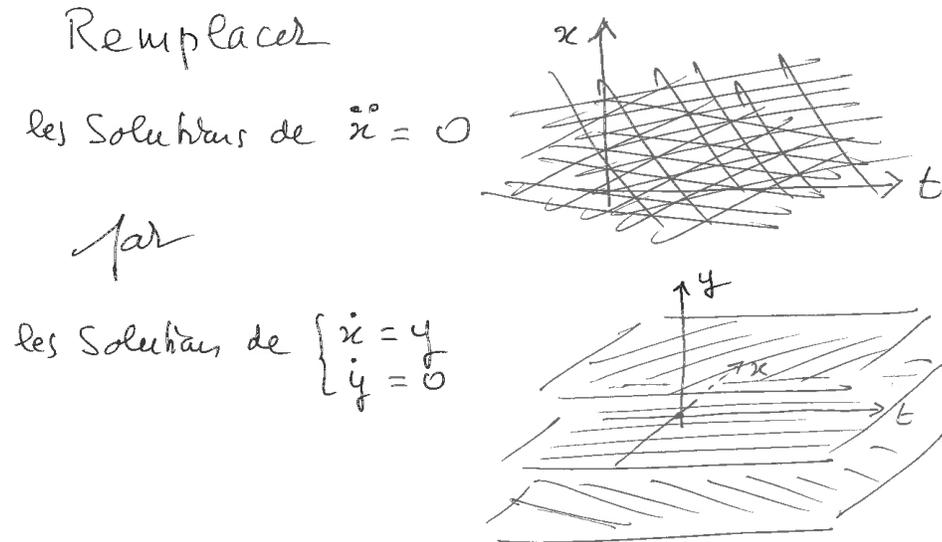
### 2.1 Séparer ce qui est intriqué

Deux notions parmi les plus communes témoignent de l'intérêt qu'il y a à se donner de la place en augmentant la dimension :

1) la notion de *graphe* d'une application, qui permet, via le passage à l'espace produit de la source et du but, de remplacer toute application par la composition d'une injection et d'une surjection (projection) :

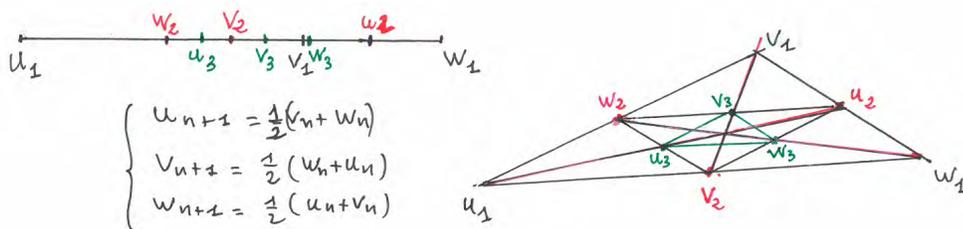


2) la notion d'*espace des phases* d'une équation différentielle du second ordre, qui permet, en séparant les courbes intégrales, de rendre visible le théorème d'existence et d'unicité des solutions d'équations différentielles :



## 2.2 Un exemple simple

Cet exemple illustre une démarche fondamentale en géométrie : il est possible d'éclairer une situation pour la rendre générique par augmentation du nombre de dimensions ou ajout de paramètres.

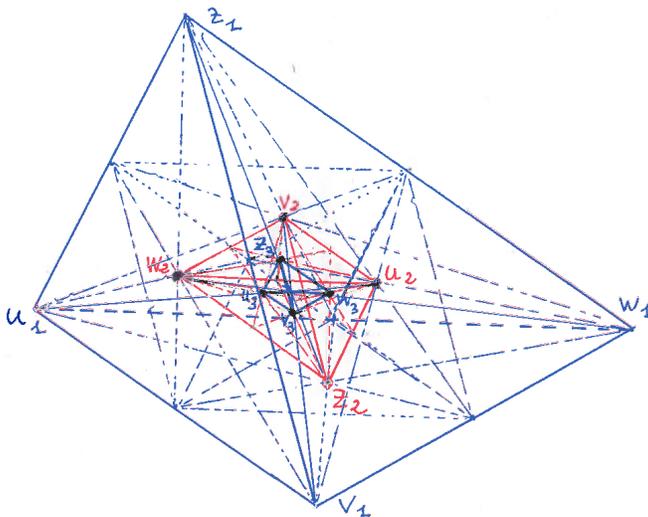


Le fait que les trois suites convergent vers la même limite devient transparent dès que les points  $u_1, v_1, w_1$  ne sont plus alignés.

Le même problème avec 4 suites  $(u_n, v_n, w_n, z_n)_n$  et la règle

$$u_{n+1} = \frac{1}{3}(v_n + w_n + z_n), v_{n+1} = \frac{1}{3}(w_n + z_n + u_n), w_{n+1} = \frac{1}{3}(z_n + u_n + v_n), z_{n+1} = \frac{1}{3}(u_n + v_n + w_n),$$

devient clair en passant à la dimension 3 et ainsi de suite : plus “dégénéré” le problème, plus grande la dimension qui le rend “générique” et par là-même le résout (merci à Tadashi Tokieda pour cette jolie remarque).



Ce n'est cependant pas cette solution qui vient la première à l'esprit : le réflexe algébrique est puissant (merci Monsieur Descartes) et c'est sans doute le système d'équations linéaires définissant la récurrence que l'on écrira en premier :

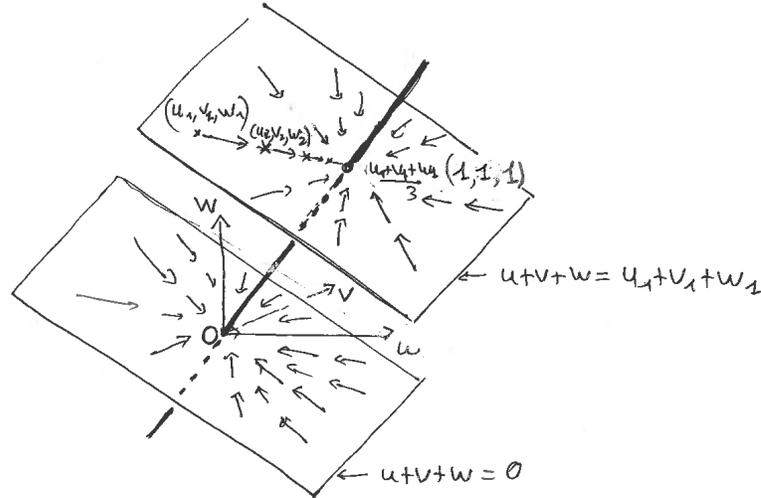
$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$$

Apparaît alors un autre espace, de dimension 3 pour le problème initial, et une dynamique dans cet espace définie par l'itération de la matrice. Les valeurs propres sont les solutions 1 et  $-\frac{1}{2}$  (cette dernière avec multiplicité 2) de l'équation cubique  $\lambda^3 - \frac{3}{4}\lambda - \frac{1}{4} = 0$ , les sous-espaces propres correspondants étant respectivement la diagonale  $u = v = w$  et le plan orthogonal  $u + v + w = 0$ . Décomposer le point  $(u_n, v_n, w_n)$  suivant ces sous-espaces propres revient à écrire les coordonnées des trois suites par rapport à leur centre de gravité :

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = \frac{u_n + v_n + w_n}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2u_n - v_n - w_n \\ 2v_n - w_n - u_n \\ 2w_n - u_n - v_n \end{pmatrix}.$$

À chaque itération, le centre de gravité ne change pas mais l'autre composante est multipliée par  $-\frac{1}{2}$  et tend donc vers 0.

La figure ci-dessous illustre la dynamique sous-jacente.

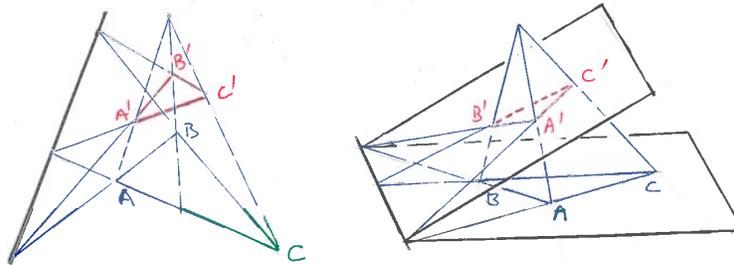


Si l'on a  $k$  suites, la dynamique correspondante vivra dans un espace de dimension  $k$  (ou même  $k - 1$  si l'on rapporte  $(u_1, v_1, w_1)$  à leur centre de gravité) et aura exactement la même structure. Finalement, ces deux approches ont ceci de commun que le passage à un espace de dimension supérieure a rendu "visible" une dynamique que cachait l'intrication de la situation initiale.

### 2.3 Théorème de Desargues et dimension 3

Étant donnés deux triangles  $ABC$  et  $A'B'C'$  dans le plan, le théorème de Desargues (1638) affirme l'équivalence des deux propriétés suivantes :

- 1) les droites  $AA'$ ,  $BB'$  et  $CC'$  sont concourantes,
- 2) les intersections  $AB \cap A'B'$ ,  $BC \cap B'C'$  et  $AC \cap A'C'$  sont alignées.

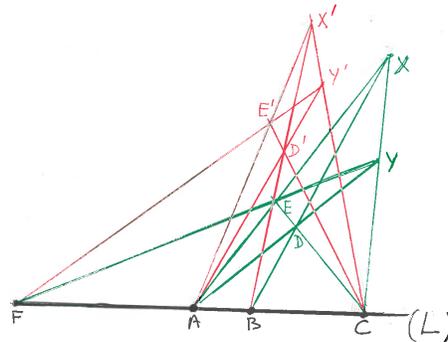


Transparente dans  $\mathbb{R}^3$ , la démonstration de ce fait l'est beaucoup moins dans  $\mathbb{R}^2$ . En fait, la propriété de Desargues est une condition nécessaire et suffisante pour qu'une géométrie projective plane définie par des relations d'incidence soit la géométrie définie sur un corps, qui se prolonge donc en dimension 3.

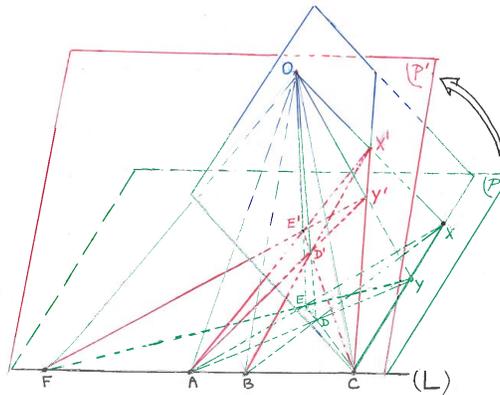
Une situation analogue est fournie par le *Théorème de Monge* sur les bitangentes à trois cercles extérieurs l'un à l'autre dans un plan, mais cette fois on coupe au lieu de projeter (voir [http://en.wikipedia.org/wiki/Monge%27s\\_theorem](http://en.wikipedia.org/wiki/Monge%27s_theorem)).

## 2.4 Quadrilatère complet et division harmonique<sup>2</sup>

Étant donnés 3 points  $A, B, C$  sur une droite  $(L)$ , on en construit un quatrième  $F$  de la manière suivante : on imagine un plan contenant cette droite, on y choisit un point  $X$  non situé sur cette droite et un point  $Y$  appartenant à la droite  $CX$  et différent de  $X$  ou  $C$ . On note  $D$  le point d'intersection des droites  $XB$  et  $YA$ , puis  $E$  le point d'intersection de  $CD$  et  $AX$ , et enfin  $F$  le point d'intersection de  $EY$  et de  $(L)$ . On constate que le point  $F$  ne dépend ni du choix de  $X$  ni de celui de  $Y$ .



Pour le voir, on augmente encore la dimension, en pensant à deux instances de cette construction comme appartenant à deux plans distincts  $(P)$  et  $(P')$  se coupant suivant la droite  $L$  et on constate que les deux figures se correspondent par projection centrale depuis un centre  $O$ .

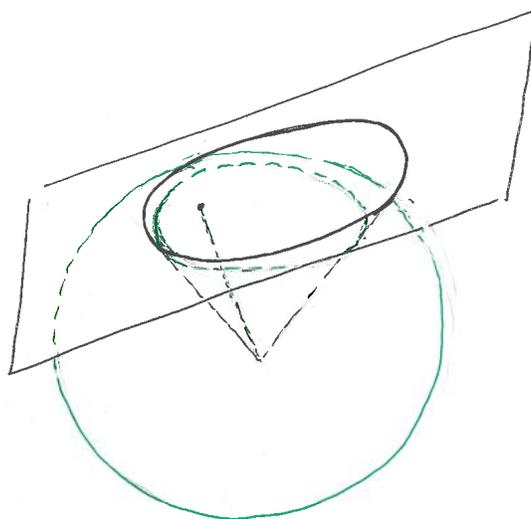


Cette construction illustre la propriété qu'a le *quadrilatère complet* de définir une *division harmonique* sur chacune de ses diagonales :  $CF/CB : AF/AB = -1$ .

<sup>2</sup>Merci à Norbert A Campo pour cet exemple dont il décrit joliment la solution comme fournie par "une pluie qui mouille le plan en venant de l'espace".

## 2.5 Dynamique projective

Prolongeant des travaux d'Appell (mais aussi Halphen, Higgs, ...) sur l'analogie existant entre les mouvements Kepleriens dans le plan et sur la sphère, Alain Albouy a récemment développé ce qu'il appelle une dynamique projective dans laquelle la projection centrale d'un mouvement bidimensionnel sur un autre joue un rôle fondamental (*Alain Albouy, There is a projective dynamics, EMS Newsletter, 89 (Sept. 2013), 37-43*). Cette approche lui a permis en particulier de retrouver pratiquement sans calcul et de manière très naturelle l'intégrale d'Euler du problème des deux centres fixes comme une projection de l'énergie du problème des deux centres fixes sur une sphère.



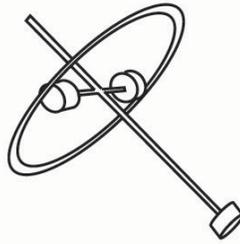
## 2.6 La toupie de Kowalewskaya comme réduction d'un système "simple"

Deux cas d'intégrabilité complète du mouvement d'un solide autour d'un point fixe étaient bien connus depuis le 18ème siècle, la toupie d'Euler (le point fixe est le centre de gravité) et celle de Lagrange (le solide est symétrique par rapport à un axe sur lequel se trouve le point fixe). En 1888, Sofia Kowalewskaya clôt la liste en y ajoutant le cas surprenant d'une toupie dont les moments d'inertie sont de la forme  $(\lambda, \lambda, \lambda/2)$  et dont le centre de masse appartient au plan propre passant par le point fixe associé aux deux moments d'inertie égaux.

Cent ans plus tard, l'intégrabilité de la toupie de Kovalevskaya est comprise comme provenant par réduction de l'intégrabilité d'un système plus symétrique, et donc plus simple, obtenu paradoxalement en ajoutant à l'action de la gravité celle d'un champ électrique. Ce système augmenté se révèle en effet être un système hamiltonien intégrable "simple" naturellement associé à l'algèbre de Lie  $so(3, 2)$ , de dimension 10.

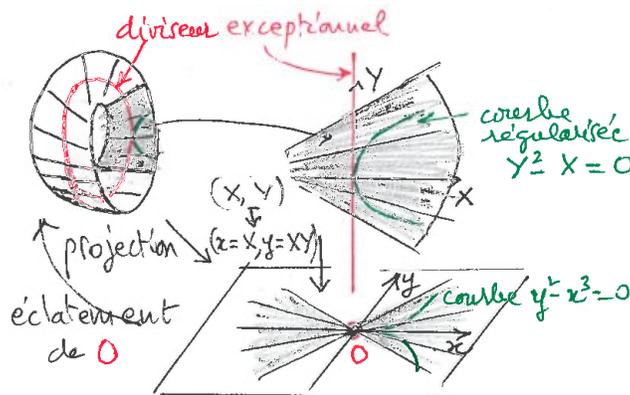
“The Kowalewski gyrostat in two constant fields is described by the Hamiltonian  $H = \frac{1}{2}(l_1^2 + l_2^2 + 2l_3^2 + 2\gamma l_3) - g_1 - h_2$ , so that the inertia tensor is  $\mathcal{I}^{-1} = \text{diag}(1, 1, 1/2)$ . The centers of mass and charge lie on the orthogonal axes  $e_1$  and  $e_2$  in the equatorial plane of the inertia ellipsoid, while the gyrostatic momentum  $\kappa = ye_3$  is parallel to its symmetry axis  $e_3$ . The original Kowalewski case corresponds to  $y = 0, g \wedge K = 0$  (we can simply put  $h = 0$ ).”

A. I. Bobenko, A. G. Reyman, and M. A. Semenov-Tian-Shansky, *The Kowalewski Top 99 Years Later: A Lax Pair, Generalizations and Explicit Solutions*, *Commun. Math. Phys.* 122, 321-354 (1989).



## 2.7 Résoudre une singularité

L'exemple le plus simple de cette technique fondamentale en géométrie algébrique, mais aussi en équations différentielles, consiste en l'éclatement d'un point, souvent décrit comme le "remplacement de l'observateur par ce qu'il voit". Le changement de dimension n'est ici que local : si  $O$  est un point singulier d'une courbe (dans la figure, la courbe d'équation  $y^2 - x^3 = 0$ ), on l'"éclate" en le remplaçant par une droite projective, c'est-à-dire par l'ensemble, homéomorphe à un cercle, des droites (non orientées) qui le contiennent. Dans ce nouvel espace, homéomorphe à un ruban de Moëbius, et qui se projette sur le plan en écrasant sur le point  $O$  la droite projective (encore appelée le *diviseur exceptionnel*), la courbe singulière se relève en la réunion de celle-ci et d'une courbe non singulière. On a résolu la singularité.

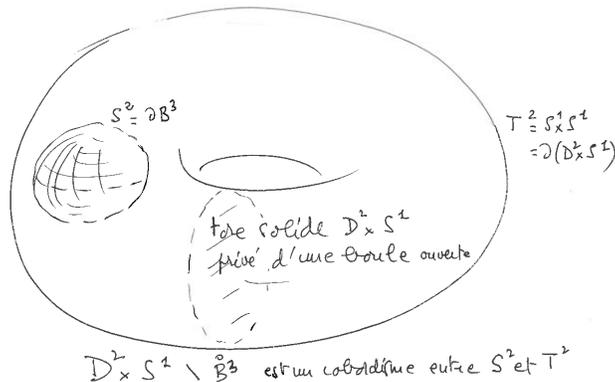


### 3 Couper, restreindre, border

#### 3.1 Qu'est-ce que l'égalité ?

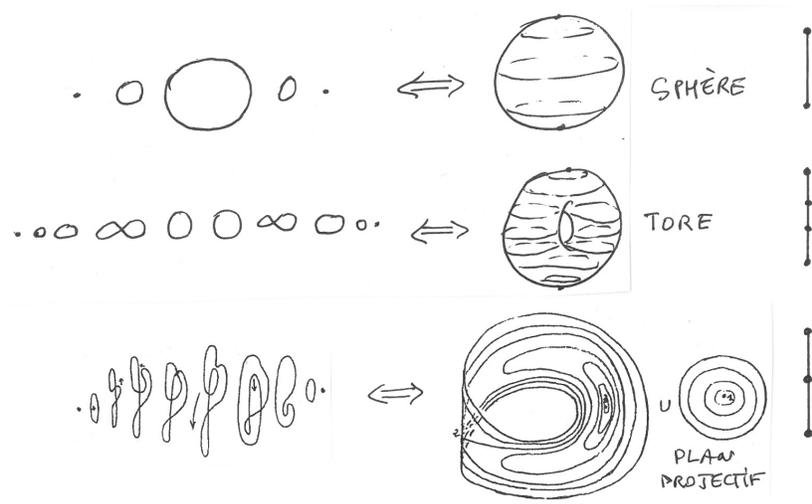
En topologie, la définition de l'égalité fait très souvent appel à l'ajout d'une dimension : *homologie, homotopie, cobordisme*. Dans l'interprétation en théorie de l'homotopie de la théorie des types, à la base de la *fondation univalente* des mathématiques proposée par Vladimir Voevodsky, la notion d'égalité peut être représentée par l'équivalence d'homotopie faible.

La notion de *bord* (qui implique une dimension supplémentaire) est fondamentale en mathématique (penser à la *formule de Stokes*, version multidimensionnelle du théorème fondamental du calcul différentiel). Thom considérait la théorie du *cobordisme* comme la partie la plus importante de son œuvre : on considère comme semblables (on dit *cobordantes*) deux variétés différentiables qui sont les deux composantes du bord d'une variété d'une dimension un de plus, par exemple le tore (en fait toute surface orientable) et la sphère. Dans un interview donné à un journal médical, Thom a un jour décrit joliment le cobordisme comme "l'art d'arrondir les angles en grande dimension" : en effet, la sphère étant le bord de la boule et donc cobordante à la variété vide, une variété cobordante à la sphère (qui joue le rôle de 0 dans cette théorie) est tout simplement une variété  $M$  qui est le bord d'une variété  $W$  d'une dimension de plus. Une façon de penser à  $W$  est de prendre le cône  $C = M \times [0, 1] / M \times \{1\}$  sur  $M$  et de "lisser" (arrondir) son sommet .



#### 3.2 Théorie de Morse

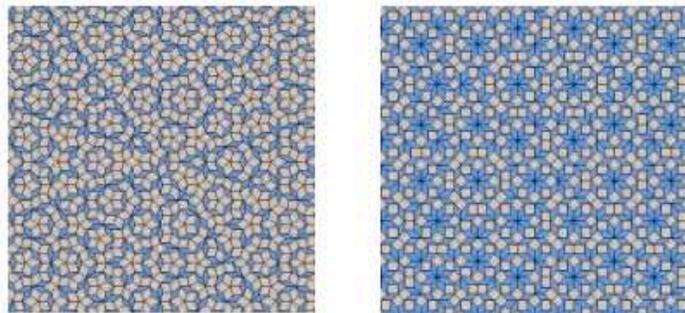
Très liée au paragraphe précédent, la *théorie de Morse* consiste en la reconstruction dynamique d'une variété à partir de sections définies par les niveaux d'une fonction "générique". *M. Morse, The calculus of variations in the large, AMS, 1934*



### 3.3 Quasi-cristaux

Les pavages quasi-périodiques ou *quasi-cristaux*, introduits par Robert Berger en 1966, puis plus systématiquement par Roger Penrose dans les années 70.

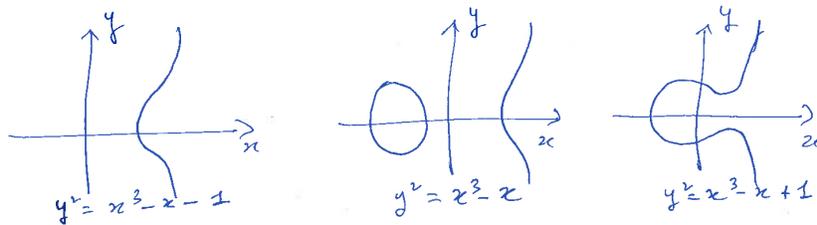
“Les pavages de Roger Penrose constituent un exemple archétypal de structure quasipériodique du plan. Ils sont construits à partir de deux tuiles losange prototype d’angle au sommet respectivement  $p/5$  et  $2p/5$ . De symétrie quinaire, ces pavages sont obtenus par coupe d’un espace de dimension 4 (on choisit en général un espace de dimension 5 par commodité) et forment une distribution homogène des deux tuiles et présentent une répétition uniforme des motifs d’accolement. Un autre exemple qu’on rencontre dans les zelligs marocaines est le pavage octogonal construit à partir d’un losange d’angle au sommet  $p/4$  et un carré” (*Denis Gratias, Laboratoire d’étude des microstructures*).



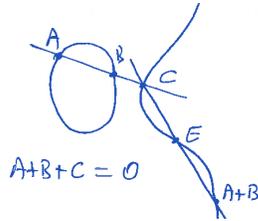
### 3.4 Du réel au complexe<sup>3</sup>

“... Il apparut que, entre deux vérités du domaine réel, le chemin le plus facile et le plus court passe bien souvent par le domaine complexe.” Paul Painlevé, *Analyse des travaux scientifiques*, Gauthier-Villars, 1900

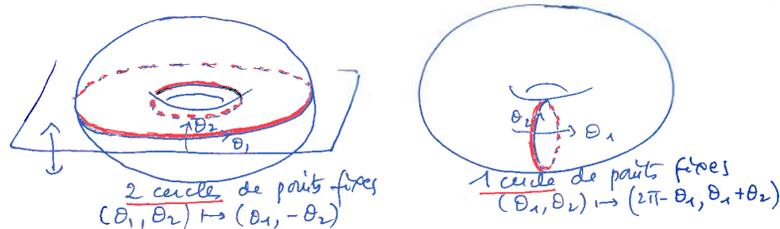
Le polynôme  $P(x) = x^3 + px + q$  a une ou trois racines suivant que le discriminant  $4p^3 + 27q^2$  est positif ou négatif (voir la section 4.1). On en déduit que la cubique  $C$  d'équation  $y^2 = P(x)$  a l'une des formes ci-dessous lorsqu'elle est régulière, c'est-à-dire lorsque le discriminant n'est pas nul :



Ajoutant le point à l'infini (c'est-à-dire en se plaçant dans le plan projectif réel  $P_2(\mathbb{R})$ ) on obtient un ensemble  $\hat{C}$  qui a la topologie d'un ou de deux cercles et une construction classique munit  $\hat{C}$  d'une loi de groupe une fois choisi un point  $E$  qui servira d'élément neutre.



Tout s'éclaire si l'on interprète  $\hat{C}$  comme une courbe projective régulière complexe (i.e. contenue dans le plan projectif complexe  $P_2(\mathbb{C})$ , de dimension réelle 4) : on montre en effet que, quel que soit le signe du discriminant, celle-ci s'identifie à un *tore*, quotient de  $\mathbb{R}^2$  par un réseau, qui hérite naturellement de la structure de groupe de  $\mathbb{R}^2$  pour la loi d'addition. La courbe réelle s'interprète alors comme l'ensemble des points fixes de l'involution  $(x, y) \mapsto (\bar{x}, \bar{y})$  de conjugaison complexe, qui laisse invariante l'équation.



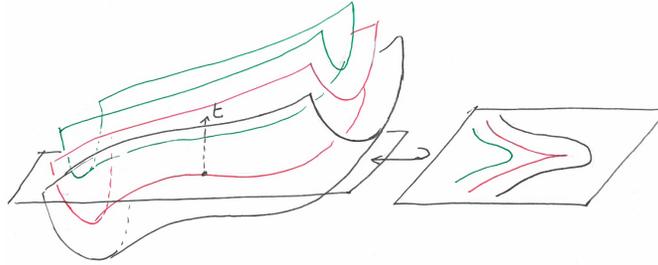
<sup>3</sup>Merci à Lei Zhao qui m'a suggéré ce paragraphe et rappelé cette citation.

### 3.5 Intégrales premières de germes de Pfaff

Les formes différentielles singulières peuvent être présentées comme des traces : le Corollaire 2 page 197 de l'article de Robert Moussu, *Sur l'existence d'intégrales premières pour un germe de forme de Pfaff*, *Annales de l'Institut Fourier*, tome 26, n<sup>o</sup>2, (1976) 171-220, énonce que si  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n, \dots$  sont les éléments de l'algorithme de Godbillon-Vey d'un germe complètement intégrable  $\omega$  ayant en 0 une singularité algébriquement isolée, le germe formel non singulier

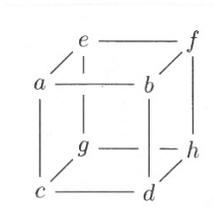
$$\Omega = dt + \omega + \sum_{n \geq 1} \frac{t^n}{n!} \omega_n$$

est complètement intégrable. Une intégrale première formelle de  $\omega$  s'obtient alors simplement en prenant la trace sur  $t = 0$  d'une intégrale première de  $\Omega$ .



### 3.6 Le cube magique de Bhargava

Découvert par Manjul Bhargava deux cent ans après la parution des *Disquisitiones arithmeticae* de Gauss, ce cube donne une définition magiquement simple de la loi de composition de Gauss des formes quadratiques de même discriminant. *Manjul Bhargava, Higher composition laws I: A new view on Gauss composition, and quadratic generalizations*, *Annals of Mathematics*, 159 (2004), 217- 250



$$M_1 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, N_1 = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$$

$$M_2 = \begin{bmatrix} a & c \\ e & g \end{bmatrix}, N_2 = \begin{bmatrix} b & d \\ f & h \end{bmatrix}$$

$$Q_i(x, y) = -\text{Det}(M_i x - N_i y).$$

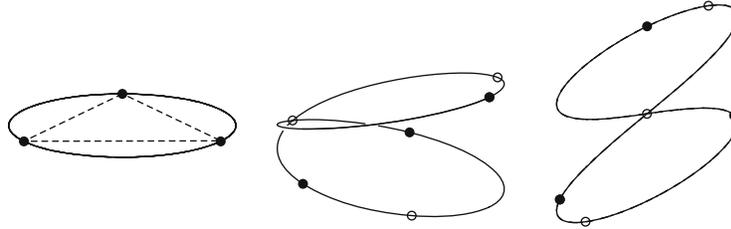
$$M_3 = \begin{bmatrix} a & e \\ b & f \end{bmatrix}, N_3 = \begin{bmatrix} c & g \\ d & h \end{bmatrix}$$

Les trois formes quadratiques  $Q_1, Q_2, Q_3$  définies par un cube ont même discriminant et la loi de composition de Gauss se définit en posant que leur somme est nulle (comparer à la loi de groupe sur une courbe elliptique).

### 3.7 De l'équilibre relatif équilatéral de Lagrange au Huit en passant par $\mathbb{R}^3$

Observé dans un repère tournant d'un tour par période dans le sens opposé au mouvement, l'équilibre relatif équilatéral de trois masses égales a exactement les mêmes symétries que le Huit, à savoir une action du groupe diédral  $D_6$  à 12 éléments. Ce fait a conduit Christian Marchal à deviner l'existence dans  $\mathbb{R}^3$  d'une famille de solutions quasi-périodiques interpolant entre cette solution et le Huit.

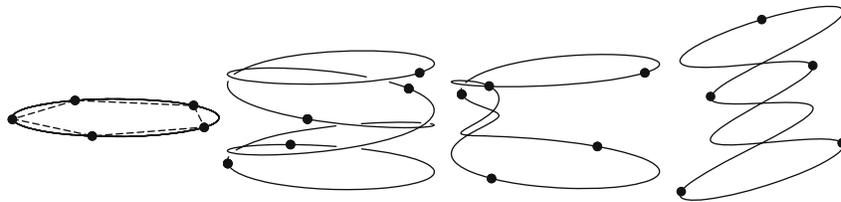
*C. Marchal, The family  $P_{12}$  of the three-body problem the simplest family of periodic orbits, with twelve symmetries per period, Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy 78: 279298, 2000* La figure représente cette famille de solutions dans une famille de repères tournant (la rotation allant de -1 tour à 0) où la symétrie  $D_6$  est conservée.



The  $P_{12}$  family. Filled and hollow circles represent bodies at times  $t = 0$  and  $t = T/12$ .

Un phénomène analogue se produit dans le cas de  $n$  masses égales, l'interpolation se faisant, suivant la parité de  $n$ , entre la solution d'équilibre relatif du  $n$ -gone régulier et certains types de *chorégraphies* (les *chaînes*) ou des *Hip-Hops* généralisés. Ce sont les *polygones déchaînés* :

*A. Chenciner and J. Féjoz, Unchained Polygons and the N-body Problem Regular and Chaotic Dynamics, 2009, Vol. 14, No. 1, pp. 64115*



**Fig. 11.** The family of the 5-body chain with 4 loops.

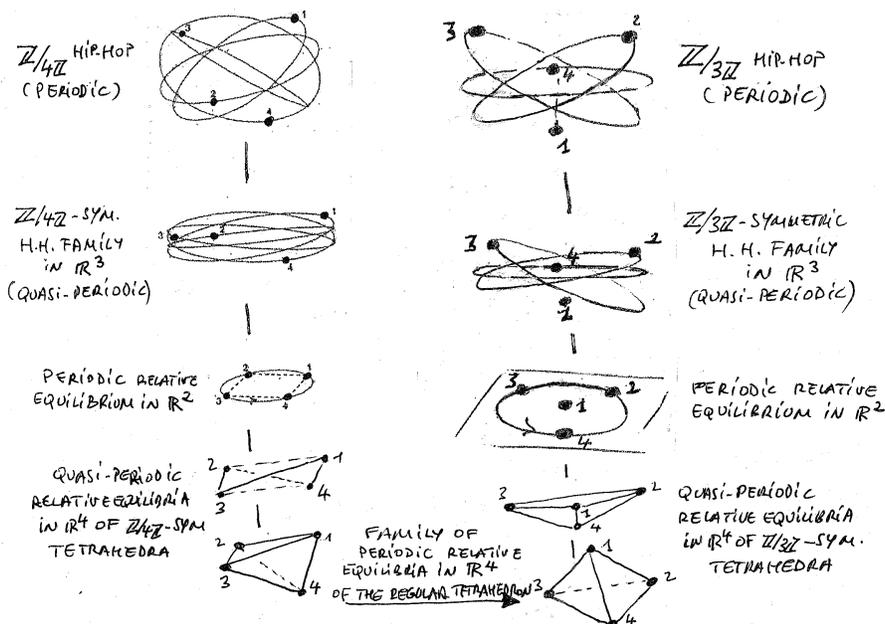
### 3.8 Réduction du problème des 3 corps et dimension 4

La réduction du problème des trois corps se fait naturellement dans  $\mathbb{R}^4$  : Lagrange écrit 10 équations en des variables invariantes par isométrie et 3 intégrales premières : l'énergie, le carré de la norme du moment cinétique et un volume quadridimensionnel égalé à 0, qui fait apparaître la dimension trois de l'espace comme une contrainte sur les distances mutuelles. *J. L. Lagrange, Essai sur le problème des trois corps, Prix de l'Académie Royale des Sciences de Paris, tome IX, 1772*

$$(N) \quad 16(pp' + pp'' + p'p'') (v'v' + v''v'' + v'v'') - 4(\Sigma v + \Sigma' v' + \Sigma'' v'') + \left( \frac{dp dp' + dp dp'' + dp' dp'' + dp''}{dt^2} \right)^2 = 0.$$

On comprend cette contrainte si l'on remarque que, le centre de gravité des trois corps étant fixé par le choix d'un repère galiléen, les trois positions engendrent à chaque instant un plan et il en est de même des trois vitesses ; mais deux plans ne sont "indépendants" que dans un espace de dimension au moins 4.

#### D'un Hip-Hop à un autre en passant par $\mathbb{R}^4$



La figure ci-dessus, extraite de

*A. Chenciner, The Lagrange reduction of the N-body problem: a survey, Acta Mathematica Vietnamica (2013) 38: 165-186,*

montre qu'une telle interpolation par des solutions quasi-périodiques "simples" existe également entre des solutions ayant des symétries fort différentes ( $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$  ou  $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ ), à condition de passer par l'espace  $\mathbb{R}^4$ .

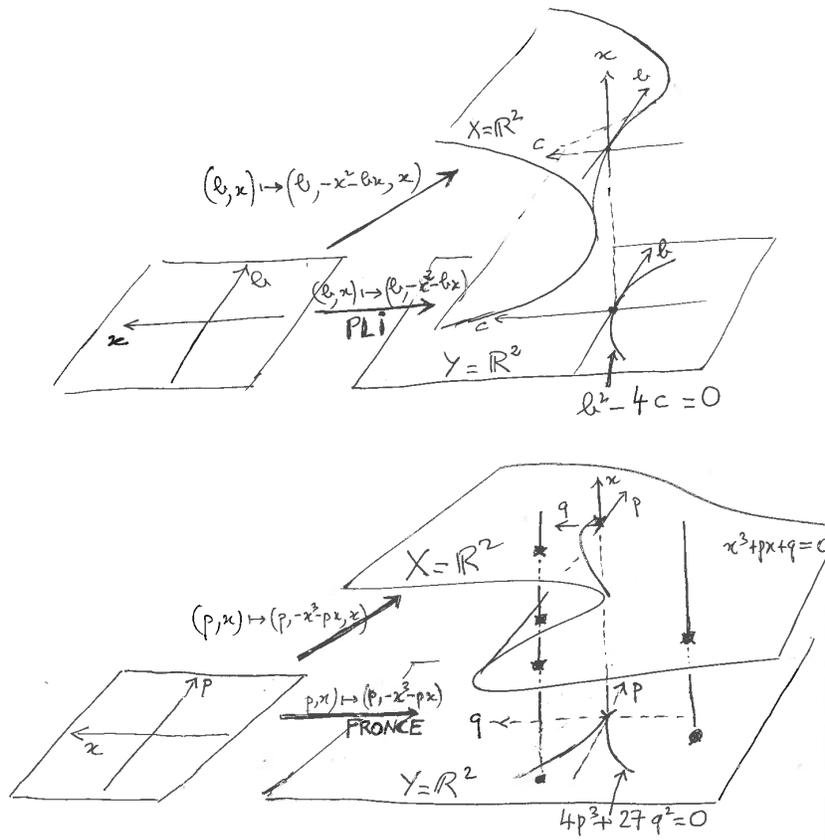
On exploite ici deux propriétés des équilibres relatifs dans un espace euclidien  $E$  de dimension au moins 4 :

1) pour une configuration centrale donnée, ceux-ci sont en correspondance avec les structures complexes sur  $E$  et il y a beaucoup de telles structures (une sphère  $S^2$  pour la dimension 4)

2) l'existence des configurations équilibrées, configurations plus générales que les configuration centrales qui admettent des mouvements d'équilibre relatif quasi-périodiques : dans la figure, des tétraèdres ayant une symétrie  $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$  ou une symétrie  $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$  alors que la seule configuration centrale non plane est le tétraèdre régulier.

## 4 Déployer

### 4.1 Déployer un "point épais" (discriminants)

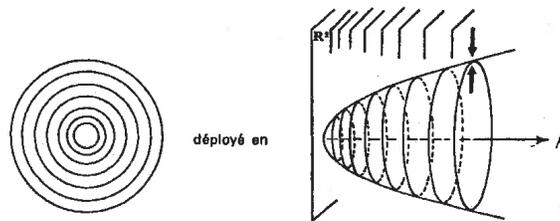


Cette figure représente géométriquement l'ensemble des comportements que peut avoir un polynôme réel de degré 2 ou 3. Les images réciproques "régulières"

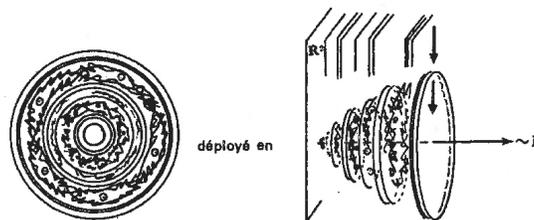
(constituées de 0, 1, 2, ou 3 points) forment un “déploiement” du point épais (double ou triple) qui en est le *centre organisateur*. Ces déploiements définissent des applications “stables” de la droite dans elle-même (pli) ou du plan dans lui-même (fronce de Whitney). Les contours apparents (bord, cusp), qui héritent de cette stabilité, sont les premières “catastrophes” de Thom.

## 4.2 Bifurcations de dynamiques

Un autre exemple est fourni par la plus simple des bifurcations dynamiques, la bifurcation de Hopf : de même que le déploiement évoqué ci-dessus de l'équation  $x^3 = 0$  sépare de toutes les manières possibles les 3 racines confondues en 0, cette bifurcation sépare le continuum des cercles invariants d'une rotation plane en déployant la direction transverse le long de la droite portant le paramètre (ici, la partie réelle des valeurs propres du champ linéarisé en son point fixe.) Ici encore, c'est dans l'espace produit de l'espace des phases et de l'espace des paramètres que se découvre la géométrie de la situation.



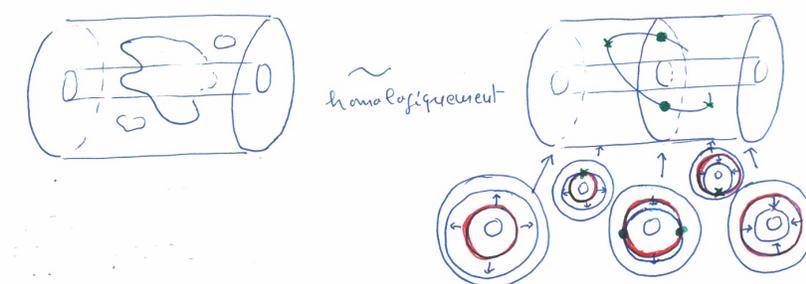
Un exemple plus riche est donné par la bifurcation d'un point fixe elliptique “dégénéré” (précisément “dont le premier invariant de Birkhoff est nul”) : dans l'espace des paramètres un ensemble complexe de points de bifurcation a la topologie d'un ensemble de Cantor. Heuristiquement, chaque point de cet ensemble correspond à l'une des courbes fermées invariantes de type K.A.M que possède un difféomorphisme du plan conservant les aires au voisinage d'un point fixe elliptique après que l'on ait déployé le plan dans la direction d'une certaine courbe de l'espace des paramètres (voir la figure, extraite de A. Chenciner, *Bifurcations de points fixes elliptiques : I - Courbes invariantes*, Publications de l'I.H.E.S. n°61, p. 67-127 (1985) ).



### 4.3 Les deux points fixes de Birkhoff

Voici un autre exemple, à propos du théorème de point fixe de Birkhoff pour les difféomorphismes conservatifs de l'anneau qui dévient les rayons. Il y a une façon simple de se persuader (sans bien entendu que ce soit une démonstration) qu'homologiquement il y a deux points fixes. On remplace la conservation de l'aire par un paramètre, i.e. l'anneau par son produit par l'intervalle et on met des conditions telles que les cercles soient poussés le long des rayons dans une direction à une extrémité de l'intervalle des paramètres et dans l'autre direction à l'autre extrémité. En particulier, il n'y a pas de point fixe pour les valeurs extrêmes du paramètre. Homologiquement, les points fixes naissent par couple puis meurent, également par couples, et leur ensemble a l'homologie d'un cercle entourant le trou central. La situation conservative est en quelque sorte représentée par une valeur intermédiaire du paramètre.

La figure représente ce qui se passe pour une famille d'homomorphismes de l'anneau prservant les rayons : prenant deux cercles concentriques qui échangent génériquement leurs positions, on voit immédiatement le comportement homologique des points d'intersection.



Bien entendu, cet exemple pourrait également figurer dans la section “Couper”. Dans cet esprit, voir *A. Chenciner, Sur un énoncé dissipatif du théorème de Poincaré-Birkhoff, C.R. Acad. Sci. Paris, t. 294, Série A, p. 243-245 (1982)*

## 5 ... sans oublier la physique !

Un bel exemple de simplification conceptuelle obtenue par une géométrisation en dimension supérieure (merci à Daniel Bennequin de l'avoir suggéré) est donné par les équations de Maxwell

$$\begin{cases} \operatorname{div} \vec{E} = 4\pi\rho, \\ r\vec{\partial}_t \vec{E} = -\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \\ \operatorname{div} \vec{H} = 0, \\ r\vec{\partial}_t \vec{H} = 4\pi\vec{j} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \end{cases}$$

où  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$ ,  $\rho$ ,  $\vec{j}$  sont respectivement le *champ électrique*, le *champ magnétique*, la *densité de charge* et la *densité de courant* et où la vitesse de la lumière a été prise comme unité. Telles quelles, ces équations cachent la nature intime des champs électrique  $\vec{E}$  et magnétique  $\vec{H}$ , dont leur comportement sous l'action de symétries indique qu'elle est fort différente (une 1-forme différentielle  $E_x dx + E_y dy + E_z dz$  pour  $\vec{E}$ , une 2-forme différentielle  $H_x dy \wedge dz + H_y dz \wedge dx + H_z dx \wedge dy$  pour  $\vec{H}$ ), le rotationnel et la divergence n'étant que des avatars de la différentielle extérieure. Mais il y a plus ; définissant dans l'*espace de Minkowski* (i.e.  $\mathbb{R}^4$  muni du produit scalaire *lorentzien*) le *champ électromagnétique* comme la 2-forme différentielle  $F = H - dt \wedge E$ , les équations de Maxwell se réduisent à

$$\begin{cases} dF = 0, \\ d(\star F) = \star 4\pi J, \end{cases}$$

où  $\star$  est l'*opérateur de Hodge* associé à la métrique lorentzienne et où  $J$  est la 1-forme *courant*  $J = -\rho dt + j_x dx + j_y dy + j_z dz$ . Ainsi, ajouter la quatrième dimension du temps a permis une remarquable simplification. On ne s'en étonnera pas, puisque que l'électromagnétisme est bien une théorie relativiste, précurseur de la relativité restreinte.

Faisant un pas de plus, évoquons la *théorie de Kaluza-Klein*, ancêtre des *théories de jauge*, dans laquelle l'électromagnétisme surgit de la dynamique relativiste dans un espace temps auquel a été ajoutée une cinquième dimension. L'histoire ne s'arrête pas là mais faire des dessins pour la supergravité à 11 dimensions devient difficile et je laisse la conclusion à Edwin Abbott :

To  
*The Inhabitants of SPACE IN GENERAL*  
*And H. C. IN PARTICULAR*  
*This Work is Dedicated*  
*By a Humble Native of Flatland*  
*In the Hope that*  
*Even as he was Initiated into the Mysteries*  
*Of THREE Dimensions*  
*Having been previously conversant*  
*With ONLY TWO*  
*So the Citizens of that Celestial Region*  
*May aspire yet higher and higher*  
*To the Secrets of FOUR FIVE OR EVEN SIX Dimensions*  
*Thereby contributing*

*Flatland, 1884*

Le contrôle de l'imaginaire c'est, je crois, l'essence de la rationalité.

René Thom,  
La science et le sens,  
1984 (2<sup>ème</sup> version)