Modèles mathématiques de la morphogénèse

Chapitre 4 : Catastrophes élémentaires.

2ème partie : Catastrophes de corang 2.

(par A. Chenciner)

La classification des ombilics, ainsi que les équations de leurs déploiements universels respectifs, ont été données dans le chapitre 3. Nous étudions ici la structure des ensembles de bifurcation correspondants et les types topologiques des fonctions rencontrées.

A. L'ombilic hyperbolique et l'ombilic elliptique :

A-1. Dans les deux cas, le déploiement universel de la singularité est de la forme

$$V : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$V(x,y,u,v,w) = Q(x,y) - ux - vy + w\,g(x,y),$$

où Q (resp. g) est une forme cubique (resp. quadratique(**)) des deux variables internes x, y.

Les variables u, v, w sont les paramètres du déploiement, et $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^3$ est l'espace global du déploiement.

(**) . g peut être prise proportionnelle au Hessien de Q.

* L'ensemble des points critiques de la restriction à $Sta(V)$ de la deuxième projection $p_2 : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ est l'<u>enveloppe</u> <u>à la source</u> de cette famille à deux paramètres de droites (voir [ ]) ; son image par p_2, qui est l'<u>enveloppe</u> <u>au but</u> de cette famille, n'est autre que $Bif(V)$.

Le sous-ensemble $Sta(V)$ de $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^3$ défini par

$$Sta(V) = \left\{ (x,y,u,v,w) \;\middle|\; (x,y) \text{ point critique de } V|\mathbb{R}^2 \times \{u,v,w\} \right\}$$

a pour contour apparent sur l'espace $\mathbb{R}^3$ des paramètres le ensemble de bifurcation $Bif(V)$ que nous voulons étudier.

$Sta(V)$ est défini dans $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^3$ par les équations

$\frac{\partial V}{\partial x} = 0$ et $\frac{\partial V}{\partial y} = 0$, c'est-à-dire

$$\begin{cases} u = w \dfrac{\partial g}{\partial x} + \dfrac{\partial Q}{\partial x} \\ v = w \dfrac{\partial g}{\partial y} + \dfrac{\partial Q}{\partial y} \end{cases}$$

Pour chaque couple (x,y) ces équations définissent une droite dans $\mathbb{R}^3$; $Sta(V)$ est donc un fibré en droites de base $\mathbb{R}^2$. ⁂ voir ci-contre

Les équations de $Bif(V)$ résultent de l'élimination de x et y entre les équations de $Sta(V)$ et l'équation

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 V}{\partial x y} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial x y} & \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \end{pmatrix} = 0 .$$

<u>Notations</u> : On notera $\partial^1 V$, $\partial^2 V$, $\partial^3 V$ les dérivées successives de V par rapport à l'espace des variables internes x, y. On a donc

$$\partial^1 V : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$$
$$\partial^2 V : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow L(\mathbb{R}^2, L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}))$$
$$\partial^3 V : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow L(\mathbb{R}^2, L(\mathbb{R}^2, L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})))$$

A. 2. La restriction à $Sta(V)$ de l'application $p_2 : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ n'est pas générique (génériquement il ne devrait pas y avoir de point où la différentielle a un noyau de dimension 2). On peut cependant se placer dans un cadre générique en considérant l'application (voir [6])

$$F \equiv V \times id \ : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$$

et en faisant les deux remarques suivantes :

(i) $Sta(V)$ n'est autre que l'ensemble $\Sigma^2(F)$ des points de $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^3$ où le noyau de dF est de dimension 2.

(ii) Le noyau de $d(F|\Sigma^2(F))$ coïncide avec le noyau de $d(p_2|\Sigma^2(F))$.

Les singularités de $p_2|Sta(V)$ coïncident donc avec les singularités d'ordre supérieur de l'application générique F.

Les singularités d'ordre 2 se décomposent en une partie lisse $\Sigma^{2,1}(F)$ de dimension 2 et une partie singulière $\Sigma^{2,2}(F)$ de dimension 0 (l'ombilic) : $\Sigma^{2,1}(F)$ est l'ensemble des points (x,y,u,v,w) de $\Sigma^2(F)$ en lesquels le rang de $\partial^2 V(x,y,u,v,w)$ est égal à 1 (se rappeler que $\Sigma^2(F) \equiv Sta(V)$ est l'image inverse de 0 par l'application $\partial^1 V : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$).

Un tel point correspondrait à ~~des~~ singularité locale de corang 1 et de codimension 3 (queue d'aronde): ~~[illegible]~~ dans les petites codimensions le déploiement d'une singularité ne contient que des singularités de codimension strictement inférieure.

$\Sigma^{2,2}(F)$ est défini par les équations $\partial^1 V = 0$, $\partial^2 V = 0$, et se réduit dans les deux cas à l'origine.

Il ne nous reste plus à étudier les singularités d'ordre 3, en l'occurence $\Sigma^{2,1,1}(F)$ qui est de dimension 1 et dont l'image par p_2 est l'ensemble des arêtes de rebroussement de $Bif(V)$. En effet, bien que sa dimension générique soit 0, l'ensemble $\Sigma^{2,1,1,1}(F)$ est vide. X voir ci-contre

Suivant [6], on considère le fibré en droites de base $\Sigma^{2,1}(F)$ qui associe à chaque point (x,y,u,v,w) de $\Sigma^{2,1}(F)$ le noyau de $\partial^2 V(x,y,u,v,w)$; l'espace total de ce fibré est l'image inverse de 0 par l'application

$$\Phi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}) \times L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}) \quad \text{définie par}$$

$$\Phi(x,y,u,v,w,X,Y) = \left(\partial^1 V(x,y,u,v,w),\ \partial^2 V(x,y,u,v,w)(X,Y)\right)$$

Un vecteur $(x',y',0,0,0,X',Y')$ est tangent à ce fibré au point (x,y,u,v,w,X,Y) si et seulement si il est annulé par $d\Phi(x,y,u,v,w,X,Y)$, c'est-à-dire si

$$\begin{cases} \partial^2 V(x,y,u,v,w)(x',y') = 0 \\ \partial^3 V(x,y,u,v,w)(X,Y)(x',y') + \partial^2 V(x,y,u,v,w)(X',Y') = 0 \end{cases}$$

Un point (x,y,u,v,w) appartient à $\Sigma^{2,1,1}(F)$ si et seulement si il existe $(x',y'),(X,Y),(X',Y')$ tels que les équations précédentes soient vérifiées (et si ce point n'appartient pas à $\Sigma^{2,2}(F)$).

Note en bas de page

(*) Il faut exclure de cette image réciproque les points de $\Sigma^{2,2}(F)$.

Puisqu'en un point de $\Sigma^{2,1}(F)$ le noyau de $\partial^2 V(x,y,u,v,w)$ est de dimension 1, on peut supposer que $(x',y') = (X,Y)$; la deuxième équation devient alors

$$\partial^3 V(x,y,u,v,w)(X,Y)^2 + \partial^2 V(x,y,u,v,w)(X',Y') = 0$$

Mais $\partial^2 V(x,y,u,v,w)(X',Y')(X,Y)$

$= \partial^2 V(x,y,u,v,w)(X,Y)(X',Y') = 0$; donc on déduit de l'équation précédente que $\partial^3 V(x,y,u,v,w)(X,Y)^3 = 0$

Réciproquement, s'il existe un point $(x,y,u,v,w,X,Y) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^2$ tel que

$$\begin{cases} \partial^2 V(x,y,u,v,w)(X,Y) = 0 \in L(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}) \\ \partial^3 V(x,y,u,v,w)(X,Y)^3 = 0 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

et si $(X',Y') \in \mathbb{R}^2$ est quelconque, les deux éléments $\partial^2 V(x,y,u,v,w)(X',Y')$ et $\partial^3 V(x,y,u,v,w)(X,Y)^2$ de $L(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ ont leur noyau engendré par le vecteur $(X,Y) \in \mathbb{R}^2$; ils sont donc proportionnels, ce qui montre l'existence d'un élément $(X',Y') \in \mathbb{R}^2$ tel que $\partial^2 V(x,y,u,v,w)(X,Y)^2 + \partial^2 V(x,y,u,v,w)(X',Y') = 0$.

En définitive, $(x,y,u,v,w) \in \Sigma^{2,1,1}(F)$ si et seulement si :

① $(x,y,u,v,w) \notin \Sigma^{2,2}(F)$

② il existe un vecteur non nul $(X,Y) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$\partial^1 V(x,y,u,v,w) = 0 \in L(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$

$\partial^2 V(x,y,u,v,w)(X,Y) = 0 \in L(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$

$\partial^3 V(x,y,u,v,w)(X,Y)^3 = 0 \in \mathbb{R}$.

Remarquons d'ailleurs que $\partial^3 V(x,y,u,v,w)(X,Y)^3 = {}^6Q(X,Y)$.

Dans le cas de l'ombilic hyperbolique, $\Sigma^{2,2}(F)$ est l'origine, et les arêtes de rebroussement de $bif(V)$ sont obtenues en éliminant x, y, X, Y dans les équations suivantes :

$$\begin{cases} 3x^2 - u + wy = 0 \quad , \quad 3y^2 - v + wx = 0 \\ 6xX + wY = 0 \quad , \quad wX + 6yY = 0 \\ X^3 + Y^3 = 0 \end{cases}$$

La réunion de $p_2\Sigma^{2,2}(F)$ et de $p_2\Sigma^{2,1,1}(F)$ est donc une courbe lisse, la parabole d'équations $u = v = \frac{1}{4}w^2$.

Dans le cas de l'ombilic elliptique, $\Sigma^{2,2}(F)$ est l'origine, et les arêtes de rebroussement de $bif(V)$ sont obtenues en éliminant x, y, X, Y dans les équations :

$$\begin{cases} 3(x^2-y^2) + 2wx = u \quad , \quad -6xy + 2wy = v \\ (6x+2w)X - 6yY = 0, \quad -6yX + (-6x+2w)Y = 0 \\ X^3 - 3XY^2 = 0 \end{cases}$$

La réunion de $p_2\Sigma^{2,2}(F)$ et de $p_2\Sigma^{2,1,1}(F)$ est formée de 3 paraboles tangentes à l'origine à l'axe des w, correspondant aux trois solutions réelles $X=0$, $X = \pm Y\sqrt{3}$ de l'équation $X^3 - 3XY^2 = 0$; la parabole correspondant à $X=0$ a pour équations $u = w^2$, $v = 0$, et les 2 autres s'en déduisent par symétrie ternaire.

1.3. Relation avec les ombilics des surfaces de $\mathbb{R}^3$ (voir [illegible]) :

Étant donnée une variété M de dimension 2 plongée dans $\mathbb{R}^3$, on considère l'application

$$F : M \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \quad \text{définie par}$$

$$F(m, u, v, w) = \left(\left(d[m,(u,v,w)]\right)^2, (u, v, w) \right) \quad , \text{ où}$$

d est la distance euclidienne dans $\mathbb{R}^3$.

On voit facilement que $\Sigma^2(F)$ n'est autre que le fibré normal de M dans $\mathbb{R}^3$, canoniquement plongé dans $M \times \mathbb{R}^3$, et que les singularités de $F \mid \Sigma^2(F)$ sont celles de $p_2 \mid \Sigma^2(F)$, où p_2 est la deuxième projection de $M \times \mathbb{R}^3$ sur $\mathbb{R}^3$.

L'ensemble critique de $F \mid \Sigma^2(F)$ est donc l'enveloppe à la source du fibré normal de M dans $\mathbb{R}^3$, considéré comme famille à 2 paramètres de droites de $\mathbb{R}^3$ (l'espace des paramètres étant M).

La partie singulière $\Sigma^{2,2}(F)$ de l'enveloppe à la source est un ensemble discret de points, les centres ombilicaux : un ombilic de M est un point où les rayons de courbure principaux sont égaux (pour la métrique induite de la métrique canonique de $\mathbb{R}^3$) ; le centre de courbure commun à toutes les sections planes normales passant par l'ombilic s'appelle un centre ombilical. Si on prend un tel point comme origine de coordonnées (x, y, z) dans $\mathbb{R}^3$, l'équation de M au voisinage de l'ombilic est de la forme

$\eta = -\frac{1}{k} + \frac{k}{2}(x^2+y^2) +$ termes de degré ≥ 3 (le rayon de courbure principal est $\frac{1}{k}$).

L'application $F : M \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ devient localement

$\tilde{F} : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$, et on voit immédiatement que $\tilde{F}(x,y,0,0,0) = \frac{1}{k^2} +$ termes de degré ≥ 3.

La restriction de $\tilde{F}$ au plan $\mathbb{R}^2 \times \{0,0,0\}$ présente donc dans le cas générique une singularité du type ombilic.

La disposition des lignes de courbure au voisinage d'un ombilic de surface a été étudiée dans le cas générique par Darboux (voir [2]) ; la classification ainsi obtenue ne coïncide pas avec la classification (elliptique ou hyperbolique) du centre ombilical correspondant (voir [6]).

A.4. <u>Description de la bifurcation pour l'ombilic hyperbolique</u> :

$$V = x^3 + y^3 - ux - vy + wxy$$

Les équations de $Bif(V)$ s'obtiennent en éliminant x et y dans les équations suivantes :

$$\begin{cases} u = yw + 3x^2 \quad , \quad v = xw + 3y^2 \\ w^2 = 36xy \end{cases}$$

En particulier, l'intersection de $Bif(V)$ avec le plan $w=0$ est la réunion des deux demi-axes $(v=0,\ u \geq 0)$ et $(u=0,\ v \geq 0)$ (valeurs critiques de l'application $u = 3x^2$, $v = 3y^2$, réalisée par le "moucheron fêlé en quatre").

Les équations étant ~~[illegible]~~ inchangées par la transformation de (x, y, w) en $(-x, -y, -w)$, $Bif(V)$ est symétrique par rapport au plan $w = 0$. L'intersection de $Bif(V)$ avec un plan $w \neq 0$ est formée de deux arcs : une courbe convexe contenant une courbe qui présente un rebroussement ordinaire. Le lecteur se reportera aux figures pour examiner les divers types topologiques apparaissant dans le déploiement. Signalons que l'équation globale de $Bif(V)$ a été donnée par Zeeman dans [8]. On trouvera sur les figures la disposition des strates de croisement (égalité de valeurs critiques).

A.5. <u>Description de la bifurcation pour l'ombilic elliptique :</u>

$$V = x^3 - 3xy^2 - ux - vy + w(x^2+y^2)$$

Les équations de $Bif(V)$ s'obtiennent en éliminant x et y dans les équations suivantes :

$$\begin{cases} u = 2xw + 3(x^2-y^2) \quad , \quad v = 2yw - 6xy \\ w^2 = 9(x^2+y^2) \end{cases}$$

L'intersection de $Bif(V)$ avec le plan $w = 0$ se réduit à l'origine, seule valeur critique de l'application $u = 3(x^2-y^2)$, $v = -6xy$ (c'est-à-dire $z \mapsto$ conjugué de $3z^2$)

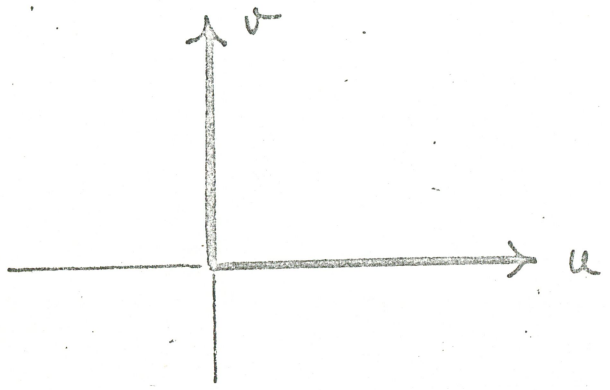
~~[illegible]~~

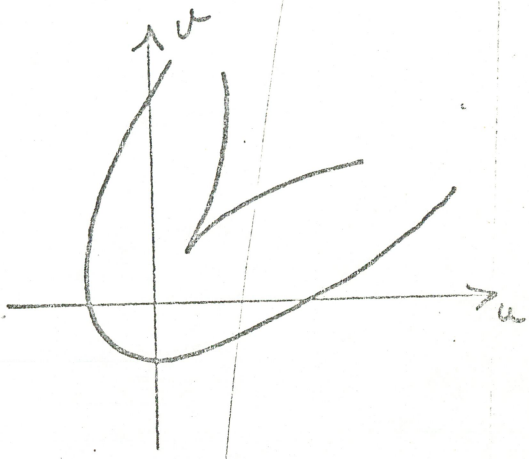
Ici encore, $Bif(V)$ est symétrique par rapport au plan $w = 0$. L'intersection de $Bif(V)$ avec un plan $w \neq 0$ est l'ensemble des valeurs critiques de l'application $z \mapsto 2wz +$ conjugué de $3z^2$; c'est une hypocycloïde à 3 rebroussements (voir [1] et figure 5).

En définitive, Bif(V) est un double cône effilé de base une hypocycloïde à 3 rebroussements.

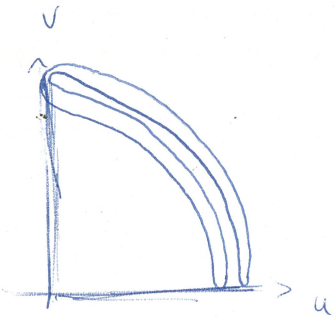
La fonction $V(x, y, 0, 0, 0)$ est bien connue : son graphe est la célèbre "selle de singe" qui présente pour cet animal l'avantage d'une dépression où vient se loger sa queue (figure 4).

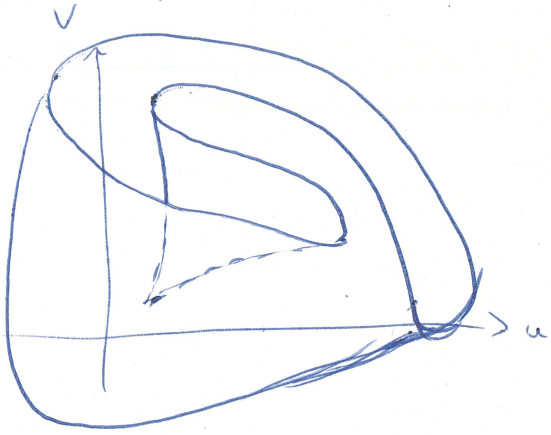
A.6 Figures pour l'ombilic hyperbolique :

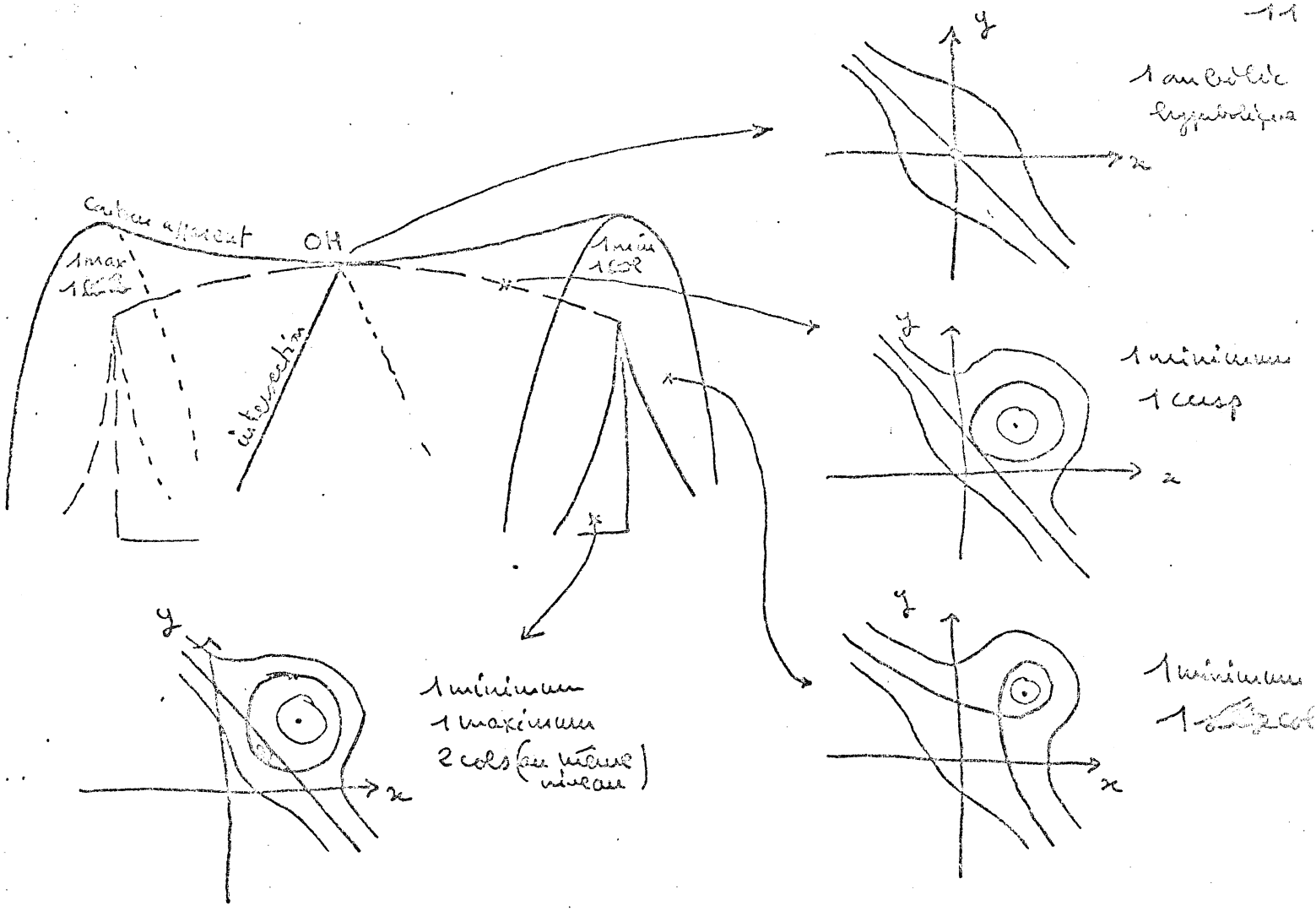




1. Intersection de Bif(V) avec un hyperplan $w = cste$
(à gauche $w = 0$, à droite $w \neq 0$)

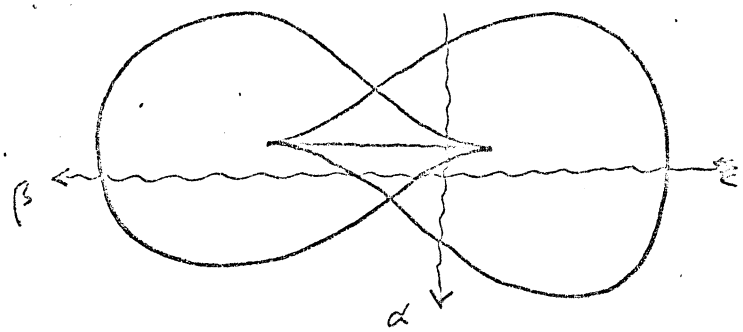






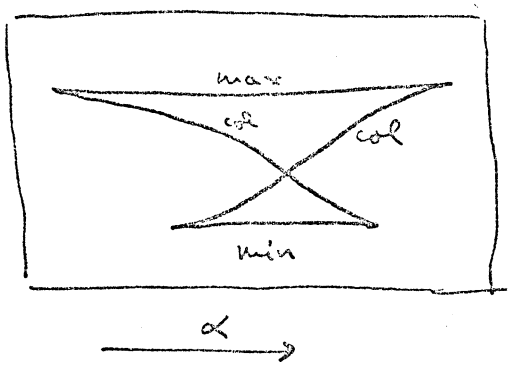
2 - Intersection de $Bif(V)$ avec une petite boule $D^3 \subset \mathbb{R}^3$

[En regard de certains points $(u,v,w) \in D^3$ on a dessiné les lignes de niveau de la fonction $(x,y) \longmapsto V(x,y,u,v,w)$]



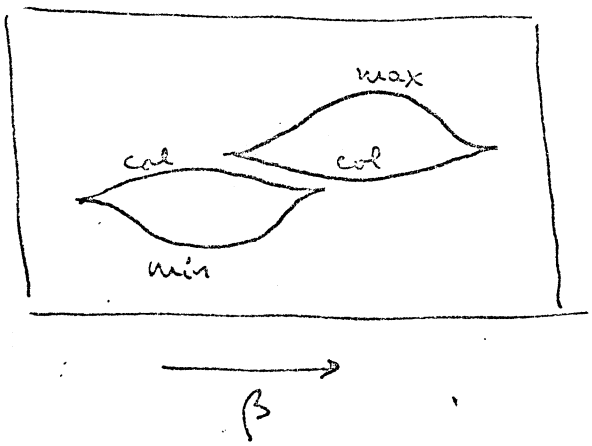
3. Intersection de $Bif(V)$ avec $\partial D^3 \cong S^2 \subset \mathbb{R}^3$

Si on suit sur S^2 le chemin α, on obtient un chemin de fonctions dont le graphique est une double queue d'aronde (rappelons que le graphique d'un chemin $\{f_t \mid t \in I\}$ est la partie de $I \times I$ définie par $\{(t_1, t_2) \mid t_2$ valeur critique de $f_{t_1}\}$

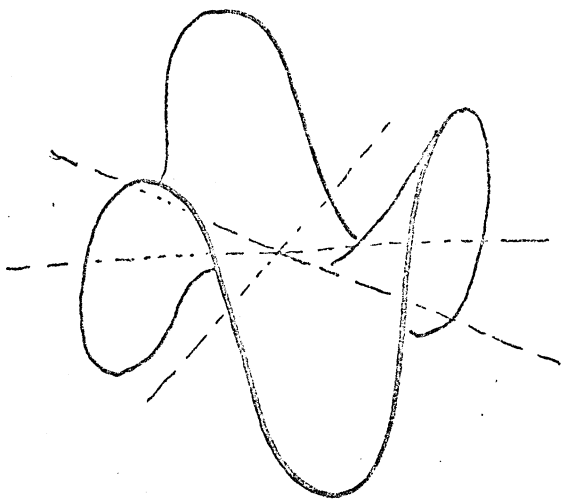


Si on suit le chemin β, on réalise le passage d'un régime stable à un régime instable

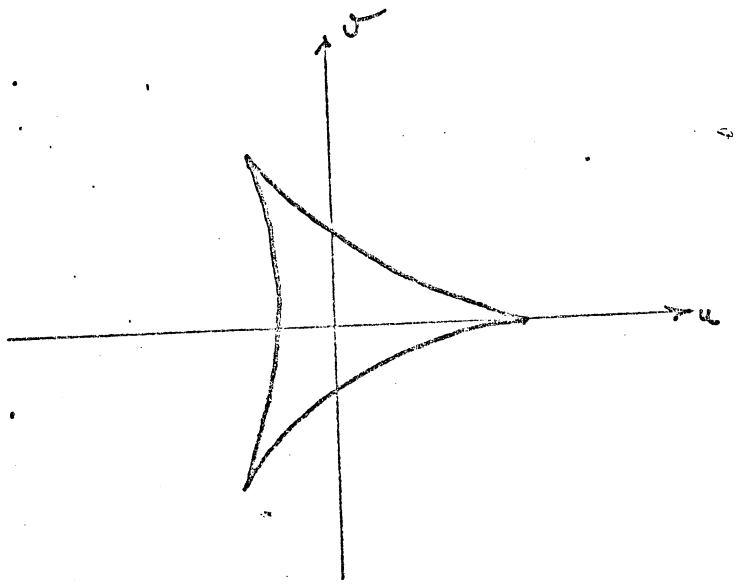
le graphique est



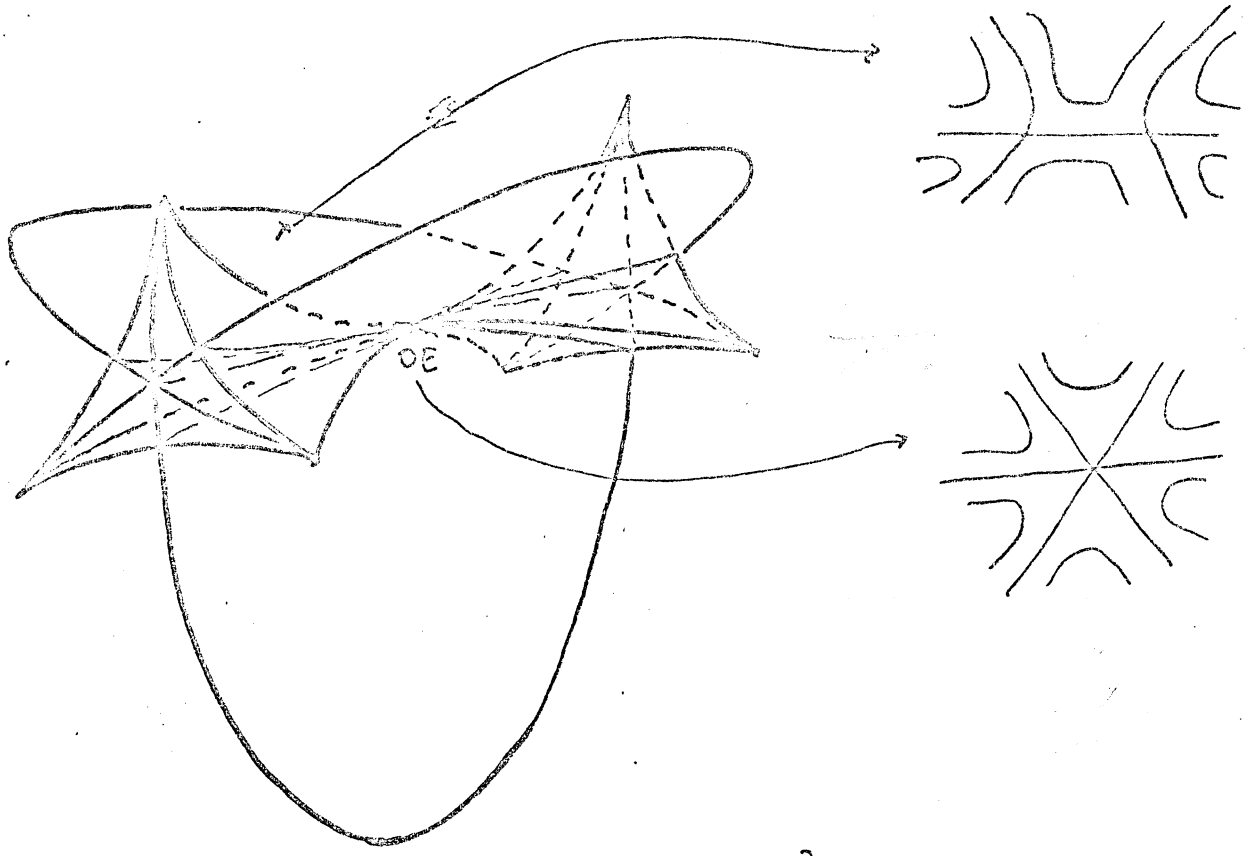
A.7 Figures pour l'ombilic elliptique :



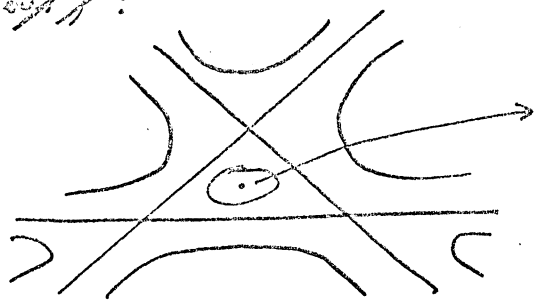
4 - Graphe de la fonction $V(x,y,0,0,0)$ (selle de singe).
En pointillé, intersection avec $V=0$.



5. Intersection de $Bif(V)$ avec un hyperplan $w \neq 0$



6 - Intersection de $\dot{\mathrm{Rif}}(V)$ avec $D^3 \subset \mathbb{R}^3$. Les trois demi-plans correspondant à des pairs de cols au même niveau se rencontrent suivant une ligne : sur cette ligne, les fonctions ont trois cols au même niveau (figure ci-dessous)



max ou min suivant le ½ cône considéré.

B. L'ombilic parabolique :

En accord avec [3] on a choisi (*) le déploiement universel

$$V = x^2y + y^4 - ux - vy + wx^2 + ty^2$$

B.1 L'étude ci-dessous est analogue à celle des singularités normales des surfaces dans $\mathbb{R}^4$ (voir [6]).

Comme dans le paragraphe précédent, on se place dans une situation générique en considérant l'application

$$F \equiv V \times id \ : \ \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}^4$$

Les remarques (i) et (ii) du début du paragraphe A.2 sont encore valables à condition de remplacer $\mathbb{R}^3$ par $\mathbb{R}^4$.

$Sta(V) \equiv \Sigma^2(F)$ est l'image inverse de 0 par l'application $\partial^1 V : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^4 \longrightarrow L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, et est donc défini dans $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^4$ par les équations

$$\begin{cases} u = 2x(y+w) \\ v = 2yt + x^2 + 4y^3 \end{cases}$$

Les équations de $Bif(V)$ (projection sur $\mathbb{R}^4$ de l'ensemble critique de $F|\Sigma^2(F)$) s'obtiennent en éliminant x et y dans les équations ci-dessus auxquelles on adjoint l'équation $dét(\partial^2 V) = 0$, c'est-à-dire

$$(y+w)(6y^2+t) - x^2 = 0$$

Cette élimination est faite dans [3].

(*) On a déjà signalé dans le chapitre 3 qu'il existe essentiellement une unique façon de rendre le jet de x^2y suffisant par addition

L'ensemble critique de $F \mid \Sigma^2(F)$ se décompose en une partie lisse $\Sigma^{2,1}(F)$ de dimension 3 définie par la condition $\operatorname{rang}(\partial^2 V) = 1$, et une partie singulière $\Sigma^{2,2}(F)$ de dimension 1, la courbe des centres ombilicaux, définie par l'annulation de $\partial^2 V$, c'est-à-dire par les équations

$$\begin{cases} u = 2x(y+w) \quad , \quad v = 2yt + x^2 + 4y^3 \\ 2(y+w) = 0 \quad , \quad 2x = 0 \quad , \quad 2(6y^2+t) = 0 \end{cases}$$

L'image $p_2 \Sigma^{2,2}(F)$ dans $\mathbb{R}^4$ de cette courbe est donnée par les équations

$$u = 0, \quad t = -6w^2 \quad , \quad v = -\frac{4}{3} t w$$

La section par l'hyperplan $u = 0$ de $\operatorname{Bif}(V)$ n'est donc pas générique (voir figure 13, où l'on remarquera également l'intersection avec $p_2 \Sigma^{2,1,1}(F)$).

Le type de l'ombilic dépend (voir [6]) de la forme cubique

$$(X,Y) \longmapsto \partial^3 V(x,y,u,v,w,t)(X,Y)^3 = X^2 Y + 4y Y^3,$$

qui s'écrit encore lorsque $(x,y,u,v,w,t) \in \Sigma^{2,2}(F)$:

$$(X,Y) \longmapsto X^2 Y - 4w Y^3$$

Si $w > 0$ il y a trois racines réelles et l'ombilic est elliptique ; si $w < 0$ il n'y a qu'une racine réelle et l'ombilic est hyperbolique ; si $w = 0$, il y a une racine double et l'ombilic est parabolique.

Dans [6] on remarque que dans les singularités normales d'une surface de $\mathbb{R}^4$ (ou d'une famille à 1 paramètre de surfaces de $\mathbb{R}^3$) les ombilics paraboliques apparaissent génériquement comme points isolés sur la courbe des ombilics mais n'appartiennent pas génériquement à $\Sigma^{2,2,1}(F)$; en effet, la codimension générique de $\Sigma^{2,2,1}(F)$ est 7, et cette singularité n'apparaît génériquement (comme points isolés sur une ligne d'ombilics paraboliques) que pour une surface de $\mathbb{R}^5$. On est ici en présence d'un exemple où la connaissance du symbole de Boardman ne suffit pas à déterminer le type topologique d'un germe d'application algébrique stable (voir à ce propos [5])

Les singularités d'ordre supérieur sont $\Sigma^{2,1,1}(F)$ de dimension 2, et $\Sigma^{2,1,1,1}(F)$ de dimension 1. Un calcul analogue à celui de la fin du paragraphe A.2 montre que $(x,y,u,v,w,t) \in \Sigma^{2,1,1}(F)$ si et seulement si

(1) $(x,y,u,v,w,t) \notin \Sigma^{2,2}(F)$

(2) il existe un vecteur non nul $(X,Y) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\begin{cases} u = 2x(y+w), \quad v = 2yt + x^2 + 4y^3 \\ \begin{pmatrix} 2(y+w) & 2x \\ 2x & 2(6y^2+t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ X^2 Y + 4y\, Y^3 = 0 \end{cases}$$

Une composante de $\overline{\Sigma^{2,1,1}(F)}$ est contenue dans l'hyperplan $u=0$ et a pour équations

$$u=0, \quad v = -4w^3 - 2tw, \quad x=0, \quad y=-w$$

Une deuxième composante est donnée par les équations

$$\begin{cases} u = 2x(y+w) \quad ; \quad v = 2yt + x^2 + 4y^3 \\ x^2 + 4y(y+w)^2 = 0 \quad , \quad 10y^2 + t + 4yw = 0 \end{cases}$$

Quant aux équations donnant $\overline{\Sigma^{2,1,1,1}(F)}$, elles sont données par un calcul du même type (voir [6], ou [4] pour une présentation plus systématique). On trouve une courbe définie par les équations

$$u^2 = -64^2 y^5 \ , \ v = -40y^3 \ , \ w = -5y \ , \ t = 10y^2 \ , \ x^2 = -64y^3$$

(avec $xu \geq 0$)

La figure 14 représente (non générique) l'intersection de Bif( ) avec le cylindre parabolique d'équation $t = \frac{2w^2}{5}$.

Génériquement, l'intersection de $P_2 \Sigma^{2,1,1,1}(F)$ avec une hypersurface de $\mathbb{R}^4$ est de dimension 0 (points de rebroussement sur une arête de rebroussement).

<u>Remarque</u> (voir [6]) : On peut montrer directement que l'intersection avec $\Sigma^{-2,2}(F)$ de $\overline{\Sigma^{2,1,1,1}(F)}$ est formée de points paraboliques ; dans notre cas, elle se réduit à l'origine.

B.2. <u>Description de la bifurcation pour l'ombilic parabolique</u> :

Bif(V) est une variété algébrique de codimension 1 de $\mathbb{R}^4$. Topologiquement (mais non différentiablement) c'est un cône sur son intersection avec une petite sphère S^3 centrée à l'origine.

C'est cette intersection que nous décrivons dans les figures ci-dessous ; pour les construire nous nous sommes inspiré

des sections données dans [3]. En fait, il suffit de connaître la trace de $Bif(V)$ sur le plan (u,v) lorsqu'on décrit dans le plan (t,w) un lacet centré à l'origine (voir figure 11).

B.3 <u>Étude topologique de la singularité "ombilic parabolique" dans le plan des variables internes (stabilisation d'un seuil)</u> :

Le graphe de la fonction $V(x,y,0,0,0,0) = x^2y + y^4$ est donné à la figure . Suivant [7], considérons l'équation différentielle $\frac{dx}{2xy} = \frac{dy}{x^2+4y^3}$ déterminant les lignes de gradient de cette fonction ; et cherchons la position limite du champ suivant la droite $y = mx$ lorsque x tend vers 0 ; $\frac{dy}{dx} = \frac{1+4m^3x}{2m}$ a pour limite $\frac{1}{2m}$, ce qui montre qu'il y a (outre l'axe Oy) deux directions ($y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}x$) pour lesquelles la limite est la direction elle-même. De plus (en se limitant au premier quadrant) si un point (x,y) vérifie $\frac{y}{x} = m > \frac{1}{\sqrt{2}}$, le vecteur en ce point a une pente inférieure (resp. supérieure) à m lorsque $x < \frac{2m^2-1}{4m^3}$ (resp. $x > \frac{2m^2-1}{4m^3}$) ; si $m < \frac{1}{\sqrt{2}}$, le vecteur au point (x,y) a toujours une pente supérieure à m.

Les lignes intégrales du champ se séparent en deux catégories

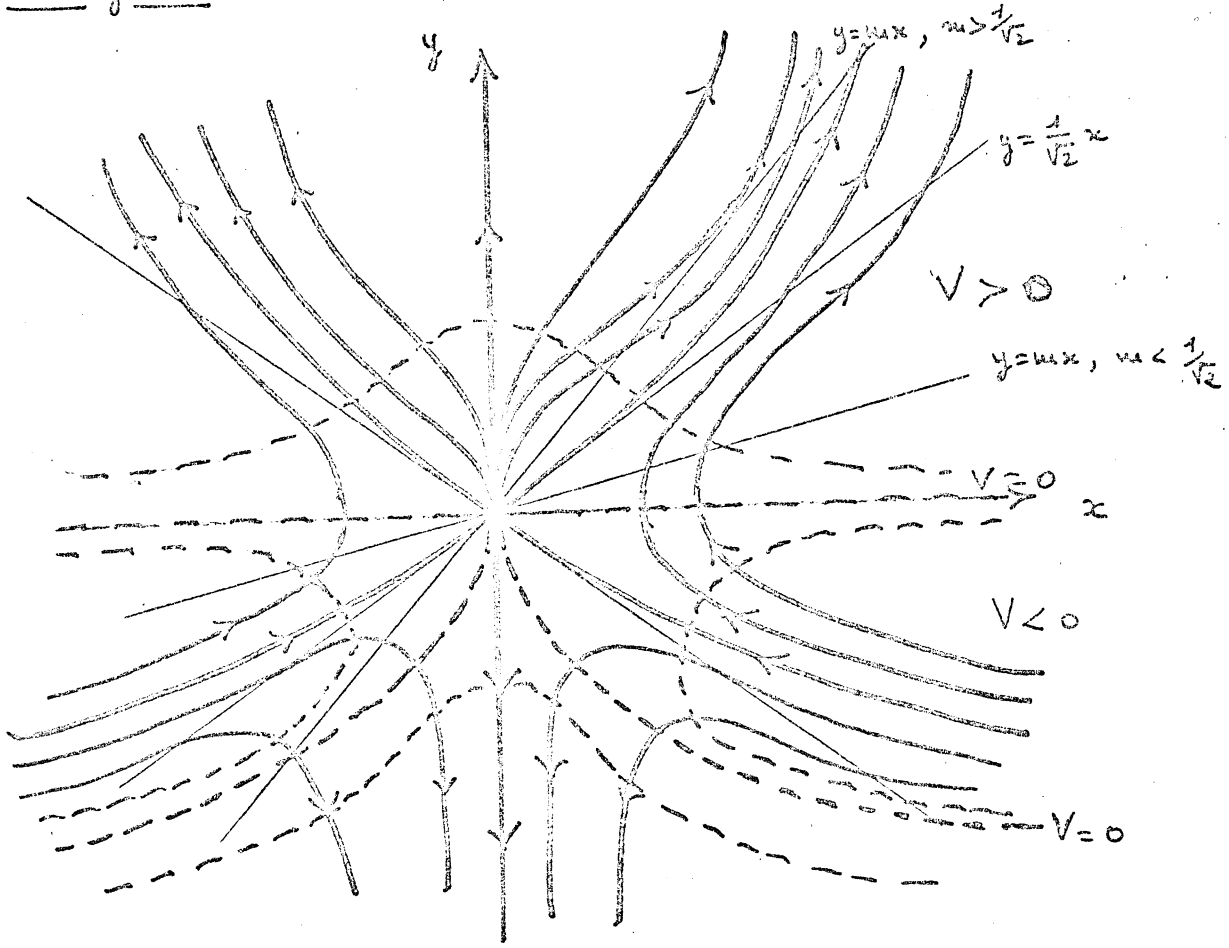
(i) celles qui rencontrent la droite $y = \frac{1}{\sqrt{2}}x$ en un point autre que l'origine, et qui de ce fait n'admettent aucune tangente passant par l'origine,

(ii) celles qui ont une tangente passant par l'origine, et qui de ce fait sont tangentes en O à l'axe Oy.

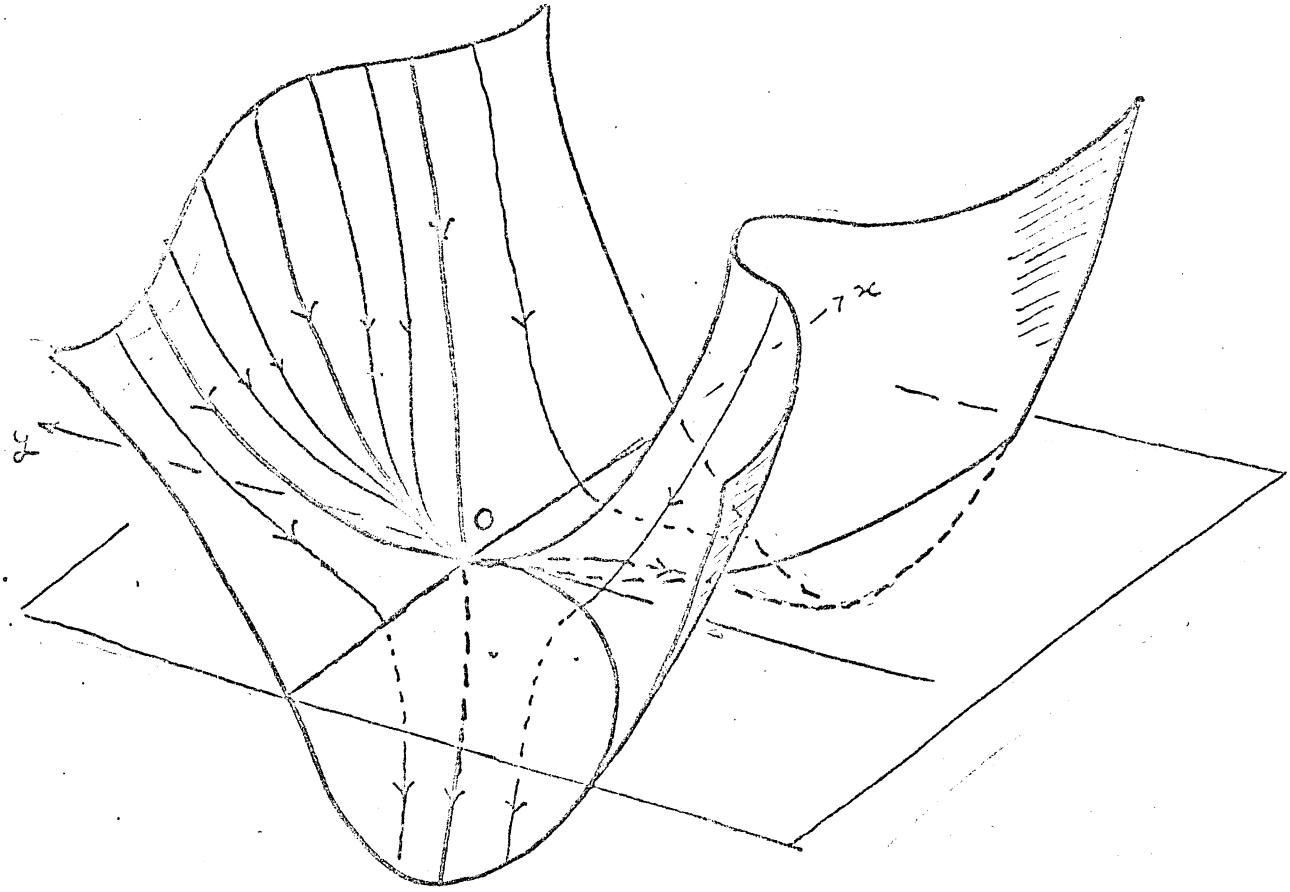
La transition entre ces deux catégories se fait par une séparatrice tangente à l'origine à la droite $y = \frac{1}{\sqrt{2}} x$. On raisonne de même dans les autres quadrants, ce qui donne l'allure qualitative des lignes intégrales (figure 7).

Contrairement à ce qui se passe pour un col ordinaire, la probabilité pour qu'un point pesant posé sur le graphe de $V(x, y, 0, 0, 0, 0)$ à un niveau positif atteigne l'origine est non nulle : le seuil est stabilisé !

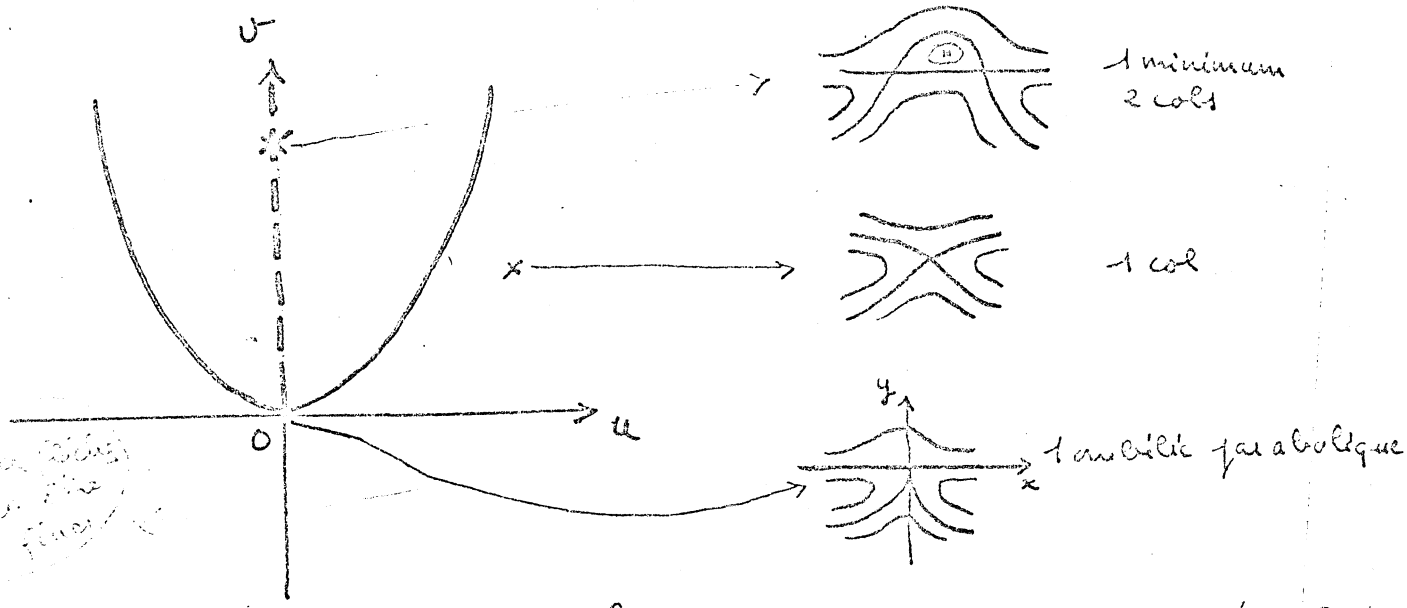
B.4 Figures :



7 – Lignes de gradient et courbes de niveau de $V(x, y, 0, 0, 0, 0)$ (les courbes de niveau sont en pointillé)



8. Graphe de $V(x,y,0,0,0,0)$ et champ $-\operatorname{grad} V$

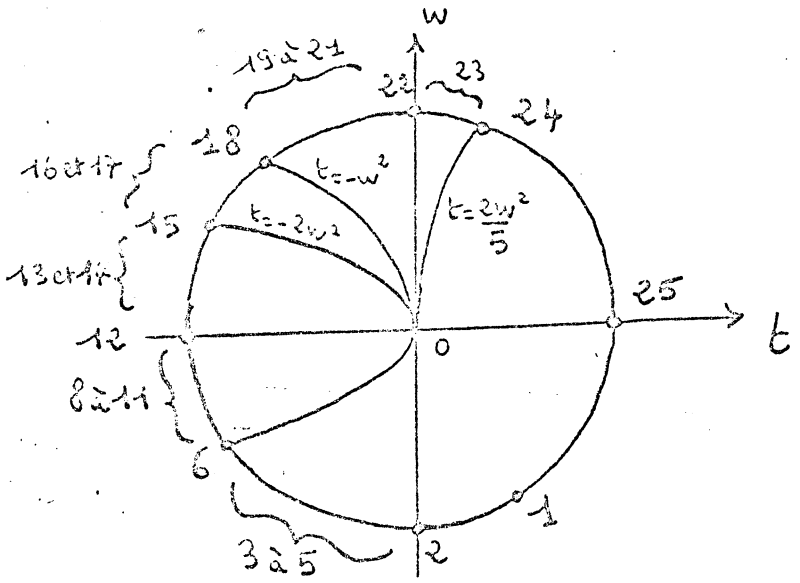


9. Intersection de $\mathrm{Bif}(V)$ avec le sous-espace $w = t = 0$ de $\mathbb{R}^4$ (équation $v = \text{cste} \times |u|^{6/5}$).

Dans la figure ci-dessous et dans les suivantes, on a représenté, en face des points correspondant dans le plan des (u,v), les lignes de niveau de la fonction

$$(x,y) \longmapsto V(x,y,u,v,w,t)$$

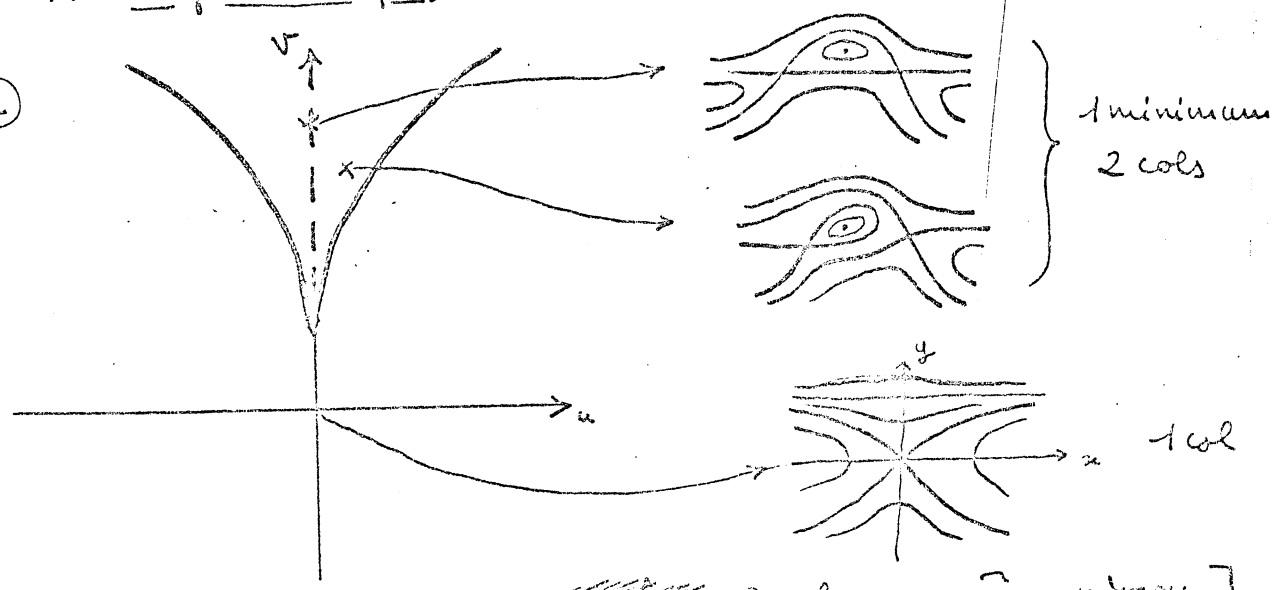
Lorsqu'on n'a pas fait de calcul précis, on n'a pas marqué les axes Ox et Oy. De plus, on a indiqué les strates correspondant à



10 - Valeurs de (t, w) correspondant aux 25 figures qui suivent

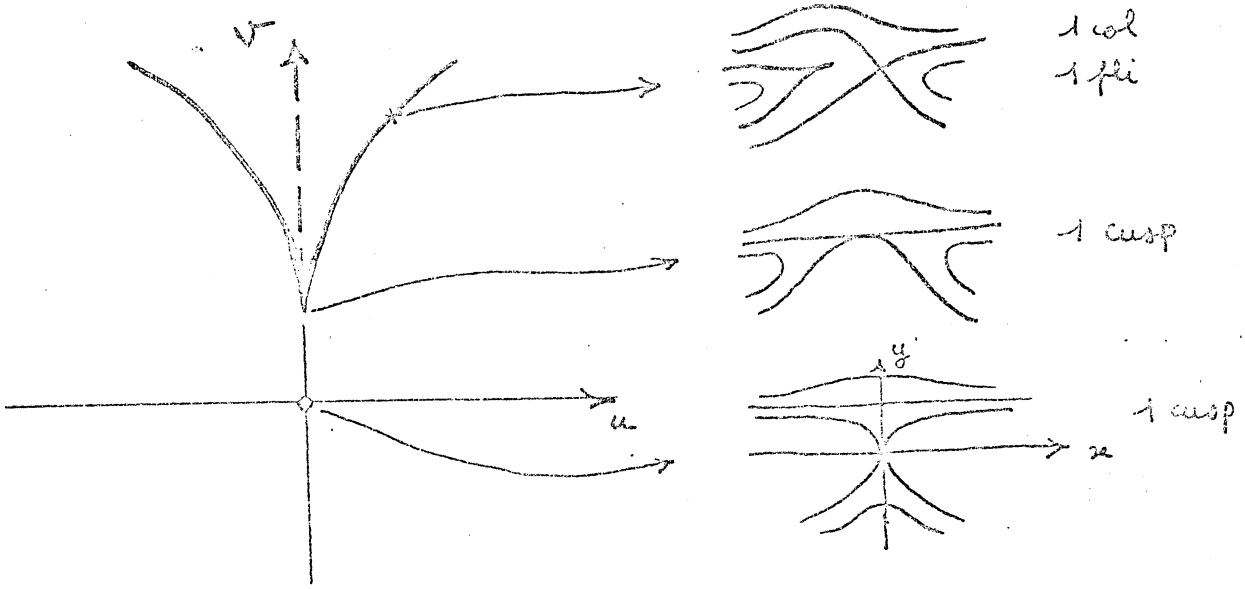
11 - Coupes de Bif(V) :

(1)

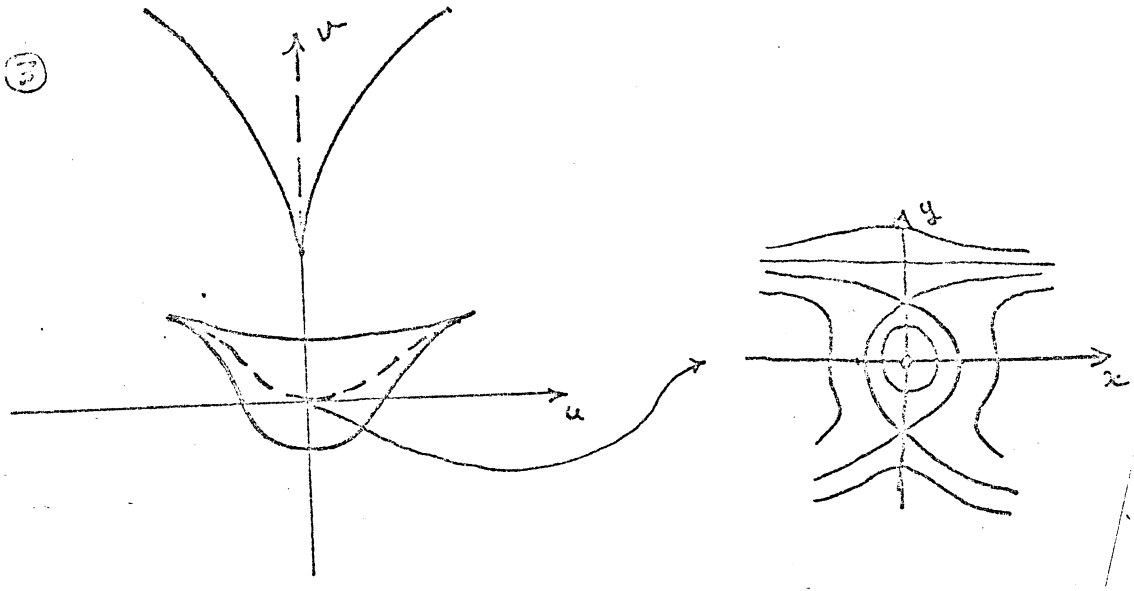


[en pointillés - - - - 2 cols au même niveau]

(2)

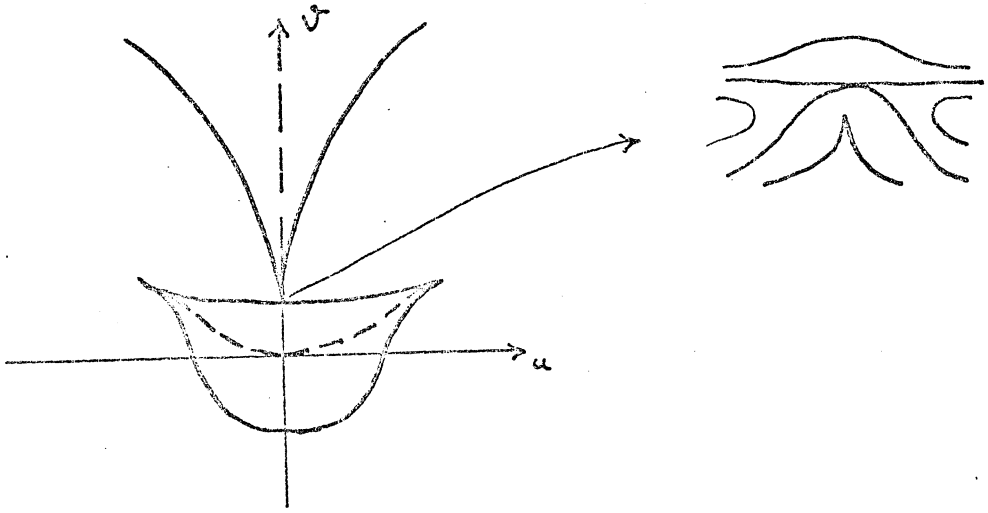


3



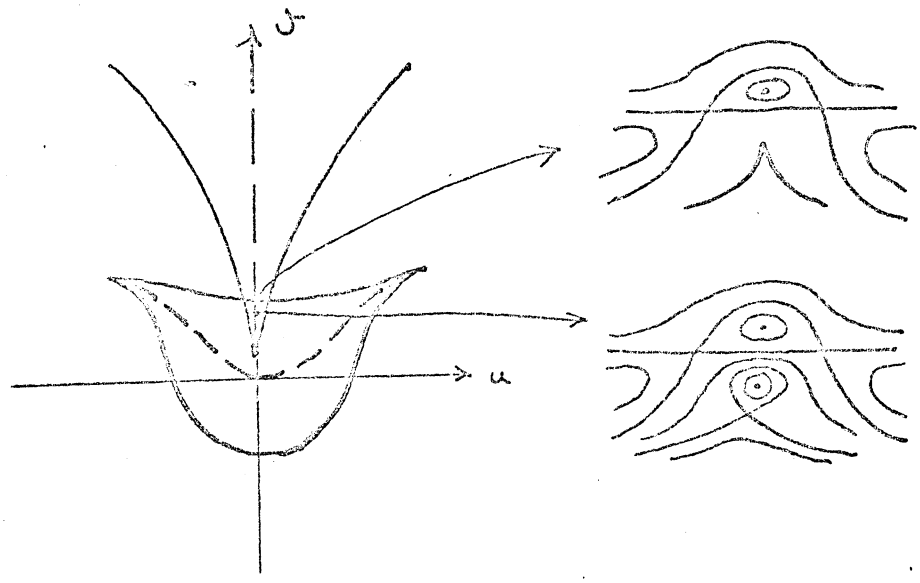
1 maximum
2 cols

4



1 pli
1 cusp

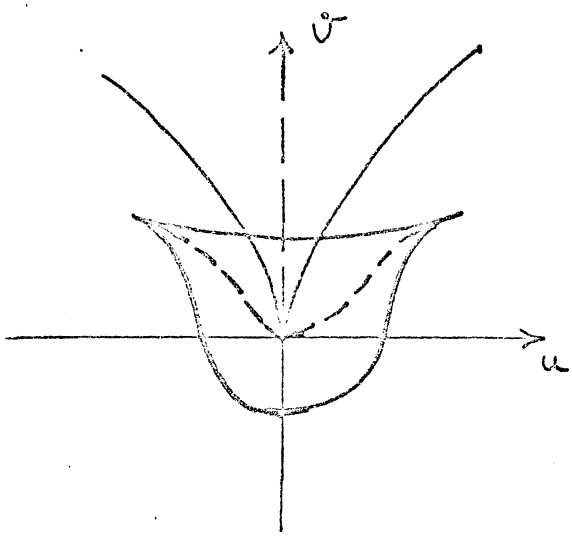
5

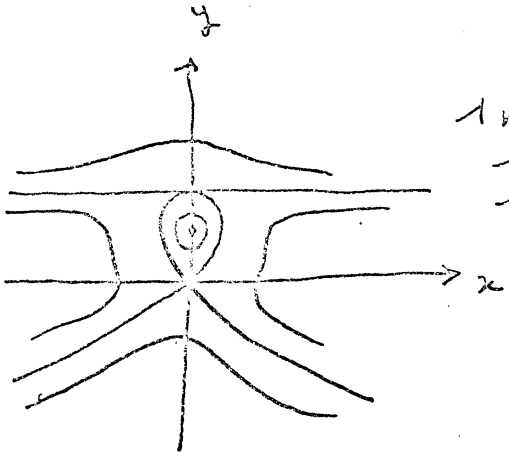


1 minimum
2 cols
1 pli

1 minimum
3 cols
1 maximum

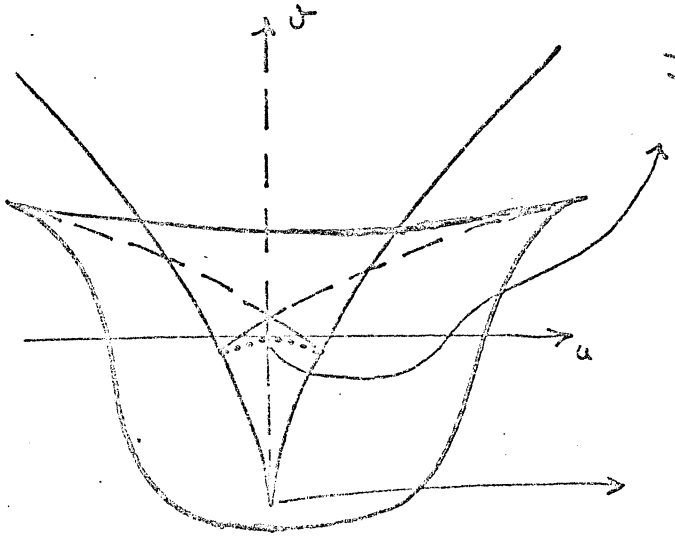
③

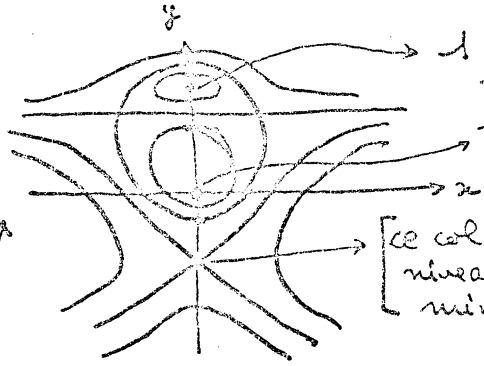




1 maximum
1 col
1 cusp

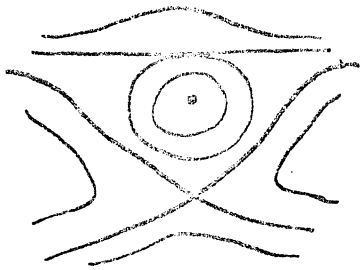
④





1 minimum
3 cols
1 maximum

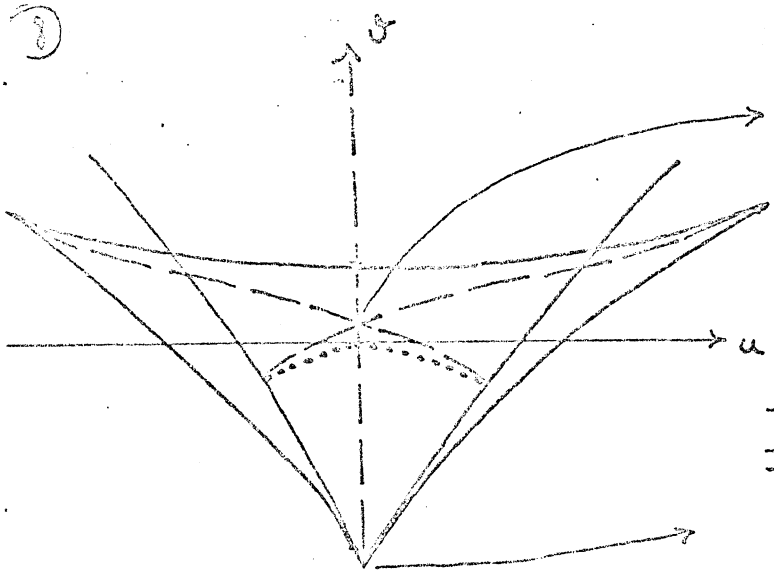
[ce col est au même niveau que le minimum]

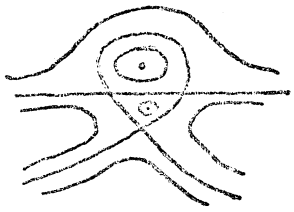


1 maximum
1 col
1 cusp

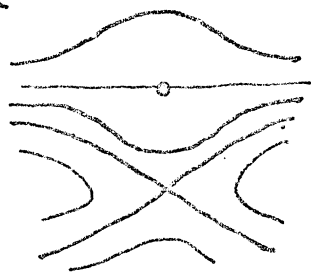
[en pointillés .... 1 col et un minimum au même niveau]

⑤



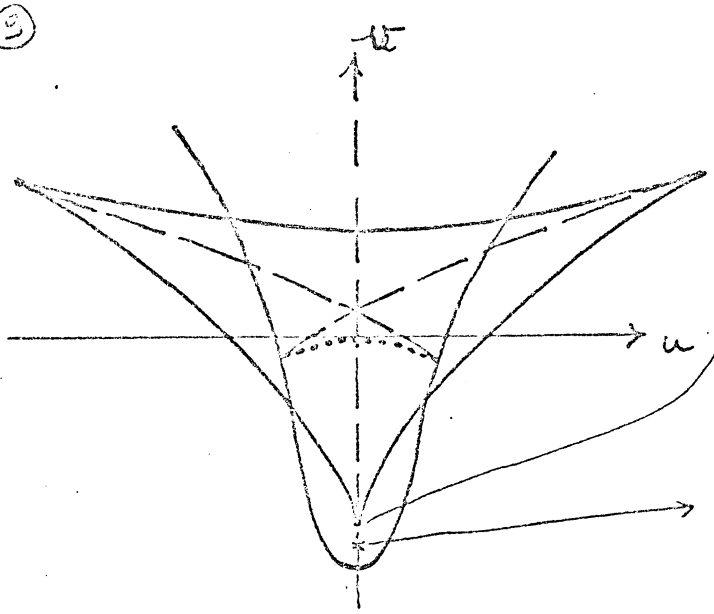


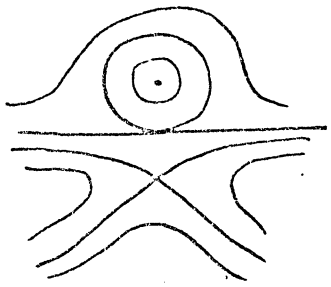
1 minimum
3 cols
1 maximum



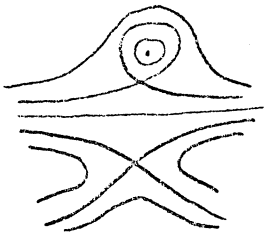
1 col
1 ombilic hyperbolique

(9)



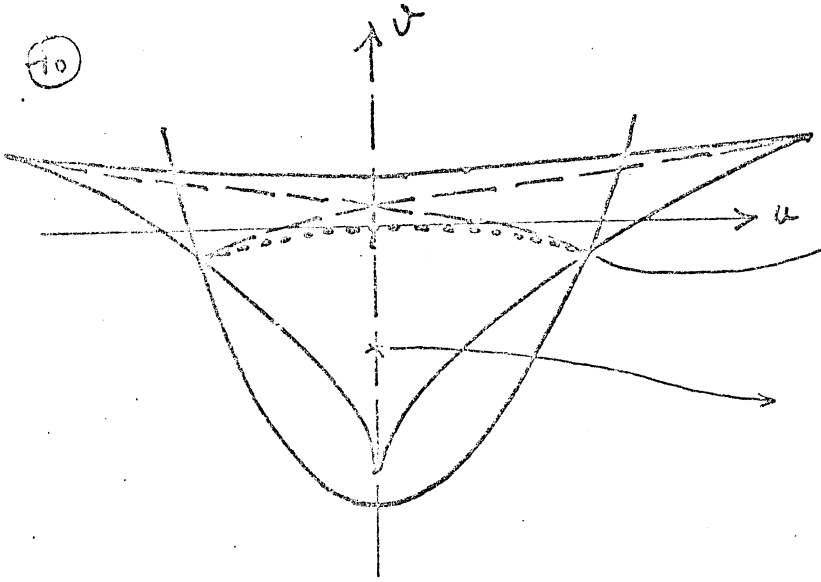


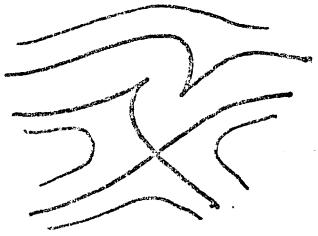
1 minimum
1 col
1 cusp



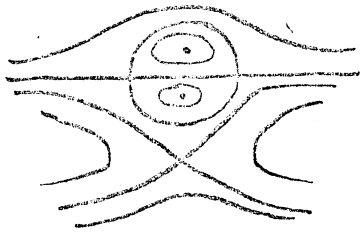
1 minimum
2 cols

(10)



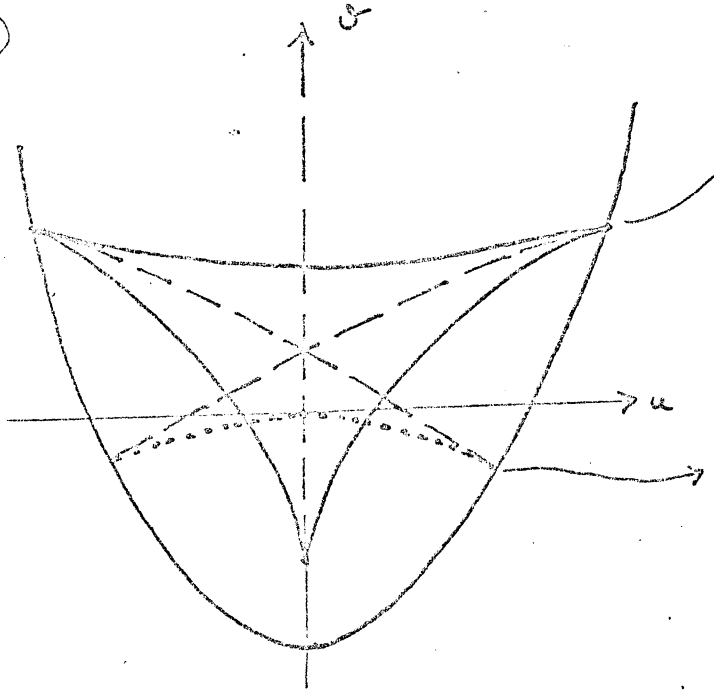


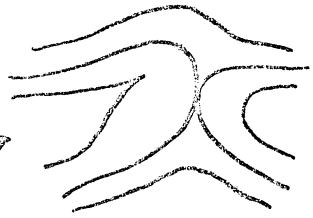
1 col
2 plis



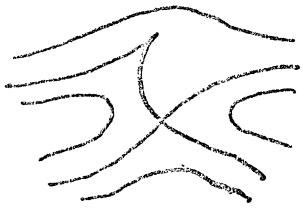
1 minimum
3 cols
1 maximum

(11)



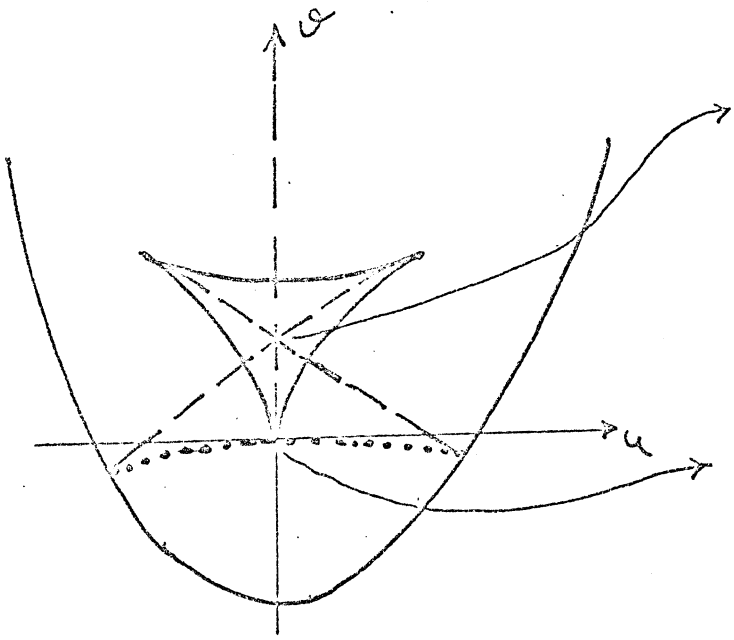


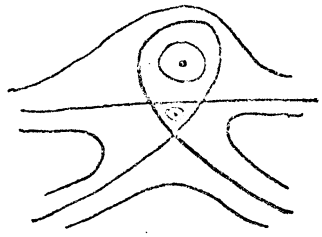
1 pli
1 cusp



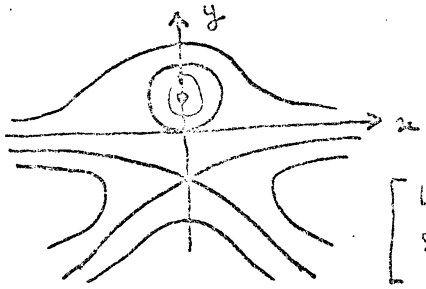
1 pli
1 col

(12)





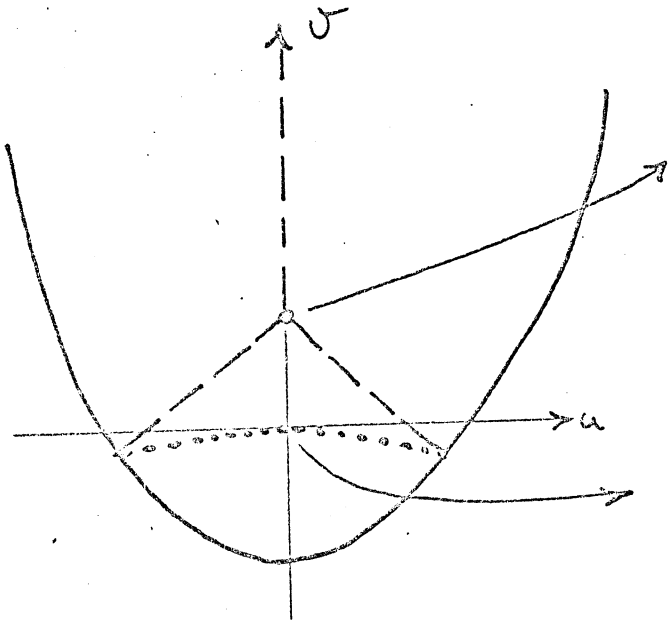
1 minimum
3 cols
1 maximum

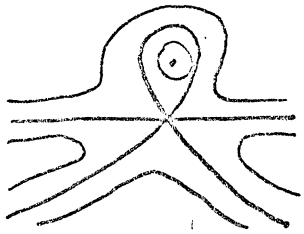


1 minimum
1 col
1 cusp

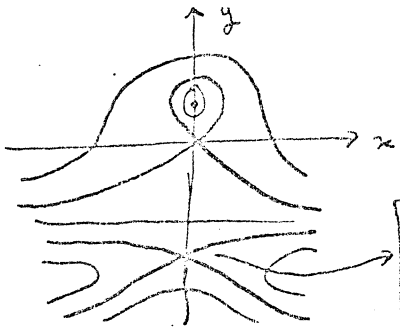
[le col et le min. sont au même niveau]

(13)





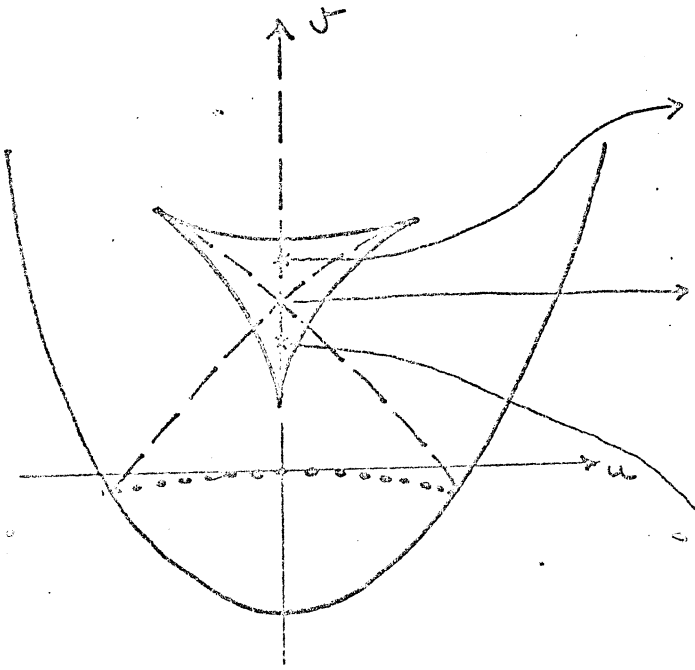
1 minimum
1 ombilic elliptique

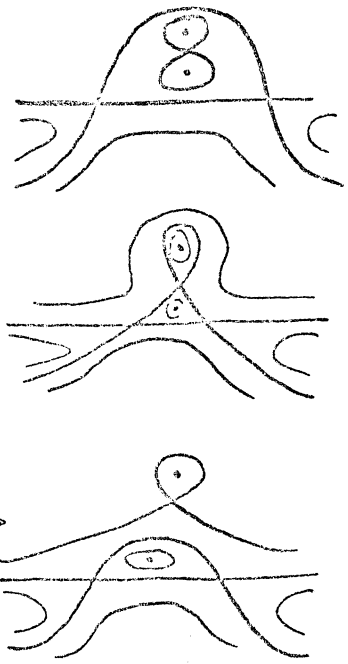


1 minimum
2 cols

[ce col est au même niveau que le minimum]

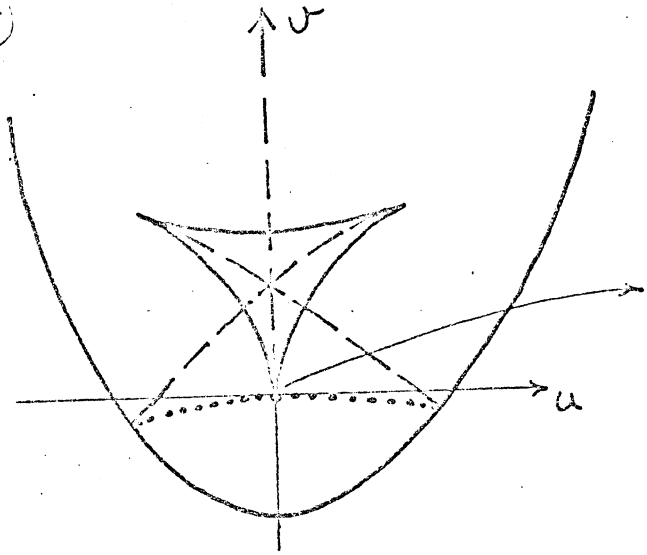
(14)

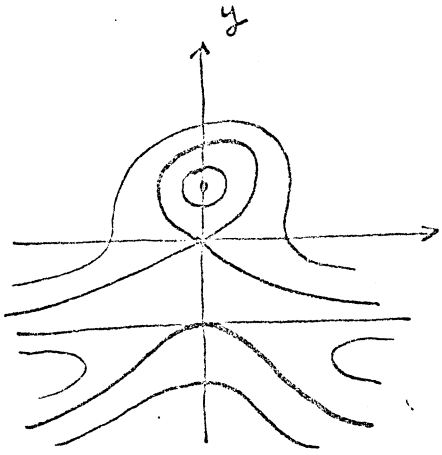




2 minima
3 cols

(15)

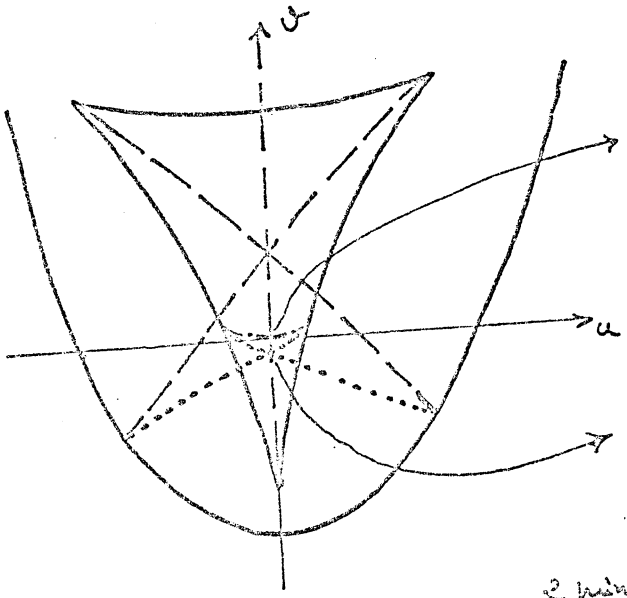


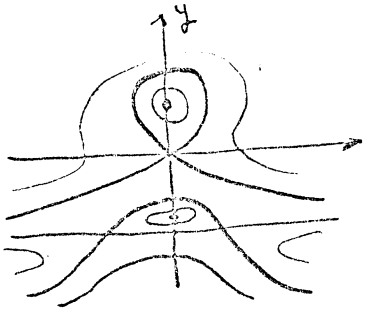


1 minimum
1 col
1 cusp

[Le minimum est au même niveau que le cusp.]

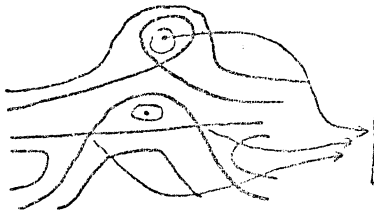
(16)





2 minima
3 cols

[Les 2 minima sont au même niveau]

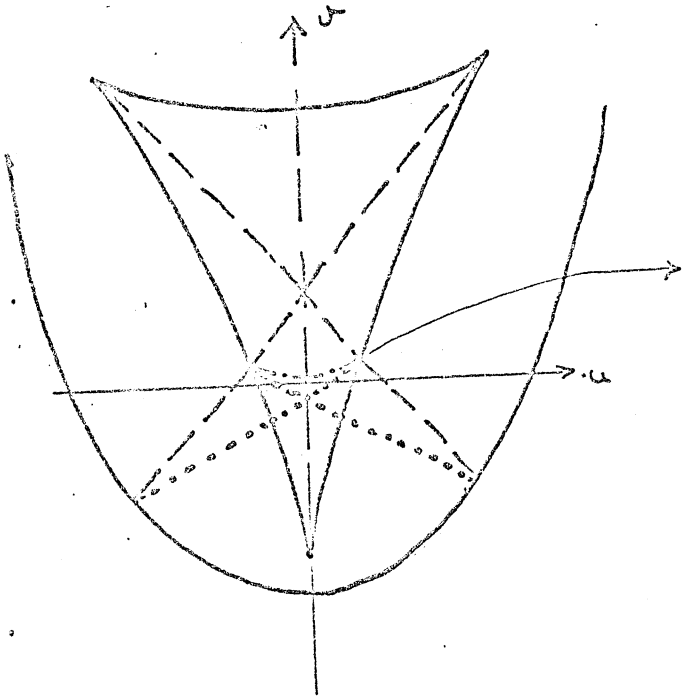


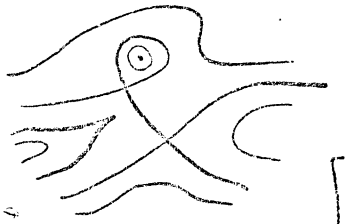
2 minima
3 cols

[1 min et 2 cols au même niveau]

[en pointillés —·—·— 2 minima au même niveau]

(17)

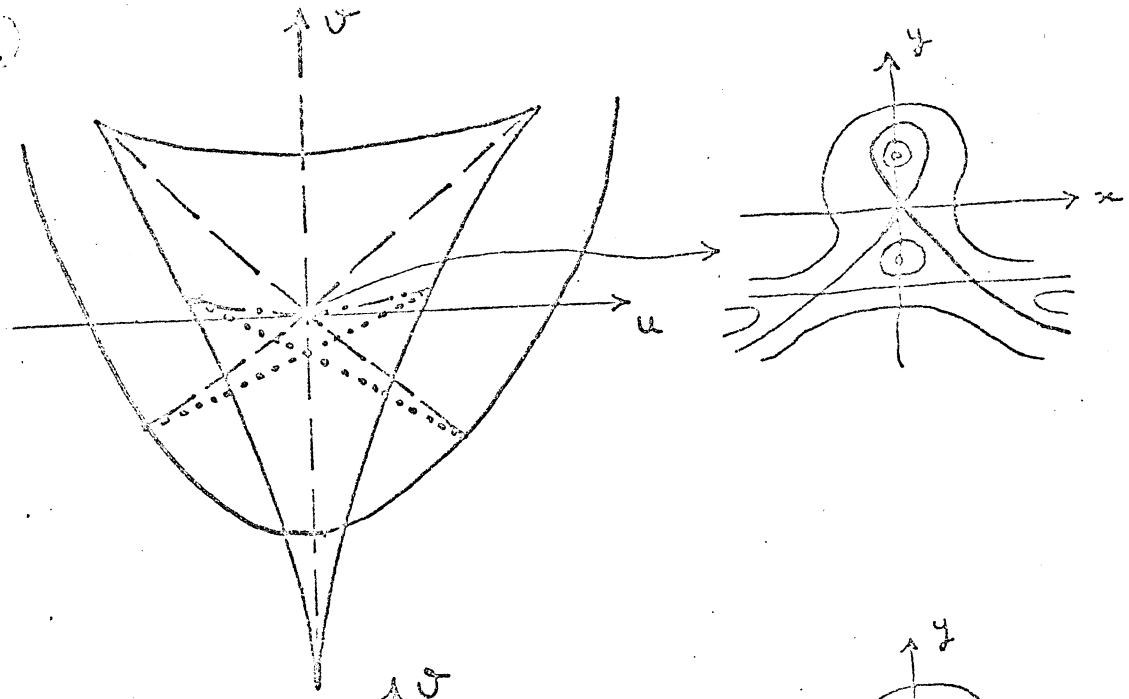




1 minimum
2 cols
1 pli

[le pli et le minimum sont au même niveau]

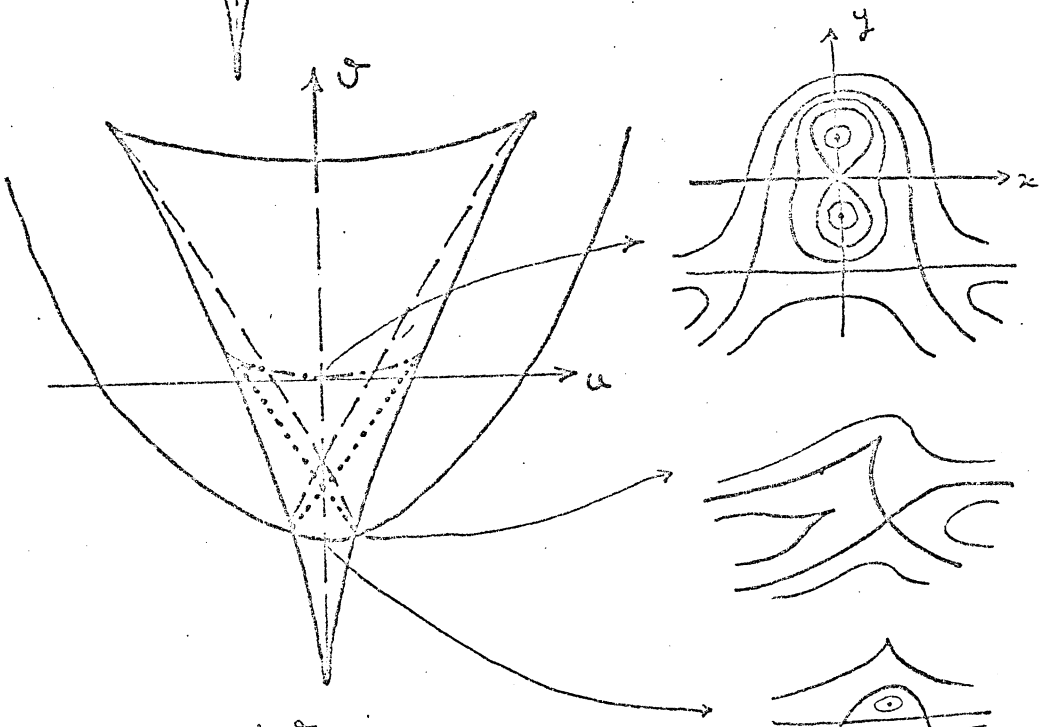
(18)



2 minima
3 cols

[les 2 minima sont au même niveau]

(19)



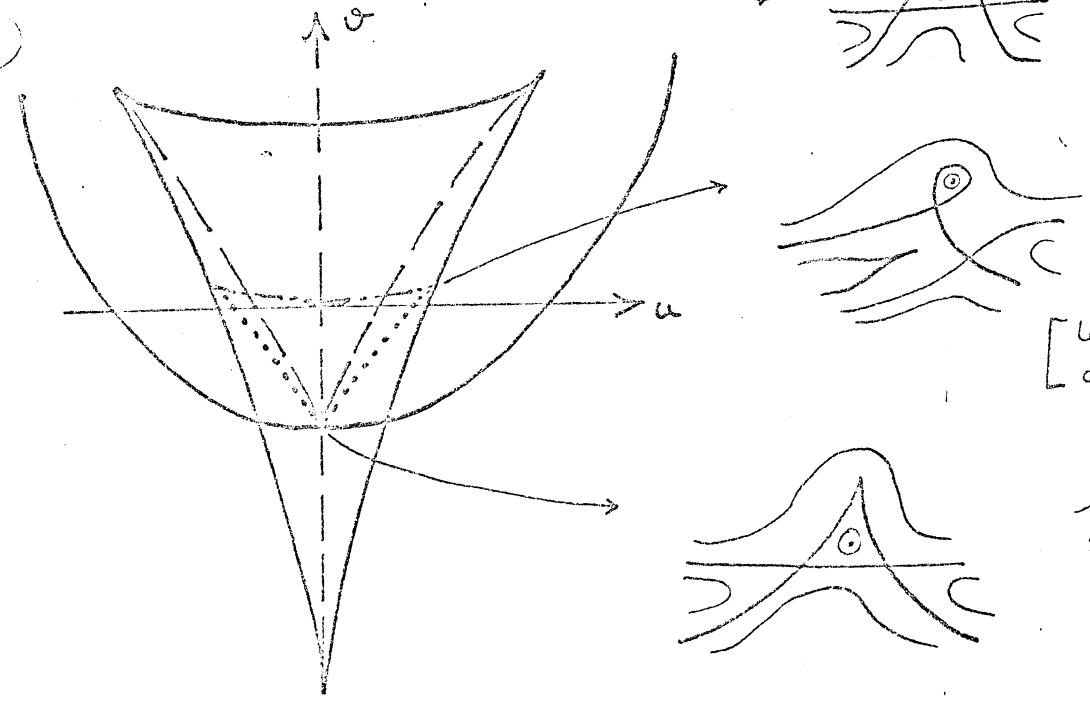
2 minima
3 cols

[Les 2 minima sont au même niveau]

1 col
2 plis

1 minimum
2 cols
1 pli

(20)

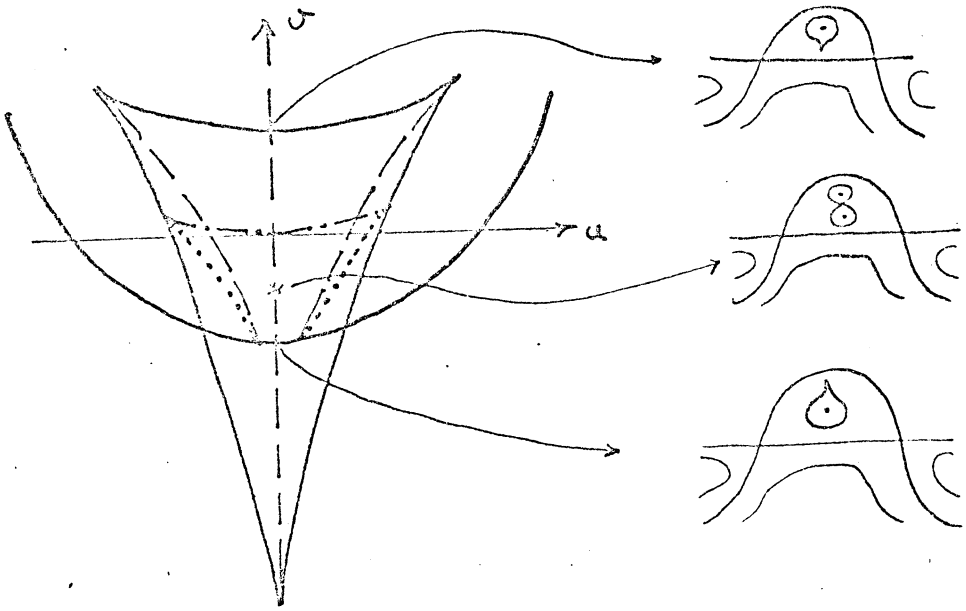


1 minimum
2 cols
1 pli

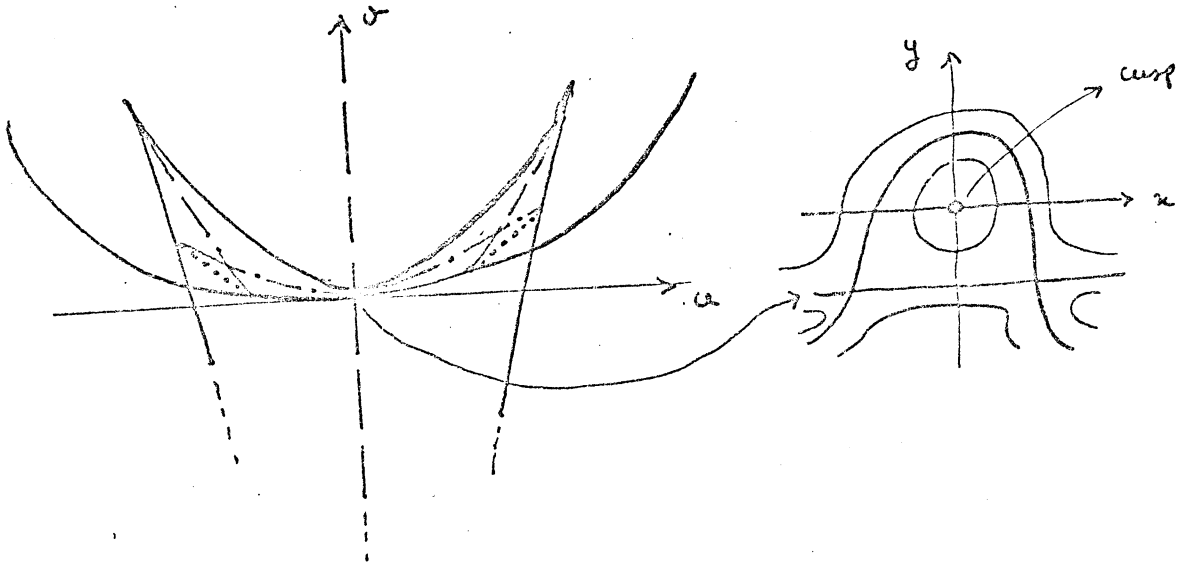
[le pli et le minimum sont au même niveau]

1 minimum
2 cols
1 pli

(21)

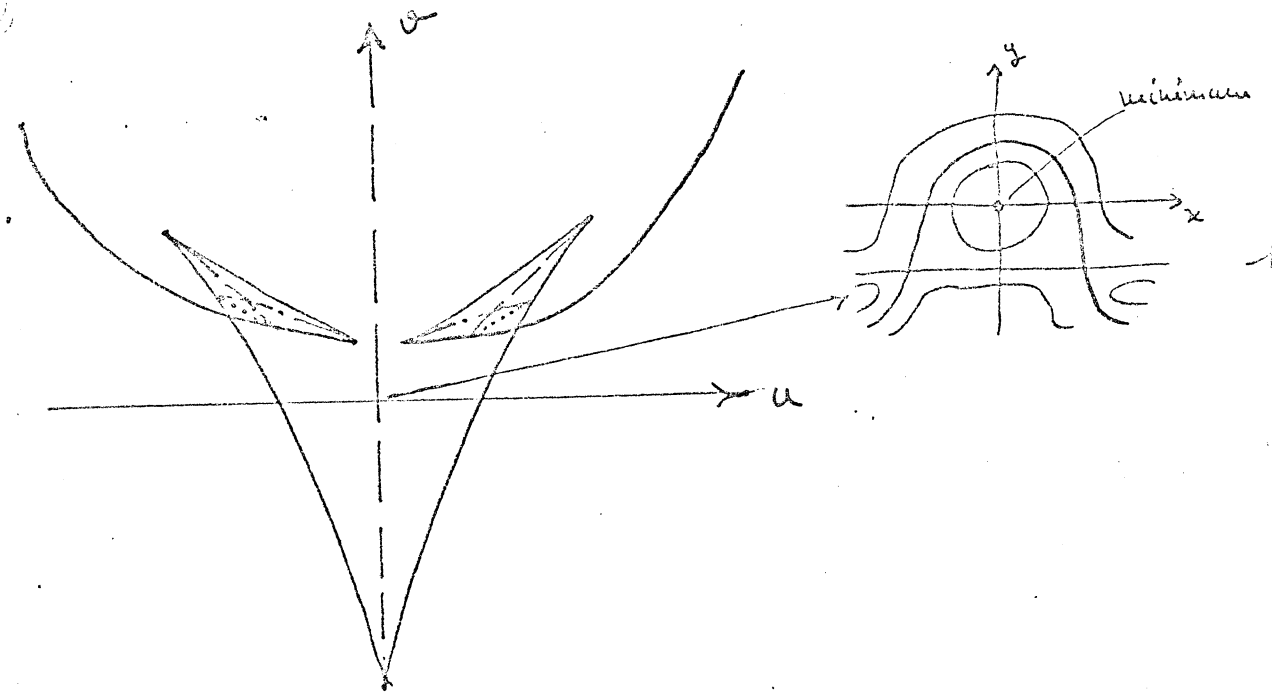


(22)



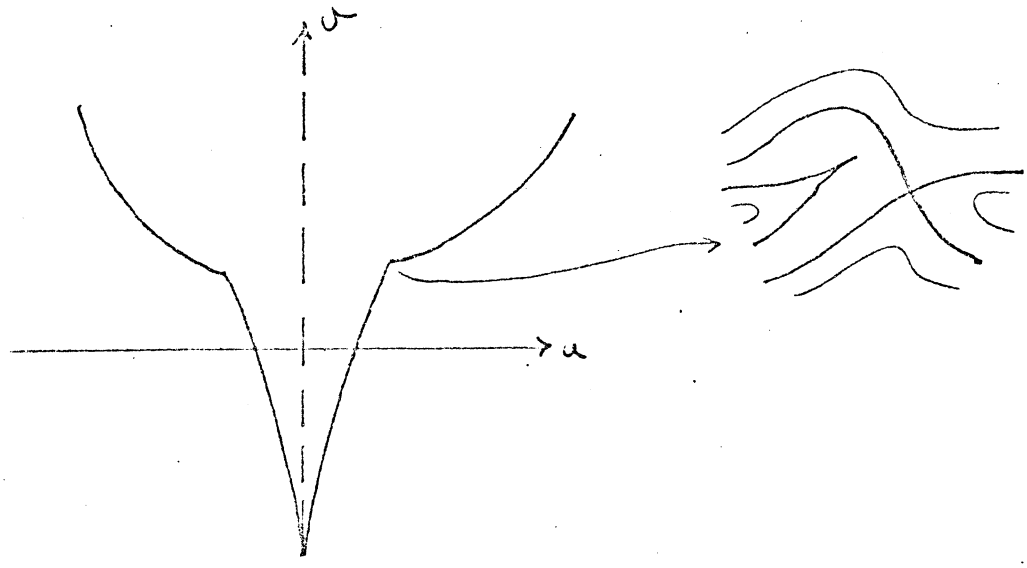
2 cols
1 cusp

(23)



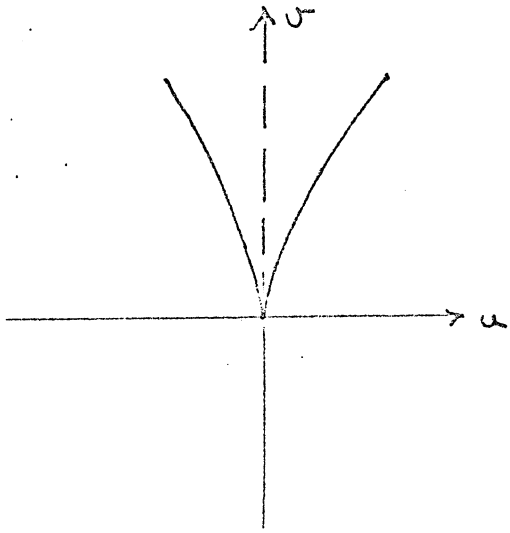
2 cols
1 minimum

(24)

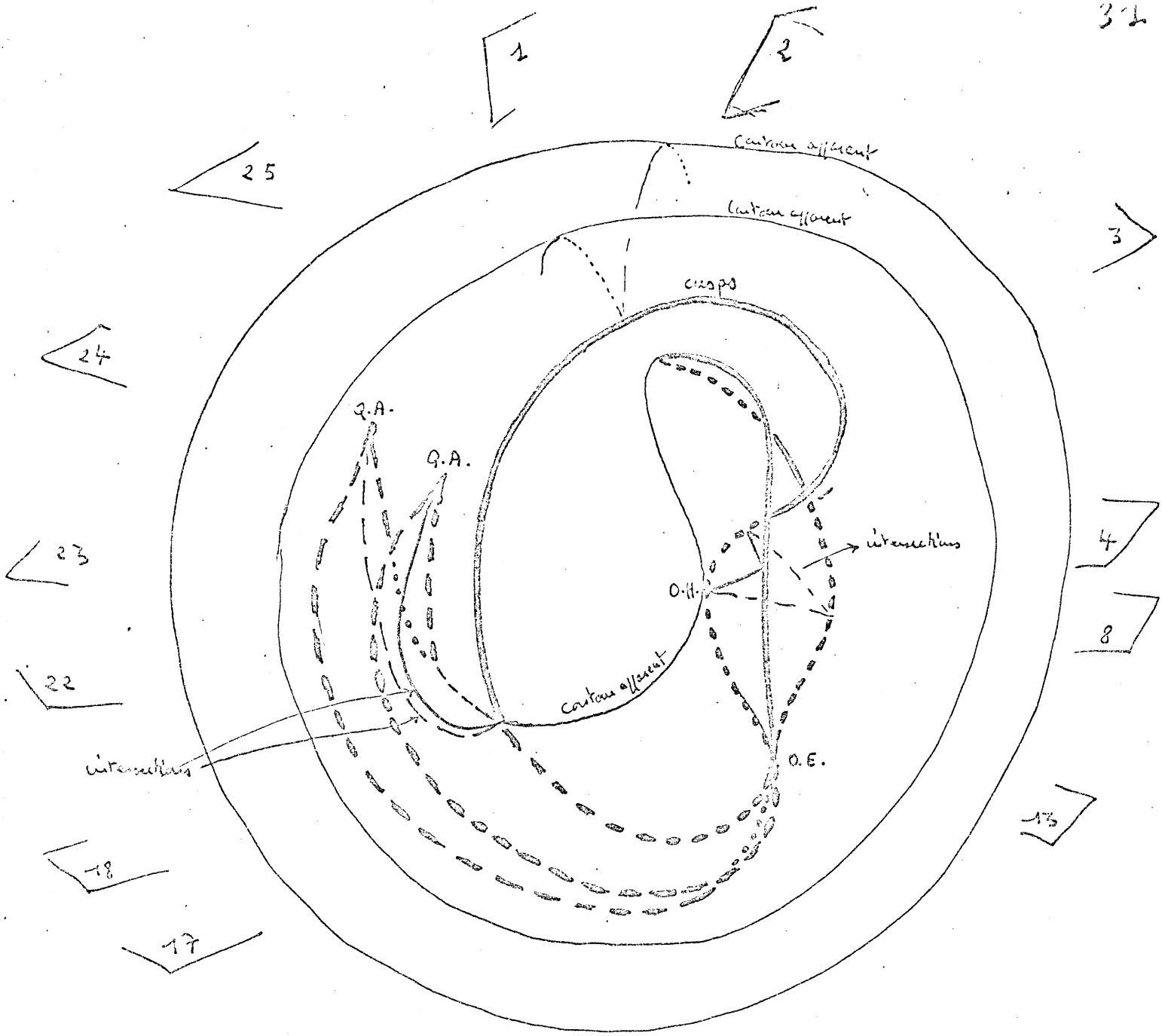


1 col
1 queue d'aronde

(25)



<u>Remarque</u> : La position des strates de cisaillement n'a pas toujours été exactement respectée ; en particulier, l'antériorité des événements peut être erronée : il importe peu puisqu'on peut la changer en choisissant d'autres plans de coupe.

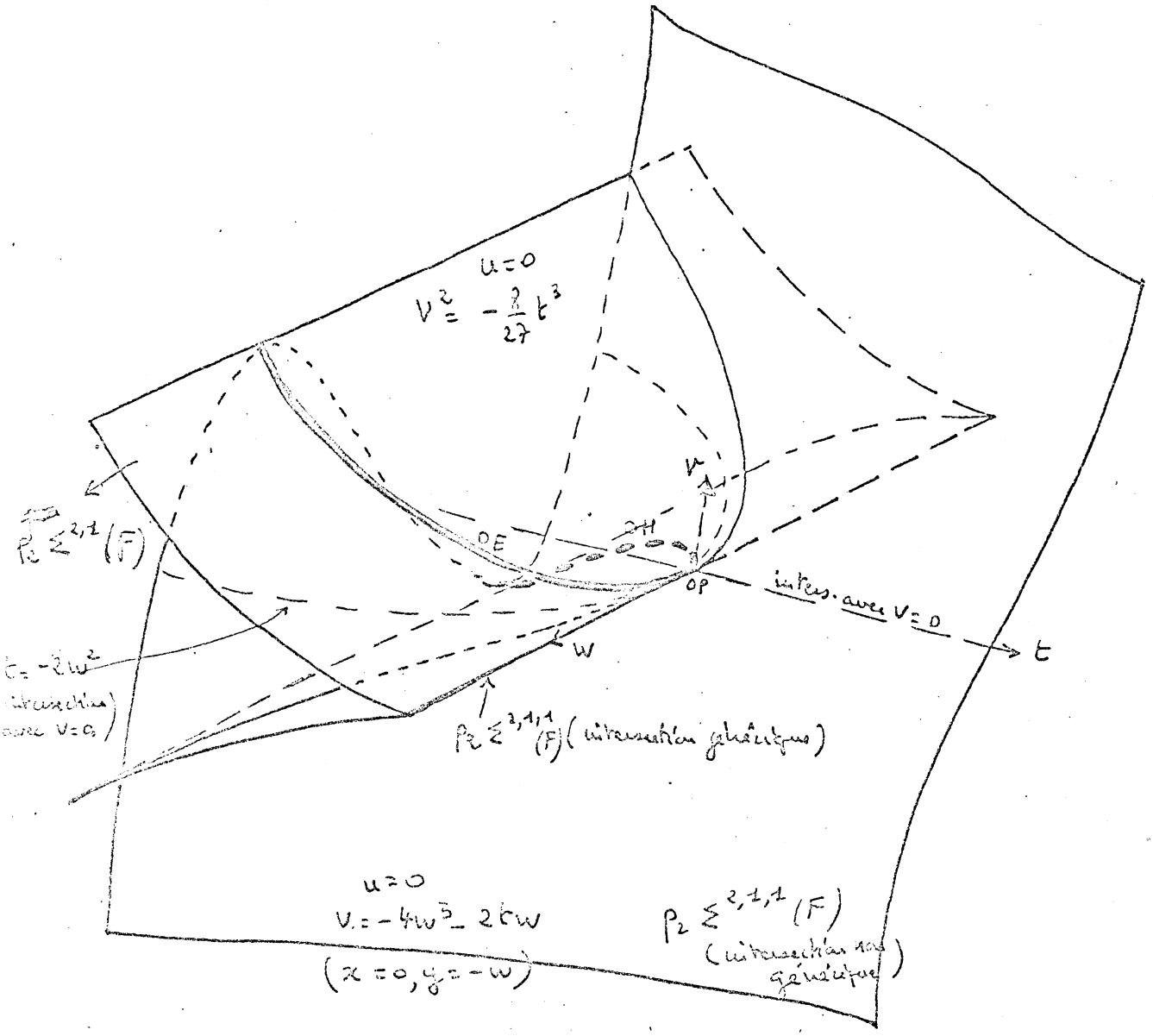


12 - Intersection de Bif(V) avec $S^3 \subset \mathbb{R}^4$

(il faut se fermer en attachant un disque D^2 à chacun des deux grands cercles de contour afférent).

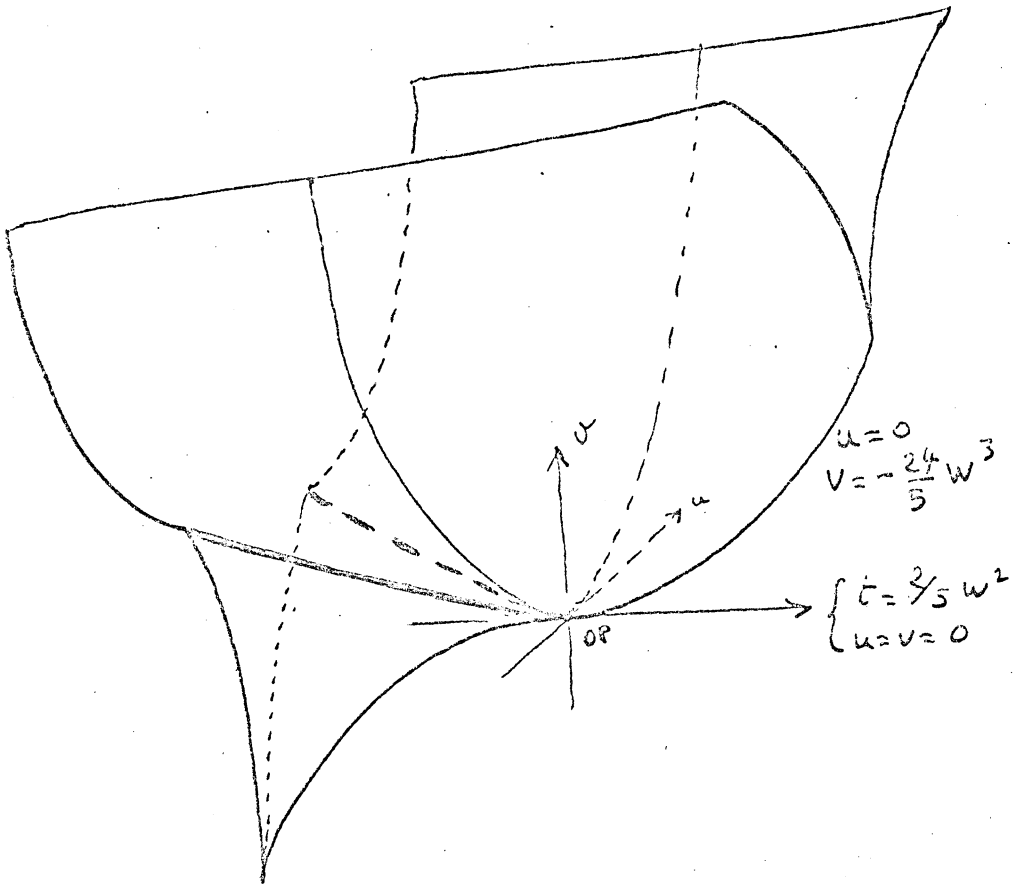
Les lignes de cusps sont en trois épais.

Les numéros renvoient aux coupes qui précèdent.



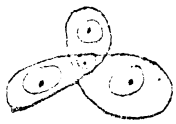
13 - Intersection de Bif(V) avec l'hyperplan $u = 0$ (d'après [3])

La ligne des ombilics est en trois épais

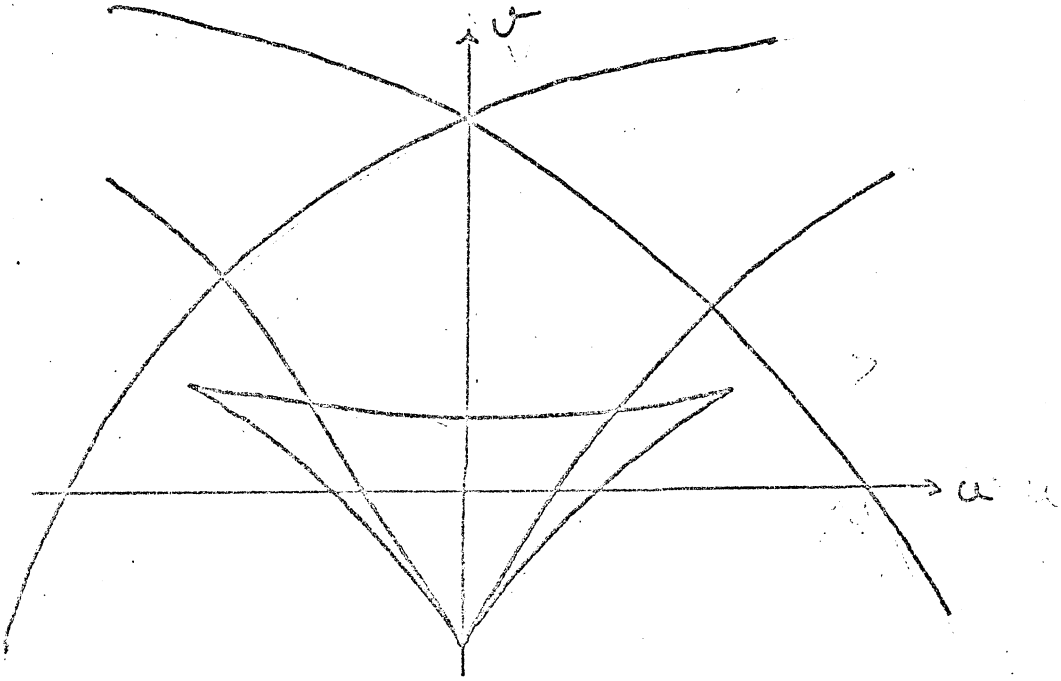


14. Intersection de Bif(V) avec le cylindre parabolique $t = \frac{2}{5} w^2$; l'intersection est non générique : elle contient en entier la courbe p.e. $\overline{\Sigma^{2,1,1,1}}(F)$ (en trois épais).

<u>Remarque</u> : Afin d'avoir des surfaces de niveau compactes pour les fonctions $(x,y) \mapsto V(x,y,u,v,w,t)$ Thom utilise la fonction $x^2y + x^4 + y^4$. Le lecteur rétablira sans peine les figures dans cette situation (bien entendu, rien n'est changé localement)

Par exemple devient 

Dans le plan (u,v), la coupe n° 8 devient



Bibliographie :

[1] V. Arnold : Singularités des applications différentiables (en Russe). Ousp. Math. Nauk 23, № 1(139) 1968 p. 3 à 44.

[2] G. Darboux : Leçons sur la théorie générale des surfaces. Quatrième partie. Paris 1896.

[3] A. N. Godwin : Three dimensional pictures of Thom's parabolic umbilic. Preprint Lanchester Polytechnic (Rugby site) Eastlands. RUGBY. (1970).

[4] B. Morin : Le symbole d'un jet. Proceedings of Liverpool Symposium on singularities 1970 (preprint).

[5] F. Pham : Classification des singularités. Preprint Université de Nice (1971).

[6] I. R. Porteous : The normal singularities of a submanifold Preprint Liverpool 1970.

[7] R. Thom : Stabilité structurelle et Morphogénèse (à paraître).

[8] E. C. Zeeman : Breaking of waves. Proceeding of Symposium on Differential equations and Dynamical systems, vol I Maths Institute, University of Warwick.