

Bifurcations de points fixes elliptiques.

II. Orbites periodiques et ensembles de Cantor invariants*

A. Chenciner

Département de Mathématiques, Université Paris VII,
2, place Jussieu, F-75251 Paris Cedex 05, France

Contents

0. Introduction	81
1.1 Formes normales	82
1.2 Orbites bien ordonnées	83
2. Estimations a priori sur C	86
3. Estimations lipschitziennes sur les orbites bien ordonnées	88
4. Elimination des problemes de bord	92
5. Existence d'ensembles invariants d'Aubry-Mather	94
6. Ensembles translates d'Aubry-Mather	102
7. Conclusion	105

0. Introduction

Faisant suite à [6], le présent article en reprend la plupart des notations; les résultats que nous y démontrons (voir § 1.2) sont cependant indépendants du théorème fondamental de [6] affirmant l'existence de courbes invariantes de «bon» nombre de rotation.

Comme dans le cas conservatif, c'est aux orbites bien ordonnées (c'est-à-dire ordonnées circulairement comme les orbites d'une rotation) que nous nous intéressons, plus précisément aux ensembles invariants d'Aubry-Mather, fermés invariants minimaux sur lesquels le difféomorphisme respecte l'ordre circulaire (et possède en particulier un nombre de rotation); de tels ensembles sont des orbites périodiques lorsque leur nombre de rotation est rationnel, des courbes fermées invariantes ou des ensembles de Cantor invariants sinon, d'où le titre de l'article. Une propriété fondamentale des ensembles invariants d'Aubry-Mather est de satisfaire des estimations Lipschitziennes uniformes qui permettent d'une part de les localiser (mais contrairement au cas conservatif nous disposons ici d'estimations a priori sur la position de toute orbite récurrente), d'autre part de ramener le problème de leur existence au cas où leur nombre de rotation est rationnel. C'est donc essentiellement au problème de l'existence

* A héhé Thom

d'orbites périodiques bien ordonnées ayant un nombre de rotation $\frac{p}{q}$ fixé que nous nous adressons: rappelons que celle-ci n'est conséquence du théorème usuel des fonctions implicites que si q est assez petit par rapport à $\left| \omega_0 - \frac{p}{q} \right|^{-1}$ ([8]; ω_0 est défini ci-dessous, §1.1 formule (2)); nous traitons le cas général par une méthode topologique qui participe à la fois de la démonstration par Birkhoff du dernier théorème géométrique de Poincaré [3, 9] et de la méthode variationnelle utilisée dans [5, 2, 20, 19]. Le résultat topologique sur lequel tout repose est une "estimation a priori" géométrique, exact analogue de celle qui, dans le cas du billard de Birkhoff, affirme que la fonction «somme des longueurs des côtés» d'un polygône inscrit de type $\frac{p}{q}$ prend son maximum à l'intérieur de l'espace (variété à coins) de ces polygônes. Je remercie John Mather de m'avoir convaincu qu'une telle estimation pouvait exister: sans lui cet article n'aurait sans doute pas été écrit. Je remercie également Michel Herman pour bien des discussions, en particulier sur les estimations Lipschitziennes, et Daniel Bennequin pour une écoute amicale et critique.

Les résultats dont il est question ici ont été annoncés dans [11] et [12].

1.1. Formes normales

On considère ([6] formule (11)) des familles à deux paramètres $P_{\mu,a}$ de difféomorphismes locaux de classe C^∞ de \mathbb{R}^2 (identifié à \mathbb{C}) fixant 0, de la forme

$$P_{\mu,a}(z) = N_{\mu,a}(z) + O(|z|^{2n+3}), \quad (1)$$

où la famille de «formes normales tronquées» $N_{\mu,a}$ est formée de difféomorphismes locaux invariants par le groupe des rotations et peut s'écrire

$$\begin{aligned} N_{\mu,a}(z) &= z[1 + f(\mu, a, |z|^2)] e^{2\pi i g(\mu, a, |z|^2)} \\ f(\mu, a, X) &= \mu + aX + a_2(\mu, a)X^2 + \dots + a_n(\mu, a)X^n, \\ g(\mu, a, X) &= b_0(\mu, a) + b_1(\mu, a)X + \dots + b_n(\mu, a)X^n, \\ b_0(0, 0) &= \omega_0, \quad a_2(0, 0) \neq 0, \quad b_1(0, 0) \neq 0, \quad n \text{ assez grand.} \end{aligned} \quad (2)$$

Pour fixer les idées, on supposera de plus que

$$\begin{aligned} a_2(0, 0) &< 0 \quad (\text{\`a changement de variables pr\`es,} \\ &\quad \text{on peut supposer } a_2(0, 0) = -1), \\ b_1(0, 0) &> 0, \\ \frac{\partial b_0}{\partial a}(0, 0) &> 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Ceci implique en particulier que $\eta_0 = 2 \frac{\partial b_0}{\partial a}(0, 0) + b_1(0, 0) > 0$ (voir [6] formule (20)); la dynamique de $N_{\mu,a}$ en fonction de (μ, a) est alors résumée dans la

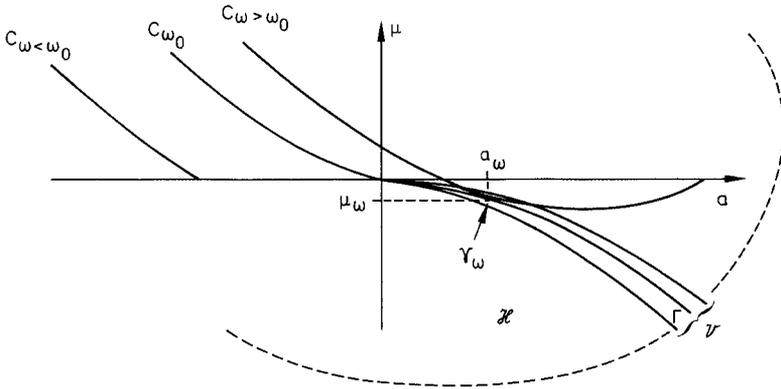


Fig. 1

figure 1 qui reproduit la figure 6.1 de [6]: rappelons que, dans cette figure, la courbe C_ω désigne l'ensemble des valeurs des paramètres pour lesquelles $N_{\mu,a}$ possède au voisinage de 0 un cercle invariant sur lequel elle induit la rotation R_ω de nombre de rotation ω (ω est un réel proche de ω_0 , voir §1.2). La courbe Γ , enveloppe des C_ω pour $\omega \geq \omega_0$, est l'ensemble des valeurs des paramètres pour lesquelles $N_{\mu,a}$ possède au voisinage de 0 un (unique) cercle invariant non normalement hyperbolique. Rappelons ([6] §3) que dans une région \mathcal{H} , complémentaire d'un voisinage effilé \mathcal{V} de la courbe Γ , la dynamique de $P_{\mu,a}$ «ressemble» à celle de $N_{\mu,a}$: ceci signifie que $P_{\mu,a}$ et $N_{\mu,a}$ ont le même nombre de courbes fermées invariantes et la même décomposition en bassins d'un voisinage uniforme de l'origine, mais pas en général la même dynamique sur leurs courbes fermées invariantes respectives. Plus généralement ([6] §2.3), la dynamique de $P_{\mu,a}$ «ressemble» à celle d'une forme normale $N_{\mu',a'}$ dès que (μ, a) n'appartient pas à la réunion d'une infinité de «bulles» contenues dans \mathcal{V} . Il faut donc considérer cet article (et le suivant [7]) comme une étude de la dynamique de $P_{\mu,a}$ lorsque (μ, a) est dans l'une de ces «bulles».

1.2. Orbites bien ordonnées

Le passage en coordonnées polaires $z = re^{2\pi i\theta}$ transforme $P_{\mu,a}$ en un difféomorphisme local de classe C^∞ de $\mathbb{T}^1 \times \mathbb{R}$ défini au voisinage de $\mathbb{T}^1 \times \{0\}$ ([6] formule (3)) qui s'écrit

$$P_{\mu,a}(\theta, r) = (\theta + g(\mu, a, r^2) + O(r^{2n+2}), r[1 + f(\mu, a, r^2) + O(r^{2n+2})]). \quad (4)$$

Cette formule définit en fait un relèvement privilégié de $P_{\mu,a}$ en un difféomorphisme local (encore noté $P_{\mu,a}$) du revêtement universel $(\mathbb{R} \times \mathbb{R} \text{ de } \mathbb{T}^1 \times \mathbb{R}$, défini au voisinage de $\mathbb{R} \times \{0\}$; ce relèvement étant choisi, on peut parler d'orbites de $P_{\mu,a}$ de nombre de rotation $\omega \in \mathbb{R}$ lorsque $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} [\pi_1(P_{\mu,a}^n(x))] = \omega$ (où $\pi_1(\theta, r) = \theta$). En particulier une orbite périodique voisine de 0 de $P_{\mu,a}$ est de

nombre de rotation $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ si $\pi_1(P_{\mu,a}^q(x)) = \pi_1(x) + p$ pour tout relèvement $x \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ d'un point de l'orbite.

Rappelons maintenant quelques définitions (voir [13]):

Définition 1. *Un sous-ensemble M de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ est dit $P_{\mu,a}$ -ordonné si*

- 1) *M est invariant par $P_{\mu,a}, P_{\mu,a}^{-1}$, et les translations $T_{\pm 1}(\theta, r) = (\theta \pm 1, r)$,*
- 2) *la restriction à M de la projection $\pi_1(\theta, r) = \theta$ est injective,*
- 3) *si (θ, r) et (θ', r') sont deux éléments de M vérifiant $\theta < \theta'$, on a*

$$\pi_1(P_{\mu,a}(\theta, r)) < \pi_1(P_{\mu,a}(\theta', r')) \quad \text{et} \quad \pi_1(P_{\mu,a}^{-1}(\theta, r)) < \pi_1(P_{\mu,a}^{-1}(\theta', r')).$$

Définition 2. *Un sous-ensemble \bar{M} de $\mathbb{T}^1 \times \mathbb{R}$ est appelé «ensemble invariant d'Aubry-Mather de $P_{\mu,a}$ » si c'est un fermé invariant minimal de $P_{\mu,a}$ dont l'image réciproque M dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ par la projection de revêtement est $P_{\mu,a}$ -ordonnée.*

On montre facilement (voir [13]) que la restriction de $P_{\mu,a}$ à un tel sous-ensemble invariant \bar{M} est conjuguée topologiquement à la restriction d'un homéomorphisme du cercle \mathbb{T}^1 à l'un de ses fermés minimaux invariants; en particulier un nombre de rotation réel (resp. élément de \mathbb{T}^1) est associé à M (resp. \bar{M}) et la structure de \bar{M} n'offre pas de mystère:

Si le nombre de rotation de M est un rationnel $\frac{p}{q}$, \bar{M} est une orbite périodique «bien ordonnée» de nombre de rotation $\frac{p}{q}$, c'est-à-dire

$$[\pi_1(P_{\mu,a}^m(x)) + n \leq \pi_1(P_{\mu,a}^{m'}(x)) + n'] \Leftrightarrow \left[m \frac{p}{q} + n \leq m' \frac{p}{q} + n' \right] \tag{5}$$

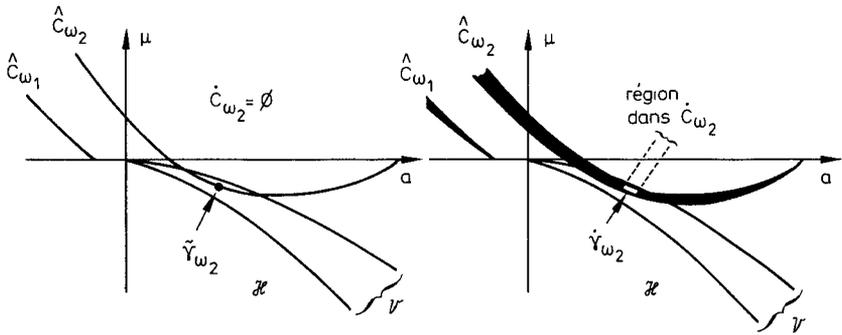
pour tout relèvement x à $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ d'un point de l'orbite (i.e. pour tout x dans M).

Si le nombre de rotation de M est $\omega \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, \bar{M} est ou bien une courbe fermée, auquel cas la restriction de $P_{\mu,a}$ est topologiquement conjuguée à la rotation R_ω , ou bien un ensemble de Cantor sur lequel $P_{\mu,a}$ est conjugué à la restriction à son fermé minimal invariant d'un contre-exemple de Denjoy. Notons que dans ce dernier cas on n'exclut pas la possibilité que cet ensemble de Cantor appartienne à une courbe invariante peu différentiable.

Munis de ces notions nous pouvons définir en toute généralité l'analogue pour la famille $P_{\mu,a}$ des courbes C_ω associées à la famille $N_{\mu,a}$ des formes normales correspondantes (nous verrons un peu plus loin que dans le cas des «bons» nombres de rotation la définition ci-dessous redonne exactement les \tilde{C}_ω définis dans le paragraphe 1.3 de [6]).

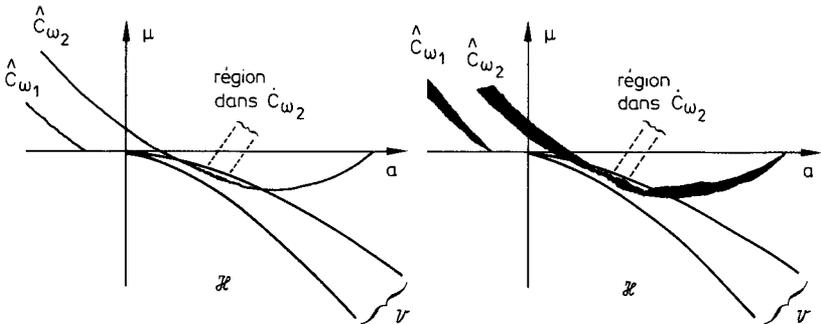
Définition 3. *Si $\omega \in \mathbb{R}$, on appelle \hat{C}_ω l'ensemble des valeurs de (μ, a) pour lesquelles $P_{\mu,a}$ possède au moins un ensemble invariant d'Aubry-Mather de nombre de rotation ω .*

Il est évident que \hat{C}_ω ainsi défini contient l'ensemble \tilde{C}_ω défini dans [6], et que $\hat{C}_\omega \cap \mathcal{H} = \tilde{C}_\omega \cap \mathcal{H}$. Nous noterons $\dot{C}_\omega = (\hat{C}_\omega - \tilde{C}_\omega) \subset \mathcal{E} \subset \mathcal{V}$: c'est l'ensemble



2.1. ω_1, ω_2 «bons» irrationnels

2.2. ω_1, ω_2 «bons» rationnels



2.3. ω_1, ω_2 «mauvais» irrationnels

2.4. ω_1, ω_2 «mauvais» rationnels

Fig. 2. ($\omega_1 < \omega_0 < \omega_2$). (\tilde{C}_{ω_2} n'est connexe que dans le premier cas)

des valeurs de (μ, a) pour lesquelles $P_{\mu, a}$ possède au moins un ensemble invariant d'Aubry-Mather de nombre de rotation ω mais pas de tel ensemble contenu dans (ou égal à) une courbe invariante qui soit le graphe d'une application continue de \mathbb{T}^1 dans \mathbb{R} .

Nous connaissons bien la structure de \hat{C}_ω dans deux cas:

1) Si $\omega \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ vérifie les hypothèses du théorème 2 de [6] $\left(\left| \omega - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{C|\omega - \omega_0|}{|q|^{2+\beta}} \right.$ pour tout rationnel $\frac{p}{q}$, et $|\omega - \omega_0| < \varepsilon(C, \beta)$ $\left. \right)^1$, nous montrerons au paragraphe 2 qu'un ensemble invariant d'Aubry-Mather de $P_{\mu, a}$ de nombre de rotation ω appartient forcément à une courbe fermée invariante $\tilde{\mathcal{C}}_{\omega, \mu, a}$ de classe C^∞ sur laquelle $P_{\mu, a}$ est C^∞ -conjugué à la rotation R_ω . Il suit de [6] que $\hat{C}_\omega = \tilde{C}_\omega$ est, pour de tels ω , une courbe C^∞ connexe proche de C_ω ; de plus, si $\omega > \omega_0$, il existe un unique point $\tilde{\gamma}_\omega \in \hat{C}_\omega$ tel que $\tilde{\mathcal{C}}_{\omega, \mu, a}$ soit un attracteur (resp. répulseur) normalement hyperbolique suivant que $(\mu, a) \in \hat{C}_\omega$ se trouve à gauche (resp. à droite) de $\tilde{\gamma}_\omega$ (Fig. 2.1).

¹ Dans [6] la condition fait intervenir le coefficient de distortion $|\tau_\omega|$ mais celui-ci est de l'ordre de $|\omega - \omega_0|$; il suffit donc de changer de fonction $\varepsilon(C, \beta)$

2) Si $\omega = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ a un dénominateur q «assez petit» par rapport à $\left| \omega_0 - \frac{p}{q} \right|^{-1}$ pour que $P_{\mu,a}^q$ puisse être considéré comme une perturbation de $N_{\mu,a}^q$, on déduit de [7, 8] que \hat{C}_ω est génériquement une région effilée à bord C^∞ , connexe, voisine de C_ω , du type «langue d'Arnold», dont l'intérieur correspond à des valeurs de (μ, a) telles que $P_{\mu,a}$ possède exactement deux orbite périodiques bien ordonnées de nombre de rotation ω , dont une de type col; de plus, si $\omega > \omega_0$, il existe une région γ_ω contenue dans l'intérieur de \hat{C}_ω correspondant à l'existence d'intersections homoclines des variétés stables et instables de l'orbite périodique de type col (figure 2.2). En particulier, $\hat{C}_\omega \supset \gamma_\omega$ est génériquement non vide. En fait, on montre que les deux composantes connexes de $\hat{C}_\omega \cap \mathcal{H} = \tilde{C}_\omega \cap \mathcal{H}$ ne sont pas connectées dans \tilde{C}_ω .

Dans les autres cas seuls des résultats partiels avaient été obtenus jusqu'ici ([6] théorème 5, et [10] rendu caduque par [6] théorème 3): retenons que si $0 < \omega - \omega_0$ est assez petit, $\hat{C}_\omega \cap \mathcal{H}$ a exactement deux composantes connexes (comparer à la figure 1). Nous pouvons maintenant énoncer le résultat principal de l'article:

Théorème 1. *Sous les hypothèses du théorème 5 de [6], si $n \geq 8$, pour tout $\omega > \omega_0$ assez proche de ω_0 , les deux composantes connexes de $\hat{C}_\omega \cap \mathcal{H}$ appartiennent à la même composante connexe de \tilde{C}_ω .*

De l'étude ci-dessus du cas rationnel on déduira le

Théorème 2. *Pour une famille $P_{\mu,a}$ générique, il existe dans tout voisinage de ω_0 des $\omega > \omega_0$ irrationnels tels que les deux composantes connexes de $\hat{C}_\omega \cap \mathcal{H} = \tilde{C}_\omega \cap \mathcal{H}$ ne soient pas connectées dans \tilde{C}_ω ; pour de tels ω , \hat{C}_ω est non vide.*

La Fig. 2 résume le contenu de ce paragraphe.

2. Estimations a priori sur \hat{C}_ω

On reprend les notations du paragraphe 3 de [6], en particulier $r(\mu, a)$, $\omega(\mu, a)$, $\bar{\delta}(\mu, a)$. Rappelons que le théorème 5 de [6] affirme que $\hat{C}_\omega \cap \mathcal{H} = \tilde{C}_\omega \cap \mathcal{H}$ est contenu dans un voisinage effilé de $C_\omega \cap \mathcal{H}$ de la forme

$$|\omega(\mu, a) - \omega| \leq \text{constante} \cdot \frac{r(\mu, a)^{2n+2}}{\bar{\delta}(\mu, a)} = o(|\bar{\delta}(\mu, a)|), \quad (6)$$

et a le même nombre de composantes connexes que $C_\omega \cap \mathcal{H}$, c'est-à-dire deux dans le cas que nous considérons ($\omega > \omega_0$).

De cette remarque et de la définition de \mathcal{V} (région limitée par Γ_n^+ et Γ_n^{-3} , voir [6] paragraphe 3.1) on déduit facilement une estimation de la largeur horizontale (i.e. en projection sur l'axe des a) du trou existant entre les deux composantes (Fig. 3):

Lemme 1. *La distance horizontale D_ω entre les deux composantes connexes de $\hat{C}_\omega \cap \mathcal{H}$ est de l'ordre de ρ_ω^{n-3} (où ρ_ω est défini dans le paragraphe 1.3 de [6]).*

Démonstration. Il suffit d'estimer l'intersection de Γ_{n-3}^- avec le bord inférieur d'une région de la forme

$$|\omega(\mu, a) - \omega| \leq \text{constante} \cdot \frac{r(\mu, a)^{2n+2}}{\bar{\delta}(\mu, a)}.$$

On commence par évaluer la distance horizontale d_ω des deux points d'intersection de C_ω avec Γ_{n-3}^- . Un calcul simple, déjà utilisé dans [6, §3], montre que, si Γ est le graphe d'une application $\mu = \mu_\Gamma(a)$, Γ_p^- est le graphe d'une application de la forme $\mu = \mu_\Gamma(a) + O(|a|^p)$; on en déduit que d_ω est de l'ordre de $\frac{n-3}{a_\omega^2}$, c'est-à-dire de l'ordre de ρ_ω^{n-3} . Un calcul analogue montre que, si $\mu = \mu_{C_\omega}(a)$ est l'équation de C_ω , celle du bord inférieur du voisinage considéré de $C_\omega \cap \mathcal{H}$ est de la forme $\mu = \mu_{C_\omega}(a) - O(r(\mu, a)^{2n})$; en particulier, d_ω et D_ω sont du même ordre, ce qui termine la démonstration.

Lemme 2. *Si (μ, a) appartient à $\hat{C}_\omega \cap \mathcal{V}$, la distance de a à a_ω admet une majoration de la forme $|a - a_\omega| \leq O(\rho_\omega^{n-3})$. En particulier, dès que $n \geq 8$, $\hat{C}_\omega \cap \mathcal{V}$ est contenu dans l'intérieur \mathcal{D}_ω° du « carré » \mathcal{D}_ω défini dans le lemme 1 de [6].*

Démonstration. Soit $(\mu, a) \in \mathcal{V}$; on définit ω' par $a = a_{\omega'}$ (i.e. (μ, a) est sur la même verticale que $\gamma_{\omega'} \in \Gamma$).

Toute orbite récurrente de $P_{\mu, a}$ est nécessairement contenue dans l'anneau $\mathbb{A}_n^+(\mu, a) = \{z, f_n^+(z, a, |z|^2) > 0\}$ (comparer au début du §2.3 de [6]). Lorsque (μ, a) est dans \mathcal{V} , l'épaisseur de cet anneau est majorée par $O\left(\sqrt{\frac{\rho_\omega^{2(n-3)}}{\rho_{\omega'}^2}}\right) = O(\rho_\omega^{n-4})$, d'où on déduit un encadrement des nombres de rotation admissibles pour une orbite récurrente de $P_{\mu, a}$; il suffit en effet de remarquer que $g(\mu, a, r^2) + O(r^{2n+2})$ s'écrit $\omega' + g(\mu, a, r^2) - g(\mu_{\omega'}, a_{\omega'}, \rho_{\omega'}^2) + O(r^{2n+2})$, et vaut donc $\omega' + O(\rho_\omega^{n-3})$ dès que $re^{2\pi i \theta}$ appartient à $\mathbb{A}_n^+(\mu, a)$. La conclusion suit de ce que $|a_\omega - a_{\omega'}| = O(|\omega - \omega'|)$ et $\rho_\omega^2 = O(a_\omega)$.

La Fig. 3 suite la région contenant a priori l'ensemble \hat{C}_ω .

Corollaire. *Si les hypothèses du Théorème 2 de [6] sont vérifiées, en particulier*

$$\left| \omega - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{C|\omega - \omega_0|}{|q|^{2+\beta}} \text{ pour tout rationnel } \frac{p}{q} \text{ et } |\omega - \omega_0| < \varepsilon(C, \beta), \text{ les ensembles } \hat{C}_\omega \text{ et } \tilde{C}_\omega \text{ coïncident.}$$

Démonstration. Il suffit de montrer que $\hat{C}_\omega \cap \mathcal{V} \subset \tilde{C}_\omega \cap \mathcal{V}$, et donc (Lemme 2) que $\hat{C}_\omega \cap \mathcal{D}_\omega \subset \tilde{C}_\omega \cap \mathcal{D}_\omega$.

On utilise à cette fin l'existence pour tout (μ, a) dans \mathcal{D}_ω de la courbe translatée $\tilde{\mathcal{C}}_{\omega, \mu, a}$ de $P_{\mu, a}$ de nombre de rotation ω ([6] Théorème 1; les coordonnées utilisées sont θ et ρ introduites dans les formules (43) et (44) de [6]).

Supposons que la translation $\bar{\lambda}_{\omega, \mu, a}$ soit non nulle. Aucune orbite récurrente ne se trouve dans le voisinage tubulaire de $\tilde{\mathcal{C}}_{\omega, \mu, a}$ que limitent $P_{\mu, a}^{-1}(\tilde{\mathcal{C}}_{\omega, \mu, a})$ et $P_{\mu, a}(\tilde{\mathcal{C}}_{\omega, \mu, a})$. Rappelons que si $\tilde{\mathcal{C}}_{\omega, \mu, a}$ et son image (translatée) sont paramétrées par θ , la restriction $P_{\mu, a}|_{\tilde{\mathcal{C}}_{\omega, \mu, a}}$ définit un homéomorphisme $f(\theta) = \theta + \omega + \tau_\omega \bar{\psi}_{\omega, \mu, a}(\theta)$ de \mathbb{T}^1 qui est C^∞ -conjugué à la rotation R_ω . Si $(\theta_i, \rho_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ est une orbite récurrente bien ordonnée de $P_{\mu, a}$, l'application $\theta_i \mapsto \theta_{i+1}$ se prolonge par

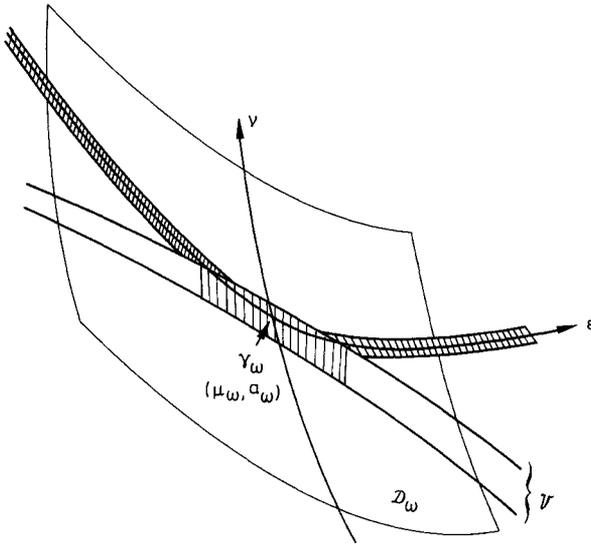


Fig. 3

interpolation linéaire (voir [13]) en un homéomorphisme $g(\theta) = \theta + \omega + \xi(\theta)$ de même nombre de rotation. De ce qui précède on déduit l'existence d'un $\varepsilon > 0$ tel que $|\bar{\psi}_{\omega, \mu, a}(\theta) - \xi(\theta)| > \varepsilon$ et donc $|f(\theta) - g(\theta)| > |\tau_\omega| \varepsilon > 0$. On déduit alors du Lemme 4.1.3 du chapitre III de [16] que le nombre de rotation de g ne peut être égal à celui de f , c'est-à-dire à ω . Si (μ, a) appartient à \hat{C}_ω , la courbe $\mathcal{C}_{\omega, \mu, a}$ est donc invariante, ce qui démontre le Corollaire (et complète en particulier la démonstration du Corollaire 1 du Théorème 1 de [6]).

Remarque. On déduit de ce qui précède et de [6] (Corollaires des Théorèmes 3 et 5) que le seul fait de posséder un ensemble invariant d'Aubry-Mather de «bon» nombre de rotation force $P_{\mu, a}$ à «ressembler» à une forme normale; de plus l'ensemble invariant en question est forcément une courbe C^∞ sur laquelle $P_{\mu, a}$ est C^∞ -conjugué à une rotation.

3. Estimations lipschitziennes sur les orbites bien ordonnées

Nous avons donné dans ([6], §3.2) des estimations lipschitziennes uniformes sur les courbes fermées invariantes de $P_{\mu, a}$ lorsque (μ, a) appartient à \mathcal{H} . Celles-ci étaient obtenues directement à partir de l'équation fonctionnelle exprimant l'invariance de la courbe. Dans le cas d'un difféomorphisme préservant les aires et ayant la propriété de distortion monotone, les courbes invariantes vérifient également de telles estimations (théorie de Birkhoff, voir [4, 13, 17]). Les meilleures estimations ont été obtenues par Herman [18] en explicitant l'équation fonctionnelle que vérifie la restriction du difféomorphisme à la courbe invariante; Herman a également remarqué que les mêmes estimations

valaient pour un ensemble invariant d'Aubry-Mather E quelconque: la préservation de l'ordre implique en effet que la courbe \mathcal{C} interpolant linéairement un tel ensemble est, ainsi que son image, le graphe d'une application continue de \mathbb{T}^1 dans \mathbb{R} ; si f désigne l'application de \mathbb{T}^1 dans \mathbb{T}^1 définie par la restriction du difféomorphisme lorsque \mathcal{C} et son image sont paramétrées par θ , f est un homéomorphisme de \mathbb{T}^1 vérifiant l'équation fonctionnelle en question aux points de l'ensemble invariant.

Bien entendu, la méthode n'a rien à voir avec la conservation de l'aire, mais elle ne fournit de meilleure estimation que la méthode directe que lorsque l'attraction normale de \mathcal{C} est suffisamment faible; c'est en particulier le cas si, comme nous le supposons, (μ, a) est dans \mathcal{D}_ω .

Il sera commode d'utiliser les coordonnées (θ, ρ) dans \mathbb{R}^2 et (v', ε') dans \mathcal{D}_ω , introduites dans ([6], formules (44) et (45)); l'application $P_{\mu,a}$ définit une application de $\mathbb{T}^1 \times [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ dans $\mathbb{T}^1 \times \mathbb{R}$ de la forme

$$P_{\mu,a}(\theta, \rho) = (\theta + \omega + \tau_\omega \rho, \rho + \tau_\omega^2 \Pi_{\omega,\mu,a}(\rho) + \tau_\omega^n \zeta_{\omega,\mu,a}(\theta, \rho), \tag{7}$$

où $\tau_\omega^2 \Pi_{\omega,\mu,a}(\rho) = v' + \varepsilon' \rho + s' \rho^2 + \dots$ est un polynôme en ρ ,

le difféomorphisme local $(\mu, a) \rightarrow (v', \varepsilon')$ étant explicité dans ([6], formules (31), (34), et (45)). L'hypothèse (3) implique $\tau_\omega > 0$. Rappelons également que, $\omega > \omega_0$ étant fixé, $\Pi_{\omega,\mu,a}$ et $\zeta_{\omega,\mu,a}$ ont une dépendance C^∞ par rapport à (μ, a) et sont bornées en norme C^k (pour tout k) sur $\mathbb{T}^1 \times [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ uniformément par rapport à ω, μ, a dans le domaine considéré (i.e. $\omega > \omega_0$ et $(\mu, a) \in \mathcal{D}_\omega$).

Soit $\bar{\psi}$ l'application de \mathbb{T}^1 dans $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ dont le graphe est obtenu par interpolation linéaire à partir d'un ensemble invariant d'Aubry-Mather $\bar{E} \subset \mathbb{T}^1 \times [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ de $P_{\mu,a}$ de nombre de rotation ω :

Lemme 3. *L'application $\bar{\psi}$ est lipschitzienne et sa constante de Lipschitz L vérifie une estimation de la forme*

$$L \leq \frac{2|\varepsilon'|}{\tau_\omega} + \sqrt{\left(\frac{2\varepsilon'}{\tau_\omega}\right)^2 + C \tau_\omega^{n-1}}, \quad \text{où } C \text{ est une constante.} \tag{8}$$

Par un argument analogue à celui de la démonstration du Lemme 2 on en déduit le

Corollaire. *Si (μ, a) est dans \mathcal{D}_ω , tout ensemble invariant d'Aubry-Mather de $P_{\mu,a}$ de nombre de rotation ω est contenu dans un anneau de la forme*

$$|\rho| \leq L \leq \frac{2|\varepsilon'|}{\tau_\omega} + \sqrt{\left(\frac{2\varepsilon'}{\tau_\omega}\right)^2 + C \tau_\omega^{n-1}} \leq O(\tau_\omega^2).$$

Remarque. Contrairement au cas hamiltonien, nous disposons ici de bornes a priori sur la position d'une orbite récurrente quelconque de $P_{\mu,a}$: nous avons en effet rappelé au cours de la démonstration du lemme 2 qu'une telle orbite appartient nécessairement à l'anneau $\mathbb{A}_n^+(\mu, a)$. Dans les coordonnées (θ, ρ) , la largeur de cet anneau est de l'ordre de $\sqrt{\frac{|\mu - \mu_T(a)|}{\tau_\omega^2} + C \tau_\omega^{n-2}}$, où C est une

constante et $\mu = \mu_f(a)$ une équation de Γ . Remarquons qu'on obtient directement à partir de (7) une estimation de la forme

$$|\rho| \leq O \left(\sqrt{\frac{|v'|}{\tau_\omega^2} + C_1 \frac{\varepsilon'^2}{\tau_\omega^4} + C_2 \tau_\omega^{n-2}} \right) \leq O(\sqrt{\tau_\omega}) = O(\rho_\omega) \tag{9}$$

en écrivant que la différence entre la deuxième composante de $P_{\mu,a}(\theta, \rho)$ et ρ est négative dès que $\tau_\omega^2 \Pi_{\omega,\mu,a}(\rho) + C \tau_\omega^n < 0$, si C est une constante majorant $|\zeta_{\omega,\mu,a}(\theta, \rho)|$.

Démonstration de Lemme 3. Que $\psi = \tau_\omega \bar{\psi}$ soit une application lipschitzienne dont la constante de Lipschitz $\tau_\omega L$ tend vers 0 avec τ_ω découle immédiatement de ce qu'en posant $x = \tau_\omega \rho$ on transforme (7) en

$$P_{\mu,a}(\theta, x) = \left(\theta + \omega + x, x + \tau_\omega^3 Z_{\omega,\mu,a} \left(\theta, \frac{1}{\tau_\omega} x \right) \right), \tag{10}$$

(où $Z = \Pi + \tau_\omega^{n-2} \zeta$) (on oubliera dans la suite les indices ω, μ, a).

Cette formule est analogue à celle qui décrit une application de l'anneau conservant les aires et déviant la verticale, et la théorie de Birkhoff (voir [17]) borne la constante de Lipschitz de $\psi = \tau_\omega \bar{\psi}$ (en fait de la restriction de ψ à la projection K de E sur \mathbb{T}^1 , mais c'est la même chose en vertu de la construction de $\bar{\psi}$) par une constante ne dépendant que de la façon dont (10) dévie la verticale, donc uniformément bornée.

De plus, si f désigne l'homéomorphisme de \mathbb{T}^1 défini par

$$f(\theta) = \theta + \omega + \psi(\theta), \tag{11}$$

on vérifie que

$$\frac{f(\theta) + f^{-1}(\theta)}{2} = \theta + \frac{1}{2} \tau_\omega^3 Z \left(f^{-1}(\theta), \frac{1}{\tau_\omega} \psi(f^{-1}(\theta)) \right) \quad \text{si } \theta \in K, \tag{12}$$

d'où on déduit ([17]) que les constantes de Lipschitz $\text{Lip} f$ et $\text{Lip} f^{-1}$ sont majorées par $1 + C\sqrt{\tau_\omega^2 \|Z\|_1}$ et donc que $\tau_\omega L$ est majoré par $C\sqrt{\tau_\omega^2 \|Z\|_1}$, c'est-à-dire

$$L \leq C\sqrt{\|Z\|_1}, \text{ où } C \text{ est une constante et } \| \cdot \|_1 \text{ la norme } C^1. \tag{13}$$

Pour obtenir l'estimation plus fine du lemme il faut prendre en compte le fait que Z est une petite perturbation (d'ordre τ_ω^{n-2}) de Π : si $Z = \Pi$, tout ensemble invariant d'Aubry-Mather E de l'application $P_{\mu,a}$ est contenu dans un cercle $\rho = \rho_0$ et $L = 0$. On calcule, lorsque $\theta \in K$,

$$\begin{aligned} & \frac{f(\theta) + (1 + \varepsilon')f^{-1}(\theta)}{2 + \varepsilon'} \\ &= \theta - \frac{\varepsilon'}{2 + \varepsilon'} \omega + \frac{\tau_\omega}{2 + \varepsilon'} [v' + \tau_\omega^2 A(\bar{\psi}(f^{-1}(\theta))) + \tau_\omega^n \zeta(f^{-1}(\theta), \bar{\psi}(f^{-1}(\theta)))], \end{aligned} \tag{14}$$

où $A(\rho)$ est le polynôme, commençant par des termes en ρ^2 , défini par

$$\tau_\omega^2 A(\rho) = \tau_\omega^2 \Pi(\rho) - v' - (1 + \varepsilon')\rho. \quad (15)$$

Définissons M_+ , M_- , L_+ , L_- , m par

$$\begin{aligned} M_+ &= \text{Lip } f = \sup_{y \neq x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} > 0, \\ M_- &= \text{Lip } f^{-1} = \sup_{y \neq x} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(x)}{y - x} > 0, \\ L_+ &= \sup_{y \neq x} \frac{\bar{\psi}(y) - \bar{\psi}(x)}{y - x} > 0, \\ L_- &= \inf_{y \neq x} \frac{\bar{\psi}(y) - \bar{\psi}(x)}{y - x} < 0, \\ m &= \sup_x |\bar{\psi}(x)| > 0. \end{aligned} \quad (16)$$

On vérifie que

$$M_+ = 1 + \tau_\omega L_+, \quad M_- = \frac{1}{1 + \tau_\omega L_-}, \quad L = \sup(L_+, -L_-). \quad (17)$$

Suivant la méthode de [17], c'est-à-dire en choisissant $x < y$ tels que $\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = M_+ - \delta$ (resp. $\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(x)}{y - x} = M_- - \delta$), on montre immédiatement que

$$\text{Lip} \left[\frac{f + (1 + \varepsilon')f^{-1}}{2 + \varepsilon'} \right] \geq \sup \left[\frac{M_+ + \frac{1 + \varepsilon'}{M_+}}{2 + \varepsilon'}, \frac{\frac{1}{M_-} + (1 + \varepsilon')M_-}{2 + \varepsilon'} \right]. \quad (18)$$

Quant au second membre de (14), on peut majorer sa constante de Lipschitz par

$$\alpha = 1 + \frac{\tau_\omega}{2 + \varepsilon'} [\|\tau_\omega^2 DA|_{|\rho| \leq m}\|_0 LM_- + \tau_\omega^n \|D\zeta|_{|\rho| \leq m}\|_0 (1 + L)M_-]. \quad (19)$$

Utilisant (9), (15), et ([6], formule (119)), on voit que

$$|\tau_\omega^2 DA(\rho)| = |2s'\rho + \sum_{i=3}^n ia'_i \rho^{i-1}| \leq C\tau_\omega^2 |\rho|, \quad (20)$$

donc

$$\|\tau_\omega^2 DA|_{|\rho| \leq m}\|_0 \leq C\tau_\omega^2 m, \quad (21)$$

d'où on déduit

$$\alpha \leq 1 + C\tau_\omega^3 mL + D\tau_\omega^{n+1}, \quad (22)$$

où C et D sont des constantes positives.

Le nombre de rotation de E étant ω , le raisonnement du Corollaire (indépendant de la majoration du lemme) montre d'autre part que

$$m \leq L \quad (23)$$

(le graphe de $\bar{\psi}$ recoupe le cercle $\rho=0$). Rassemblant (18) et (22), on obtient

$$\sup \left[\frac{M_+ + \frac{1+\varepsilon'}{M_+}}{2+\varepsilon'}, \frac{1}{M_-} + \frac{(1+\varepsilon')M_-}{2+\varepsilon'} \right] \leq 1 + C\tau_\omega^3 mL + D\tau_\omega^{n+1}. \quad (24)$$

Deux cas sont à considérer séparément:

(ii) Si $L=L_+$, (24) devient (compte tenu de (17) et de ce que $\tau_\omega > 0$)

$$\tau_\omega L^2 \leq C'\tau_\omega^2 mL + \varepsilon' L + D'\tau_\omega^n, \quad (25)$$

où $C'=(2+\varepsilon')(1+\tau_\omega L)C$, $D'=(2+\varepsilon')(1+\tau_\omega L)D$ sont majorées par des constantes.

Utilisant (23) on en déduit

$$\frac{1}{2}\tau_\omega L^2 - \varepsilon' L - D'\tau_\omega^n \leq 0, \quad (26)$$

et donc

$$L \leq \frac{2\varepsilon'}{\tau_\omega} + \sqrt{\left(\frac{2\varepsilon'}{\tau_\omega}\right)^2 + 8D'\tau_\omega^{n-1}}. \quad (27)$$

Remarquons que cette estimation est bien meilleure quand $\varepsilon' < 0$ car la racine positive du trinôme constituant le premier membre de (26) est alors celle ayant la plus petite valeur absolue.

(ii) Si $L = -L_-$, (26) est remplacé par une inégalité analogue obtenue en remplaçant ε' par $-\varepsilon'$, C' par $C''=(2+\varepsilon')(1-\tau_\omega L)$, et D' par $D''=(2+\varepsilon') \cdot (1-\tau_\omega L)$. Il en est donc de même de (27), ce qui démontre le Lemme 3. Bien entendu, dans ce dernier cas, c'est quand $\varepsilon' > 0$ que l'estimation est la meilleure.

4. Elimination des problèmes de bord

Pour un difféomorphisme conservatif F d'un anneau $\mathbb{T}^1 \times [a, b]$ induisant sur les bords des difféomorphismes de nombres de rotation $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ distincts (dans un relèvement de F au revêtement universel $\mathbb{R} \times [a, b]$ de l'anneau), l'existence d'orbites périodiques (non ordonnées) de nombre de rotation $\frac{p}{q}$, $\alpha < \frac{p}{q} < \beta$, peut être prouvée par application du théorème géométrique de Poincaré-Birkhoff à un relèvement bien choisi de l'itéré q -ième de F . Suivant [3], il suffit en fait qu'une seule des composante du bord soit invariante pourvu que l'image de l'autre par F^q soit le graphe d'une application de \mathbb{T}^1 dans \mathbb{R} . Malheureusement, dès que q est «grand», cette dernière condition n'a aucune chance d'être réalisée (y compris pour une petite perturbation d'un difféomorphisme conservant les bords), ce qui rend la méthode tributaire de l'existence de courbes invariantes.

Dans la recherche d'orbites ordonnées, au contraire, la localisation a priori fournie par les estimations lipschitziennes permet le remplacement de l'application originale par une application préservant les bords, les orbites cherchées se trouvant forcément dans une région où rien n'a été modifié.

Les mêmes remarques s'appliquent à la situation dissipative (comparer à [9]): nous modifions dans ce paragraphe la restriction à l'anneau $\mathbb{T}^1 \times [-\tau_\omega, \tau_\omega]$ de la famille $P_{\mu,a}$, $(\mu,a) \in \mathcal{D}_\omega$, en une famille $Q_{\mu,a}$ de plongements coïncidant avec $P_{\mu,a}$ sur un sous-anneau assez grand pour contenir a priori tout ensemble invariant d'Aubry-Mather de $Q_{\mu,a}$, et avec la forme normale $N_{\mu,a}$ au voisinage des bords.

Contrairement au cas conservatif, les formes normales $N_{\mu,a}$ ne laissent pas nécessairement invariants les bords de l'anneau; cependant, une composante du bord ne rencontre son image par $N_{\mu,a}$ que si elle coïncide avec elle (cercle parallèle) et c'est cette dernière propriété qui sera fondamentale dans le lemme topologique que nous démontrerons au paragraphe 5.

Soit $\Omega(\rho)$ une fonction C^∞ positive, bornée par 1, valant 1 pour $|\rho| \leq \frac{1}{3}\tau_\omega$, et 0 pour $|\rho| \geq \frac{2}{3}\tau_\omega$, et dont la dérivée soit bornée par $\frac{4}{\tau_\omega}$. On note $Q_{\mu,a}$ le plongement de $\mathbb{T}^1 \times [-\tau_\omega, \tau_\omega]$ dans $\mathbb{T}^1 \times \left[\frac{-1}{2}, \frac{1}{2} \right]$ défini par

$$Q_{\mu,a}(\theta, \rho) = (\theta + \omega + \tau_\omega \rho, \rho + \tau_\omega^2 \Pi_{\omega,\mu,a}(\rho) + \tau_\omega^n \Omega(\rho) \zeta_{\omega,\mu,a}(\theta, \rho)). \quad (28)$$

Comme précédemment, cette formule définit en fait un relèvement de $Q_{\mu,a}$ au revêtement universel $\mathbb{R} \times [-\tau_\omega, \tau_\omega]$ de $\mathbb{T}^1 \times [-\tau_\omega, \tau_\omega]$. Le lemme 3 et son corollaire s'appliquent évidemment à $Q_{\mu,a}$ (au remplacement près de la constante C par $\frac{C'}{\tau_\omega}$ à cause de la mauvaise majoration de la dérivée de Ω); on en déduit que, si ω est assez proche de ω_0 , et si $(\mu,a) \in \mathcal{D}_\omega$, tout ensemble invariant d'Aubry-Mather de $Q_{\mu,a}$ de nombre de rotation ω est également un tel ensemble pour $P_{\mu,a}$.

Lemme 4. *La famille à deux paramètres $Q_{\mu,a}$, $(\mu,a) \in \mathcal{D}_\omega$, de plongements de $\mathbb{R} \times [-\tau_\omega, \tau_\omega]$ dans $\mathbb{R} \times \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right]$ définie par (28) possède les propriétés suivantes:*

(a) *Pour tout (μ,a) dans \mathcal{D}_ω , l'image $Q_{\mu,a}(\mathbb{R} \times \{\pm \tau_\omega\})$ de chaque composante du bord est une droite parallèle ou cette composante elle-même; ceci permet de donner un sens aux nombres de rotation (réels) $\alpha_{\mu,a}$ et $\beta_{\mu,a}$ des restrictions de $Q_{\mu,a}$ à $\mathbb{R} \times \{-\tau_\omega\}$ et $\mathbb{R} \times \{\tau_\omega\}$.*

(b) *Pour tout (μ,a) dans \mathcal{D}_ω , $\alpha_{\mu,a} < \omega < \beta_{\mu,a}$.*

(c) *La famille considérée est une famille de distortions monotones, ce qui signifie que l'image par $Q_{\mu,a}$ de chaque rayon $\theta = \theta_0$ est le graphe d'une application d'un intervalle de \mathbb{R} à valeurs dans $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right]$ (comparer à la définition de [9]).*

(d) *Si (μ,a) appartient au bord supérieur ($v = \rho_0^\ominus$) (resp. inférieur, $v = -\rho_0^\ominus$) du carré \mathcal{D}_ω , $Q_{\mu,a}(\theta, \rho)$ s'écrit $(\Theta(\theta, \rho), \mathcal{R}(\theta, \rho))$, avec $\mathcal{R}(\theta, \rho) - \rho > 0$ (resp. $\mathcal{R}(\theta, \rho) - \rho < 0$) pour tout ρ dans $[-\tau_\omega, \tau_\omega]$.*

(e) *La famille $Q_{\mu,a}$ est jointe à la famille de formes normales $T_{\mu,a}$ définies par $T_{\mu,a}(\theta, \rho) = (\theta + \omega + \tau_\omega \rho, v' + \rho)$ par un chemin de familles à deux paramètres ayant les propriétés (a), (b), (c), (d) ci-dessus. Plus précisément, il existe une*

famille à trois paramètres $F_{\mu,a,t}$, $(\mu,a) \in \mathcal{D}_\omega$, $t \in [0,1]$, de plongements de $\mathbb{R} \times [-\tau_\omega, \tau_\omega]$ dans $\mathbb{R} \times [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ relevant une famille à trois paramètres de plongements de $\mathbb{T}^1 \times [-\tau_\omega, \tau_\omega]$ dans $\mathbb{T}^1 \times [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, telle que pour chaque t_0 dans $[0,1]$ la famille F_{μ,a,t_0} , $(\mu,a) \in \mathcal{D}_\omega$, ait les propriétés (a), (b), (c), (d), et que $F_{\mu,a,0} = T_{\mu,a}$, $F_{\mu,a,1} = Q_{\mu,a}$.

Démonstration. (a) vient de ce que sur le bord de $\mathbb{R} \times [-\tau_\omega, \tau_\omega]$ les applications $Q_{\mu,a}$ et $N_{\mu,a}$ coïncident; (b) est un calcul explicite: $\alpha_{\mu,a} = \omega - \tau_\omega^2 < \omega < \omega + \tau_\omega^2 = \beta_{\mu,a}$; (c) est évident sur (28); (d) vient de ce que dans

$$\mathcal{H}(\theta, \rho) - \rho = v' + \varepsilon' \rho + s' \rho^2 + \sum_{i=3}^n a'_i \rho^i + \tau_\omega^n \Omega(\rho) \zeta_{\omega,\mu,a}(\theta, \rho),$$

tous les termes autres que v' sont d'ordre $O(\tau_\omega^4)$ et sont donc petits par rapport à v' lorsque (μ,a) appartient au bord supérieur ou au bord inférieur de \mathcal{D}_ω (auquel cas v' est équivalent à $\pm C \tau_\omega^3$, où C est une constante positive); enfin (e) est évident, il suffit de considérer la famille $F_{\mu,a,t}$ définie par

$$F_{\mu,a,t}(\theta, \rho) = (\theta + \omega + \tau_\omega \rho, v' + \rho + t(\tau_\omega^2 \Pi_{\omega,\mu,a}(\rho) - v' + \tau_\omega^n \Omega(\rho) \zeta_{\omega,\mu,a}(\theta, \rho))).$$

5. Existence d'ensembles invariants d'Aubry-Mather

Les résultats des paragraphes précédents ont ramené la démonstration du théorème 1 au problème suivant: montrer que tout chemin γ dans \mathcal{D}_ω , joignant le bord inférieur au bord supérieur, passe par un point (μ,a) tel que $Q_{\mu,a}$ possède un ensemble invariant d'Aubry-Mather de nombre de rotation ω . Ce problème est résolu par la proposition qui suit:

Proposition 1. *Etant donné ω' vérifiant le (b) du Lemme 4, c'est-à-dire tel que $-\tau_\omega^2 < \omega' < \omega + \tau_\omega^2$, il existe sur tout chemin dans \mathcal{D}_ω joignant le bord inférieur au bord supérieur un point (μ',a') tel que $Q_{\mu',a'}$ possède un ensemble invariant d'Aubry-Mather de nombre de rotation ω' .*

Remarque. Si $\omega' = \omega \pm \tau_\omega^2$, la proposition est encore vraie mais triviale puisque que l'ensemble invariant de $Q_{\mu',a'}$ est contenu dans l'un des bords de $\mathbb{T}^1 \times [-\tau_\omega, \tau_\omega]$.

Démonstration. Tout d'abord, il suffit de prouver la proposition pour les ω' rationnels; si, en effet, à une suite $\left(\frac{p_n}{q_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ de rationnels convergeant vers ω' correspond une suite (μ_n, a_n) de points sur le chemin γ tels que Q_{μ_n, a_n} possède une orbite périodique \bar{E}_n bien ordonnée de nombre de rotation $\frac{p_n}{q_n}$, $Q_{\mu',a'}$ possède un ensemble invariant d'Aubry-Mather de nombre de rotation ω' pour tout point d'accumulation (μ', a') de la suite des (μ_n, a_n) .

En effet, par compacité de la topologie de Hausdorff sur les fermés de $\mathbb{T}^1 \times [-\tau_\omega, \tau_\omega]$, il existe une sous-suite n_i telle que les (μ_{n_i}, a_{n_i}) convergent vers (μ', a') et les \bar{E}_{n_i} vers un fermé \bar{E} , nécessairement invariant par $Q_{\mu',a'}$. Que ce

fermé ait toutes les propriétés d'un ensemble invariant d'Aubry-Mather, à l'exception près de la minimalité, découle comme dans [19] de l'existence d'estimations lipschitziennes uniformes (indépendantes de n) pour les \bar{E}_n (remarque qu'il suffit d'utiliser une estimation du type (13)). Quant au nombre de rotation de \bar{E} , c'est celui de l'homéomorphisme du cercle défini par $f(\theta) = \theta + \omega + \tau_\omega \bar{\psi}(\theta)$, où le graphe de $\bar{\psi}$ provient de \bar{E} par interpolation linéaire (comparer à (11)). Puisque f est limite uniforme des f_{n_i} obtenus en remplaçant $\bar{\psi}$ par les $\bar{\psi}_{n_i}$, dont les graphes interpolent les \bar{E}_{n_i} , le nombre de rotation de \bar{E} est la limite ω' des $\frac{p_{n_i}}{q_{n_i}}$ (continuité du nombre de rotation). Il ne reste plus qu'à considérer un sous-ensemble fermé invariant minimal de \bar{E} .

Dans le cas où $\omega' = \frac{p}{q}$ est rationnel, la proposition 1 est conséquence de la proposition suivante plus précise:

Proposition 2. *Etant donné un rationnel $\frac{p}{q}$ vérifiant $\omega - \tau_\omega^2 < \frac{p}{q} < \omega + \tau_\omega^2$, et un point quelconque $\bar{\alpha}$ sur le cercle, il existe sur tout chemin dans \mathcal{D}_ω joignant le bord inférieur au bord supérieur un point (μ', a') tel que $Q_{\mu', a'}$ possède une orbite périodique bien ordonnée de nombre de rotation $\frac{p}{q}$ dont l'un des points ait $\bar{\alpha}$ pour argument.*

Démonstration. Soit $A_{p,q}$ l'ensemble des suites $(\theta_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ de réels vérifiant

- (1) $\forall i \in \mathbb{Z}, \theta_{i+q} = \theta_i + p,$
- (2) $\forall i \in \mathbb{Z}, \omega - \tau_\omega^2 \leq \theta_{i+1} - \theta_i \leq \omega + \tau_\omega^2$

et $M_{p,q}$ le sous-ensemble des suites vérifiant de plus

- (3) $\forall i, j, i', j' \in \mathbb{Z}, (\theta_i + j \leq \theta_{i'} + j') \Leftrightarrow \left(i \frac{p}{q} + j \leq i' \frac{p}{q} + j' \right)$

(comparer à l'espace des états d'Aubry et l'espace $X_{p,q}$ de Mather).

Remarquons que $M_{p,q}$ est non vide puisqu'il contient au moins les suites définies par $\theta_i = \alpha + i \frac{p}{q}$ quel que soit le réel α .

C'est dans $A_{p,q}$ (resp. $M_{p,q}$) qu'il faut chercher les projections sur \mathbb{T}^1 (ou plutôt le relèvement à \mathbb{R} de ces projections) d'orbites périodiques (resp. d'orbites périodiques ordonnées) de $Q_{\mu,a}$ de nombre de rotation $\frac{p}{q}$. Rappelons qu'une telle projection détermine complètement l'orbite (regarder la première composante de $Q_{\mu,a}(\theta, \rho)$).

On munit (comme dans [20]) l'espace \mathbb{R}^∞ des suites réelles de la topologie produit et $A_{p,q}$ de la topologie induite; l'injection de $A_{p,q}$ dans \mathbb{R}^q définie par $(\theta_i)_{i \in \mathbb{Z}} \mapsto (\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_{q-1})$ induit également cette topologie.

Notons $(\theta_i^{(1)})_{i \in \mathbb{Z}}$ la suite définie par (comparer à [20])

$$\theta_i^{(1)} = \theta_{i+i_0} + j_0, \text{ où} \tag{29}$$

$$i_0 \frac{p}{q} + j_0 = \frac{1}{q} \text{ (on suppose } p \text{ et } q \text{ premiers entre eux),}$$

et par récurrence

$$\theta_i^{(j)} = \theta_{i+ji_0} + jj_0. \tag{30}$$

On vérifie que

$$\theta_0^{(p_i+qj)} = \theta_i + j, \text{ et} \tag{31}$$

$$\text{si } pi=r_i+k_iq, \quad 0 \leq r_i < q, \quad \theta_i = \theta_0^{(r_i)} + k_i.$$

En particulier, l'application $(\theta_i)_{i \in \mathbf{Z}} \mapsto (\theta_0, \theta_0^{(1)}, \dots, \theta_0^{(q-1)})$ de $A_{p,q}$ dans \mathbf{R}^q est injective et induit elle aussi la topologie de $A_{p,q}$.

Si maintenant $(\theta_i)_{i \in \mathbf{Z}} \in M_{p,q}$, on a pour tout i

$$\theta_i \leq \theta_i^{(1)} \leq \theta_i^{(2)} \leq \dots \leq \theta_i^{(q-1)} \leq \theta_i^{(q)} = \theta_i + 1, \tag{32}$$

et l'application $(\theta_i)_{i \in \mathbf{Z}} \mapsto (\theta_0, \theta_0^{(1)} - \theta_0, \dots, \theta_0^{(q-1)} - \theta_0^{(q-2)}, \theta_0 + 1 - \theta_0^{(q-1)})$ identifie $M_{p,q}$ au produit $\mathbf{R} \times d^{q-1}$ de \mathbf{R} par le sous-espace de \mathbf{R}^q d'équations

$$d^{q-1} = \left\{ x = (x_1, x_2, \dots, x_q); \forall i, x_i \geq 0, \sum_{i=1}^q x_i = 1, \right. \\ \left. \forall i, \omega - \tau_\omega^2 < \sum_{k=1}^p x_{(i+k)} < \omega + \tau_\omega^2 \right\}, \tag{33}$$

où les indices $(i+k)$ dans la dernière condition sont à remplacer par leur représentant modulo q dans l'intervalle $[1, q]$. Convexe compact d'intérieur non vide (il contient un voisinage de $(\frac{1}{q}, \frac{1}{q}, \dots, \frac{1}{q})$) dans le $(q-1)$ -simplexe, d^{q-1} est homéomorphe, comme ce dernier, à un $(q-1)$ -disque.

Pour une distortion monotone de l'anneau conservant les aires, donc définie par une fonction génératrice h (voir [13]), des orbites périodiques (ou plutôt le relèvement à \mathbf{R} de leurs projections sur \mathbf{T}^1) peuvent être obtenues en maximisant la fonctionnelle de Birkhoff-Aubry, $W: A_{p,q} \rightarrow \mathbf{R}$, définie par

$$W((\theta_i)_{i \in \mathbf{Z}}) = \sum_{i=0}^{q-1} h(\theta_i, \theta_{i+1}), \tag{34}$$

et on vérifie ([2, 13]) que le maximum est automatiquement atteint dans l'intérieur $\mathring{M}_{p,q}$ de $M_{p,q}$, ce qui signifie que l'orbite périodique correspondante est bien ordonnée.

Nous n'avons pas ici de fonction génératrice, donc pas de fonctionnelle, mais la dérivée de W garde un sens dans la situation générale. C'est cette «application dérivée», généralisant $(\theta_i)_{i \in \mathbf{Z}} \mapsto (\frac{\partial W}{\partial \theta_0}, \dots, \frac{\partial W}{\partial \theta_{q-1}})$, que nous définissons maintenant:

Soit $\delta_{\mu,a}: A_{p,q} \rightarrow \mathbf{R}^q$ l'application définie par

$$\delta_{\mu,a}((\theta_i)_{i \in \mathbf{Z}}) = (\delta_{\mu,a}^0((\theta_i)_{i \in \mathbf{Z}}), \dots, \delta_{\mu,a}^{q-1}((\theta_i)_{i \in \mathbf{Z}})), \\ \delta_{\mu,a}^i((\theta_i)_{i \in \mathbf{Z}}) = \rho_i - \rho'_i, \text{ où } \rho_i \text{ et } \rho'_i \text{ sont uniquement définis par} \tag{35} \\ Q_{\mu,a}(\theta_i, \rho_i) = (\theta_{i+1}, \rho'_{i+1})$$

(voir [13] figure 4; ρ_i et ρ'_i sont bien définis grâce à la condition (2) de la définition de $A_{p,q}$).

Si $(\theta_i)_{i \in \mathbb{Z}} \in A_{p,q}$ (resp. $M_{p,q}$) vérifie $\delta_{\mu,a}((\theta_i)_{i \in \mathbb{Z}}) = 0$, il est clair que la suite $(\theta_i, \rho_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ est le relèvement à $\mathbb{R} \times [-\tau_\omega, \tau_\omega]$ d'une orbite périodique (resp. orbite périodique bien ordonnée) de $Q_{\mu,a}$ dans $\mathbb{T}^1 \times [-\tau_\omega, \tau_\omega]$, de nombre de rotation $\frac{p}{q}$. La proposition sera donc démontrée si on est assurés que, dans les conditions énoncées ci-dessus, il existe (μ', a') sur le chemin considéré tel que $\delta_{\mu',a'}(M_{p,q}^\alpha)$ contienne 0, où

$$M_{p,q}^\alpha = M_{p,q} \cap \{(\theta_i)_{i \in \mathbb{Z}}, \theta_0 = \alpha\}, \quad \alpha \in \mathbb{R}. \tag{36}$$

Bien entendu, ceci est vrai si on remplace $Q_{\mu,a}$ par $T_{\mu,a}$ (tout chemin du type considéré rencontre la courbe d'équation $v=0$) et l'image réciproque de 0 par l'application $\delta_{\mu,a}$ correspondante est l'ensemble des suites de la forme

$$\left(\alpha + i \frac{p}{q} \right)_{i \in \mathbb{Z}}, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

qui est bien dans l'intérieur de $M_{p,q}^\alpha$, donc de $M_{p,q}$.

Notons $\delta_{\mu,a,t}$ l'application associée par la formule (35) au plongement $F_{\mu,a,t}$ introduit dans le (e) du Lemme 4.

Lemme fondamental. *Quels que soient (μ, a) dans \mathcal{D}_ω et t dans $[0, 1]$, l'image par $\delta_{\mu,a,t}$ du bord $\partial M_{p,q}$ de $M_{p,q}$ ne rencontre pas 0.*

Démonstration. Une suite $(\theta_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ appartient à $\partial M_{p,q} \cong \mathbb{R} \times \partial d^{q-1}$ si et seulement si l'une des deux situations (non exclusives) suivantes se présente:

- (1) $\exists i, \theta_i = \theta_i^{(1)}$,
- (2) $(2') \exists i, \theta_{i+1} - \theta_i = \omega - \tau_\omega^2$ ou $(2'') \exists i, \theta_{i+1} - \theta_i = \omega + \tau_\omega^2$.

Si (1) est réalisé, la suite $(\theta_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ ne peut correspondre à une orbite; en effet, cette dernière serait ordonnée et satisfairait encore une estimation lipschitzienne uniforme. En particulier, si deux points de l'orbite (dans $\mathbb{T}^1 \times [-\tau_\omega, \tau_\omega]$) ont même projection sur \mathbb{T}^1 , ils sont confondus. On en déduirait que $F_{\mu,a,t}^{i_0}(\theta_i, \rho_i) = (\theta_i, \rho_i)$ (dans $\mathbb{T}^1 \times [-\tau_\omega, \tau_\omega]$), donc $F_{\mu,a,t}(\theta_i, \rho_i) = (\theta_i, \rho_i)$, c'est-à-dire une contradiction.

On peut également arriver à une contradiction sans parler directement d'estimation lipschitzienne en contemplant (comme le fait Mather) la figure 4 dans laquelle, par analogie avec (35), on définit $\rho_i, \rho'_i, \rho_i^{(1)}, \rho_i^{(1)'}$ par $F_{\mu,a,t}(\theta_i, \rho_i) = (\theta_{i+1}, \rho'_{i+1})$, et $F_{\mu,a,t}(\theta_i^{(1)}, \rho_i^{(1)}) = (\theta_{i+1}^{(1)}, \rho_{i+1}^{(1)'})$, et $\delta_{\mu,a,t}^{(1)i} = \rho_i^{(1)} - \rho_i^{(1)'}$.

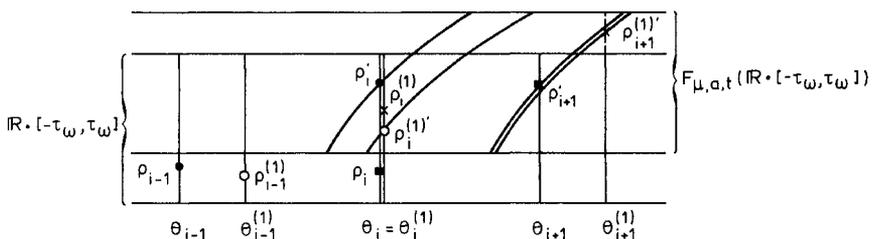


Fig. 4

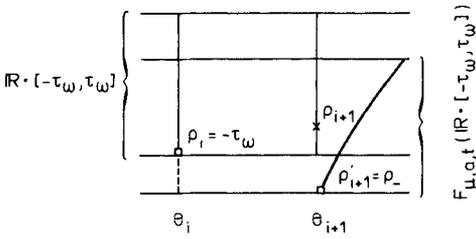


Fig. 5.1

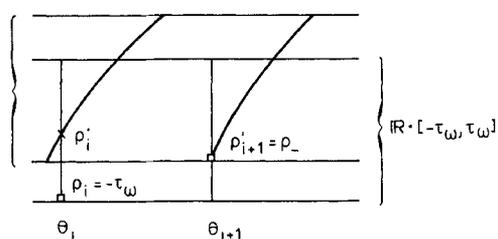


Fig. 5.2

De $\theta_{i-1} \leq \theta_i^{(1)} \leq \theta_i = \theta_i^{(1)} \leq \theta_{i+1} \leq \theta_{i+1}^{(1)}$ on déduit

$$\rho'_i \geq \rho_i^{(1)'} \quad \text{et} \quad \rho_i \leq \rho_i^{(1)}$$

Si donc $\delta_{\mu, a, t}^{(1)i} - \delta_{\mu, a, t}^i = (\rho_i^{(1)} - \rho_i) + (\rho'_i - \rho_i^{(1)'})$ s'annule, on a nécessairement $\rho_i = \rho_i^{(1)}$ et $\rho'_i = \rho_i^{(1)'}$, donc aussi $\theta_{i \pm 1} = \theta_{i \pm 1}^{(1)}$, et on conclut comme précédemment.

Si (2') est réalisé, on a $\rho_i = -\tau_\omega$. Par construction, $F_{\mu, a, t}(\mathbb{R} \times \{-\tau_\omega\})$ est de la forme $\mathbb{R} \times \{\rho_-\}$: ou bien $\rho_- < -\tau_\omega$, et alors $\delta_{\mu, a, t}^{i+1} \geq -\tau_\omega - \rho_- > 0$ ne peut être nul (Fig. 5-1); ou bien $\rho_- > -\tau_\omega$ et $\delta_{\mu, a, t}^i \leq -\tau_\omega - \rho_- < 0$ (Fig. 5-2); ou enfin $\rho_- = -\tau_\omega$, auquel cas l'orbite appartient au bord inférieur et son nombre de

rotation est égal à $\omega - \tau_\omega^2$ qu'on a supposé différent de $\frac{p}{q}$. Dans tous les cas on obtient une contradiction. En raisonnant de même dans l'hypothèse (2'') on termine la démonstration du Lemme fondamental.

Remarque. Le lemme fondamental serait faux si on n'avait pas pris la précaution de rendre les applications $F_{\mu, a, t}$ «jolies» au bord (condition (a) du Lemme 4): en effet, il est essentiel que l'image de chaque composante du bord ne puisse rencontrer cette composante que si elle est confondue avec elle. La Fig. 6 est une tentative de contre-exemple en l'absence de cette hypothèse: bien que les images des composantes du bord soient des graphes, une orbite périodique bien ordonnée peut a priori passer par un point du bord.

De même, le Lemme fondamental serait faux si on remplaçait $M_{p, q}$ par le sous-ensemble de $A_{p, q}$ formé des suites ayant un ordre fixé, différent du bon ordre: dans le cas (1) de la démonstration on ne disposerait plus des estimations lipschitziennes uniformes.

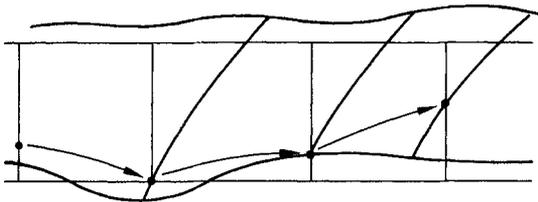


Fig. 6

Fin de la démonstration de la Proposition 2. A un réel t et une application continue $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathcal{D}_\omega$ définissant un chemin qui joint le bord inférieur de \mathcal{D}_ω au bord supérieur, on associe l'application continue $\Delta_{\gamma,t}: [0, 1] \times M_{p,q} \rightarrow \mathbb{R}^q$ définie par

$$\Delta_{\gamma,t}(u, (\theta_i)_{i \in \mathbb{Z}}) = \delta_{\gamma(u), t}((\theta_i)_{i \in \mathbb{Z}}). \tag{37}$$

Etant donné $\alpha \in \mathbb{R}$, on note $\Delta_{\gamma,t}^\alpha$ la restriction de $\Delta_{\gamma,t}$ à $[0, 1] \times M_{p,q}^\alpha$, qui est homéomorphe à un q -disque.

De l'hypothèse (d) du Lemme 4 et du Lemme fondamental on déduit que

$$\forall \gamma, t, \alpha, \Delta_{\gamma,t}^\alpha(\partial([0, 1] \times M_{p,q}^\alpha)) \subset \mathbb{R}^q - 0. \tag{38}$$

La proposition 2 équivariant à l'existence à l'intérieur de $[0, 1] \times M_{p,q}^\alpha$ d'un point dont l'image par $\Delta_{\gamma,t}^\alpha$ soit 0, il suffit de montrer que le degré de la restriction de $\Delta_{\gamma,t}^\alpha$ à $\partial([0, 1] \times M_{p,q}^\alpha)$, considérée comme application à valeurs dans $\mathbb{R}^q - 0$, est non nul.

Soit $t \mapsto \gamma_t$ une homotopie de γ_0 à $\gamma_1 = \gamma$ à travers des applications γ_t qui définissent des chemins de \mathcal{D}_ω joignant le bord inférieur au bord supérieur, γ_0 étant un paramétrage régulier du chemin $e' = 0$.

L'invariance du degré par homotopie nous ramène au calcul du degré de la restriction à $\partial([0, 1] \times M_{p,q}^\alpha)$ de $\Delta_{\gamma_0,0}^\alpha$ considérée comme application à valeurs dans $\mathbb{R}^q - 0$; enfin, ce dernier calcul peut être fait explicitement car il ne concerne que les formes normales $T_{\mu,a}$ définies dans l'énoncé du Lemme 4:

On constate que

$$\begin{aligned} \Delta_{\gamma_0,0}^\alpha(u, (\theta_i)_{i \in \mathbb{Z}}) &= (\delta^0, \dots, \delta^{q-1}), \\ \delta^i &= -v'(u) + \frac{1}{\tau_\omega}(\theta_{i+1} - 2\theta_i + \theta_{i-1}), \end{aligned} \tag{39}$$

où on a noté $(v'(u), 0)$ l'expression de $\gamma_0(u)$ dans les coordonnées (v', e') de \mathcal{D}_ω .

Si u_0 désigne l'unique élément de $[0, 1]$ (en fait $]0, 1[$) vérifiant $v'(u_0) = 0$, on a

$$(\Delta_{\gamma_0,0}^\alpha)^{-1}(0) = \left(u_0, \left(\alpha + i \frac{p}{q} \right)_{i \in \mathbb{Z}} \right) \tag{40}$$

qui est bien dans l'intérieur de $[0, 1] \times M_{p,q}^\alpha$.

L'application $\Delta_{\gamma_0,0}^\alpha$ est affine (ne pas oublier que $\theta_{iq} = \alpha + ip$) dans les coordonnées $v', \frac{1}{\tau_\omega}\theta_1, \dots, \frac{1}{\tau_\omega}\theta_{q-1}$ (qui remplacent avantageusement $u, \theta_1, \dots, \theta_{q-1}$); sa dérivée a pour matrice

$$m = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & & & 0 \\ -1 & 1 & -2 & & 1 & \vdots \\ -1 & 0 & 1 & & & 0 \\ & \vdots & & & & 1 \\ -1 & 0 & \dots & & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{41}$$

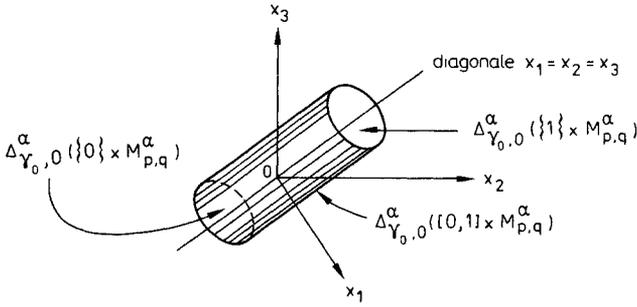


Fig. 7

dont on vérifie quelle est inversible (remplacer la première ligne par la somme de toutes les lignes et en déduire que $\det(m) = -qD_{q-1}$ où le déterminant D_{q-1} vérifie la récurrence $D_{q+1} + D_q = -(D_q + D_{q-1})$; conclure que $D_q = (-1)^q(1+q)$, donc $\det(m) = (-1)^q q^2$ au moins pour $q \geq 3$).

Le degré cherché est donc ± 1 , ce qui termine la démonstration de la Proposition 2, donc aussi celles de la Proposition 1 et du Théorème 1.

La Fig. 7 représente schématiquement l'application $\Delta_{\gamma_0,0}$ dans le cas où $q=3$.

Remarques. 1. Voici une autre démonstration (trop compliquée) de la Proposition 2: après déformation de $P_{\mu,a}$ en une famille de difféomorphismes de $\mathbb{T}^1 \times [-\tau_\omega, \tau_\omega]$ préservant les bords (comparer au paragraphe suivant), on utilise la version dissipative du Théorème géométrique de Poincaré-Birkhoff donnée dans [9] et le joli résultat de [14] qui assure l'existence d'orbites périodiques ordonnées des distortions monotones de l'anneau dès qu'existent des orbites périodiques quelconques. Notons que, dans notre démonstration de la Proposition 2, les hypothèses verticales sont trop fortes ((d) du Lemme 4) pour impliquer comme [14] la possibilité de remplacer la conservation des aires par la propriété d'intersection dans le Théorème d'Aubry-Mather assurant l'existence d'orbites bien ordonnées dans toute distortion monotone conservative de l'anneau.

2. Un corollaire de la Proposition 2 est qu'«en général» les orbites périodiques bien ordonnées vont par paires persistant sur tout un intervalle du chemin: en effet, il y a homologiquement une orbite périodique passant par un rayon d'argument donné $\bar{\alpha}$, donc homologiquement un cercle dans l'espace produit $\mathbb{T}^1 \times [-\tau_\omega, \tau_\omega] \times [0, 1]$. On peut comprendre ce «cercle homologique» comme la trace des cercles d'orbites périodiques de $N_{\gamma(u)}$ correspondant aux intersections du chemin γ avec $C_{\frac{p}{q}}$, et il n'est pas interdit de comparer cette situation à celle du Théorème de bifurcation de Hopf topologique de Alexander et Yorke [1].

Dans les Figs. 8.1 et 8.2, $q=3$ et on a supposé que le chemin γ traverse transversalement et en un seul point la courbe $C_{\frac{p}{q}}$. On a représenté respectivement la famille de formes normales $N_{\gamma(u)}$ et une famille générique $P_{\gamma(u)}$ dans le

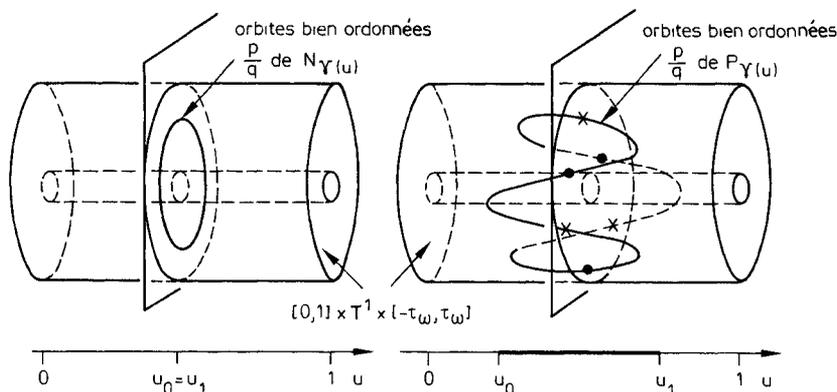


Fig. 8.1

Fig. 8.2

cas le plus simple (le seul à se produire génériquement pour les «bons rationnels», [7, 8]). Ces figures sont analogues à celles qu'on obtiendrait en considérant la naissance et l'élimination d'un couple d'orbites périodiques dans une famille de difféomorphismes du cercle traversant une langue de résonance, la famille de formes normales correspondant à une famille de rotations dont l'angle varie de façon monotone.

Remarquons que dans le cas d'un point fixe on retrouve la situation de [9] où, après être né, le couple de points fixes doit nécessairement entourer le «trou» de l'anneau avant de s'éliminer. Notons pour finir que la démonstration est beaucoup plus facile ici que dans [3] et [9] à cause, d'une part, de l'hypothèse de distortion monotone, d'autre part du fait que pour $u=0$ et $u=1$ il n'y a pas d'orbite périodique du nombre de rotation considéré.

Démonstration du Théorème 2. Supposons que, pour tout ω irrationnel assez proche de ω_0 , les deux composantes de $\tilde{C}_\omega \cap \mathcal{H}$ soient connectées dans \tilde{C}_ω : tout chemin γ traversant \mathcal{D}_ω rencontre \tilde{C}_ω , c'est-à-dire qu'il existe $u_\omega \in [0, 1]$ tel que $P_{\gamma(u_\omega)}$ possède une courbe fermée invariante qui soit un graphe, sur laquelle son nombre de rotation soit ω . Il est facile d'en déduire qu'il en est alors de

même pour tout $\omega = \frac{p}{q}$ rationnel assez proche de ω_0 : en effet, un raisonnement analogue à celui utilisé au début de la démonstration de la Proposition 1, à l'échange près des rôles des rationnels et des irrationnels, montre que pour tout chemin γ traversant $\mathcal{D}_{\frac{p}{q}}$ il existe une suite de points $u_i \in [0, 1]$ convergeant vers une limite v et une suite d'irrationnels ω_i convergeant vers $\frac{p}{q}$ tels que 1) $P_{\gamma(u_i)}$ possède une courbe invariante \mathcal{C}_i qui soit un graphe et ait ω_i pour nombre de rotation, 2) les \mathcal{C}_i convergent vers un fermé invariant \mathcal{C} de $P_{\gamma(v)}$.

Chaque courbe \mathcal{C}_i étant un graphe lipschitzien de constante de Lipschitz bornée indépendamment de i , la limite a encore la même propriété et est une courbe (graphe) invariant de $P_{\gamma(v)}$ de nombre de rotation $\frac{p}{q}$. Le point $\gamma(v)$ appartient donc à $\tilde{C}_{\frac{p}{q}}$.

Mais dans une famille générique les deux composantes de $\tilde{C}_{\frac{p}{q}} \cap \mathcal{H}$ ne sont pas connectées dans $\tilde{C}_{\frac{p}{q}}$: cette dernière affirmation est vraie non seulement en C^∞ , mais également dans le cadre analytique avec une topologie très fine (au moins pour une suite de «bons rationnels» convergeant vers ω_0 , [7, 8]). Pour une telle famille, on a donc prouvé l'existence dans tout voisinage de ω_0 d'irrationnels $\omega > \omega_0$ et de chemins γ traversant \mathcal{D}_ω sans rencontrer \tilde{C}_ω ; pour de tels ω le Théorème 1 implique que $\dot{C}_\omega = \tilde{C}_\omega - \tilde{C}_\omega$ est non vide.

Remarques. 1. Dans le cas où ω' est irrationnel, on peut se demander ce qui remplace la latitude qu'on a de fixer $\bar{\alpha}$ dans la Proposition 2. En suivant l'argument qui fait de la Proposition 1 une conséquence de la Proposition 2, on constate qu'étant donnés ω' irrationnel comme dans la Proposition 1 et $\bar{\alpha}$ quelconque sur le cercle, il existe sur tout chemin dans \mathcal{D}_ω joignant le bord inférieur au bord supérieur un point (μ', a') tel que $Q_{\mu', a'}$ possède une orbite bien ordonnée de nombre de rotation ω' dont l'un des points ait $\bar{\alpha}$ pour argument.

Une telle orbite contient dans son adhérence un ensemble invariant d'Aubry-Mather de nombre de rotation ω' auquel elle est homocline (i.e. cet ensemble invariant est à la fois son ensemble α -limite et son ensemble ω -limite; attention aux notations α et ω qui n'ont rien à voir avec les nôtres).

Trois cas sont possibles: l'adhérence de l'orbite peut être une courbe invariante, un ensemble de Cantor invariant, ou la réunion d'un ensemble de Cantor et d'une orbite (les points isolés de l'adhérence). Dans les deux derniers cas, il peut arriver que l'adhérence de l'orbite appartienne encore à une courbe fermée invariante, forcément peu différentiable, sur laquelle $Q_{\mu', a'}$ induit un contre-exemple de Denjoy (comparer à [15]). Bien entendu, les estimations lipschitziennes du Lemme 3 étant valables pour toute orbite bien ordonnée, l'orbite en question est également une orbite de $P_{\mu', a'}$ si $\omega' = \omega$. Une conséquence de tout ceci est que, même lorsque ω est irrationnel, \dot{C}_ω est en général «épais» dès qu'il est non vide.

2. En renversant encore une fois les rôles des rationnels et des irrationnels, on montre l'existence d'orbites homoclines à certaines des orbites périodiques bien ordonnées, et ce sans savoir si ces orbites périodiques sont hyperboliques (comparer à [2, 7, 8]).

6. Ensembles translates d'Aubry-Mather

Généralisant les courbes translattées de Rüssmann, les ensembles translattés d'Aubry-Mather (de translation λ) sont définis de la même façon: ce sont des ensembles invariants d'Aubry-Mather de $(\mathcal{T}_\lambda)^{-1} \circ P_{\mu, a}$, composé à gauche de $P_{\mu, a}$ avec l'inverse de la «translation» radiale

$$\mathcal{T}_\lambda(\theta, \rho) = (\theta, \rho + \lambda). \quad (42)$$

Bien entendu, contrairement à la notion d'ensemble invariant, celle-ci n'est pas invariante par changement de coordonnées.

Nous avons montré dans [6] que, si ω est un «bon irrationnel», il existe une fonction différentiable $\bar{\lambda}_\omega: \mathcal{D}_\omega \rightarrow \mathbb{R}$ telle que, pour tout (μ, a) dans $\mathcal{D}_\omega, P_{\mu, a}$ possède une unique courbe $\mathcal{C}_{\omega, \mu, a}$ sur laquelle $\mathcal{F}_{\bar{\lambda}_\omega(\mu, a)}^{-1} \circ P_{\mu, a}$ est C^∞ -conjugué à la rotation R_ω . L'ensemble de [6] est d'ailleurs basé sur l'existence et les propriétés de cette fonction.

Le théorème suivant est ce qui reste de ces affirmations lorsque ω est quelconque. La différence est évidemment que la fonction de translation n'a a priori aucune propriété de régularité: elle n'est en fait même pas définie puisqu'il n'y a pas unicité et ne peut donc en aucun cas servir à prouver l'existence d'ensembles invariants d'Aubry-Mather. L'intérêt dynamique de ces ensembles translétés n'est donc pas claire, et c'est uniquement dans l'optique d'un inventaire systématique des traits communs aux familles $N_{\mu, a}$ et $P_{\mu, a}$ que nous avons inclus leur étude.

Théorème 3. *Soit $\omega > \omega_0$ assez proche de ω_0 ; pour tout (μ, a) dans $\mathcal{D}_\omega, P_{\mu, a}$ possède un ensemble translété d'Aubry-Mather de nombre de rotation ω .*

Démonstration. Soit $R_{\mu, a}$ le difféomorphisme de $\mathbb{T}^1 \times [-\tau_\omega, \tau_\omega]$ défini par

$$R_{\mu, a}(\theta, \rho) = (\theta + \omega + \tau_\omega \rho, \rho + \Phi(\rho) [\tau_\omega^2 \Pi_{\omega, \mu, a}(\rho) + \tau_\omega^n \Omega(\rho) \zeta_{\omega, \mu, a}(\theta, \rho)]), \tag{43}$$

où $\Phi: [-\tau_\omega, \tau_\omega] \rightarrow \mathbb{R}$ est C^∞ , bornée par 1, et vaut 1 pour $|\rho| \leq \frac{2}{3} \tau_\omega$ et 0 pour $|\rho| = \tau_\omega$.

$R_{\mu, a}$ coïncide avec $Q_{\mu, a}$ sur $\mathbb{T}^1 \times [-\frac{2}{3} \tau_\omega, \frac{2}{3} \tau_\omega]$ et préserve les bords de $\mathbb{T}^1 \times [-\tau_\omega, \tau_\omega]$. Si un ensemble translété d'Aubry-Mather de $R_{\mu, a}$ contient un point (θ_0, ρ_0) tel que $|\rho_0| \geq \frac{2}{3} \tau_\omega$, il est nécessairement contenu dans le cercle $\rho = \rho_0$ car, ainsi que $Q_{\mu, a}, R_{\mu, a}$ coïncide avec une forme normale sur $\{(\theta, \rho), |\rho| \geq \frac{2}{3} \tau_\omega\}$ et on peut supposer après translation que ce cercle est invariant, auquel cas l'affirmation est claire (comparer à la Fig. 9). Mais alors son nombre de rotation vaut $\omega + \tau_\omega \rho_0 \neq \omega$.

On en déduit que tout ensemble translété d'Aubry-Mather \bar{E} de $R_{\mu, a}$ de nombre de rotation ω est contenu dans $\mathbb{T}^1 \times [-\frac{2}{3} \tau_\omega, \frac{2}{3} \tau_\omega]$ et est également un tel ensemble pour $Q_{\mu, a}$. Enfin, le Lemme 3 et son Corollaire s'appliquant sans changement aux ensembles translétés de $P_{\mu, a}$ ou $Q_{\mu, a}$ de nombre de rotation ω , \bar{E} est en fait un tel ensemble pour $P_{\mu, a}$ et on peut remplacer $P_{\mu, a}$ par $R_{\mu, a}$ dans la preuve du Théorème 3.

On suit maintenant la trame du paragraphe 5 en démontrant les analogues suivants des Propositions 1 et 2:

Proposition 1'. *Si ω' vérifie $\omega - \tau_\omega^2 < \omega' < \omega + \tau_\omega^2$, $R_{\mu, a}$ possède pour tout (μ, a) dans \mathcal{D}_ω un ensemble translété d'Aubry-Mather de nombre de rotation ω' .*

Proposition 2'. *Si $\omega' = \frac{p}{q}$ est un rationnel vérifiant $\omega - \tau_\omega^2 < \frac{p}{q} < \omega + \tau_\omega^2$, et $\bar{\alpha}$ un point quelconque sur le cercle, $R_{\mu, a}$ possède, pour tout (μ, a) dans \mathcal{D}_ω , une orbite translétée bien ordonnée de nombre de rotation $\frac{p}{q}$ dont l'un des points a pour argument $\bar{\alpha}$.*

Comme précédemment, la Proposition 2' implique la Proposition 1' par un passage à la limite (à (μ, a) fixé) qu'autorisent les estimations lipschitziennes.

Si $t=0$, $\bar{\delta}_{\mu,a,0}$ est affine et a pour dérivée, dans les coordonnées $\frac{1}{\tau_\omega}\theta_1, \dots, \frac{1}{\tau_\omega}\theta_{q-1}$, l'application linéaire de \mathbb{R}^{q-1} dans \mathbb{R}^q (en fait dans Δ_q^\perp) dont la matrice se déduit de m (formule (41)) par la suppression de la première colonne. De l'inversibilité de m et de sa structure (première colonne dans Δ_q , les autres dans Δ_q^\perp) on déduit que la dérivée de l'application affine $\bar{\eta}_{\mu,a,0}$ est un isomorphisme. Puisque $\bar{\eta}_{\mu,a,0} \left(\left(\alpha + i \frac{p}{q} \right)_{i \in \mathbb{Z}} \right) = 0$, la restriction de $\bar{\eta}_{\mu,a,0}$ à $\partial M_{p,q}^\alpha$, considérée comme application de $\partial M_{p,q}^\alpha$ dans $\Delta_q^\perp - \{0\}$ est de degré ± 1 ; il en est donc de même de la restriction de $\bar{\eta}_{\mu,a,1}$ à $\partial M_{p,q}^\alpha$, ce qui prouve l'existence d'une suite $(\theta_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ dans l'intérieur de $M_{p,q}^\alpha$ telle que $\bar{\eta}_{\mu,a,1}((\theta_i)_{i \in \mathbb{Z}}) = 0$, ce qui équivaut à $\bar{\delta}_{\mu,a,1}((\theta_i)_{i \in \mathbb{Z}}) = \bar{\delta}_{\mu,a}((\theta_i)_{i \in \mathbb{Z}}) \in \Delta_q$, et démontre la Proposition 2', donc la Proposition 1' et le Théorème 3.

7. Conclusion

Bien des questions sont laissées sans réponse par le présent article, en particulier celle de la structure du couple $(\hat{C}_\omega, \dot{C}_\omega)$ pour les «mauvais» ω : la compréhension des bifurcations que subit $P_{\mu,a}$ lorsque (μ, a) traverse \dot{C}_ω «le long» de \hat{C}_ω passe par la solution du problème si délicat de la naissance et de la disparition des courbes invariantes à nombre de rotation fixé, déjà rencontré dans le monde conservatif. Comment une telle courbe se transforme-t-elle en ensemble de Cantor?, ces ensembles de Cantor invariants peuvent-ils être hyperboliques?, rencontre-t-on génériquement des exemples analogues à celui de [15] où une courbe invariante attractante peu régulière porte un contre-exemple de Denjoy (ce qui lui permettrait de se transformer en ensemble de Cantor invariant par un processus analogue à celui de la brisure des connexions homoclines dans le cas périodique)?, autant de questions d'analyse qui semblent difficiles.

Si au contraire (μ, a) traverse \dot{C}_ω «transversalement» à \hat{C}_ω , la compréhension des bifurcations de $P_{\mu,a}$ semble plus accessible et l'existence d'orbites bien ordonnées d'argument fixé $\bar{\alpha}$ (Proposition 2 et Remarque 1 suivant la démonstration du Théorème 2) est un premier indice de réponse (cf. la Fig. 8 dans le cas rationnel).

Dans le troisième article de cette série nous étudierons en grand détail la structure du couple $(\hat{C}_{\frac{p}{q}}, \dot{C}_{\frac{p}{q}})$ lorsque $\frac{p}{q}$ est un «bon» rationnel.

References

1. Alexander, J.C., Yorke, J.A.: Global bifurcation of periodic orbits. Amer. J. of Math. **100**, (n° 2) 263-292 (1978)
2. Aubry, S., Le Daeron, P.Y., André, G.: Classical ground states of a one dimensional model for incommensurate structures. Comm. in Math. Physics (à paraître)

3. Birkhoff, G.D.: An extension of Poincaré's last geometric theorem. *Acta Math.* (1925) pp.297–311
4. Birkhoff, G.D.: Surface transformations and their dynamical applications. *Acta Math.* **43**, 1–119 (March 1920)
5. Birkhoff, G.D.: On the periodic motions of dynamical systems. *Acta Math.* **50**, 359–379 (1927)
6. Chenciner, A.: Bifurcations de points fixes elliptiques. I-Courbes invariantes. Publications I.H.E.S. (à paraître en 1985)
7. Chenciner, A.: Bifurcations de points fixes elliptiques. III-Orbites homoclines (en préparation)
8. Chenciner, A.: Points homoclines au voisinage d'une bifurcation de Hopf dégénérée de difféomorphisme de \mathbb{R}^2 . *C.R. Acad. Sci Paris* **294**, (série I) 269–272 (1982)
9. Chenciner, A., Sur un énoncé dissipatif du Théorème géométrique de Poincaré-Birkhoff. *C.R. Acad. Sci Paris* **294**, (série I) 243–245 (1982)
10. Chenciner, A.: Points périodiques de longues périodes au voisinage d'une bifurcation de Hopf dégénérée de difféomorphismes de \mathbb{R}^2 . *C.R. Acad. Sci Paris* **294**, (série I) 661–663 (1982)
11. Chenciner, A.: Orbites périodiques et ensembles de Cantor invariants d'Aubry-Mather au voisinage d'une bifurcation de Hopf dégénérée de difféomorphismes de \mathbb{R}^2 . *C.R. Acad. Sci Paris* **297**, (série I) 465–467 (1983)
12. Chenciner, A.: Hamiltonian-like phenomena in saddle-node bifurcations of invariant curves for plane diffeomorphisms, Colloque d'Heraklion sur les singularités et les systèmes dynamiques, sept. 1983, ed. S. Pneumaticos, Amsterdam: North Holland 1985
13. Chenciner, A.: La dynamique au voisinage d'un point fixe elliptique conservatif: de Poincaré et Birkhoff à Aubry et Mather, Séminaire Bourbaki, 622, fév. 1984 Astérisque 121–122 (1985)
14. Hall, G.R.: A topological version of a theorem of Mather on twist maps. Preprint University of Wisconsin, Madison, 1983 Ergodic theory and dynamical systems, à paraître
15. Hall, G.R.: Bifurcation of an attracting invariant circle: A Denjoy attractor, *Ergodic theory and dynamical systems* **3**, 87–118 (1983)
16. Herman, M.R.: Sur la conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle à des rotations. *Publications I.H.E.S.* **49**, 5–233 (1979)
17. Herman, M.R.: Sur les courbes invariantes par les difféomorphismes de l'anneau, I. *Astérisque* 103–104 (1983)
18. Herman, M.R.: Remarque sur les Cantors d'Aubry et Mather, Conférence au séminaire de l'Ecole Polytechnique, 15 mars 1982
19. Katok, A.: Some remarks on Birkhoff and Mather twist map theorems, *Ergodic theory and dynamical systems*, vol. 2, 185–194 (1982)
20. Mather, J.N.: A criterion for the non-existence of invariant circles. Preprint 1982