Une promenade dans les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste

Alain Chenciner[1]

« En ce qui concerne le problème des trois corps, je ne suis pas sorti du cas suivant : Je considère trois masses, la première très grande, la seconde petite mais finie, la troisième infiniment petite ; je suppose que les deux premières décrivent un cercle autour de leur centre de gravité commun et que la troisième se meut dans le plan de ces cercles. Tel serait le cas d'une petite planète troublée par Jupiter, si l'on négligeait l'excentricité de Jupiter et l'inclinaison des orbites ». C'est ainsi qu'au début de son mémoire « *Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique* » qui recevra en 1889 le prix du roi de Suède, Poincaré décrit le cadre de ce qu'il développera dans *Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste*, en grande partie construites pour corriger la phrase qui suivait : *« Dans ce cas particulier, j'ai démontré rigoureusement la stabilité »*. Publiés par Gauthier-Villars respectivement en 1892, 1893 et 1899 ces trois volumes (1268 pages + 10 pages de tables) feront dire en 1925 à Paul Appell : *« Il est probable que, pendant le prochain demi-siècle, ce livre sera la mine d'où des chercheurs plus humbles extrairont leurs matériaux. »* La prédiction s'est réalisée : plus de cent ans après, nous contemplons quelques-unes de ces pépites dont l'éclat n'a pas faibli.

1. Le problème général de la dynamique

Dès le chapitre I, section 13, intitulé « Problème général de la dynamique », Poincaré donne le cadre de son ouvrage : *« Nous sommes donc conduit à nous proposer le problème suivant :*

Étudier les équations canoniques

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{dF}{dy_i}, \quad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{dF}{dx_i}, \tag{1}$$

en supposant que la fonction $F(x, y, \mu)$ peut se développer suivant les puissances d'un paramètre très petit μ de la manière suivante ;

$$F = F_0 + \mu F_1 + \mu^2 F_2 + \cdots ,$$

en supposant de plus que F_0 ne dépend que des x et est indépendant des y et que $F_1, F_2, \cdots$ sont des fonctions périodiques de période 2π par rapport aux y. »
Autrement dit, le système est une petite perturbation du système « complètement intégrable » associé à $F_0(x)$ pour lequel (x, y) sont des « coordonnées action-angles » et dont les solutions sont :

$$x_i = x_i^0, \quad y_i = n_i t + y_i^0, \text{ où } n_i = -\frac{dF_0}{dx_i}(x^0). \tag{2}$$

[1] Observatoire de Paris, IMCCE (UMR 8028), ASD, Université Paris VII, `http://www.imcce.fr/Equipes/ASD/person/chenciner/chenciner.html`

L'espace des phases, produit par un tore $\mathbb{T}^N$ (coordonnées y) d'un domaine ouvert de $\mathbb{R}^N$ (coordonnées x), est alors feuilleté par des « tores invariants » $x = x^0 = (x_1^0, \cdots, x_N^0)$ de dimension N portant des solutions quasi-périodiques dont les fréquences n_i ne dépendent que de x^0. En particulier, si elles en dépendent effectivement, les solutions portées par une sous-famille dense de ces tores seront périodiques. Pour une petite planète dont le mouvement keplerien autour du soleil est troublé par Jupiter, le petit paramètre est le rapport de la masse de Jupiter à celle du Soleil, soit environ $1/1000$. Mais des équations semblables régissent les mouvements du couple Terre-Lune troublé par le Soleil, le petit paramètre étant alors le rapport de la distance Terre-Lune à la distance Terre-Soleil, c'est-à-dire environ $1/400$. Les travaux de G.W. Hill sur ce dernier problème ont beaucoup influencé Poincaré dans son étude de ce qu'on nomme aujourd'hui « Problème restreint circulaire plan des trois corps » (en anglais, circular planar RTBP). Les équations obtenues dans un repère tournant ont la forme ci-dessus, avec pour F la « constante de Jacobi ». Avec le « flot géodésique » sur une surface presque sphérique étudié par Poincaré à la fin de sa vie, ce sont des exemples de systèmes hamiltoniens génériques – et en particulier « non-intégrables »– à $N = 2$ degrés de liberté. Plus généralement, cette forme des équations vaut également pour le Problème des $1 + n$ corps dans le cas planétaire avec un Soleil de masse 1 et n planètes de masses $O(\mu)$ qui ont autour du centre de gravité du système des mouvements presque circulaires et presque coplanaires, mais surgit une nouvelle difficulté : le problème de Kepler en énergie négative fixée ayant toutes ses solutions périodiques de même période, la fonction F_0, qui décrit n problèmes de Kepler non couplés, ne dépend que d'une partie des variables d'action x.

2. Solutions périodiques

Dans le chapitre III, section 36, apparaissent les solutions périodiques (penser au retour des jours, des mois, des années, des saisons). *« Le problème que nous allons traiter ici est le suivant : Supposons que, dans les équations (1)*[2]*, les fonctions X_i dépendent d'un certain paramètre μ ; supposons que dans le cas de $\mu = 0$ on ait pu intégrer les équations, et qu'on ait reconnu ainsi l'existence d'un certain nombre de solutions périodiques. Dans quelles conditions aura-t-on le droit d'en conclure que les équations comportent encore des solutions périodiques pour les petites valeurs de μ ? »* Ces solutions se retrouvent dans tout l'ouvrage, et leur étude par des méthodes de perturbation préfigure certains aspects de la théorie des singularités ; les « exposants caractéristiques » sont introduits dans le chapitre IV, les « solutions asymptotiques » (aujourd'hui variétés stables ou instables) dans le chapitre VII, enfin la non-intégrabilité leur est en grande partie due. Annonçant l'existence d'une infinité de solutions périodiques du Problème planétaire des trois corps lorsque les masses planétaires sont suffisamment petites, Poincaré justifie ainsi ses efforts : *« Il semble d'abord que ce fait ne puisse être d'aucun intérêt pour la pratique. En effet, il y a une probabilité nulle pour que les conditions initiales du mouvement soient précisément celles qui correspondent à une solution périodique. Mais il peut arriver qu'elles en diffèrent très peu, et cela a lieu justement dans les cas où les méthodes anciennes ne sont plus applicables. On peut alors avec*

[2] Il s'agit des équations $dx_i/dt = X_i(x_1, \cdots, x_n),\ i = 1, \cdots, n$.

avantage prendre la solution périodique comme première approximation, comme orbite intermédiaire, pour employer le langage de M. Gylden.

Il y a même plus : voici un fait que je n'ai pu démontrer rigoureusement, mais qui me paraît pourtant très vraisemblable.

Étant données des équations de la forme définie dans le numéro 13 et une solution particulière quelconque de ces équations, on peut toujours trouver une solution périodique (dont la période peut, il est vrai, être très longue), telle que la différence entre les deux solutions soit aussi petite qu'on le veut, pendant un temps aussi long qu'on le veut. D'ailleurs, ce qui nous rend ces solutions périodiques si précieuses, c'est qu'elles sont, pour ainsi dire, la seule brèche par où nous puissions essayer de pénétrer dans une place jusqu'ici réputée inabordable. »

Un peu plus loin, dans la section 39, Poincaré rappelle sa classification des solutions périodiques en trois sortes : « ... *j'ai été conduit à distinguer trois sortes de solutions périodiques : pour celles de la première sorte, les inclinaisons sont nulles et les excentricités très petites ; pour celles de la deuxième sorte, les inclinaisons sont nulles et les excentricités finies ; enfin, pour celles de la troisème sorte, les inclinaisons ne sont plus nulles.* »

Puis, décrivant les recherches de Hill sur la Lune, il précise encore l'importance de la construction de solutions périodiques approchées : « *Supposons que, dans le mouvement d'un astre quelconque, il se présente une inégalité*[3] *très considérable. Il pourra se faire que le mouvement véritable de cet astre diffère fort peu de celui d'un astre idéal dont l'orbite correspondrait à une solution périodique.*

Il arrivera alors assez souvent que l'inégalité considérable dont nous venons de parler aura sensiblement le même coefficient pour l'astre réel et pour cet astre idéal ; mais ce coefficient pourra se calculer beaucoup plus facilement pour l'astre idéal dont le mouvement est plus simple et l'orbite périodique.

*C'est à M. Hill que nous devons la première application de ce principe. Dans sa théorie de la Lune, il remplace ce satellite dans une première approximation par une Lune idéale, dont l'orbite est périodique. Le mouvement de cette Lune idéale est alors celui qui a été décrit au n°*41*, où nous avons parlé de ce cas particulier des solutions périodiques de la première sorte, dont nous devons la connaissance à M. Hill.*

Il arrive alors que le mouvement de cette Lune idéale, comme celui de la Lune réelle, est affecté d'une inégalité considérable bien connue sous le nom de variation ; le coefficient est à peu près le même pour les deux Lunes. M. Hill calcule sa valeur pour sa Lune idéale avec un grand nombre de décimales. Il faudrait, pour passer au cas de la nature, corriger le coefficient ainsi obtenu en tenant compte des excentricités, de l'inclinaison et de la parallaxe. C'est ce que M. Hill eût sans doute fait s'il avait achevé la publication de son admirable Mémoire. »

3. Non-existence des intégrales uniformes

Bruns avait montré la non-existence d'intégrales premières du problème newtonien des n corps qui soient algébriques en les vitesses, autres que celles provenant des symétries du problème, c'est-à-dire l'énergie et le moment cinétique. Par une toute autre méthode, intimement liée au comportement des solutions périodiques,

[3] C'est-à-dire une déviation du mouvement elliptique due à l'action du Soleil.

Poincaré montre dans les chapitres V et VI la non-existence d'intégrales premières qui soient analytiques en x, y et μ, c'est-à-dire qui dépendent analytiquement des masses (supposées suffisamment petites) des planètes : *« Le théorème qui précède est plus général en un sens que celui de M. Bruns, ... Mais, en un autre sens, le théorème de M. Bruns est plus général que le mien ; j'établis seulement, en effet, qu'il ne peut pas exister d'intégrale algébrique pour toutes les valeurs suffisamment petites des masses ; et M. Bruns démontre qu'il n'en existe pour aucun système de valeurs des masses. »*
Il s'agit de raisonnements délicats sur la présence de suffisamment de coefficients non nuls dans le développement de Fourier en les angles y de la « fonction perturbatrice » $\mu F_1 + \mu^2 F_2 + \cdots$, ce qui revient à prouver le comportement « générique » des solutions périodiques et en particulier le fait qu'elles ne forment pas des continua remplissant des tores invariants comme c'est le cas lorsque $\mu = 0$: un tore invariant contenant des orbites denses, est l'adhérence de chacune d'elles, ce qui lui donne une signification dynamique ; un tore invariant réunion de solutions périodiques n'a au contraire pas de raison dynamique d'exister et a donc toutes les chances de se briser sous l'effet d'une petite perturbation en donnant naissance à un nombre fini de solutions périodiques. Ces raisonnements constituent le chapitre VI, très technique, dans lequel Poincaré généralise à des fonctions de deux variables complexes une méthode de Darboux reliant le comportement de leurs coefficients de Fourier d'ordre élevé à leurs propriétés analytiques et plus précisément au comportement de leurs singularités et aux obstructions que celles-ci constituent à la déformation des contours d'intégration : *« M. Flamme applique à chacun des facteurs la méthode de M. Darboux. Cet artifice ne saurait nous suffire pour notre objet ; il nous faut, au contraire, appliquer directement à la fonction perturbatrice la méthode de M. Darboux et pour cela étendre cette méthode au cas des fonctions de deux variables. »*

4. Solutions quasi-périodiques

Le deuxième volume des *Méthodes Nouvelles* est consacré à l'examen des séries de perturbation, outil principal des astronomes pour « résoudre » les équations du mouvement. Poincaré commence par montrer dans le chapitre IX ce qui est l'essence des « méthodes nouvelles », l'existence de solutions formelles quasi-périodiques des équations (1), analogues à ce que deviendraient les solutions (2) après avoir subi un changement de coordonnées formel dépendant de μ. Ce sont les *séries de Lindstedt*, nommées ainsi par Poincaré qui est cependant le premier à montrer leur existence : *« Mais il y a une autre difficulté plus grave ; on constate aisément que la méthode est applicable dans les premières approximations, mais on peut se demander si l'on ne sera pas arrêté dans les approximations suivantes ; M. Lindstedt n'avait pu l'établir rigoureusement et conservait même à ce sujet quelques doutes. Ces doutes n'étaient pas fondés et sa belle méthode est toujours légitime ; je l'ai démontré d'abord par l'emploi des invariants intégraux dans le Bulletin astronomique, t. III, p. 57, puis, sans me servir de ces invariants, dans les Comptes rendus, t. CVIII, p. 21. »* Ces séries – dans lesquelles le temps n'intervient que « sous des sinus et des cosinus », à l'exclusion des termes polynomiaux, les redoutables « termes séculaires », qui n'apparaissent plus que comme des artefacts provenant du développement de Taylor de ces sinus et cosinus[4] (les « méthodes anciennes ») – sont de la forme suivante (je ne suis pas ici les notations de Poincaré) :

$$\begin{cases} x = x^0 + \mu\Phi_1(w) + \mu^2\Phi_2(w) + \cdots, \\ y = w + \mu\Psi_1(w) + \mu^2\Psi_2(w) + \cdots, \end{cases} \tag{3}$$

où les Φ_j et les Ψ_j sont des applications de $\mathbb{T}^N$ dans $\mathbb{R}^N$ et où

$$w = (w_1, w_2, \cdots, w_N), \quad w_i(t) = \overline{w}_i(\mu) + n_i(\mu)t,$$

les $\overline{w}_i(\mu)$ et $n_i(\mu)$ étant des séries formelles en μ.

C'est dans la célèbre section 149 du chapitre XIII que Poincaré aborde la question de la convergence, distinguant les séries « à fréquences variables », pour lesquelles la divergence est liée au comportement « générique » des solutions périodiques d'un système (indépendamment en fait de la non-intégrabilité), de celles « à fréquences fixes » dont il écrit : « *Il nous reste à traiter la deuxième question ; on peut encore, en effet, se demander si ces séries ne pourraient pas converger pour les petites valeurs de μ, quand on attribue aux x_i^0 certaines valeurs convenablement choisies.* ...

... Supposons, pour simplifier, qu'il y ait deux degrés de liberté ; les séries ne pourraient-elles pas, par exemple, converger quand x_1^0 et x_2^0 ont été choisis de telle sorte que le rapport $\frac{n_1}{n_2}$ soit incommensurable, et que son carré soit au contraire commensurable (ou quand le rapport $\frac{n_1}{n_2}$ est assujetti à une autre condition analogue à celle que je viens d'énoncer un peu au hasard) ?

Les raisonnements de ce Chapitre ne me permettent pas d'affirmer que ce fait ne se présentera pas. Tout ce qu'il m'est permis de dire, c'est qu'il est fort invraisemblable. »

L'existence de solutions quasi-périodiques des équations (1) dont les fréquences satisfont à des hypothèses diophantiennes sera démontrée pour la première fois par A. N. Kolmogorov en 1954 [K] ; quant à la convergence des séries de Lindstedt à fréquences fixées satisfaisant à des hypothèses diophantiennes, qui s'en déduit si l'on a de plus l'analyticité de ces solutions par rapport au paramètre μ, elle sera démontrée par Moser dans [M2]. Deuxième victoire sur les « petits dénominateurs » après celle de C. L. Siegel en 1942, elle implique une stabilité très forte dans le Problème restreint. La preuve de Kolmogorov sera étendue par V. I. Arnold [A] au cas dégénéré du problème des trois corps et adaptée au cas différentiable (i.e. non analytique) par J. Moser [M1], ce qui fait qu'on parle aujourd'hui de « théorie K.A.M » (voir [AKN]).

5. Invariants intégraux

« Pour bien faire comprendre l'origine et la portée de la notion des invariants intégraux, je crois utile de commencer par l'étude d'un exemple particulier emprunté à une application physique. ... Examinons en particulier le cas des liquides ; c'est celui où le fluide est incompressible, c'est-à-dire où le volume d'une masse fluide est invariable. Supposons alors que la figure F_0 soit un volume, au bout du temps t la masse fluide qui remplissait ce volume occupera un volume différent qui ne sera

[4] Faire disparaître les arcs de cercle (i.e. ici les puissances de t) en faisant varier les fréquences est une idée déjà présente dans la théorie de la Lune que d'Alembert écrit en 1748.

autre chose que la figure F. Le volume de la masse fluide n'a pas dû changer; donc F_0 et F ont même volume : ... » C'est par cet exemple du *mouvement d'un fluide permanent* que la section 233 du chapitre XXII, ouvre le troisième volume : ayant démontré la non-existence d'intégrales premières supplémentaires, Poincaré voit en les invariants intégraux un ersatz de celles-ci consistant en le remplacement des équations du mouvement par les « équations aux variations » qui, elles, admettent des intégrales premières. Voici comment, dans la section 242, il exprime cette parenté un peu oubliée aujourd'hui : « *Reprenons le système*

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \cdots = \frac{dx_n}{X_n} = dt. \tag{1}$$

Nous pouvons former les équations aux variations correspondantes telles qu'elles ont été définies au début du Chapitre IV. Pour former ces équations, on change dans les équations (1) x_i en $x_i + \xi_i$ et l'on néglige les carrés des ξ_i ; on trouve ainsi le système d'équations linéaires

$$\frac{d\xi_k}{dt} = \frac{dX_k}{dx_1}\xi_1 + \frac{dX_k}{dx_2}\xi_2 + \cdots + \frac{dX_k}{dx_n}\xi_n. \tag{2}$$

Il y a, entre les intégrales des équations (2) et les invariants intégraux des équations (1), un lien intime qu'il est aisé d'apercevoir.
Soit $F(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n) =$ const., une intégrale quelconque des équations (2). Ce sera une fonction homogène par rapport aux ξ, et dépendant d'ailleurs des x d'une manière quelconque. Je pourrai toujours supposer que cette fonction F est homogène de degré 1 par rapport aux ξ ; car s'il n'en était pas ainsi, je n'aurais qu'à élever F à une puissance convenable pour trouver une fonction homogène de degré 1. Considérons maintenant l'expression

$$\int F(dx_1, \cdots, dx_n),$$

je dis que c'est un invariant intégral du système (1). »

Rappelons que l'édifice théorique de la mécanique classique est en grande partie fondé sur l'existence de l'« invariant intégral de Poincaré-Cartan » ou « tenseur impulsion-énergie »

$$\sum_i p_i dq_i - H(p, q, t)dt.$$

6. Stabilité à la Poisson

« *Le mot stabilité a été entendu sous les sens les plus différents, et la différence de ces divers sens deviendra manifeste si l'on se rappelle l'histoire de la Science. Lagrange a démontré qu'en négligeant les carrés des masses, les grands axes des orbites deviennent invariables. Il voulait dire par là qu'avec ce degré d'approximation les grands axes peuvent se développer en séries dont les termes sont de la forme $A\sin(\alpha t + \beta)$, A, α et β étant des constantes.* » Le titre du chapitre XXVI n'est pas innocent. Ayant annoncé à tort dans le mémoire de 1889 un résultat très fort de stabilité dans le problème restreint circulaire plan des trois corps, Poincaré tient à couronner son traité d'un résultat de stabilité qui, s'il est bien moins fort que

le premier, n'en est pas moins d'une importance considérable. En effet, basé sur le « théorème de récurrence », il est le précurseur de la « théorie ergodique ». La stabilité « à la Poisson » fait allusion à l'absence de termes séculaires purs (i.e. croissant indéfiniment avec le temps) dans les demi grands axes planétaires au deuxième ordre de la théorie classique des perturbations (i.e. en négligeant les cubes des masses planétaires) ce qui, à cet ordre d'approximation, implique un comportement quasi-périodique (et en particulier récurrent) de ces demi-grands axes. (S. Haretu montrera qu'il n'en est plus de même aux ordres suivants). Poincaré montre par un argument de conservation du volume dans une enceinte de volume fini que, dans le cas qu'il considère, la conservation de l'invariant intégral implique qu'une solution « générique » du problème restreint repassera une infinité de fois dans un voisinage arbitrairement petit d'un point donné de l'espace des phases. La citation suivante (chapitre XXVI section 296) légitime la considération du cas générique dans un esprit qui annonce les ensembles de mesure nulle de Borel : *« En résumé, les molécules qui ne traversent U_0 qu'un nombre fini de fois sont exceptionnelles au même titre que les nombres commensurables qui ne sont qu'une exception dans la série des nombres, pendant que les nombres incommensurables sont la règle. Si donc Poisson a cru pouvoir répondre affirmativement à la question de la stabilité telle qu'il l'avait posée, bien qu'il eût exclu les cas où le rapport des moyens mouvements est commensurable, nous aurons de même le droit de regarder comme démontrée la stabilité telle que nous la définissons, bien que nous soyons forcés d'exclure les molécules exceptionnelles dont nous venons de parler. »*
Intitulée *Probabilités*, cette section 296 est particulièrement visionnaire : rejetant les craintes qu'a J. Bertrand des « paradoxes » des probabilités continues, Poincaré comprend parfaitement qu'un choix quelconque de densité régulière conduira à la même notion d'ensembles de probabilité négligeable : *« Mais il faut d'abord que j'explique le sens que j'attache au mot probabilité. Soit $\varphi(x,y,z)$ une fonction quelconque positive des trois coordonnées x,y,z ; je conviendrai de dire que la probabilité pour qu'à l'instant $t=0$ une molécule se trouve à l'intérieur d'un certain volume est proportionnelle à l'intégrale*

$$J = \int \varphi(x,y,z)dxdydz$$

étendue à ce volume. ... Nous pouvons choisir arbitrairement la fonction φ et la probabilité se trouve ainsi complètement définie. ... Nous retombons donc sur les mêmes résultats qui sont ainsi indépendants du choix de la fonction φ. » Une belle analyse de cette partie du texte se trouve dans la thèse d'Anne Robadey [Ro].

7. Théorie des conséquents

Le problème restreint circulaire plan des trois corps se ramenant, une fois rapporté à des axes tournants, à un système hamiltonien à deux degrés de liberté, une hypersurface d'énergie constante est une variété de dimension trois. Dans la section 305 du chapitre XXVII, Poincaré construit un demi-plan que recoupent une infinité de fois les courbes intégrales, lui faisant jouer le rôle d'un stroboscope : *« Le point M_1 sera dit le conséquent de M_0. Ce qui justifie cette dénomination, c'est que, si l'on considère le faisceau des courbes qui satisfont aux équations différentielles (1) ; si, par le point M_0, on fait passer une courbe et qu'on la prolonge jusqu'à ce qu'elle*

rencontre de nouveau le demi-plan $(y = 0, x > 0)$*, cette nouvelle rencontre aura lieu en* M_1*.* »
L'existence d'un invariant intégral implique la conservation par l'« application de premier retour » sur cette « surface de section », d'une mesure ayant une densité lisse par rapport à la mesure de Lebesgue (que bien entendu Poincaré ne pouvait connaître) : *« Ainsi, l'intégrale (5) a même valeur pour une aire quelconque et sa conséquente.* » Poincaré en déduit un résultat important d'intersection avec sa conséquente d'une courbe fermée formée de segments de variétés asymptotiques de solutions périodiques.
Birkhoff construira un anneau jouant le même rôle, à l'origine de l'étude des « distortions conservatives de l'anneau » qui, dans la deuxième moitié du 20ème siècle, a joué un rôle important dans le développement de la dynamique conservative qualitative et la naissance de la topologie symplectique (théorème du point fixe de Birkhoff et conjecture d'Arnold). C'est l'anneau de Birkhoff que, plutôt que le demi-plan de Poincaré, j'ai choisi de représenter dans la figure-résumé du paragraphe 9. L'application de premier retour peut s'interpréter comme décrivant les positions successives du passage au périhélie du corps de masse nulle (voir [C]).

8. Solutions doublement asymptotiques

Rappelons l'assertion fautive du Mémoire de 1889 : *« Donc les surfaces asymptotiques sont des surfaces fermées. Mais au début de ce travail, nous avons montré que pour établir la stabilité, il suffit de démontrer l'existence de surfaces trajectoires fermées.* » En fait, bien que coincidant à tous les ordres de la théorie des perturbations (voir l'estimation exponentiellement petite de l'angle d'intersection donnée pour un exemple de pendule perturbé dans le chapitre XXI), les surfaces asymptotiques stable et instable d'une solution périodique du problème restreint n'ont aucune raison de coincider effectivement et ne définissent donc pas des surfaces fermées confinant les solutions dans une hypersurface d'énergie fixée [BG, Y]. Cette non coïncidence est la manifestation de la divergence des « séries de Bohlin » en $\sqrt{\mu}$, dont Poincaré avait supposé quelles convergent dans la première version du Mémoire[5].

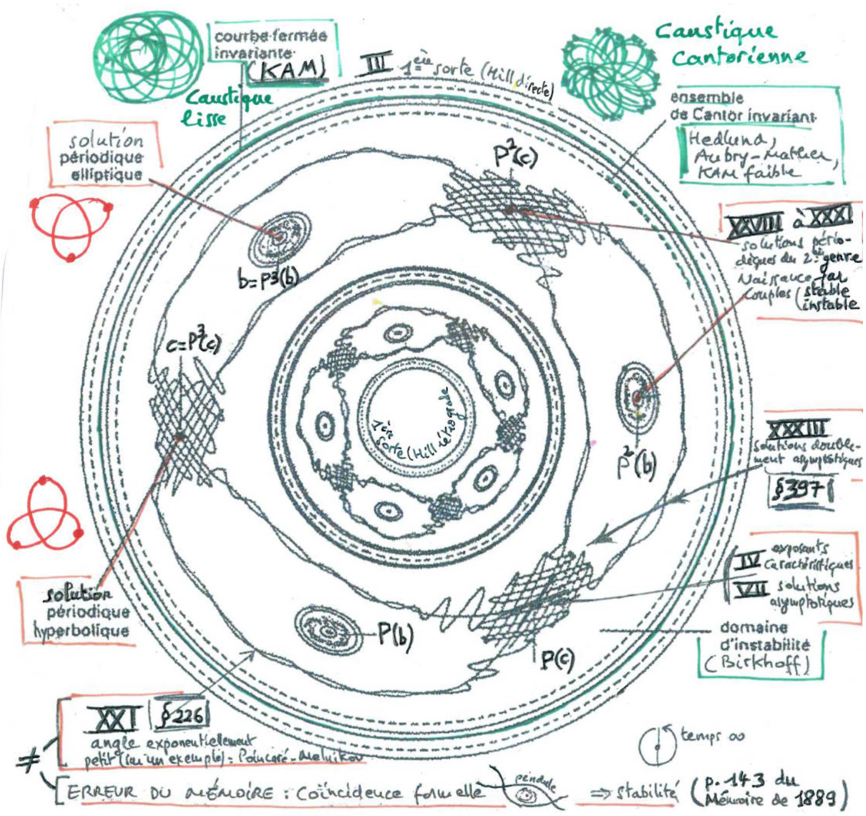
Comprenant l'extrême complexité des intersections de ces deux variétés asymptotiques, Poincaré écrit (il faudrait dire « s'écrie ») : *« Que l'on cherche à se représenter la figure formée par ces deux courbes et leurs intersections en nombre infini dont chacune correspond à une solution doublement asymptotique, ces intersections forment une sorte de treillis, de tissu, de réseau à mailles infiniment serrées ; chacune des deux courbes ne doit jamais se recouper elle-même, mais elle doit se replier sur elle-même d'une manière très complexe pour venir recouper une infinité de fois toutes les mailles du réseau.*

On sera frappé de la complexité de cette figure, que je ne cherche même pas à tracer. Rien n'est plus propre à nous donner un idée de la complication du problème des trois corps et en général de tous les problèmes de Dynamique où il n'y a pas d'intégrale uniforme et où les série de Bohlin sont divergentes. » (chapitre XXXIII, section 397).

[5] Voir [Ra] pour une étude approfondie de la façon dont Poincaré manie les séries divergentes.

À l'origine de ce que certains ont nommé (fort mal à mon avis) « théorie du chaos », cette complexité du treillis des intersections homoclines ou hétéroclines (i.e. des variétés stables et instables) s'analyse aujourd'hui par des méthodes de dynamique symbolique mais, bien que les ordinateurs en aient permis une vision partielle, l'imaginer vraiment reste difficile.

9. Une image pour résumer

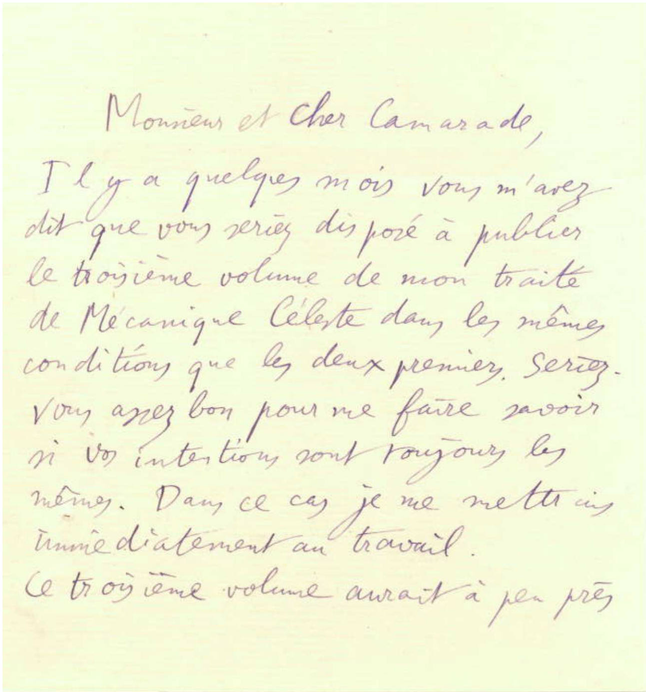


10. Un séminaire

En 1988–1989, Jacques Laskar et moi avions organisé au Bureau des Longitudes un séminaire de lecture des Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste. Rassemblant astronomes et mathématiciens, ce séminaire est à l'origine de la création de l'équipe ASD (Astronomie et Systèmes Dynamiques) dans laquelle nous essayons de perpétuer la collaboration entre astronomes et mathématiciens. Nous savions que les recherches de Poincaré sur les équations différentielles, et en particulier sur le problème des trois corps, étaient à l'origine de pans entiers de la mathématique d'aujourd'hui : systèmes dynamiques, formes différentielles, théorie ergodique, topologie, ... , mais nous avons découvert avec quelle précision visionnaire ces trois volumes exposaient des idées que nous avions cru récentes. Trois fascicules sont parus à cette occasion :

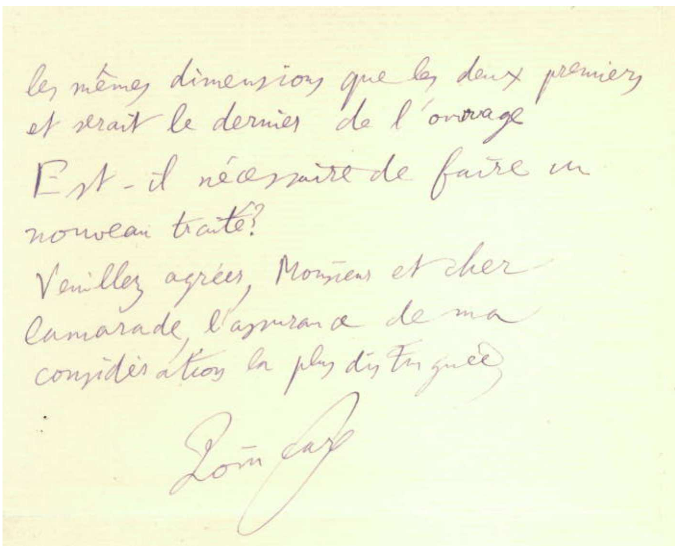
[S1] A. Chenciner *Intégration du problème de Kepler par la méthode de Hamilton-Jacobi : coordonnées « action-angles » de Delaunay*; J. Laskar *Les variables de Poincaré et le développement de la fonction perturbatrice*
[S2] A. Chenciner *Séries de Lindstedt*
[S3] S. Ferraz-Mello *The Method of Delaunay*; A. Jupp *Chapter XIX Bohlin Method*

11. Une lettre à Gauthier-Villars


Monsieur et cher Camarade,

Il y a quelques mois vous m'avez dit que vous seriez disposé à publier le troisième volume de mon traité de Mécanique Céleste dans les mêmes conditions que les deux premiers. Seriez-vous assez bon pour me faire savoir si vos intentions sont toujours les mêmes. Dans ce cas je me mettrais immédiatement au travail.

Ce troisième volume aurait à peu près


les mêmes dimensions que les deux premiers et serait le dernier de l'ouvrage.

Est-il nécessaire de faire un nouveau traité?

Veuillez agréer, Monsieur et cher Camarade, l'assurance de ma considération la plus distinguée

Poincaré

Remerciements

Merci à Daniel Bennequin, Hakan Eliasson, Jacques Féjoz, Hugo Jiménez-Pérez, Jacques Laskar, François Laudenbach, Pierre Moussa, David Sauzin, Carles Simó, Shanzhong Sun, Tadashi Tokieda pour des relectures critiques.

12. Références

[A] V.I. Arnold *Petits dénominateurs et problème de la stabilité du mouvement en mécanique classique et céleste*, Usp. Mat. Nauk 18 (1963), 91-192

[AKN] V.I. Arnold, V.V. Kozlov & A.I. Neishtadt *Mathematical Aspects of Classical and Celestial Mechanics*, 3rd ed., Dynamical Systems III, Encycloædia of Mathematical Sciences, vol. 3, Springer 2006

[BG] J. Barrow-Green, *Poincaré and the Three Body Problem* AMS, History of Mathematics, vol. 11, 1997

[C] A. Chenciner *Three-body problem*, Scholarpedia

[K] A.N. Kolmogorov *On the Conservation of Conditionnally Periodic Motions under Small Perturbations of the Hamiltonian*, Dokl. akad. nauk SSSR, 1954, vol. 98, pp. 527-530

[M1] J. Moser *On invariant curves of area preserving mappings of an annulus*, Nachr. Akad. Wiss. Gött., Math. Phys. Kl. (1962), 1-20

[M2] J. Moser *Convergent Series Expansions for Quasi-Periodic Motions*, Math. Annalen 169, 1967, 136–176

[Ra] J. P. Ramis *Poincaré et les développements asymptotiques (Première partie)*, Gazette des mathématiciens 133, juillet 2012, pp. 33-72

[Ro] A. Robadey *Différentes modalités de travail sur le général dans les recherches de Poincaré sur les sytèmes dynamiques*, Thèse Paris 2006

[Y] J.C. Yoccoz *Une erreur féconde du mathématicien Henri Poincaré*, Gazette des mathématiciens, no 107, 2006, p. 19-26

Ce texte paraît simultanément dans la revue Quadratures. Par ailleurs, un texte plus technique sur Poincaré et le problème des trois corps sera publié dans le séminaire Poincaré (Bourbaphy) de novembre `http://www.bourbaphy.fr`.