Vous avez dit “qualitatif” ?

Alain Chenciner

Observatoire de Paris, IMCCE (UMR 8028), ASD
alain.chenciner@obspm.fr
http://www.imcce.fr/Equipes/ASD/person/chenciner/
&
Département de mathématique, Université Paris VII

Les topologues sont les enfants de la nuit ([Th4])

Abstract

Dans [I], Youri Iliashenko décrit joliment l'évolution de l'étude mathématique des équations différentielles en distinguant trois périodes :

– celle de Newton : une équation différentielle est donnée. Résolvez-la !
– celle de Poincaré : une équation différentielle est donnée. Décrivez le comportement qualitatif des solutions, sans la résoudre !
– celle d'Andronov : aucune équation différentielle n'est donnée. Décrivez les propriétés qualitatives des solutions !

Dès la deuxième période, caractérisée par la considération de la figure que forment les solutions d'une équation dans l'*espace des phases*, topologie et théorie de la mesure jouent un rôle prépondérant. Dans la troisième, c'est l'espace formé par un ensemble d'équations différentielles, et les structures algébrico – géométriques engendrées par une équation “générique” (ou une famille générique d'équations), qui devient la question, ce point de vue prenant toute sa force chez Thom qui en fait une source de modèles. Bien entendu, les choses ne sont jamais aussi tranchées : études de stabilité des mécaniciens, théorie des perturbations des astronomes, espace des solutions de Lagrange, théorème d'oscillation de Sturm, ... mais l'irruption de la topologie dans l'étude des équations différentielles (espace des phases, espaces fonctionnels) est bien un phénomène majeur. Et je suis tenté de renverser la phrase de Thom mise en exergue et d'affirmer que, même si l'algèbre présente une transparence formelle et une efficacité impressionnante, le sens, et donc la lumière, est plutôt du côté de la topologie. La compréhension d'un phénomène peut-elle être autre que qualitative ?

N.B. *Je me suis inspiré librement de passages de [Ch5, Ch7, Ch8, Ch9], recopiant même littéralement certains d'entre eux.*

1 En guise de hors-d'œuvre

Les trois périodes qu'Iliashenko identifie dans l'étude mathématique des équations différentielles peuvent être déjà reconnues dans l'étude des équations polynomiales à une variable :

> – 1) un polynôme $P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ est donné. Trouver les racines réelles, i.e. les $x \in \mathbb{R}$ tels que $P(x) = 0$;
>
> – 2) un polynôme $P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ est donné. Décrire qualitativement l'application $P : P_1(\mathbb{C}) \to P_1(\mathbb{C})$ et en particulier l'ensemble des racines ;
>
> –3) aucun polynôme n'est donné. Décrire qualitativement les racines et leurs bifurcations lorsque les coefficients du polynôme varient.

La première période culmine dans la résolution explicite des équation de degré inférieur ou égal à 4 (Cardan, Tartaglia), la deuxième dans la description de l'application P comme revêtement ramifié de la sphère de Riemann sur elle-même (Riemann...), la dernière dans l'étude de la géométrie des discriminants (Thom...) et la description des bifurcations qui en découle.

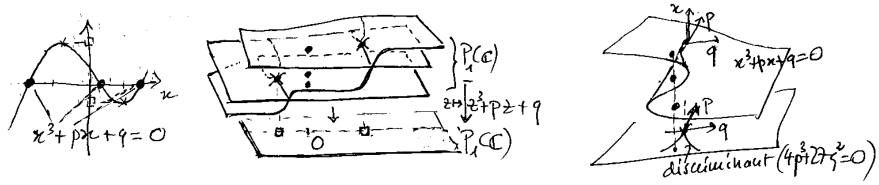

Figure 1. Les trois périodes de l'étude des racines de polynômes.

2 Intégrer une équation différentielle ?

Dès la découverte du calcul différentiel par Leibniz et Newton, on a ramené divers problèmes de géométrie ou de dynamique à la recherche des fonctions $x(t) = \big(x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)\big)$ d'une variable t à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ qui satisfont à une relation $F\big(t, x, x', x'', \cdots\big) \equiv 0$, où $x', x'', \cdots$ désignent les dérivées successives de x. On dit que F est une équation différentielle (ou encore un système d'équations différentielles).

A priori, rien que du calcul et en effet, si l'équation est par exemple *linéaire* et *autonome* (i.e. F indépendante de t), on sait "calculer" ses solutions : par exemple, dans le cas *scalaire* ($n = 1$), les solutions des équations $x' - 2x = 0$, $x'' = 0$, $x'' + \omega^2 x = 0$ sont respectivement ke^{2t}, $at + b$, $c \sin \omega t + d \cos \omega t$, où k, a, b, c, d sont des constantes. Mais la solution de l'équation du pendule simple $x'' + \omega^2 \sin x = 0$ fait déjà intervenir des fonctions elliptiques ... En l'absence de formule explicite, ce qui est le cas général, on peut chercher, comme le faisait Euler, une solution sous la forme $x(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots$ d'une série dont les coefficients a_i sont obtenus par identification terme à terme mais se pose alors la question de la convergence : par exemple, la série divergente d'Euler $\sum_{i=0}^{+\infty} (-1)^i i! t^{i+1}$, est une solution formelle de l'équation différentielle $t^2 x' + x = t$.

Lorsque l'équation peut être résolue par rapport à la dérivée d'ordre le plus élevé, par exemple, dans le cas le plus important en physique et en mécanique des équations d'ordre 2, si elle s'écrit $x'' = f(t, x, x')$, on la ramène à une équation du premier ordre en prenant comme inconnues les dérivées d'ordre non maximal, ce qui donne dans l'exemple

$$(x', y') = \big(y, f(x, y)\big).$$

Paradigme du *déterminisme*, le théorème général d'existence et d'unicité locales des solutions est dû dans ce cas au baron Cauchy (qu'il faut accompagner des noms de Lipschitz, Peano, Arzela). Il permet en retour de définir de nouvelles fonctions (par exemple l'exponentielle) comme l'unique solution d'une équation différentielle qui possède telle ou telle propriété. Mais il y a loin d'un théorème d'existence des solutions ou même de leur explicitation sous la forme de développements en séries à la compréhension de leur comportement. Un nouvel objet doit être introduit qui sera le lieu privilégié d'une analyse *qualitative* des solutions.

3 L'espace des phases et ses habitants

C'est en transformant une équation différentielle en *champ de vecteurs* dans l'*espace des phase*, c'est-à-dire en un (système d') équation(s) du premier ordre, que l'on commence à l'appréhender qualitativement. Dans l'exemple ci-dessus, il s'agit du champ sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{2n}$ défini par

$$X(x, y) = \big(y, f(x, y)\big),$$

qu'on interprète comme la donnée en chaque point $(x, y) \in \mathbb{R}^{2n}$ du vecteur de coordonnées $\big(y, f(x, y)\big)$. Résoudre l'équation revient à tracer les *courbes intégrales* $\big(x(t), y(t)\big)$ ayant pour vecteur vitesse en chaque point (x, y) le vecteur $X(x, y)$ (figure 2 pour l'équation du pendule, voir également [Ch3]). Nul besoin de calculer pour se faire une idée, certes encore grossière, des solutions.

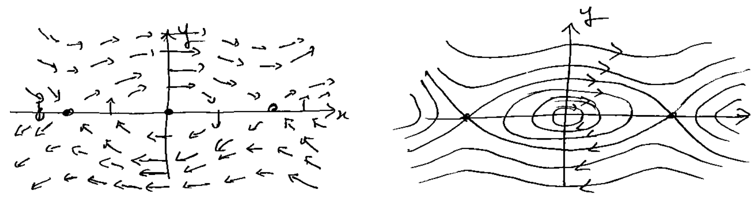

Figure 2. (a) L'équation du pendule ; (b) ses courbes intégrales.

La notion de champ de vecteurs se généralise immédiatement aux variétés différentiables. Un exemple très simple est encore donné par le pendule, la nature angulaire de la coordonnée x impliquant que le véritable espace ds phases est un cylindre (figure 3).

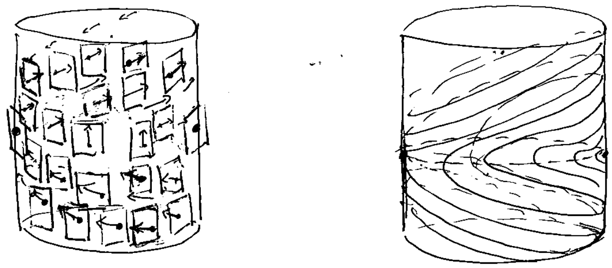

Figure 3. Le véritable espace des phases du pendule (voir [Ch3, Ch3']).

Remarque. En représentant simultanément l'ensemble des solutions comme un *feuilletage* de l'espace des phases, on rend en particulier visible le théorème d'existence et d'unicité des solutions à ceci près que, l'équation considérée étant autonome, chaque courbe intégrale correspond à une infinité de solutions ne différant l'une de l'autre que par une translation correspondant aux différents choix du point origine $x(0)$. Pour des équations scalaires ($n = 1$), on peut rajouter le temps et représenter les graphes des solutions qui sont alors complètement séparées comme dans un cristal liquide cholestérique. La figure 4, tirée de [Ch8], illustre ceci sur l'équation du second ordre autonome la plus simple $\ddot{x} = 0$.

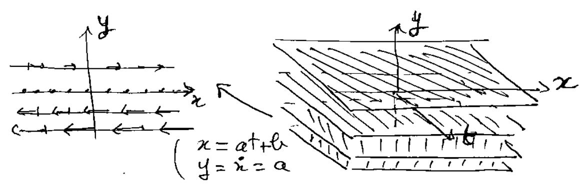

Figure 4. Séparer les graphes des solutions de $x'' = 0$.

Lecture. Le début du livre [A] pour comprendre comment la simple représentation géométrique de l'ensemble des configurations que peut présenter un système permet de résoudre par la topologie un problème difficilement accessible au calcul.

4 Intégrer ou décrire ? Le problème des trois corps

On sait résoudre le problème des deux corps, qui se ramène à l'attraction par un centre fixe ; par contre, la tension entre la "résolution" du problème des trois corps par Sundman et la preuve de "non-intégrabilité" de ce problème par Poincaré illustre de façon exemplaire la difficulté inhérente à la notion même de résolution d'une équation différentielle et la nécessité d'une description qualitative des solutions.

4.1 Sundman

Le théorème de Sundman (articles de 1907 et 1909 reproduits en 1912 dans le volume 36 des Acta Mathematica) énonce la possibilité d'écrire des développements convergents pour les solutions du problème des trois

corps dont le moment cinétique n'est pas nul. Sundman montre que cette hypothèse proscrit toute collision triple, puis que les collisions doubles se régularisent comme points de branchement. Une transformation algébrique et un changement de temps lui permettent alors de construire la solution sous la forme d'une série qui converge pour toutes les valeurs du nouveau temps. On peut certes présenter ce résultat comme une "résolution du problème des trois corps", mais d'un point de vue pratique ces séries n'apportent rien, d'abord parce qu'elles convergent très lentement, ensuite parce qu'aucun renseignement qualitatif sur la nature de la solution n'est lisible sur la série qui la représente. Quant aux solutions voisines, elles sont tout simplement absentes de la représentation.
Or ce sont justement ces solutions voisines qui sont importantes, non seulement parce que les conditions initiales ne sont jamais connues exactement mais également parce que c'est sur les *équations aux variations* que se lisent les exposants des solutions périodiques et que c'est de la non nullité de ces derniers que Poincaré fait découler la non intégrabilité.

4.2 Poincaré

Bruns avait montré[1] la non-existence d'intégrales premières du problème newtonien des trois corps qui soient algébriques en les vitesses, autres que celles qui sont conséquences des symétries du problème, à savoir énergie et moment cinétique. Par une méthode complètement différente intimement reliée au comportement des solutions périodiques, Poincaré montre dans les chapitres V et VI des *Méthodes nouvelles* la non-existence dans le problème planétaire des trois corps de nouvelles intégrales premières qui soient analytiques sur (une partie de) l'espace des phases, mais également en les masses planétaires supposées suffisamment petites. Comparant son résultat à celui de Bruns, il écrit :

> Le théorème qui précède est plus général en un sens que celui de M. Bruns, ... Mais, en un autre sens, le théorème de M. Bruns est plus général que le mien ; j'établis seulement, en effet, qu'il ne peut pas exister d'intégrale algébrique pour toutes les valeurs suffisamment petites des masses ; et M. Bruns démontre qu'il n'en existe pour aucun système de valeurs des masses.

Si les "solutions périodiques génériques" (*i.e.*, les solutions dont les exposants sont non nuls) étaient denses dans l'espace des phases, ou simplement si elles formaient un "ensemble d'unicité"[2], cela impliquerait immédiatement la non-intégrabilité. En effet, l'existence d'un ensemble complet d'intégrales premières commutant deux à deux et presque partout indépendantes impliquerait que chaque orbite périodique sur laquelle les intégrales premières sont indépendantes a tous ses exposants nuls. Malheureusement, cette propriété de densité, bien que vraisemblable, n'est toujours pas prouvée, mais elle a manifestement guidé l'intuition de Poincaré. La preuve donnée dans les *Méthodes nouvelles* repose sur une délicate analyse de l'abondance des coefficients non nuls dans le développement de Fourier de la fonction perturbatrice (qui s'annule avec les masses des

[1] En fait, l'article de Bruns contenait une faute qui fut relevée et corrigée par Poincaré.
[2] *i.e.*, un ensemble tel qu'une fonction analytique s'annulant dessus est identiquement nulle.

planètes), ce qui revient essentiellement à montrer la non nullité des exposants des solutions périodiques et interdit donc à ces dernières de former des “tores résonants” (i.e. des continua remplissant des tores invariants périodiques) comme elles le font dans le cas “non perturbé” où les masses planétaires s’annulent (figure 5 en rapport étroit avec le passage de la figure 4 (gauche) à la figure 2 (gauche) obtenu en ajoutant à l’équation $x'' = 0$ une petite perturbation $\omega^2 \sin x$: du continuum d’équilibres $y = 0$ ne subsistent que les points $x = 0 \mod \pi, y = 0$).

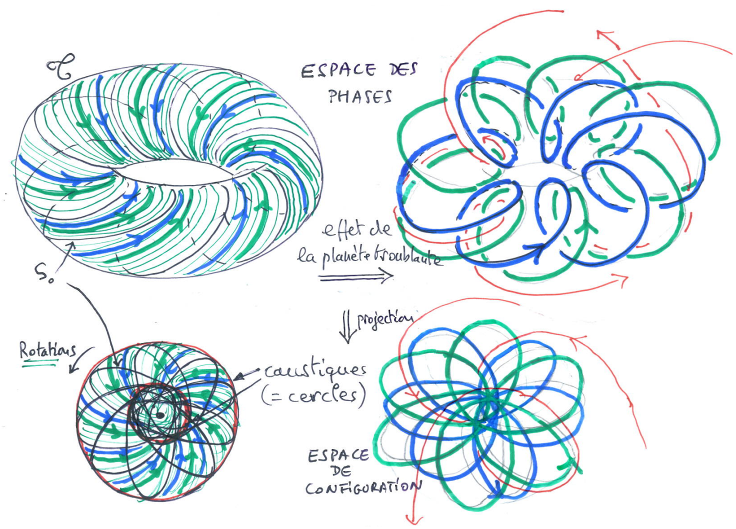

Figure 5. Destruction de tores résonants.

4.3 Poser les bonnes questions

Cette approche qualitative des problèmes est parfaitement exprimée par Poincaré dès 1881 dans l’introduction à la première partie de son *Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle* [Po1] : le problème des trois corps y apparaît déjà comme la motivation de son étude qualitative globale des équations différentielles :

> Prenons, par exemple, le problème des trois corps : ne peut-on pas se demander si l’un des corps restera toujours dans une certaine région du ciel ou bien s’il pourra s’éloigner indéfiniment ; si la distance de deux corps augmentera, ou diminuera à l’infini, ou bien si elle restera comprise entre certaines limites ? Ne peut-on pas se poser mille questions de ce genre, qui seront toutes résolues quand on saura construire qualitativement les trajectoires des trois corps ? Et, si l’on considère un nombre plus grand de corps, qu’est-ce que la question de l’invariabilité des éléments des planètes, sinon une véritable question de géométrie qualitative, puisque, faire voir que le grand axe n’a pas de variations séculaires, c’est montrer qu’il oscille constamment entre certaines limites. Tel est le vaste champ de découvertes qui s’ouvre devant les géomètres.

5 Stabilité dans le problème restreint

Transition vers la troisième période dans la description d'Iliashenko, le problème de la stabilité, bien que concernant ici une équation précise (une lune de masse nulle tournant autour d'une terre dont l'orbite serait plane et circulaire), ne fait appel qu'à certaines propriétés qualitatives de celle-ci et non à sa forme exacte.

5.1 Hill

La figure 6, tirée de [Ch7], représente les *régions de Hill* dans le problème restreint circulaire plan des trois corps.

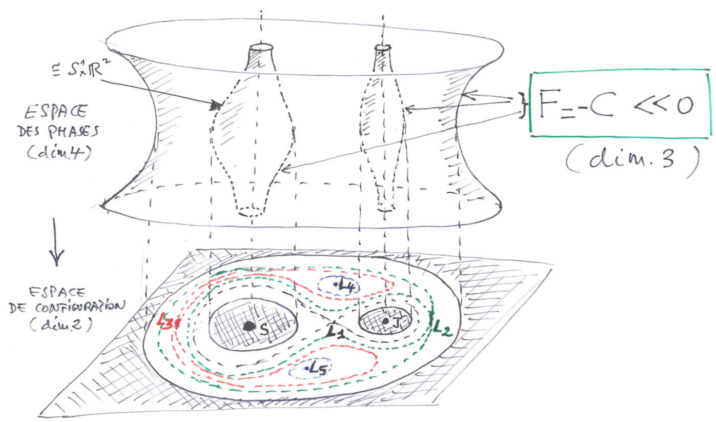

Figure 6. Régions de Hill.

Introduites par Hill en 1878, un an avant la thèse de Poincaré, dans son étude du mouvement de la lune, ces régions fournissent une preuve purement topologique, indépendante de toute résolution des équations, d'une forme de stabilité dans le problème ; si la *constante de Jacobi* – i.e. l'énergie du problème dans un repère tournant qui fixe le soleil et la terre – est suffisamment négative, la lune reste confinée à un disque centré sur la terre dont le bord est le contour apparent d'une des composantes connexes de l'hypersurface d'énergie correspondante dans l'espace des phases (de dimensions 4).

5.2 Poincaré

Le résultat de Hill, bel exemple de cette *théorie qualitative des équation différentielles* que Poincaré développera dans une série de travaux, n'exclue pas la possibilité de collisions de la lune avec la terre. On sait (voir [Ch7]) que Poincaré croira avoir démontré l'impossibilité de telles collisions dans son Mémoire de 1889 *Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique* et, sa faute une fois reconnue, ne prouvera dans les *Méthodes nouvelles de la mécanique céleste* qu'un résultat de stabilité en moyenne, qu'il appellera *Stabilité à la Poisson*. Il faudra attendre la théorie KAM (acronyme de Kolmogorov, Arnold, Moser), initiée en 1954 par Kolmogorov, pour disposer d'un résultat rigoureux d'existence de solutions quasi-périodiques impliquant la stabilité dans le problème considéré, mais entre temps, le résultat de Poincaré aura engendré la *théorie ergodique*, sorte de compromis entre les approches purement topologique et purement analytique des équations, dans laquelle ce ne sont plus les solutions individuelles que l'on cherche à déterminer, mais des ensembles de solutions supports de mesures de probabilité invariantes. Quant à l'erreur du mémoire de 1889, sa correction est à l'origine de la compréhension des *intersections homoclines et hétéroclines de variétés invariantes*[3] (voir [Ch7] figures 18 et 21) et a donné naissance à la bien mal nommée "théorie du chaos". L'une des figures les plus connues attachées à ces phénomènes est celle du *fer à cheval* de Smale (voir [Ch3]) ; il est intéressant de rappeler que c'est en étudiant un article de Cartwright et Littlewood montrant, contrairement à ce qu'il avait conjecturé, l'existence d'équations dissipatives qui possèdent de façon robuste une infinité de solutions périodiques, que Smale découvrit ce dernier. Bel exemple, s'il en faut, de l'intrication du quantitatif et du qualitatif.

5.3 KAM

La vision géométrique de l'espace des phases joue un rôle particulièrement important dans la démonstration par Kolmogorov de la persistance sous l'effet d'une perturbation suffisamment petite de solutions quasi-périodiques "suffisamment non résonantes". Le premier geste géométrique est de considérer non pas simplement une solution quasi-périodique et le problème de Cauchy associé, mais son adhérence dans l'espace des phases. On obtient ainsi un ensemble invariant dynamiquement signifiant, un *tore invariant lagrangien* dont on peut chercher une *fonction génératrice* comme solution de l'équation de Hamilton-Jacobi ; c'est ce qui avait permis à Poincaré de construire les *séries de Lindstedt* dont Lindstedt lui-même n'avait pu construire que les premiers termes. On assiste bien ici au passage de l'espace des phases comme pur lieu de calcul à l'espace de phases comme lieu à la fois de topologie et de théorie de la mesure[4].

6 Généricité

Hassler Whitney ayant démontré qu'étant donné un fermé quelconque F dans $\mathbb{R}^n$, il existe une fonction $f : F \to \mathbb{R}^n$ de classe C^∞ telle que $f^{-1}(0) = F$, parler de la forme d'une hypersurface de niveau d'une telle fonction est desespéré : la différentiabilité n'est pas une restriction plus forte que la simple continuité. Par contre, comme Poincaré, Thom sait bien que, si l'on accepte d'écarter les situations trop singulières, une approche géométrique de tels objets redevient possible. Pour le premier, c'est l'étude des singularités d'équations différentielles définies par des

[3] celles attachées aux solutions périodiques *hyperboliques* ayant survécu à la perturbation (figure 1).

[4] partant d'un système complètement intégrable, on obtient en effet un ensemble de mesure positive de tores invariants.

polynomes "les plus généraux de leur degré", l'introduction des probabilités dans l'étude des systèmes dynamiques ou l'affirmation de l'imparité du nombre de géodésiques fermées sur une surface convexe ; pour le second ce seront les stratifications d'espaces fonctionnels et la *théorie des singularités*.

6.1 Le général et le particulier : Poincaré

Dans sa thèse [R], Anne Robadey étudie l'usage des notions de "cas général" et "cas particulier", voire "exceptionnel", dans la formulation et la démonstration de certains "théorèmes" de Poincaré. Un exemple, vivement critiqué par Morse, est l'affirmation que sur une surface convexe, le nombre de géodésiques fermées plongées est impair. Cette affirmation, évidemment fausse pour la sphère ronde, est cependant vraie "en général". Mais la notion de "cas général" ou, comme on dit aujourd'hui, de "propriété générique" est multiforme : les points de vue topologique (ensemble maigre au sens de Baire) et probabiliste (ensemble de mesure nulle) s'opposant le plus souvent (voir [Ch1]). Sur ce dernier point, on retrouve Poincaré dont le *théorème de récurrence* et les profondes considérations sur le calcul des probabilités ont donné naissance à la *théorie ergodique* : dès qu'un système dynamique atteint un certain niveau de complexité, chercher à décrire précisément toutes les solutions n'a plus de sens et l'on ne peut qu'essayer de donner des propriétés de la plupart d'entre elles. De même, il est naturel de chercher à décrire non pas toutes les équations mais un sous-ensemble assez "gros" et si possible "naturel" de celles-ci.

6.2 Des équations particulières aux figures universelles de bifurcations : Thom

Chez Thom, cette exclusion des cas trop particuliers prend une forme très aboutie dans l'étude des espaces de fonctions indéfiniment dérivables (C^∞) sur une variété. Si l'on accepte d'ignorer un sous-ensemble de codimension infinie (i.e. un sous ensemble que n'importe quelle famille de fonctions à un nombre fini de paramétres pourra éviter au prix d'une éventuelle petite perturbation), on peut affirmer que l'ensemble des zéros possède une structure donnant prise à une étude géométrique. C'est la *théorie des singularités*[5] (voir [Ch2]) qu'à la suite de Morse et Whitney, Thom développe à l'aide des deux outils techniques majeurs que sont le *lemme de transversalité dans les espaces de jets* et la notion de *stratification*. La classification des singularités de germes de fonctions C^∞ de petite codimension est à l'origine de la *Théorie des catastrophes* (voir [Pe]) dans laquelle ce sont les figures universelles de bifurcation et non plus les équations particulières qui servent de modèles ; mais l'échec d'une telle classification dans le cas des systèmes dynamiques, où aucune relation d'équivalence n'est satisfaisante, fait qu'une description probabiliste qui oublie les trajectoires exceptionnelles s'impose dans la plupart des cas.

[5]et en particulier la notion de *déploiement versel*.

6.3 Symétries

Les équations provenant de la physique ou de la mécanique ont en général des symétries qui jouent un rôle déterminant dans la nature de leurs solutions. Déjà présente chez Lagrange [6], la *structure symplectique* de l'espace des phases d'une équation Hamiltonienne prend son origine dans la nature variationnelle (équation d'Euler-Lagrange d'une fonctionnelle d'action, le *Lagrangien*). Impliquant en particulier le théorème de conservation du volume de Liouville déjà mentionné ci-dessus, c'est l'exemple typique d'un *invariant intégral* : il faut lire au début du troisième tome des *Méthodes nouvelles* la manière superbe qu'a Poincaré d'introduire la notion d'invariant intégral comme intégrale infinitésimale des *équations aux variations* le long d'une solution (voir [Ch7] paragraphe 8.1).

Un exemple de raisonnement de type topologique dont l'idée revient encore à Poincaré (voir [Ch6]) est la recherche de solutions du problème des n corps ayant un comportement qualitatif prescrit. En particulier, la recherche des solutions "les plus simples" ayant certaines propriétés de symétrie dans le sens où elles minimisent l'action lagrangienne parmi les chemins ayant ces symétries, a conduit à la découverte de nouvelles classes de solutions, les *chorégraphies* et les *Hip-Hops.* Là encore, comme pour les solutions quasi-périodiques de Kolmogorov évoquées dans la section 5.3, la résolution du problème de Cauchy serait inopérante, la détermination des conditions initiales de telles solutions étant impossible à déterminer a priori théoriquement .

7 Images, formes, noms

7.1 La faune de la dynamique qualitative

Toute une zoologie (une botanique ?) s'est constituée, simltanément pour les équations différentielles et pour leur version discrète, les difféomorphismes : singularités, solutions périodiques, solutions quasi-périodiques, ensembles invariants, leurs variétés stables, instables ou centrales, points homoclines ou hétéroclines, dynamique symbolique, attracteurs et leurs bassins, transitoires, mesures invariantes, entropies métriques ou topologiques, ... L'article-programme [Sm] que Smale publie en 1967 insiste en particulier sur l'itération des difféomorphismes, version à temps discret (stroboscopie) des équations différentielles. Il met en place les notions (en particulier l'*ensemble non errant* ou Ω-*set*, la *no cycle condition*, la Ω-stabilité) lui permettant d'établir la classification d'un sous-ensemble de difféomorphismes qui, s'il est générique en dimension deux, ne l'est plus du tout en dimension supérieure où une classification raisonnable semble utopique. Je renvoie pour un panorama du domaine en 1985 à mon article [Ch3] de l'*Encyclopædia Universalis.* Depuis, la théorie a certes évolué mais les bases conceptuelles sont restées dans une large mesure celles établies par Poincaré. Les images, par contre, issues d'ordinateurs de plus en plus puissants, sont devenues incomparablement plus riches et

[6] Voir Les origines du calcul symplectique chez Lagrange par Patrick Iglesias, L'Enseignement Mathématique, t. 44 (1998), p. 257-277).

précises mais il arrive souvent qu'une image plus grossière et délibérément déformée parle mieux à l'imagination ... et qu'une image trop fidèle nous trompe (le théorème de Cauchy semble faux sur les portraits de phase de certaines équations comportant un très petit paramètre).

7.2 L'importance des images

Les premiers dessins de solutions d'une équation différentielle sous la forme de courbes intégrales feuilletant un espace des phases semblent être ceux de Joukowski et de Poincaré, tous deux dans le cas d'un espace des phases de dimension deux. C'est là que sont répertoriés les divers types de points singuliers génériques, nœuds, cols, foyers et que des théorèmes (Euler-Poincaré, Poincaré Bendixson) régissent l'organisation globale de ces éléments. Bien entendu, dans leurs études de stabilité linéaire de mouvements séculaires, Lagrange et Laplace calculaient déjà des valeurs propres d'équations différentielles linéaires (avant même que la théorie spectrale des matrices soit née) mais la représentation géométrique était absente.

Pour Thom, le choix radical est entre magie et géométrie :

> (...) je ne suis pas sûr que dans un univers où tous les phénomènes seraient régis par un schéma mathématiquement cohérent, mais dépourvu de contenu imagé, l'esprit humain serait pleinement satisfait. Ne serait-on pas alors, en pleine magie ? Dépourvu de toute possibilité d'intellection, c'est-à-dire d'interpréter géométriquement le schéma donné, ou l'homme cherchera à se créer malgré tout par des images appropriées une justification intuitive au schéma donné, ou sombrera dans une incompréhension résignée que l'habitude transformera en indifférence. En ce qui concerne la gravitation, il n'est pas douteux que la seconde attitude a prévalu ; car nous n'avons, en 1968, pas moins de raisons de nous étonner de la chute d'une pomme que Newton. Magie ou géométrie, tel est le dilemme que pose toute tentative d'explication scientifique. De ce point de vue, les esprits soucieux de compréhension n'auront jamais, à l'égard des théories qualitatives et descriptives, des présocratiques à Descartes, l'attitude méprisante du scientisme quantitatif. [Th3]

Mais image ne s'oppose pas à schéma mathématique cohérent et souvent elle guide ce dernier : le *fer à cheval* de Smale en témoigne superbement. Un exemple tiré de [Ch4] concerne le comportement de certaines familles à deux paramètres génériques de difféomorphismes de $\mathbb{R}^2$: pour des valeurs des paramètres voisines d'une certaine courbe Γ, les sous-ensembles invariants, courbe, points périodique ou ensemble de Cantor, que possèdent les difféomorphismes correspondants s'organisent au voisinage d'un paraboloïde dans l'espace produit du plan des paramètres par le plan de phase. On peut, en première approximation, considérer ce paraboloïde comme le déploiement dans la direction de la courbe Γ d'un plan sur lequel agirait un difféomorphisme du disque conservant les aires générique (figure 7).

L'image – imitant celle de la classique *bifurcation de Hopf* – est bien entendu heuristique et ne participe aucunement à la démonstration qui nécessite d'envisager un à un les divers sous-ensembles invariants, mais elle guide qualitativement la recherche de ceux-ci : un difféomorphisme conservatif appartenant à un sous-ensemble de codimension infinie de l'ensemble des difféomorphismes, on comprend qu'il puisse rassembler les traits d'une infinité de difféomorphismes non conservatifs ; par exemple, il existe au voisinage de Γ un ensemble de Cantor de valeurs des paramètres pour lesquelles le difféomorphisme correspondant possède comme seul ensemble invariant autre que le point fixe une courbe fermée invariante non normalement hyperbolique sur laquelle il est conjugué à une rotation diophantienne, alors que, le difféomorphisme conservatif générique possède un ensemble de Cantor de telles courbes invariantes[7].

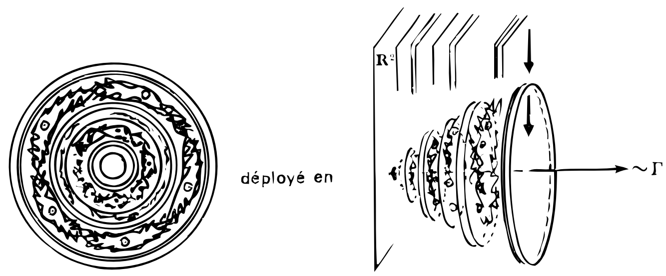

Figure 7 (d'après [Ch4])

7.3 La convention du Nom

Finalement, ce qui est en jeu, c'est le langage, le problème des nominations. Nommer exige l'oubli de détails mais la signification est à ce prix. Poincaré ne disait pas autre chose dans [Po2] en montrant le caractère "conventionnel" de la considération du groupe des déplacements dans la description des mouvement d'un "solide" :

> Quand l'expérience nous apprend qu'un certain phénomène ne correspond pas du tout aux lois indiquées, nous l'effaçons de la liste des déplacements. Quand elle nous apprend qu'un certain changement ne leur obéit qu'approximativement, nous considérons ce changement, par une convention artificielle, comme la résultante de deux autres changements composants. Le premier composant est regardé comme un déplacement satisfaisant rigoureusement aux lois dont je viens de parler, tandis que le second composant, qui est petit, est regardé comme une altération qualitative. Ainsi nous disons que les solides naturels ne subissent pas seulement de grands changements de position, mais aussi de petites flexions et de petites dilatations thermiques.

et en conclusion :

> Tout comme la catégorie de l'espace représentatif, le concept général de groupe est une forme de notre entendement et le

[7] C'est le théorème de la courbe invariante de Moser, qui fait partie de la galaxie K.A.M..

groupe des déplacements relève d'une suite de décisions conventionnelles qui adaptent, dans un équilibre réfléchi, notre expérience à la catégorie : En résumé, les lois en question ne nous sont pas imposées par la nature, mais sont imposées par nous à la nature. Mais si nous les imposons à la nature, c'est parce qu'elle nous permet de le faire. Si elle offrait trop de résistance, nous chercherions dans notre arsenal une autre forme qui serait pour elle plus acceptable.

De même, dans le domaine des équations différentielles, le fait qu'une forme reconnaissable et descriptible n'apparaisse qu'au prix de l'exclusion d'équations trop dégénérées était considéré par Thom comme le signe du caractère "naturel" de la théorie :

> Chez les Modernes, imbus de description mathématique, cette même distinction réapparaît avec la distinction classique : "Signal-Bruit". Il n'existe, c'est bien connu, aucun critère intrinsèque permettant, dans un ensemble de données expérimentales, de séparer ce qui va constituer le "Signal" (considéré comme objets scientifiquement recevable), du résidu numérique, qu'on rejettera dans un "Bruit" rebelle à l'analyse. Le signal provient toujours d'une nomologie préexistante, c'est-à-dire d'un ensemble de règles mathématiques censées être valables pour la description des faits considérés. Déjà Aristote avait bien vu que la science ne devait s'occuper que de phénomènes "naturels", c'est-à-dire de phénomènes qui se présentent "le plus souvent" ($\omega\sigma\ \varepsilon\pi\iota\ \tau o\ \pi o\lambda\upsilon$) ; les autres phénomènes, relevant de l'accident, en seront en principe exclus . . . [Th6]

7.4 La variété infinie et joyeuse des formes

> (. . .) il y a une certaine opposition entre géométrie et algèbre. Le matériau fondamental de la géométrie, de la topologie, c'est le continu géométrique ; étendue pure, instructurée, c'est une notion mystique par excellence. L'algèbre, au contraire, témoigne d'une attitude opératoire fondamentalement "diaïrétique". Les topologues sont les enfants de la nuit ; les algébristes, eux, manient le couteau de la rigueur dans une parfaite clarté. ([Th4])

Pour Thom, qui a souvent affirmé que c'est dans les parties floues et mal formalisées – mais génératrices de formes – des mathématiques qu'il se passe quelque chose qui l'intéresse, le sens est "clairement" du côté de la nuit : s'accordant mal avec la transparence, il ne se déploie que dans une certaine opacité riche de formes rêvées et ce bien que tout l'édifice des mathématiques semble reposer sur la construction "évidente" des entiers. N'est-ce pas ce que suggère la phrase suivante, qui clôt l'extrait dans lequel Thom affirme péremptoirement que "Tout ce qui est rigoureux est insignifiant", phrase que j'avais essayé de commenter dans [Ch9] ?

> Depuis la rupture galiléenne, le savant a toujours recherché le point faible de la nature ; il a toujours essayé d'exploiter

> les automatismes, la “stupidité” de la nature: la physique est tout entière fondée sur ce manque d’imagination têtu des forces naturelles. Mais de la répétition indéfinie du même acte, l’addition de un, naissent les entiers naturels, l’arithmétique, d’où émerge, en grande partie, la grandiose construction des mathématiques. Ceci nous montre comment, d’un fond d’événements indistinguables, peut sortir la variété infinie et joyeuse des formes. [Th1]

8 Conclusion

La difficulté qu’il y a à extraire de l’expression explicite d’une solution d’une équation différentielle un renseignement utilisable était exprimée on ne peut plus clairement par Sturm dès 1836 dans l’introduction de ([St]) :

> [. . .] On ne sait les intégrer que dans un très petit nombre de cas particuliers hors desquels on ne peut pas même en obtenir une intégrale première ; et lors même qu’on possède l’expression de la fonction qui vérifie une telle équation, soit sous forme finie, soit en série, soit en intégrales définies ou indéfinies, il est le plus souvent difficile de reconnaître dans cette expression la marche et les propriétés caractéristiques de cette fonction. Ainsi par exemple, on ne voit pas si dans un intervalle donné elle devient nulle ou infinie, si elle change de signe, et si elle a des valeurs *maxima* ou *minima*. Cependant la connaissance de ces propriétés renferme celle des circonstances les plus remarquables que peuvent offrir les nombreux phénomènes physiques et dynamiques auxquels se rapportent les équations différentielles dont il s’agit. S’il importe de pouvoir déterminer la valeur de la fonction inconnue pour une valeur isolée quelconque de la variable dont elle dépend, il n’est pas moins nécessaire de discuter la marche de cette fonction, ou en d’autres termes, d’examiner la forme et la sinuosité de la courbe dont cette fonction serait l’ordonnée variable, en prenant pour abcisse la variable indépendante. Or on peut arriver à ce but par la seule considération des équations différentielles en elles-mêmes, sans qu’on ait besoin de leur intégration.

Le surgissement d’une *théorie qualitative* des équations différentielles (ou plus généralement des *sytèmes dynamiques*, i.e. des actions de groupe générales) était donc inévitable mais on peut se demander si l’acception de cet adjectif a évolué de Poincaré à Thom, Smale ou Arnold. Ne s’agit-il pas chez chacun d’une tentative de description d’un espace des phases ”qui fasse sens”, avec des outils topologiques, probabilistes, symboliques, mais également algébriques et analytiques ? Ceci implique en général que, comme le rappelle Thom, on ne décrive pas une équation isolée mais ce qu’ont en commun un ensemble d’équations et que l’on peut alors nommer. Bien sûr, Poincaré, en particulier dans ses *Méthodes nouvelles*, reste plus près des équations originales et des structures supplémentaires (intégrales premières, invariants intégraux, symétries) qu'elles recèlent, mais il a déjà très clairement la compréhension de la nécessité d'oublier les cas "trop particuliers" si l'on veut tendre à des classifications. Quant à Thom, ce sont surtout les figures universelles de bifurcations qui l'intéressent mais les *catastrophes généralisées* qu'elles engendrent résistent souvent à la description.

Opposer qualitatif à quantitatif n'est ici guère pertinent car on calcule aussi sur des classes d'homologie ou des lois de probabilité et identifier une forme normale n'est après tout que chercher un "bon" changement de coordonnées, version non linéaire de la diagonalisation d'une matrice. Et puis, quoi de plus résolument analytique que les problèmes de petits dénominateurs liés aux mouvements quasi-périodiques, rencontrés par les astronomes dès l'origine de la théorie des perturbations ? Or ces questions sont intimement liées au problème de la stabilité et plus précisément à la généricité de la diffusion dans les perturbations de systèmes hamiltoniens complètement intégrables à au moins trois degrés de liberté, toutes questions dans lesquelles quantitatif et qualitatif se mêlent étroitement.

Finalement, tout sens n'est-il pas de nature qualitative et la théorie qualitative des systèmes dynamiques, qui cherche à faire apparaître des structures identifiables, n'est-elle pas simplement, comme le souhaitait Sturm, la théorie des équations différentielles en ce qu'elles nous disent quelque chose sur les phénomènes qu'elles sont censées représenter ? La discussion ci-dessous, sur laquelle Jean Petitot a attiré mon attention, clôt l'article [Th2] et me servira de conclusion :

> – Dr. Bodmer: What do you mean by a non-quantitative model? You are still describing a system of equations.
> – Dr. Thom: No, I mean a geometric-algebraic structure.
> – Dr. Bodmer: How is that defined except by a set of equations?
> – Dr. Thom: By a set of equations defined only up to a homeomorphism. It is a topological configuration. Its study requires qualitative thinking instead of quantitative thinking. I am sorry, but I dont think that quantitative thinking is the answer for all things in nature. In linguistics, it is certainly not the case.
> – Dr. Bodmer: I think the distinction between qualitative and quantitative is merely a matter of quantity!
> – Dr. Thom: No, No, No.
>
> (Editors note: On this hopeful note of common agreement, the conference was ended.)

References

[A] V. Arnold *Equations différentielles ordinaires*, Ed. Mir-Moscou 1974

[Ch1] A. Chenciner *Vous avez dit "générique" ?*, Séminaire de philosophie et mathématique, E.N.S. 25 avril 1983

[Ch2] A. Chenciner *Singularités des fonctions différentiables : la théorie mathématique et ses applications*, Encyclopædia Universalis, 1981

[Ch3] A. Chenciner *systèmes dynamiques différentiables*, Encyclopædia Universalis, 1985

[Ch3'] A. Chenciner *Connaissez-vous le pendule ?* Gazette des mathématiciens 86, octobre 2000

[Ch4] A. Chenciner *Bifurcations de points fixes elliptiques : I - Courbes invariantes*, Publications de l'I.H.E.S. $n^0$61, p. 67-127 (1985) http://numdam.mathdoc.fr/numdam-bin/fitem?id=PMIHES_1985__61__67_0

[Ch5] A. Chenciner *De la mécanique céleste à la théorie des systèmes dynamiques, aller et retour : Poincaré et la géométrisation de l'espace des phases*, Actes de la conférence "Epistémologie des systèmes dynamiques", Paris Décembre 1999, Hermann (2001).

[Ch6] A. Chenciner *A note by Poincaré*, Regular and Chaotic Dynamics, V. 10, $N^0$2, 2005

[Ch7] A. Chenciner *Poincaré and the three-body problem*, Bourbaphy 2012, Birkhauser 2014

[Ch8] A. Chenciner *Ombres et traces*, Conférence à l'Association des amis de Jean Cavaillés, ENS, 29 novembre 2014

[Ch9] A. Chenciner *Le vrai, le faux, l'insignifiant*, Conférence dans le colloque Phénomath, 22 mai 2015

[I] Y. Iliashenko, *Attracteurs des systèmes dynamiques et généricité*, Image des maths 2005

[Po1] H. Poincaré, *Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle*, partie 1, 1881, in Œuvres, tome I.

[Po2] H. Poincaré *On the foundations of geometry*, The Monist, 1898, http://www.jstor.org/stable/27899007?seq=1#page_scan_tab_contents On trouve le texte original de Poincaré sur le site http://www.mathkang.org/cite/confA01.html

[Pe] J. Petitot *La théorie des catastrophes*, Encyclopædia Universalis

[R] A. Robadey *Différentes modalités du travail sur le général dans les recherches de Poincaré sur les systèmes dynamiques*, thése Paris 7 et Observatoire de Paris, Janvier 2006 https://halshs.archives-ouvertes.fr/tel-00011380/

[Sm] S. Smale *DIfferentiable dynamical systems*, Bull. Amer .Mat .Soc. 73 (1967) 747-817

[St] C.F. Sturm *Mémoire Sur le Équations différentielles linéaires du second ordre*, Journal de Liouville I 106-186 (1836)

[Th1] R. Thom *La science malgré tout*, Encyclopædia Universalis, Organum, 1973 (copyright 1968)

[Th2] R. Thom *A Mathematical Approach to Morphogenesis: Archetypal Morphologies* 1969

[Th3] R. Thom *Stabilité structurelle et morphogénèse* 1968, publié par Benjamin en 1972

[Th4] R. Thom *Les racines biologiques du symbolique* 1976, édité dans Circé (1978), pp. 40-51

[Th6] R. Thom, *Entre la fécondité du Faux et l'insignifiance du Vrai : la voie étroite de la Science...*, Academia dei Lincei, Roma, oct. 1989