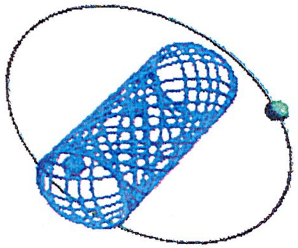
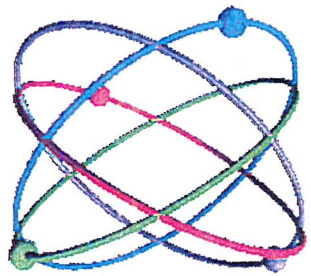
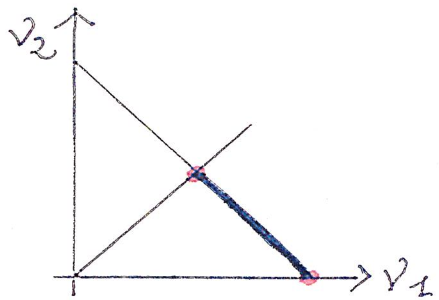
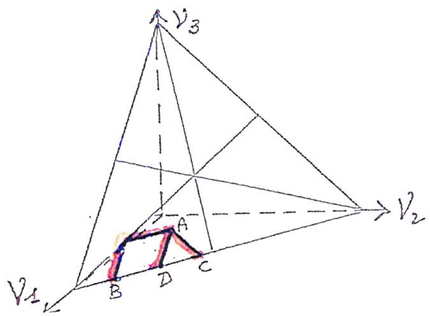
更高维度N体问题的相对平衡运动

Alain Chenciner
IMCCE & PARIS 7

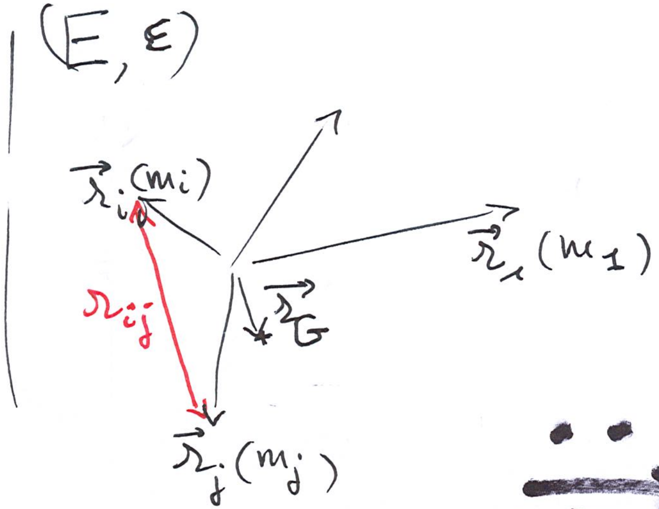


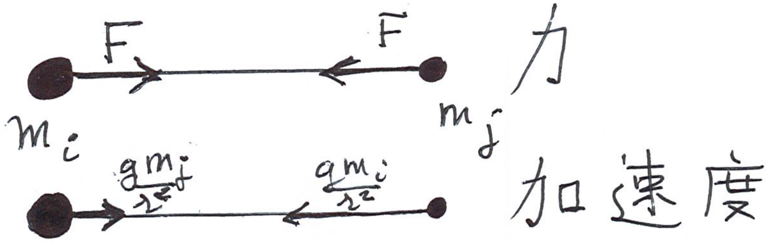






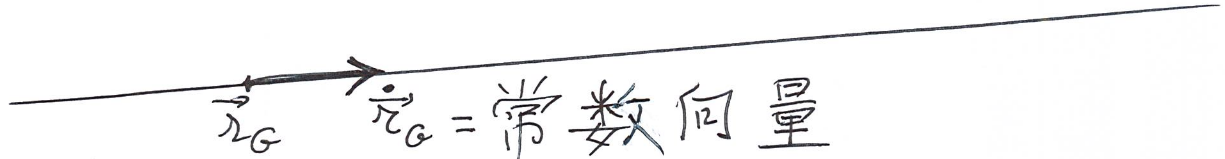
首都师范大学 2019





$$\cancel{m_i}\,\ddot{\vec{r}}_i = \sum_{j \neq i} \frac{g\,\cancel{m_i}\,m_j(\vec{r}_j - \vec{r}_i)}{r_{ij}^{3}}$$

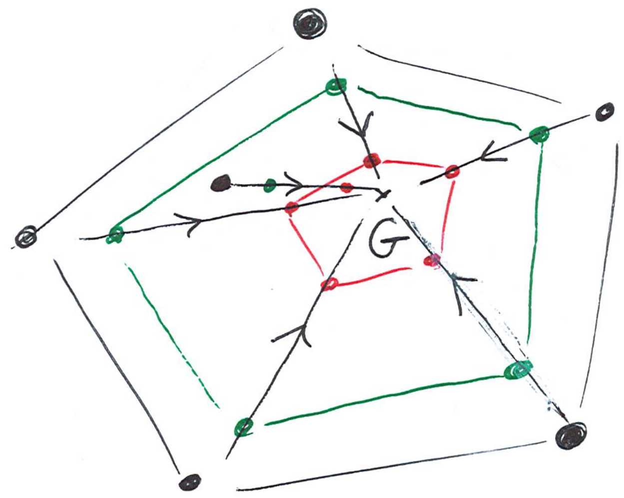
$$\vec{r}_G = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i}$$



$\dot{\vec{r}}_G$ = 常数向量

中心构型

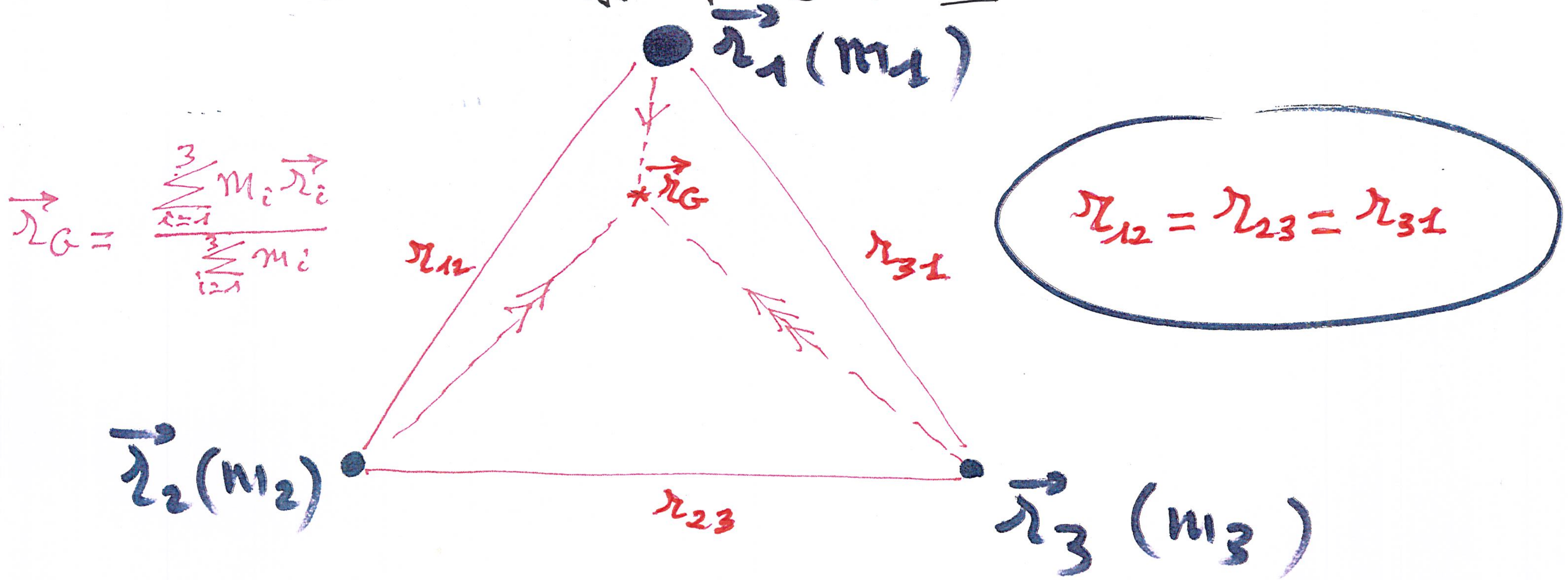
(Central Configurations)



$\boxed{\text{初始速度} = 0 \Longrightarrow \text{塌缩在其质心上}}$

LAGRANGE 1772

等边三角形是三体问题唯一非共线的中心构型



$$\vec{r}_G = \frac{\sum_{i=1}^{3} m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{3} m_i}$$

$$r_{12} = r_{23} = r_{31}$$

还有三个 Euler 的共线中心构型

证明

$$\forall i,\ \ddot{\vec{r}}_i = \sum_{j\neq i} \frac{m_j(\vec{r}_j - \vec{r}_i)}{r_{ij}^3} \Longrightarrow \ddot{\vec{r}}_G = 0$$

$$\text{C.C.} \Longleftrightarrow \exists \lambda,\ \forall i,\ \ddot{\overline{\vec{r}_i - \vec{r}_G}} = -\lambda(\vec{r}_i - \vec{r}_G)$$

$$\Updownarrow$$

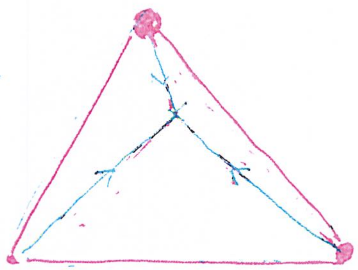
$$\forall i,\ \sum_{j\neq i} m_j\left(\frac{1}{r_{ij}^3} - \frac{\lambda}{\sum_{j=1}^{3} m_j}\right)\underbrace{(\vec{r}_j - \vec{r}_i)}_{\text{线性独立的向量}} = 0$$

每个中心构型都可以有 HOMOGRAPHIC 运动
(共形)

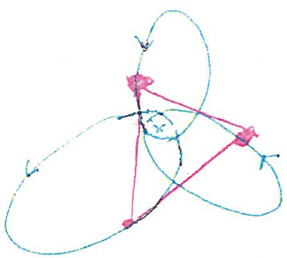
如果空间是三维的，那么这种运动必然在一个固定平面中发生 (Lagrange)

$$\text{in } (\mathbb{R}^2)^3 = (\mathbb{C})^3, \quad \boxed{x(t) = \zeta(t)\,x(0), \quad \underbrace{\ddot{\zeta}(t) = -\frac{k\,\zeta(t)}{|\zeta(t)|^3} \in \mathbb{C}}_{\text{Kepler 开普勒}}}$$

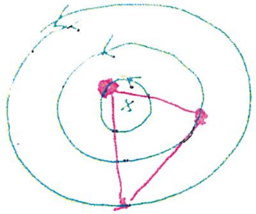
$$x(t) = \left(\vec{r}_1(t) - \vec{r}_G(t),\ \vec{r}_2(t) - \vec{r}_G(t),\ \vec{r}_3(t) - \vec{r}_G(t)\right)$$



离心率 $e = 1$



$0 < e < 1$

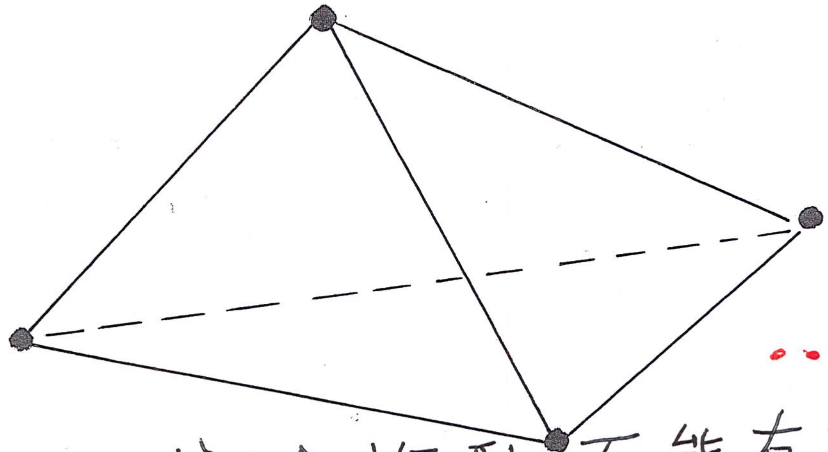


$e = 0$ (相对平衡运动 $\Updownarrow$ 刚体运动)

对四体问题也一样：

只存在一个非共面的中心构型：

正四面体



……在三维空间中，

但是……这个构型不能有共形非直线运动！

这样的运动只能在四维或六维空间中发生

在欧氏空间(E,ε)中模掉平移的N体构型

A.Albouy & A.C.

$\mathcal{D}$ dispositions $:= \mathbb{R}^n / \mathbb{R}(1,\dots,1)$

排置

$\cong \downarrow \mu$

$\mathcal{D}^*$ codispositions $= \{\xi = (\xi_1,\dots,\xi_n) \in \mathbb{R}^n,\ \sum_{i=1}^{n} \xi_i = 0\}$

余排置

$$\mu(x_1,\dots,x_n) = \big(m_1(x_1 - x_G), \dots, m_n(x_n - x_G)\big)$$

$$\boxed{X \in \mathcal{D}\otimes E \equiv \mathrm{Hom}(\mathcal{D}^*, E) \qquad \xi \longmapsto \sum_{i=1}^{n} \xi_i \vec{r}_i}$$

$\mu \otimes \varepsilon$

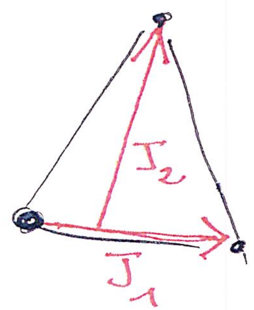
质量加权内积 $\overset{\shortparallel}{}(\vec{r}'_1,\dots,\vec{r}'_n)\cdot(\vec{r}''_1,\dots,\vec{r}''_n) = \sum_{i=1}^{n} m_i \langle \vec{r}'_i - \vec{r}'_G, \vec{r}''_i - \vec{r}''_G \rangle_\varepsilon$

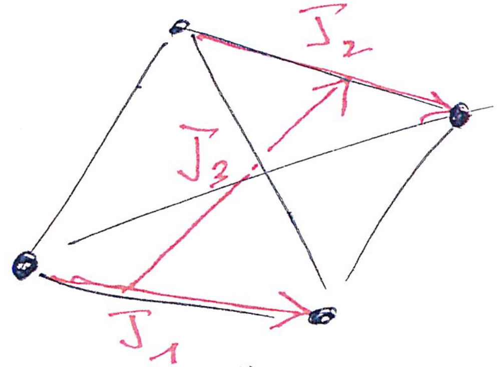
欧氏内积

$$X = \begin{array}{c} \quad J_1 \ \ \cdots \ \ J_{n-1} \\ \begin{pmatrix} | & \cdots & | \\ | & & | \end{pmatrix} \end{array}$$

在$(\mathcal{D}^*, \mu^{-1})$和$(E,\varepsilon)$的正交基

J_i = 雅可比向量





模掉等距变换的N体构型

(平移，旋转，反射)

物体角度

$$\begin{array}{ccccccccc}
\mathcal{D}^* & \xrightarrow{X} & E & \overset{\varepsilon}{\equiv} & E^* & \xrightarrow{X^{tr}} & \mathcal{D} & \overset{\mu}{\equiv} & \mathcal{D}^* \\
\wr & & & & & & & & \wr \\
\mathbb{R}^n & & & \xrightarrow{\text{唯一延拓便得}} & & & & & \mathbb{R}^n
\end{array}$$

$$(m_1,\dots,m_n) \longmapsto (0,\dots,0)$$

$B = X^{tr}X$ μ-对称

$$\begin{pmatrix}
m_1|\vec{r}_1-\vec{r}_G|^2_\varepsilon & \cdots & m_1\langle \vec{r}_1-\vec{r}_G, \vec{r}_n-\vec{r}_G\rangle_\varepsilon \\
\cdots & \cdots & \cdots \\
m_n\langle \vec{r}_n-\vec{r}_G, \vec{r}_1-\vec{r}_G\rangle_\varepsilon & \cdots & m_n|\vec{r}_n-\vec{r}_G|^2_\varepsilon
\end{pmatrix}$$

内蕴惯性矩阵

$O(E)$-不变

小心这是在$\mathbb{R}^n$的自然基中的表示式，不是在μ-正交基中的。

空间角度

$$E \overset{\varepsilon}{\equiv} E^* \xrightarrow{X^{tr}} \mathcal{D} \overset{\mu}{\equiv} \mathcal{D}^* \xrightarrow{X} E$$

$$\vec{r}_k - \vec{r}_G = (X_{1k}, \dots, X_{dk})$$

$S = XX^{tr}$ ε-对称

$$\begin{pmatrix}
\sum_{k=1}^{n} m_k X_{1k}^2 & \cdots & \sum_{k=1}^{n} m_k X_{1k}X_{dk} \\
\cdots & \cdots & \cdots \\
\sum_{k=1}^{n} m_k X_{dk}X_{1k} & \cdots & \sum_{k=1}^{n} m_k X_{dk}^2
\end{pmatrix}$$

惯性矩阵

$\underbrace{O(\mathcal{D}^*)}_{\text{“民主群”}}$-不变

力

$$\forall i,\quad \ddot{\vec{r}}_i = \sum_{j\neq i} m_j \frac{\vec{r}_j-\vec{r}_i}{r_{ij}^3}$$ 可以写成

$$\begin{pmatrix} \ddot{\vec{r}}_1 & & \ddot{\vec{r}}_n \\ | & \cdots & | \\ | & & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{r}_1 & \cdots & \vec{r}_n \\ | & \cdots & | \\ | & & | \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} -\sum_{l\neq 1}\frac{m_l}{r_{1l}^3} & \frac{m_1}{r_{12}^3} & \cdots & \frac{m_1}{r_{1n}^3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{m_n}{r_{n1}^3} & \frac{m_n}{r_{n2}^3} & \cdots & -\sum_{l\neq n}\frac{m_l}{r_{nl}^3} \end{pmatrix}}$$

$\Downarrow$ 模掉平移

$$\boxed{\ddot{X} = 2XA}$$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^n \arrow[r, "\text{唯一延拓使得}"] & \mathbb{R}^n \\ \mathcal{D}^* \arrow[u, hook] \arrow[r, "2A"] & \mathcal{D}^* \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

$$(m_1,\dots,m_n) \mapsto (0,\dots,0)$$

WINTNER-CONLEY 自同态

（μ^{-1}-对称）

什么是 A？

If $\hat{U}(B) = \sum_{i<j}\frac{m_i m_j}{r_{ij}}$,

$$\boxed{d\hat{U}(B)\Delta B = \underset{\text{迹}}{\mathrm{trace}}(A\Delta B)}$$

相对平衡运动 = 刚体运动

定理：(A. Albouy & A.C.) $\dim E = d = 2p$

$\exists\, \Omega : E \to E$ ε-反对称，非退化，与 t 无关的，使得：

$$\boxed{X(t) = e^{\Omega t} X(0)}$$

$$\Downarrow$$

$$\ddot{X} = \Omega^2 X = 2XA$$

物体角度

$$X^{t\varepsilon}\Omega^2 X = 2BA$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{[A, B] = 0}$$

BALANCED CONFIGURATIONS (平衡构型)

$$\Updownarrow$$

B 是 $\hat{U}$ 在 B 的等谱流形上的限制的临界点

空间角度

$$\Omega^2 S = 2XAX^{t\varepsilon}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{[\Omega^2, S] = 0}$$

回顾：B 中心构型 $\Leftrightarrow$ B 是 $\left(\hat{U}\Big|_{I = \text{B 的迹为常数}}^{\text{B 的秩为常数}}\right)$ 的临界点

$$\Updownarrow$$

$$A|_{\mathrm{Im}B} = \lambda \mathrm{Id} \Rightarrow \Omega = \omega J,\ J^2 = -\mathrm{Id}$$

有多少个频率？

B平衡构型 $\Rightarrow \exists(\mathcal{D}^{*}, \bar{u}^{1})$ 和 (E, ε) 的正交基使得：

$$2A=\begin{pmatrix}-\lambda_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & -\lambda_{n-1}\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}b_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & b_{n-1}\end{pmatrix},\ \Omega^2=\begin{pmatrix}-\omega_1^2 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & -\omega_d^2\end{pmatrix},\ S=\begin{pmatrix}\sigma_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \sigma_d\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow X=\begin{array}{cc} \begin{array}{cc}\scriptstyle \mathrm{Im}B & \end{array} & \\ \begin{pmatrix} V & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} & \}\scriptstyle \mathrm{Im}S \end{array}$$，其中 V 可逆

$\Rightarrow$（在对 $\mathcal{D}^*$ 的基进行适当排列以后）

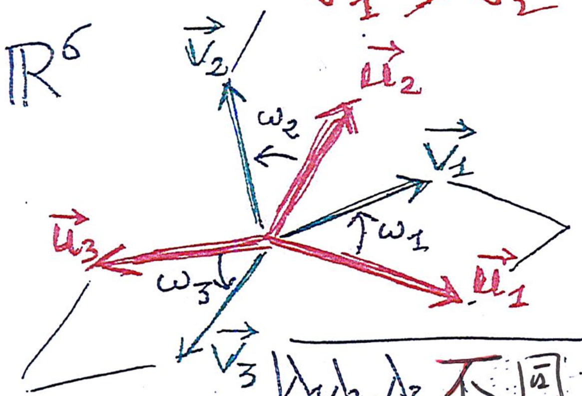
$$\boxed{\omega_i^2 = \underbrace{\lambda_i}_{A|_{\mathrm{Im}B}},\quad i=1,\dots,B\text{的秩}}$$

一组具有通有质量的质点构成三维构型的情况：

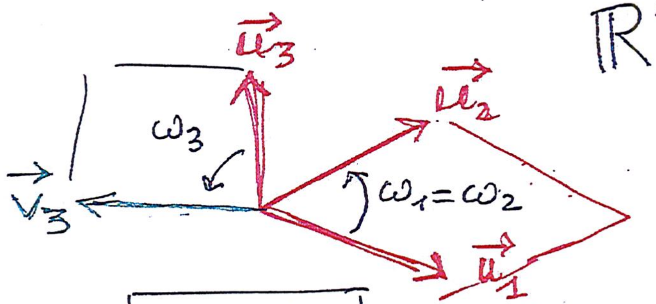
（通有质量 $\Leftrightarrow$ 其中任何三个质点的质量均不全相等）

$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$

正四面体



$\boxed{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \text{ 不同}}$（6-平衡）



$\boxed{\lambda_1 = \lambda_2}$（4-平衡）

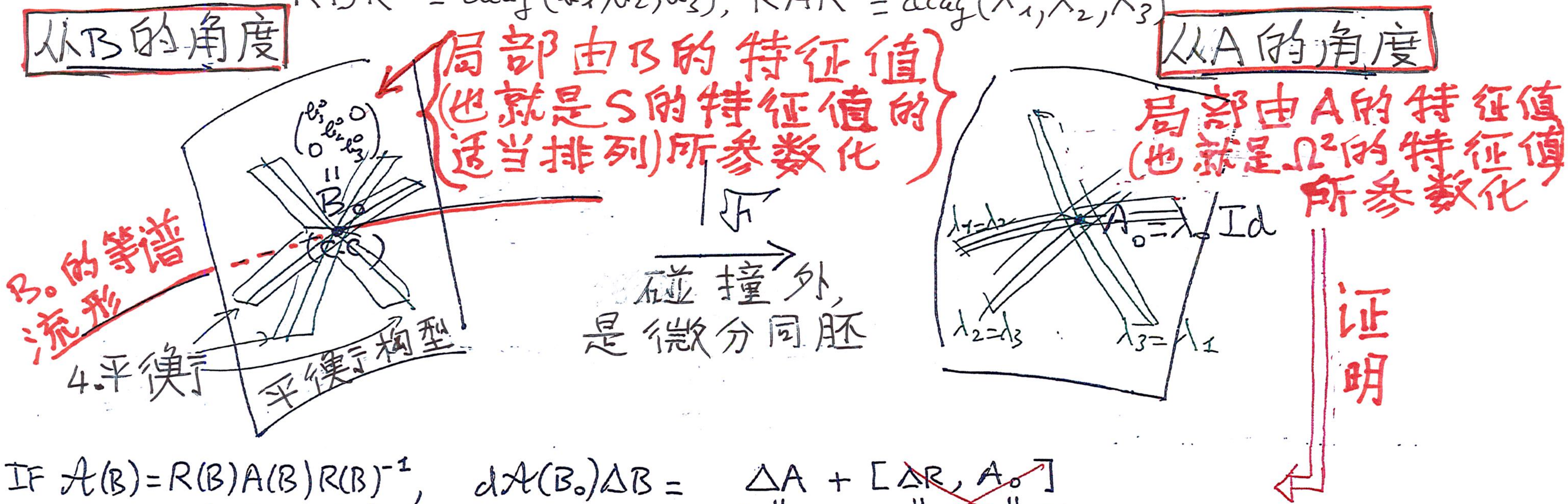
$$\boxed{\begin{array}{c}\text{中心构型}\\ \Updownarrow \\ \lambda_1=\lambda_2=\lambda_3\end{array}}$$

$\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ 同时是 S 和 Ω^2 的特征基

拟周期相对平衡运动从有通有质量的正四面体的相对平衡运动的分岔(1)

- 在B_0的唯一特征正交基中，B_0和A_0都是对角矩阵；
- 如果平衡B接近B_0，那么存在唯一$R=R(B)$使得：

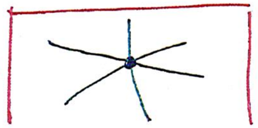
$$RBR^{-1}=diag(b_1,b_2,b_3),\quad RAR^{-1}=diag(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$$



IF $\mathcal{A}(B)=R(B)A(B)R(B)^{-1}$
$=diag(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$,

$$d\mathcal{A}(B_0)\Delta B=\underbrace{\Delta A}_{=\,dF(B_0)\Delta B\ \text{ISO}}+\cancel{[\underbrace{\Delta R}_{=\,dR(B_0)\Delta B},\ \underbrace{A_0}_{=\,\lambda_0 Id}]}$$

所以，在适当缩放后：



角动量

$X(0)$ c.c. , $X(t) = e^{\omega J t} X(0)$

$$\boxed{\mathcal{C} = -X\dot{X}^{t_c} + \dot{X}X^{t_c} = \omega\underbrace{(S_0 J + J S_0)}_{J\text{-skewhermitian}} = \omega J\underbrace{(J^{-1}S_0 J + S_0)}_{J\text{-hermitian}}}$$

频率映射(FREQUENCY MAP) $\mathcal{F}: J_1 \longrightarrow \{\nu_1 \geq \cdots \geq \nu_p\} =$ 谱$(J^{-1}S_0 J + S_0)$

定理(A.C. & H.Jimenez-Perez) Im $\mathcal{F}$ 是一个凸多面体

$$\left\{(\nu_1,\ldots,\nu_p),\ \sum_{i=1}^{p}\nu_i = I(X) = \operatorname{trace} B\right\}$$

• 更确切地说: 如果 $\left(\begin{array}{l} \text{谱 } S_0 = \{\sigma_1 \geq \cdots \geq \sigma_{2p}\} \\ \vec{u}_1,\ldots,\vec{u}_{2p} = S_0 \text{ 的特征基} \end{array}\right.$

$$\operatorname{Im}\mathcal{F} = \operatorname{Im}\left\{J \,\middle|\, \{\vec{u}_1,\vec{u}_3,\ldots,\vec{u}_{2p-1}\} \xrightarrow{J} \{\vec{u}_2,\vec{u}_4,\ldots,\vec{u}_{2p}\}\right\}$$

= Horn polytope (霍恩多面体) $\left\{\begin{array}{l} \alpha+\beta \text{ 的由大到} \\ \text{排列的谱} \end{array}\right| \left.\begin{array}{l} \text{谱 } \alpha = \{\sigma_1,\sigma_3,\ldots,\sigma_{2p-1}\} \\ \text{谱 } \beta = \{\sigma_2,\sigma_4,\ldots,\sigma_{2p}\} \end{array}\right\}$

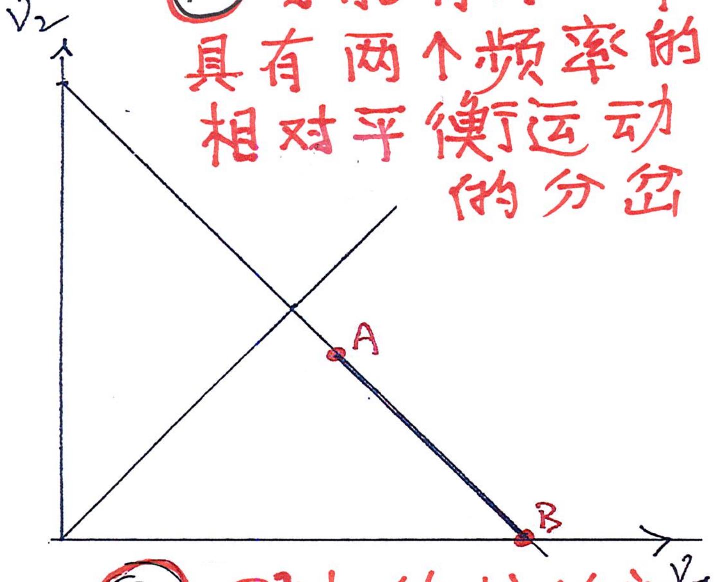
对S的谱的其它等分会得到$\mathcal{F}$的像的子多面体

向拟周期相对平衡运动的分岔 (2)

从等边三角形

$S_0 = \mathrm{diag}(\sigma_1, \sigma_2, 0, 0)$

- Ⓐ 可能有向 $\mathbb{R}^4$ 中具有两个频率的相对平衡运动的分岔

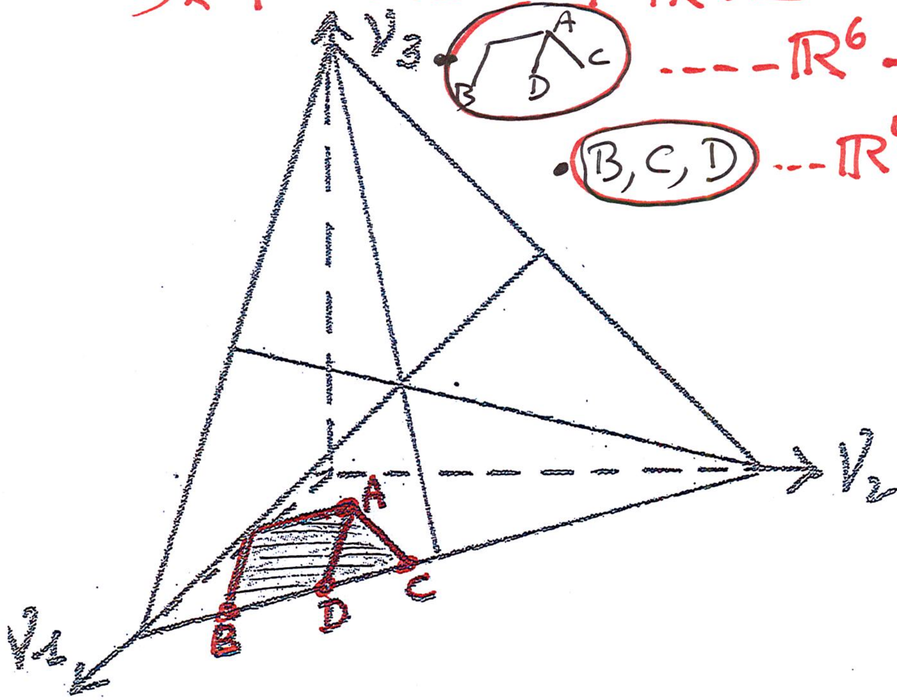


- Ⓑ $\mathbb{R}^2$ 中的拉格朗日解。没有分岔的可能

从正四面体

$S_0 = \mathrm{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, 0, 0, 0)$

- Ⓐ 可能有向 $\mathbb{R}^6$ 中具有三个频率的相对平衡运动的分岔



- ---- $\mathbb{R}^6$ ... 两个 ...
- (B, C, D) ... $\mathbb{R}^4$ ... 两个 ...

$(\sigma_1 > \sigma_2 + \sigma_3 > \sigma_2 > \sigma_3 > 0)$