

*Chenciner*

CLASSIFICATION DES SPHERES EXOTIQUES

INTRODUCTION A LA CHIRURGIE

par Alain CHENCINER

Centre de Mathématiques de l'Ecole Polytechnique

*17 me Descartes  
75005. PARIS*

I.H.E.S.

AVRIL 1970

Avertissement : La rédaction couvre environ quatre exposés dont le premier était essentiellement introductif. Lorsque le texte s'écarte du papier original de Kervaire-Milnor, il doit beaucoup à un cours donné par L. Siebenmann à Orsay en 1966-1967.

La chirurgie en dimension impaire n'est pas abordée : seul le résultat est donné. Le but des conférences était essentiellement de se familiariser avec les obstructions à la chirurgie, l'invariant de Arf, et la signature. Enfin, seules les sphères homotopiques qui sont bords de variétés parallélisables ont été étudiées.

Exposé 1 : Chapitres 1, 2, 3

Exposé 2 : Chapitres 4, 5

Exposé 3 : Chapitres 6, 7

1/2 exposé 4 : Chapitre 8

1 - Introduction

Si rien n'est spécifié, toutes les variétés et les applications sont  $C^\infty$ . On appelle "sphère exotique de dimension  $n$ " une variété homéomorphe à la sphère  $S^n$ .

Le but des conférences est d'introduire les outils qui permettent de classifier ces sphères exotiques à difféomorphisme près. Une telle classification est rendue possible par le théorème du  $h$ -cobordisme, (Smale [1],[2], Milnor [3]) ; pour énoncer ce théorème, nous avons besoin de deux définitions :

Définition 1-1. Deux variétés  $M_0, M_1$  orientables, sans bord, de même dimension  $n$ , sont dites cobordantes s'il existe une variété  $W$  orientable, de dimension  $(n+1)$ , dont le bord s'écrive comme la réunion disjointe  $\partial W = V_0 + V_1$ , et deux difféomorphismes  $h_i : V_i \longrightarrow M_i (i=0,1)$ .

Si  $M_0$  et  $M_1$  sont orientées, on dira que  $W$  est un cobordisme orienté entre  $M_0$  et  $M_1$  si, pour une orientation de  $W$ , on a  $\partial W = V_0 + (-V_1)$ , avec  $h_0$  et  $h_1$  préservant l'orientation. (Rappelons que  $-V_1$  désigne la variété  $V_1$  munie de l'orientation opposée à celle choisie pour  $V_1$ ).

Définition 1-2. Dans la définition précédente, si de plus  $V_0$  et  $V_1$  sont chacun un rétracte de déformation de  $W$ , on dit que  $W$  est  $h$ -cobordisme et que  $M_0$  et  $M_1$  sont  $h$ -cobordantes.

Remarque. On peut étendre ces définitions au cas où  $M_0$  et  $M_1$  ont des bords non vides difféomorphes en demandant que  $\partial W$  soit difféomorphe à  $M_0 \cup (\partial M_0 \times I) \cup M_1$ .

Théorème I-3 (Théorème du h-cobordisme).

Si  $M_0$  et  $M_1$  sont deux variétés sans bord, de dimension  $n \geq 5$ , simplement connexes, et si  $W$  est un h-cobordisme entre  $M_0$  et  $M_1$ ,  $W$  est difféomorphe au produit  $M_0 \times I$  (où  $I$  désigne l'intervalle  $[0,1]$ ). En particulier,  $M_0$  et  $M_1$  sont difféomorphes.  $\square$

Une conséquence importante est le

Corollaire I-4 (conjecture de Poincaré généralisée) :

Soit  $M$  une variété compacte, sans bord, de dimension  $n \geq 5$ . Si  $M$  a le type d'homotopie de la sphère  $S^n$ , alors  $M$  est homéomorphe à  $S^n$ .  $\square$

Démonstration :

- 1) Cas où  $n \geq 6$  : Soient  $\varphi_i : D^n \rightarrow M^n$  ( $i=0,1$ ) deux plongements disjoints du disque  $D^n$  dans  $M$ . Il est facile de vérifier que  $W = \text{int } \varphi_0(D^n) - \text{int } \varphi_1(D^n)$  est un h-cobordisme. Donc  $W$  est difféomorphe à  $S^{n-1} \times I$ , et  $M - \text{int } \varphi_0(D^n)$  est difféomorphe à  $D^n$ . On en déduit que  $M$  s'écrit comme recollement de deux exemplaires de  $D^n$  par un difféomorphisme du bord  $S^{n-1}$ , ce qui permet d'écrire un homéomorphisme explicite de  $M$  sur  $S^n$  (on dit que  $M$  est une "sphère tordue" (en anglais, "twisted sphere")).
- 2) Cas où  $n = 5$  : En anticipant sur la suite, nous utiliserons le fait suivant, démontré dans (K.M [1]) : toute variété de dimension 5 vérifiant les conditions de l'énoncé borde une variété contractile. Il suffit pour conclure d'utiliser un lemme dont nous aurons grand besoin plus loin :

Lemme 1.5 : (K.M; [1] page 506) :

Une variété  $M^n$  simplement connexe est h-cobordante à la sphère  $S^n$  si et seulement si  $M$  borde une variété contractile.  $\square$

Démonstration :

- 1) Si  $M + (-S^n)$  borde un h-cobordisme  $W$ , alors  $W' = W \cup_{S^n} D^{n+1}$  est manifestement contractile, et a pour bord  $M$ .
- 2) Supposons que  $M = \partial W'$ ;  $W'$  contractile; alors si  $\varphi : D^{n+1} \rightarrow \text{int } W'$  est un plongement,  $W = W' - \text{int } \varphi(D^{n+1})$  a pour bord  $M + (-S^n)$  et est simplement connexe. De plus, on voit facilement que l'inclusion  $\varphi$  de  $S^n$  dans  $W$  induit un isomorphisme en homologie. Le théorème de Hurewicz et le théorème de Whitehead montrent alors que  $\varphi(S^n)$  est un rétracte de déformation de  $W$ ; par dualité de Poincaré, il en est de même de l'inclusion de  $M$  dans  $W$  (en effet, on a pour tout  $i : H_i(W, M) \cong H^{n+1-i}(W, S^n)$ ).  
En particulier, dans le Corollaire 1.4, on peut donc conclure que si  $n = 5$ ,  $M^5$  est difféomorphe à  $S^5$  (ceci est valable également pour le cas  $n = 6$  par le même argument).

Le problème initial de classification est donc ramené pour les dimensions  $n \geq 5$  au problème suivant : classification à h-cobordisme près des "n-sphères homotopiques" (variétés  $M^n$  de classe  $C^\infty$ , compactes, sans bord, ayant le type d'homotopie de  $S^n$  )

2. Le groupe  $\mathcal{C}_n$  et son sous-groupe  $\mathcal{C}_n(\partial\pi)$  :

Rappelons ce qu'est la "somme connexe" de deux variétés  $M_0$  et  $M_1$  connexes, orientées, de même dimension  $n$  : on considère deux plongements  $\varphi_i : D^n \rightarrow M_i$  : ( $i=0,1$ ),  $\varphi_0$  conservant l'orientation,  $\varphi_1$  la renversant, et on forme le quotient

$$M_0 \# M_1 = \frac{[M_0 - \varphi_0(0)] + [M_1 - \varphi_1(0)]}{\{\forall u \in S^{n-1}, \forall 0 < t < 1 : \varphi_0(tu) = \varphi_1(1-t)u\}}$$

qui est une variété orientée.

On sait (Cerf [1]) que deux plongements conservant l'orientation de  $D^n$  dans  $M^n$  sont isotopes ; on en déduit facilement que la somme connexe de deux variétés orientées est bien définie à un difféomorphisme conservant l'orientation près. De plus  $M^n \# S^n$  est difféomorphe à  $M^n$ , et l'opération est commutative et associative (à difféomorphisme près)

Supposons maintenant que  $M$  est une  $n$ -sphère homotopique : alors  $M^n \# (-M^n)$  borde une variété contractile (et est donc h-cobordante à  $S^n$ ) ; enfin si  $M_1$  est h-cobordante à  $M'_1$ ,  $M_1 \# M_2$  est h-cobordante à  $M'_1 \# M_2$ . (Pour les détails, voir (Kervaire-Milnor [1] pages 505, 506)

On en déduit le :

Théorème 2.1 : L'ensemble des classes de h-cobordisme de  $n$ -sphères homotopiques est muni par l'opération de somme connexe d'une structure de groupe abélien.

Ce groupe est noté  $\mathcal{C}_n$ .

Nous nous intéressons en fait à un sous-groupe de  $\mathcal{C}_n$ , noté  $\mathcal{C}_n(\partial\pi)^{(*)}$ , □

---

(\*) Dans (Kervaire-Milnor [1]), ce groupe est noté  $bP_{n+1}$

car seuls les éléments de ce sous-groupe apparaissent lors de l'étude des singularités isolées d'hypersurfaces algébriques (et ils apparaissent tous.)

Définition 2.2 : Une variété  $M$  est dite s-parallélisable (= stablement parallélisable) si le fibré  $\tau_M \oplus \epsilon_M$  est trivial, où  $\tau_M$  désigne le fibré tangent de  $M$ , et  $\epsilon_M$  le fibré vectoriel trivial de dimension 1 sur  $M$ .

A l'aide de résultats profonds sur le J-homomorphisme, on peut montrer que toute sphère homotopique est s-parallélisable, ce qui permet d'appliquer à une telle variété la construction de Thom-Pontryagin et de montrer le :

Théorème 2.3 :

- (1) Le sous-ensemble  $\Theta_n(\partial\pi) \subset \Theta_n$  formé des classes de h-cobordisme de  $n$ -sphères homotopiques qui sont bord d'une variété s-parallélisable, est un sous-groupe de  $\Theta_n$ .
- (2) Le quotient  $\Theta_n / \Theta_n(\partial\pi)$  est un groupe fini.

□

L'étude de  $\Theta_n(\partial\pi)$  va se faire de la manière suivante :

Soit  $\Sigma^n$  une sphère homotopique telle que  $\Sigma = \partial M$ , où  $M$  est une variété s-parallélisable. On cherche à modifier  $M$  dans son intérieur de façon à la rendre homotopiquement aussi simple que possible (se rappeler le lemme 1.5) - L'obstruction à rendre  $M$  contractile par de telles modifications permettra de calculer l'ordre de  $\Theta_n(\partial\pi)$ . Mais avant de remplir ce programme, il faut définir les outils :

3 - Rappels de théorie de Morse ; techniques de chirurgie :

Soit  $W^m$  une variété de classe  $C^\infty$ , et soit  $f : W \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction  $C^\infty$ ; soit  $df : TW \rightarrow T\mathbb{R}$  l'application dérivée (i.e.  $\forall x \in W, df(x) \in L(TW_x; \mathbb{R})$ ).

Définition 3.1 : on dit qu'un point  $x \in W$  est critique pour  $f$  si  $df(x) = 0 \in L(TW_x; \mathbb{R})$ ; on dit alors que  $f(x)$  est une valeur critique de  $f$ .  $\square$

Remarquons que cela signifie que dans des coordonnées locales de  $W$  au voisinage de  $x$ , les dérivées partielles de  $f$  en  $x$  sont toutes nulles.

En un point critique  $x$  de  $f$  on peut construire une forme bilinéaire symétrique sur  $TW_x$ , appelée le Hessien, de la manière suivante (voir Milnor [ 2 ]):

Soient  $V, W \in TW_x$ , et soient  $\tilde{V}, \tilde{W}$  deux champs de vecteurs sur  $W$  tels que  $\tilde{V}_x = V$  et  $\tilde{W}_x = W$ . Par définition :  $f_{**}(x)(V, W) = \tilde{V}_x(\tilde{W}(f))$ ; cette définition ne dépend manifestement pas du choix de  $\tilde{V}$  prolongeant  $V$ .

Mais  $f_{**}(x)(V, W) - f_{**}(x)(W, V) = \tilde{V}_x(\tilde{W}(f)) - \tilde{W}_x(\tilde{V}(f)) = [\tilde{V}, \tilde{W}]_x(f) = 0$  puisque  $x$  est un point critique de  $f$ . Donc  $f_{**}$  est symétrique et ne dépend pas non plus du choix de  $\tilde{W}$ .

Définition 3.2 : Un point critique  $x$  de  $f$  est dit, non dégénéré si  $f_{**}(x) \in L^2(TW_x; \mathbb{R})$  est non dégénérée (c'est à dire si seul  $V = 0$  vérifie  $\forall W \in TW_x, f_{**}(x)(V, W) = 0$ ).  $\square$

Remarquons que dans des coordonnées locales,  $f_{**}(x)$  est représentée par la matrice des dérivées partielles secondes  $(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x))$  et que  $x$  est non dégénéré si et seulement si pour un choix des coordonnées locales (et donc pour tous) cette matrice est non singulière.

Définition 3.3 : On appelle indice d'un point critique  $x$  non dégénéré la dimension maximale d'un sous-espace de  $TW_x$  sur lequel  $f_{**}(x)$  soit définie négative.  $\square$

En particulier, si dans des coordonnées locales la matrice est diagonale, l'indice est égal au nombre de termes négatifs.

Définition 3.4 : Soit  $f : W \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $C^\infty$  : on dit que  $f$  est une fonction de Morse si tous ses points critiques sont non-dégénérés  $\square$

Le lemme qui suit montre que la donnée d'une fonction de Morse sur une variété  $W$ , et en particulier la connaissance des indices de ses points critiques, donne des renseignements très complets sur la topologie de  $W$ .

Lemme 3.5 (Lemme de Morse) : Soit  $x$  un point critique non dégénéré d'indice  $\lambda$  d'une fonction  $f : W^m \rightarrow \mathbb{R}$ . Il existe un voisinage  $U$  de  $x$  dans  $W$  et un système de coordonnées  $(y_1, \dots, y_m)$  dans  $U$  tels que  $f$  s'écrive :

$$f(y_1, \dots, y_m) = f(x) - y_1^2 - \dots - y_\lambda^2 + y_{\lambda+1}^2 + \dots + y_m^2$$

$\square$

La démonstration est très astucieuse et se trouve par exemple dans (Milnor [2])

Remarquons qu'à priori on ne s'attendait à une telle écriture qu'au troisième ordre près.

On voit grâce à ce lemme que les points voisins d'un point critique non dégénéré ne sont pas critiques ; on en déduit le :

Corollaire 3.6 : Les points critiques non dégénérés sont isolés ; si  $W$  est compacte, une fonction  $f : W \rightarrow \mathbb{R}$  n'en a qu'un nombre fini.  $\square$

Nous indiquons maintenant comment la connaissance d'une fonction de Morse sur

une variété  $W^m$  nous renseigne sur la topologie de cette variété. Nous supposons que  $W^m$  est compacte, et que  $f : W \rightarrow \mathbb{R}$  a toutes ses valeurs critiques distinctes.

Notons  $\alpha_1, \dots, \alpha_r$  les points critiques,  $C_i = f(\alpha_i)$  les valeurs critiques ( $i = 1, \dots, r$ ) et  $\lambda_i$  ( $i = 1, \dots, r$ ) les indices des points critiques -

[Remarquons que si  $a \in \mathbb{R}$  n'est pas une valeur critique, le théorème du rang constant implique que  $f^{-1}(a)$  est une sous-variété de  $W$ ]

Soit  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  un intervalle ; commençons par choisir  $[a, b]$  tel que  $f^{-1}([a, b])$  ne contienne pas de point critique

Lemme 3.7 : Dans les conditions ci-dessus,  $f^{-1}([a, b])$  est une sous-variété de  $W$  ayant pour bord les sous-variétés  $f^{-1}(a)$  et  $f^{-1}(b)$ . De plus,  $f^{-1}([a, b])$  est difféomorphe au produit  $f^{-1}(a) \times I$  d'un de ses bords par l'intervalle. □

Pour la démonstration, voir (Milnor [2] ou Milnor [3]).

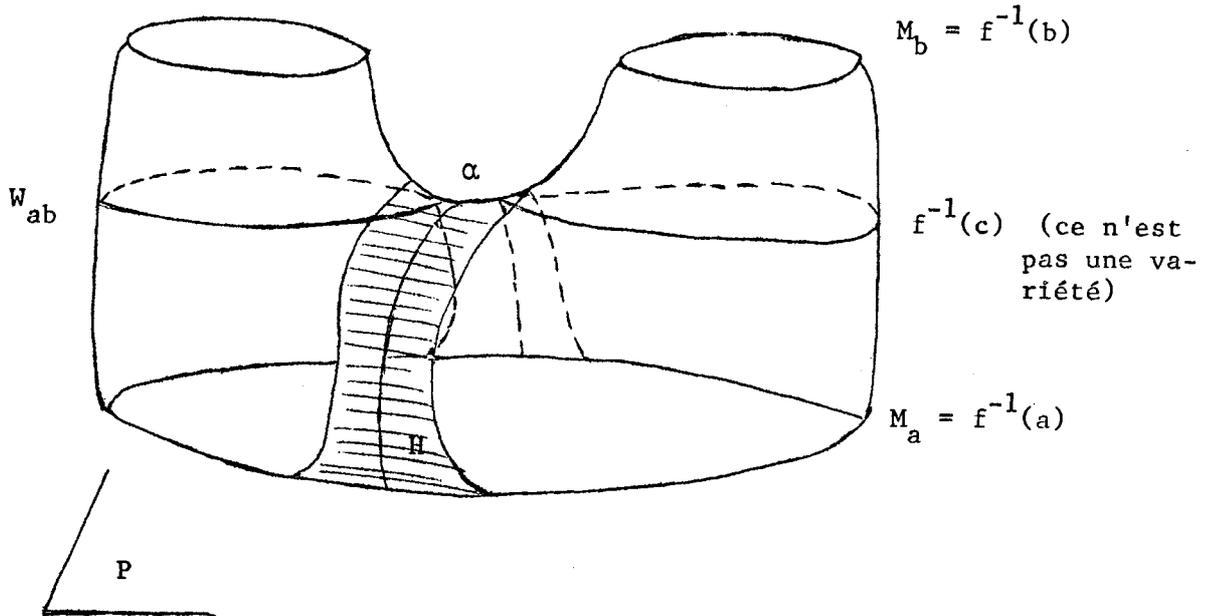
L'idée est d'utiliser le gradient de  $f$  dans une certaine métrique riemannienne sur  $W$ . Ce champ de vecteurs ne s'annule pas sur  $f^{-1}([a, b])$  par hypothèse, et la compacité de  $f^{-1}([a, b])$  montre que les courbes intégrales vont du bord  $f^{-1}(a)$  au bord  $f^{-1}(b)$  ce qui permet de conclure.

Remarque : La démonstration du Théorème du h-cobordisme se ramène ainsi, étant donné un h-cobordisme  $(W, M_0, M_1)$ , à trouver une fonction sans point critique,  $f : (W, M_0, M_1) \rightarrow (I, 0, 1)$ .

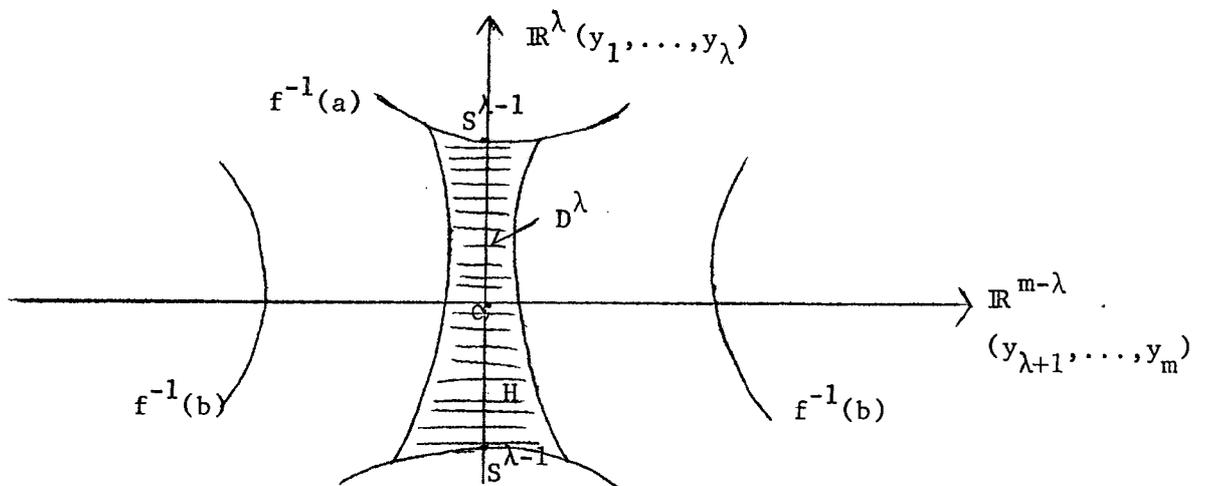
Considérons maintenant un intervalle  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  tel que  $f^{-1}([a, b])$  contienne un et un seul point critique  $\alpha$  de  $f$ . On notera  $c = f(\alpha) \in ]a, b[$ , et  $\lambda \neq$  indice de  $\alpha$ . On dit que la variété à bord  $W_{ab} = f^{-1}([a, b])$  est un

"cobordisme élémentaire" d'indice  $\lambda$  entre  $f^{-1}(a) = M_a$  et  $f^{-1}(b) = M_b$

Sur la figure ci-dessous,  $f$  est la fonction "distance au plan horizontal  $P$ ".



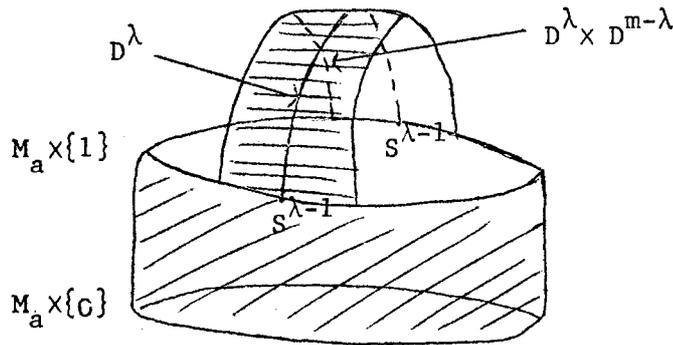
Le lemme 3.7 permet de se ramener au cas où  $[a, b]$  est un petit voisinage de  $c$ . Soit  $U$  un voisinage de  $c$ , et soient  $(y_1, \dots, y_m)$  des coordonnées locales dans  $U$  données par le lemme de Morse :



Le disque  $D^\lambda$  passant par  $\alpha$ , défini dans  $U$  par  $y_1^2 + \dots + y_\lambda^2 \leq 1$ ,  $y_{\lambda+1} = \dots = y_m = 0$ , s'appelle la nappe descendante du point  $\alpha$  (définie par les coordonnées  $y_i$ ). Son bord  $S^{\lambda-1}$  est plongé dans  $M_a = f^{-1}(a)$ . On voit sur le modèle de Morse qu'on peut en fait définir un plongement  $(\tilde{\varphi}, \varphi) : (D^\lambda \times D^{m-\lambda}, S^{\lambda-1} \times D^{m-\lambda}) \rightarrow (W_{ab}, M_a)$  dont l'image est notée  $H$  (voir figures).

Notons  $\omega(M_a, \varphi)$  la variété définie de la manière suivante : on part de

$$X = \frac{(M_a \times I) + D^\lambda \times D^{m-\lambda}}{\{S^{\lambda-1} \times D^{m-\lambda} \ni (x, y) \equiv \varphi(x, y) \in M_a \times \{1\}\}}$$



$X$  est une variété à coins ; on a un procédé canonique pour "arrondir les angles", c'est-à-dire pour donner à  $X$  une structure de variété  $C^\infty$  (Milnor [1], Conner-Floyd [1]). On note  $\omega(M_a, \varphi)$  cette variété  $C^\infty$ .

**Lemme 3.8 :** Il existe un difféomorphisme de  $W_{ab} = f^{-1}([a, b])$  sur  $\omega(M_a, \varphi)$ , qui envoie  $M_a$  sur  $M_a \times \{0\}$  par l'identité.  $\square$

La démonstration se trouve dans (Milnor [2] et Milnor [3]).

Notons que  $M' = \partial \omega(M_a, \varphi) - M_a \times \{0\}$  s'obtient en arrondissant la variété à coins

$$Y = \frac{M_a - \text{int } \varphi(S^{\lambda-1} \times D^{m-\lambda}) + D^\lambda \times S^{m-\lambda-1}}{\{\partial(D^\lambda \times S^{m-\lambda-1}) \ni (x,y) = \varphi(x,y) \in M_a\}}$$

On peut encore voir que  $M'$  s'écrit directement :

$$M' = \frac{M_a - \varphi(S^{\lambda-1} \times 0) + D^\lambda \times S^{m-\lambda-1}}{\{(D^\lambda \times S^{m-\lambda-1}) \ni (tu,v) = \varphi(u,tv) \text{ pour } 0 < t \leq 1\}}$$

(où  $u \in S^{\lambda-1}$ ,  $v \in S^{m-\lambda-1}$ ).

Corollaire 3.9 : Il existe un difféomorphisme de  $f^{-1}(b) = M_b$  sur  $M'$ .

On dit encore que  $M_b$  a été obtenue à partir de  $M_a$  par une modification sphérique (ou chirurgie) d'indice  $\lambda$ , et on note  $M_b = M' = \chi(M_a, \varphi)$ .  $\square$

Notations : Il sera plus agréable pour la suite de changer de notations. Nous poserons  $\lambda = p + 1$ ,  $m - 1 = n = p + q + 1 = \dim M_a = \dim M_b$ . En particulier,  $m - \lambda - 1 = q$ . On obtient alors la

Définition 3.10 : Soit  $M^{n=p+q+1}$  une variété, et soit  $\varphi = S^p \times D^{q+1} \rightarrow M$  un plongement. Le résultat  $\chi(M, \varphi)$  de la chirurgie d'indice  $(p+1)$  définie par  $\varphi$  est par définition la variété =

$$M' = \chi(M, \varphi) = \frac{M - \varphi(S^p \times 0) + D^{p+1} \times S^q}{\{D^{p+1} \times S^q \ni (tu,v) = \varphi(u,tv) \in M \text{ pour } 0 < t \leq 1\}}$$

Remarquons que si  $M$  avait un bord  $\partial M$ , alors  $\partial \chi(M, \varphi) = \partial M$ .  $\square$

Remarque 3.11 : Si  $M'$  s'obtient à partir de  $M$  par une chirurgie d'indice  $p + 1$ ,  $M$  s'obtient à partir de  $M'$  par une chirurgie d'indice  $q + 1$  (rappelons que  $\dim M = \dim M' = n = p+q+1$ )

Remarque 3.11' : La somme connexe est une chirurgie d'indice 1.  $\square$

Proposition 3.12 : Sur les variétés de dimension  $n$  compactes orientées, les deux relations d'équivalence suivantes sont les mêmes :

- (1)  $M$  et  $M'$  sont cobordantes.
- (2) On peut passer de  $M$  à  $M'$  par une suite finie de chirurgies.

$\square$

Démonstration : Montrons d'abord que (2) entraîne (1). Il suffit pour cela de montrer que  $M$  et  $\chi(M, \varphi)$  sont cobordantes. On obtient, comme dans la démonstration du lemme 3.8, un cobordisme  $\omega(M, \varphi)$  entre  $M$  et  $\chi(M, \varphi)$  appelé trace de la chirurgie en arrondissant la variété à coins

$$X = \frac{(M \times I) + D^{p+1} \times D^{q+1}}{\{S^p \times D^{q+1} \ni (x, y) = \varphi(x, y) \in M \times \{1\}\}}$$

Pour une définition directe de  $\omega(M, \varphi)$  comme variété  $C^\infty$ , voir (Milnor [3] page 30 th.3-12) : cette dernière présentation a l'avantage de montrer directement qu'il existe sur  $\omega(M, \varphi)$  une fonction de Morse  $f$  telle que  $f^{-1}(0) = M$ ;  $f^{-1}(1) = \chi(M, \varphi)$ ,  $f$  a un seul point critique d'indice  $p+1$  dans  $\text{int } \omega(M, \varphi)$ .  $\omega(M, \varphi)$  est donc ce que nous avons appelé plus haut un cobordisme élémentaire d'indice  $(p+1)$ .

Montrons maintenant que (1) entraîne (2) : soit  $(W, M, M')$  un cobordisme. Il suffit, grâce au lemme 3.8 et au corollaire 3.9 de montrer qu'il existe une fonction de Morse  $f : W \rightarrow I$  telle que :  $f^{-1}(0) = M$ ,  $f^{-1}(1) = M'$ ,  $f$  a tous ses points critiques dans l'intérieur de  $W$ , et toutes ses valeurs critiques distinctes.

En effet, la donnée d'une telle fonction permet de décomposer  $W$  en cobordismes élémentaires.

L'existence de telles fonctions se démontre grâce aux théorèmes de transversalité de Thom (voir par exemple (Séminaire Cartan [2] exposés de C. Morlet). Pour une démonstration plus directe, voir (Milnor [3]) .

Remarque 3.13 : Nous utiliserons surtout la première partie de la démonstration qui montre que tous les invariants attachés à une variété qui ne dépendent que de la classe de cobordisme de cette variété, ne changent pas par chirurgie (Exemples : nombres de Stiefel-Whitney et de Pontryagin, signature (indice)...) )

4 - Chirurgie en-dessous de la dimension moitié :

Soit  $M^n$  une variété  $s$ -parallélisable telle que  $\Sigma^{n-1} = \partial M$  soit une  $(n-1)$ -sphère homotopique. On cherche, par des opérations dans l'intérieur de  $M$ , à augmenter la connexité de  $M^{(*)}$ . Les deux lemmes qui suivent montrent que la chirurgie est bien adaptée à ce problème :

Lemme 4.1 : Soit  $M^{n=p+q+1}$  une variété, et  $\varphi : S^p \times D^{q+1} \rightarrow M$  un plongement. Soit  $\lambda = [\varphi] \in \pi_p(M)$  la classe de  $\varphi|_{S^p \times \{0\}} : S^p \rightarrow M^{(**)}$ . Si  $i < \min(p, q)$  on a  $\pi_i(M') = \pi_i(M)$ , où on a posé  $M' = \chi(M, \varphi)$ . Si  $p < q$ ,  $\pi_p(M') = \pi_p(M)/\Lambda$ , où  $\Lambda$  est un sous-groupe de  $\pi_p(M)$  contenant  $\lambda$ .  $\square$

Pour la démonstration (très simple) on utilise le

Sous-lemme 4.2 : La trace  $W = \omega(M, \varphi)$  d'une chirurgie d'indice  $p+1$  (définie dans la démonstration de la proposition 3.12) a le même type d'homotopie que chacun des complexes  $\frac{M + D^{p+1}}{\{\partial D^{p+1} \ni x = \varphi(x \times 0) \in M\}}$  et  $\frac{M' + D^{q+1}}{\{\partial D^{q+1} \ni x = \psi(x \times 0) \in M'\}}$

(où  $\psi = S^q \times D^{p+1}$  est un plongement  $C^\infty$  définissant la chirurgie d'indice  $q+1$  faisant passer de  $M'$  à  $M$  : voir la remarque 3.11 à ce sujet).

La démonstration consiste à remarquer que  $\omega(M, \varphi)$  (resp.  $\omega(M', \psi)$ ) est un cobordisme élémentaire d'indice  $p+1$  (resp.  $q+1$  si on prend  $M'$  comme origine)

(\*) Par dualité de Poincaré, et le théorème de Hurewicz, il suffit pour rendre  $M^n$  contractile de la rendre  $[\frac{n}{2}]$ -connexe.

(\*\*) On ne notera pas les points-bases, car ils n'apportent aucune difficulté et sont sans intérêt.

On utilise alors le lemme 3.8 .

cqfd.

On en déduit facilement (Spanier [1] lemme 15 page 402) que  $i_* : \pi_j(M) \rightarrow \pi_j(W)$  est un isomorphisme pour  $j < p$  et un épimorphisme pour  $j = p$ . De même,  $i'_* : \pi_j(M') \rightarrow \pi_j(W)$  est un isomorphisme pour  $j < q$ , et un épimorphisme pour  $j = q$  (donc un isomorphisme pour  $j \leq p$  si  $p < q$ ). Enfin l'image de  $\lambda$  est 0 dans  $\pi_p(W)$ , ce qui termine la démonstration.

cqfd

Lemme 4.3 : Soit  $M^n$  une variété s-parallélisable. Si  $2p < n$ , tout élément  $\lambda \in \pi_p(M)$  est représenté par un plongement  $\varphi : S^p \times D^{n-p} \rightarrow M$   $\square$

Démonstration :

1) Puisque  $2p < n$ , le théorème de plongement de Whitney (Séminaire Cartan [2]) permet d'approcher une application  $\varphi' : S^p \rightarrow M$  représentant  $\lambda$  par un plongement  $\varphi$ .

2) Il reste à voir que le fibré normal  $\nu$  de  $\varphi$  est trivial. Tout d'abord  $\nu \oplus \tau(S^p) \oplus \epsilon = \tau(M)|_{S^p} \oplus \epsilon = \epsilon^{n+1}$  (\*) puisque  $M$  est s-parallélisable ; donc  $\nu$  est stablement trivial puisque  $\tau(S^p) \oplus \epsilon = \epsilon^{p+1}$ . Rappelons que les fibrés vectoriels de dimension  $(n-p)$  sur  $S^p$  sont classifiés par les éléments de  $\pi_{p-1}(SO(n-p))$ . L'équation précédente signifie que l'élément  $[\nu] \in \pi_{p-1}(SO(n-p))$  qui classe  $\nu$  a pour image l'élément neutre dans la flèche de stabilisation :  $\pi_{p-1}(SO(n-p)) \rightarrow \pi_{p-1}(SO(n+1)) = \pi_{p-1}(SO)$ . Mais la suite exacte de la fibration  $SO(n-p) \rightarrow SO(n-p+1) \rightarrow S^{n-p}$  (fibré principal associé à  $\tau(S^{n-p})$ ) montre que cette flèche est injective pour  $2p < n$ .

Donc  $[\nu] = 0$ , et  $\nu$  est trivial .

cqfd

---

(\*)  $\tau(M)$  désigne le fibré vectoriel tangent de  $M$ , et  $\epsilon$  le fibré vectoriel trivial de dimension 1.

Nous pouvons donc effectuer sur  $\varphi(S^p \times D^{n-p})$  la modification sphérique, mais le problème est alors de continuer ; en effet, la variété  $M' = \chi(M, \varphi)$  n'a aucune raison d'être encore s-parallélisable, et rien ne permet plus d'affirmer qu'un élément de  $\pi_j(M')$  est représenté par un plongement de  $S^j$  dans  $M'$  ayant un fibré normal trivial. Nous montrerons au chapitre suivant (voir Proposition 5.5) que si  $2p < n$ , on peut toujours choisir le plongement  $\varphi : S^p \times D^{n-p} \rightarrow M$  représentant  $\lambda \in \pi_p(M)$  de façon que  $M' = \chi(M, \varphi)$  soit encore s-parallélisable. En anticipant sur ce résultat, nous déduisons le :

Théorème 4.4 : Soit  $M$  une variété compacte, connexe, s-parallélisable, de dimension  $n \geq 2k$ . Par une suite finie de modifications sphériques dans l'intérieur, on obtient une variété  $M_1$  s-parallélisable,  $(k-1)$ -connexe, et ayant même bord que  $M^{(*)}$ .  $\square$

Démonstration :  $\pi_1(M)$  étant de type fini ( $M$  est compacte), on peut, par une suite finie de chirurgies, obtenir  $M'$  s-parallélisable 1-connexe. On a donc  $\pi_2(M') = H_2(M')$  de type fini, et on peut continuer jusqu'à  $M_1$  en un nombre fini d'opérations.  $\text{cqfd}$

---

(\*) Bien remarquer que tant qu'on reste en-dessous de la dimension moitié, aucune hypothèse n'est faite sur  $\partial M$

5 - L'obstruction à la chirurgie plongée (méthode géométrique) :

Afin de conserver la  $s$ -parallélisabilité, nous sommes obligés d'introduire un concept de chirurgie un peu plus raffiné, la "chirurgie plongée" (ce concept coïncide avec celui de "chirurgie avec trivialisation" utilisé par Kervaire-Milnor, voir l'appendice à la fin du chapitre ; cependant la chirurgie plongée prépare mieux le lecteur à des travaux comme ceux de Browder, Novikov, Sullivan, Wall, etc...).

Commençons par deux lemmes élucidant le concept de  $s$ -parallélisabilité :

Lemme 5.1 : Soit  $M^n$  une sous-variété de dimension  $n$  de  $S^{n+k}$  ( $k > n$ ).  $M$  est  $s$ -parallélisable si et seulement si son fibré normal  $\nu(M^n; S^{n+k})$  est trivial (Rappelons que, par le théorème de Whitney,  $M^n$  se plonge toujours dans  $S^{n+k}$  dès que  $k > n$ ).  $\square$

La démonstration est basée sur le

Sous-lemme 5.2 : Soit  $\xi^k$  un fibré vectoriel de dimension  $k$  sur un CW-complexe  $X^n$  de dimension  $n$ , avec  $k > n$ . Si  $\xi \oplus \epsilon^r$  est trivial, alors  $\xi$  est trivial.  $\square$

Démonstration du sous-lemme : On peut manifestement supposer que  $r = 1$ .

$\xi$  est classifié par une application  $f : X \rightarrow BSO(k)$  (pour les classifiants voir Siebenmann [1]). L'hypothèse dit que la composition  $X \xrightarrow{f} BSO(k) \xrightarrow{s} BSO(k+1)$  est homotope à l'application constante (où  $s$  = stabilisation). Mais la flèche  $s$  est homotope à une fibration de fibre  $S^k$ , comme le montrent la suite exacte de la fibration  $SO(k) \rightarrow SO(k+1) \rightarrow S^k$  et l'isomorphisme  $\pi_i(BSO(k)) = \pi_{i-1}(SO(k))$  (en fait, on voit facilement que  $BSO(k) \xrightarrow{s} BSO(k+1)$  est, au type d'homotopie près, le fibré en sphères

associé au fibré universel sur  $BSO(k+1)$ . Mais alors  $f$  est homotope à une application de  $X$  dans le fibre  $S^k$ , et comme  $\pi_n(S^k) = 0$  pour  $n < k$ ,  $f$  est homotope à 0, donc  $\xi$  est trivial. cqfd

Démonstration du lemme :

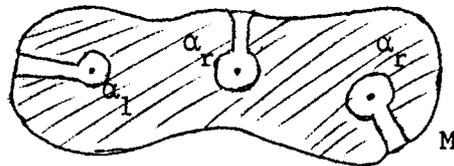
(1) Si  $\nu(M^n; S^{n+k})$  est trivial, on a  $\tau(M) \oplus \nu \oplus \xi = \tau(S^{n+k})|_M \oplus \epsilon = \epsilon^{n+k+1}$

Donc  $\tau(M) \oplus \epsilon$  est stablement trivial, donc trivial ( $n+1 > n$ )

(2) Supposons  $M^n$  s-parallélisable : l'égalité précédente montre que  $\nu$  est stablement trivial, donc trivial ( $k > n$ ). cqfd

Lemme 5.3 : Une variété  $M^n$  connexe ayant un bord non vide est s-parallélisable si et seulement si elle est parallélisable.  $\square$

En utilisant 5.2, il suffit de voir que si  $\partial M^n \neq \emptyset$ , toute application de  $M^n$  dans  $S^n$  est homotope à une application constante, ou ce qui revient au même, à une application non surjective : soit  $x \in S^n$ ; par un argument de transversalité, on approche  $f$  par une application  $f'$  telle que  $f'^{-1}(x)$  soit un nombre fini de points  $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ . La figure ci-dessous montre l'étape finale d'une homotopie qui fait "fuir les  $\alpha_i$  par le bord". cqfd



Les lemmes 5.1 et 5.3 rendent naturelle la définition qui suit :

Définition 5.4 : Soit  $(M^n, \rho)$  une sous-variété "trivialisée" de  $S^{n+k}$ , c'est-à-dire munie d'une trivialisatation  $\rho$  de son fibré normal  $\nu(M^n; S^{n+k})^{(*)}$ . Soit  $\varphi_0 : S^p \rightarrow M$  un plongement. On dit que la sous-variété "trivialisée"  $(M', \rho')$  est obtenue à partir de  $(M, \rho)$  par une "chirurgie plongée" sur  $\varphi_0$  si les conditions suivantes sont réalisées :

- (1) Il existe un plongement  $\varphi : S^p \times D^{n-p} \rightarrow M$  qui prolonge  $\varphi_0$
- (2) Il existe un plongement  $F : W = \omega(M, \varphi) \rightarrow S^{n+k} \times I$  tel que  $F^{-1}(S^{n+k} \times \{0\}) = M$ ,  $F^{-1}(S^{n+k} \times \{1\}) = M' = \chi(M, \varphi)$ , et le fibré normal de  $F$  est trivial.
- (3) Il existe une trivialisatation  $R$  de  $\nu(\omega(M, \varphi); S^{n+k} \times I)$  qui prolonge la trivialisatation  $\rho$  de  $\nu(M; S^{n+k} \times \{0\})$ , et définit la trivialisatation  $\rho'$  de  $\nu(M'; S^{n+k} \times \{1\})$ .  $\square$

Remarquons que  $M'$ , étant "trivialisée", est s-parallélisable d'après 5.1. Pour démontrer le théorème 4.4, il nous suffit donc de montrer qu'à chaque étape on peut choisir des plongements  $\varphi : S^p \times D^{n-p} \rightarrow M$  permettant d'effectuer la chirurgie plongée dans  $S^{n+k}$  ( $k$  grand) : ce sera l'objet de la première partie de la proposition 5.5 ci-dessous. Nous allons étudier l'obstruction à cette opération lorsque le plongement  $\varphi_0 : S^p \rightarrow M$  est donné ; commençons donc par décrire la situation :

(\*) Une trivialisatation  $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_k)$  de  $\nu(M^n; S^{n+k})$  est la donnée de  $k$  sections globales partout non nulles, fournissant ainsi un isomorphisme du fibré trivial  $\epsilon^k$  sur  $M$  avec  $\nu(M^n; S^{n+k})$ . En chaque point  $x \in M$ ,  $\rho_1(x), \dots, \rho_k(x)$  est un  $k$ -repère engendrant l'espace des vecteurs normaux en  $x$  à  $M$  dans  $S^{n+k}$ .

Données de départ :

- (1) Un plongement  $f : M^n \rightarrow S^{n+k}$  ayant un fibré normal trivial.
- (2) Un plongement  $\varphi_0 : S^p \rightarrow M^n$  dont le fibré normal est noté  $\nu$ . On supposera  $p \leq n-p$ .
- (3) Une trivialisatation  $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_k)$  de  $\nu(M^n; S^{n+k})$ .

Remarquons tout de suite que  $\nu$  est stablement trivial, en effet :

$$\tau(S^{n+k})|_{S^p} \oplus \epsilon = \nu \oplus \tau(S^p) \oplus \epsilon^k \oplus \epsilon = \nu \oplus \epsilon^{p+k} \oplus \epsilon$$

Dans la suite exacte

$$\pi_p(SO/SO(n-p)) \xrightarrow{\partial} \pi_{p-1}(SO(n-p)) \xrightarrow{s_*} \pi_{p-1}(SO)$$

on a donc  $s_*[\nu] = 0$ , c'est-à-dire  $[\nu] \in \text{Im } \partial$

La proposition qui suit se trouve dans (Haefliger [2]) :

Proposition 5.5. : Si  $2p < n$ , il est toujours possible de faire la chirurgie plongée sur  $\varphi_0$ . Plus généralement, il existe une obstruction  $\xi \in \pi_p(SO/SO(n-p))$ . Ce dernier groupe est  $\{0\}$  si  $p < n-p$ ,  $\mathbb{Z}$  si  $2p=n$  et  $p$  pair,  $\mathbb{Z}_2$  si  $2p=n$  et  $p$  impair.

La nullité de  $\xi$  équivaut à la possibilité de faire la chirurgie plongée avec les données  $(M, \rho, \varphi_0)$ . Enfin  $\partial(\xi) = [\nu] \in \pi_{p-1}(SO(n-p))$ .  $\square$

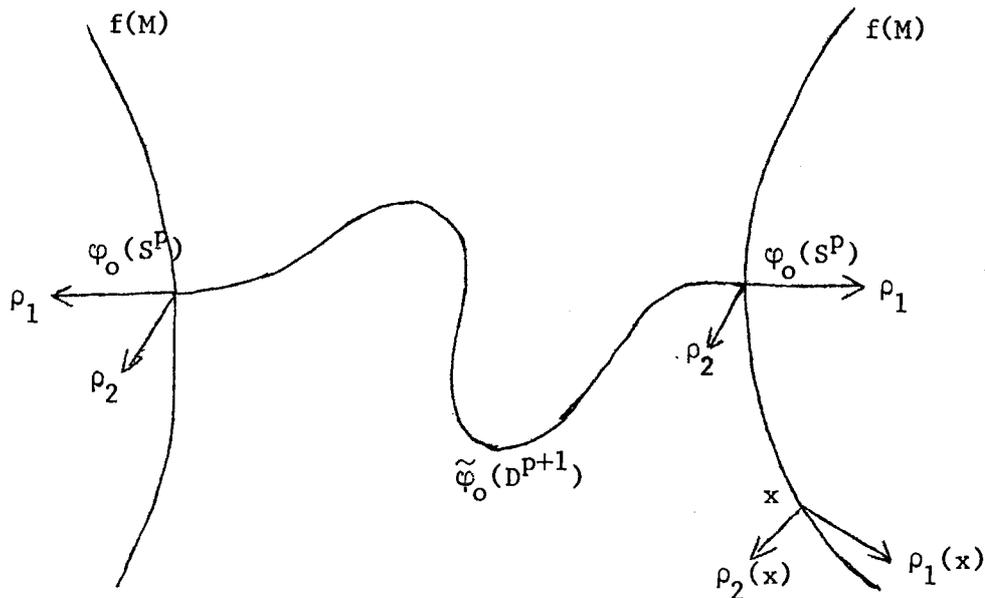
Nous savions bien que  $[\nu] = 0$  était une condition nécessaire à la possibilité de faire la chirurgie (non plongée) sur  $\varphi_0$ ; L'obstruction  $\xi$  est à priori plus fine puisque  $\xi = 0$  entraîne  $[\nu] = 0$ ; nous en reparlerons à la proposition suivante.

Démonstration de la proposition 5.5 : Commençons par définir  $\xi$  : à condition d'avoir pris  $k$  assez grand, on peut trouver un plongement

$\tilde{\varphi}_0 : D^{p+1} \rightarrow S^{n+k}$  qui vérifie :

- (1)  $\tilde{\varphi}_0 |_{\partial D^{p+1} = S^p}$  est la composition  $S^p \xrightarrow{\varphi_0} M^n \xrightarrow{f} S^{n+k}$
- (2)  $\tilde{\varphi}_0(D^{p+1})$  rencontre  $f(M)$  transversalement suivant  $\varphi_0(S^p)$  et n'a pas d'autre intersection avec  $f(M)$
- (3)  $\tilde{\varphi}_0(D^{p+1})$  est tangent le long de  $\varphi_0(S^p)$  au champ  $\rho_1 |_{\varphi_0(S^p)}$  (on peut supposer par exemple que  $\rho_1$  est un vecteur sortant du disque)

Remarquons que pour  $k$  grand, deux tels plongements sont isotopes à travers des plongements ayant ces propriétés :



Dans la figure ci-contre on a :  
 $p=0, n=1, k=2$ .

La restriction à  $\varphi_0(S^p)$  de la trivialisations  $(\rho_2, \dots, \rho_k)$  est alors un champ de  $(k-1)$ -repères dans le fibré trivial  $\nu(D^{p+1}; S^{n+k})|_{S^p}$  (\*), c'est-à-dire, en choisissant une trivialisations de  $\nu(D^{p+1}; S^{n+k})$ , une section du

(\*) La notation est abrégée : il s'agit du fibré normal du plongement

$\tilde{\varphi}_0 : D^{p+1} \rightarrow S^{n+k}$ , que l'on restreint à  $S^p$

fibré  $D^{p+1} \times V_{n+k-p-1, k-1} \rightarrow D^{p+1}$  au dessus  $\partial D^{p+1} = S^p$ , où  $V_{n+k-p-1, k-1}$  est la variété de Stiefel des  $(k-1)$ -repères orientés dans  $\mathbb{R}^{n+k-p-1}$ .

Cette section définit un élément  $\xi \in \pi_p(V_{n+k-p-1, k-1}) = \pi_p(SO/SO(n-p))$

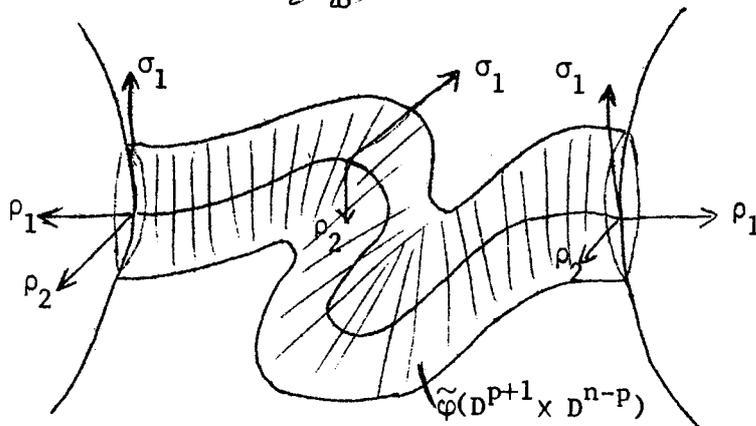
( $k$  est grand). La remarque suivant l'existence de  $\tilde{\varphi}_0$  montre que si  $k$  est assez grand,  $\xi$  ne dépend pas du choix de  $\tilde{\varphi}_0$ . Comme  $\xi$  ne dépend manifestement pas du choix de la trivialisation de  $\nu(D^{p+1}; S^{n+k})$ ,  $\xi$  est bien défini par la donnée  $(M, \rho, \varphi_0)$ .

Remarquons que, si on peut faire une chirurgie plongée sur  $\varphi_0$ , alors nécessairement  $\xi=0$ . En effet, la trivialisation  $\rho$  de  $\nu(M^n; S^{n+k})$  se prolonge en une trivialisation  $R$  de  $\nu(\omega(M, \varphi); S^{n+k} \times I)$ . Mais  $\omega(M, \varphi)$  est

homéomorphe à  $\frac{M \times I + D^{p+1} \times D^{n-p}}{\{\partial D^{p+1} \times D^{n-p} \ni (x, y) = \varphi(x, y) \in M \times \{1\}\}}$ , et donc  $\xi: S^p \rightarrow SO/SO(n-p)$

se prolonge en  $\tilde{\xi}: D^{p+1} \rightarrow SO/SO(n-p)$ .

Supposons maintenant que  $\xi=0$  : Alors la restriction à  $\varphi_0(S^p)$  du champ  $(\rho_2, \dots, \rho_k)$  se prolonge en un champ de repères au-dessus de  $\tilde{\varphi}_0(D^{p+1})$  tout entier pour fournir une trivialisation  $(\sigma_1, \dots, \sigma_{n-p}, \rho_2, \dots, \rho_k)$  de  $\nu(D^{p+1}; S^{n+k})$  dans laquelle on peut supposer que  $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-p}$ , restreints à  $\varphi_0(S^p)$ , engendrent  $\pi(M) / \varphi_0(S^p) \cong V(\varphi_0(S^p); M)$ .



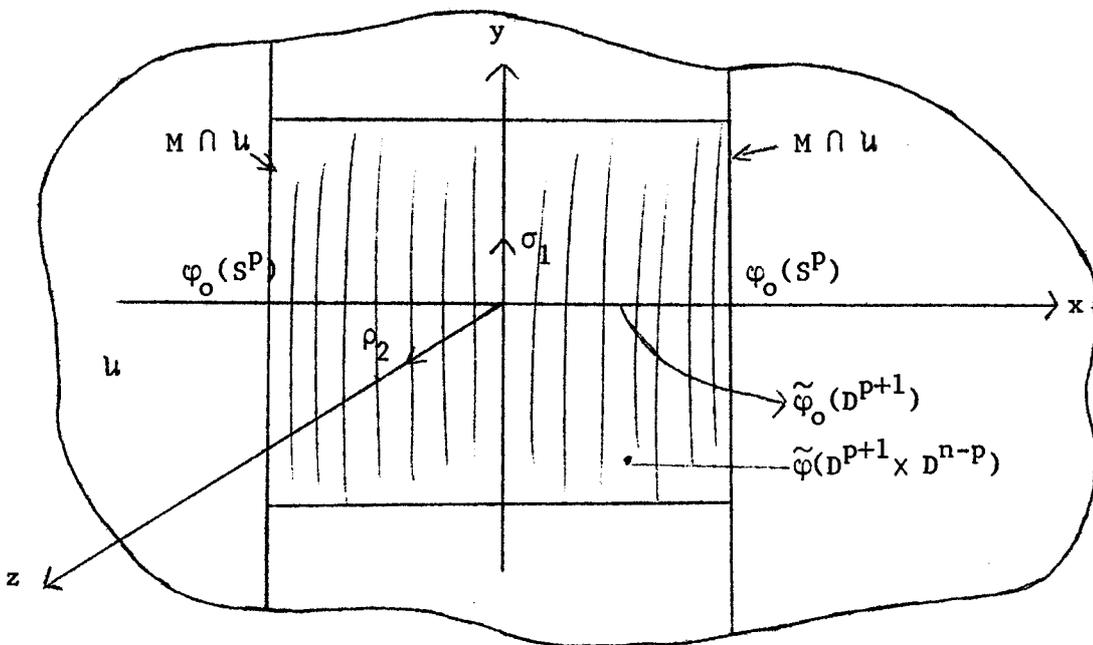
A l'aide d'une métrique riemannienne telle que  $M$  soit totalement géodésique près de  $\varphi_0(S^p)$ , on en déduit (utiliser l'exponentielle sur  $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-p}$ ) un plongement  $\tilde{\varphi} : D^{p+1} \times D^{n-p} \rightarrow S^{n+k}$  tel que  $\tilde{\varphi}(D^{p+1} \times D^{n-p}) \cap M$  soit l'image d'un plongement  $\varphi : S^p \times D^{n-p} \rightarrow M$  prolongeant  $\varphi_0$  (en particulier,  $\nu(S^p; M)$  est trivial).

On peut alors décrire explicitement un plongement de  $\omega(M, \varphi)$  dans  $S^{n+k} \times I$  et une trivialisat[i]on de son fibré normal prolongeant  $(\rho_1, \dots, \rho_k)$  : On prend dans  $S^{n+k}$  le système de coordonnées suivant, défini sur un voisinage  $U$  de  $\tilde{\varphi}_0(D^{p+1})$  :

$$(x_1, \dots, x_{p+1}, y_1, \dots, y_{n-p}, z_2, \dots, z_k) = (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) \quad \text{tel que soient}$$

vérifiées :

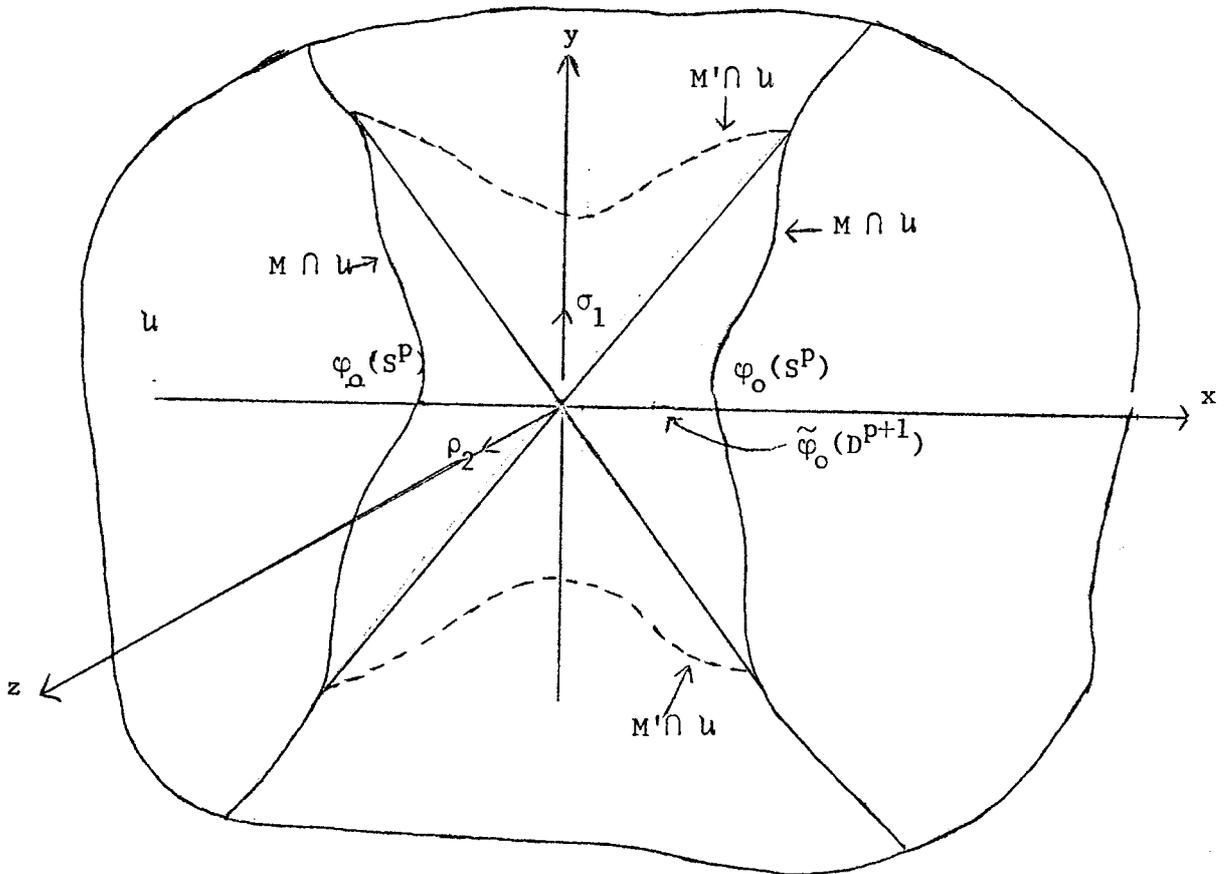
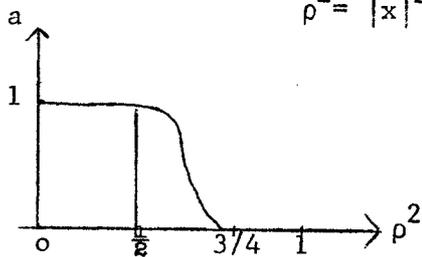
- (i)  $\tilde{\varphi}(D^{p+1} \times D^{n-p}) \subset U$  correspond à  $|\vec{x}| \leq 1, |\vec{y}| \leq 1, \vec{z} = 0$
- (ii)  $U \cap M$  correspond à  $|\vec{x}| = 1, \vec{z} = 0$



L'identification locale à  $\mathbb{R}^{p+1} \times \mathbb{R}^{n-p} \times \mathbb{R}^{k-1}$  est obtenue au moyen de l'application exponentielle grâce aux trivialisations  $(\sigma_1, \dots, \sigma_{n-p})$  pour  $\mathbb{R}^{n-p}$ , et  $(\rho_2, \dots, \rho_k)$  pour  $\mathbb{R}^{k-1}$ . Afin de n'effectuer que des modifications localisées dans  $u$ , changeons de système de coordonnées par un automorphisme de  $\mathbb{R}^{n+k}$  de façon que :

(i)  $\tilde{\varphi}_0(D^{p+1})$  corresponde à  $|\vec{x}| \leq 1, \vec{y}=0, \vec{z}=0$

(ii)  $M \cap u$  corresponde à  $-|\vec{x}|^2 + |\vec{y}|^2 + a(\rho^2) = 0, \vec{z}=0$ , où  $\rho^2 = |\vec{x}|^2 + |\vec{y}|^2$ , et où  $a$  est une fonction  $C^\infty$  de graphe



On définit alors  $W \subset S^{n+k} \times I$  par :

$$(1) \quad W - U \times I = (M - U) \times I$$

(2)  $W \cap (U \times I)$  est donné par les équations :

$$\begin{cases} \vec{z} = 0 \\ -|\vec{x}|^2 + |\vec{y}|^2 + (1-2t) a(\rho^2) = 0 \quad (t \in I) \end{cases}$$

En particulier  $M' - U = M - U$ , et dans  $U \subset S^{n+k} \times \{1\}$ ,

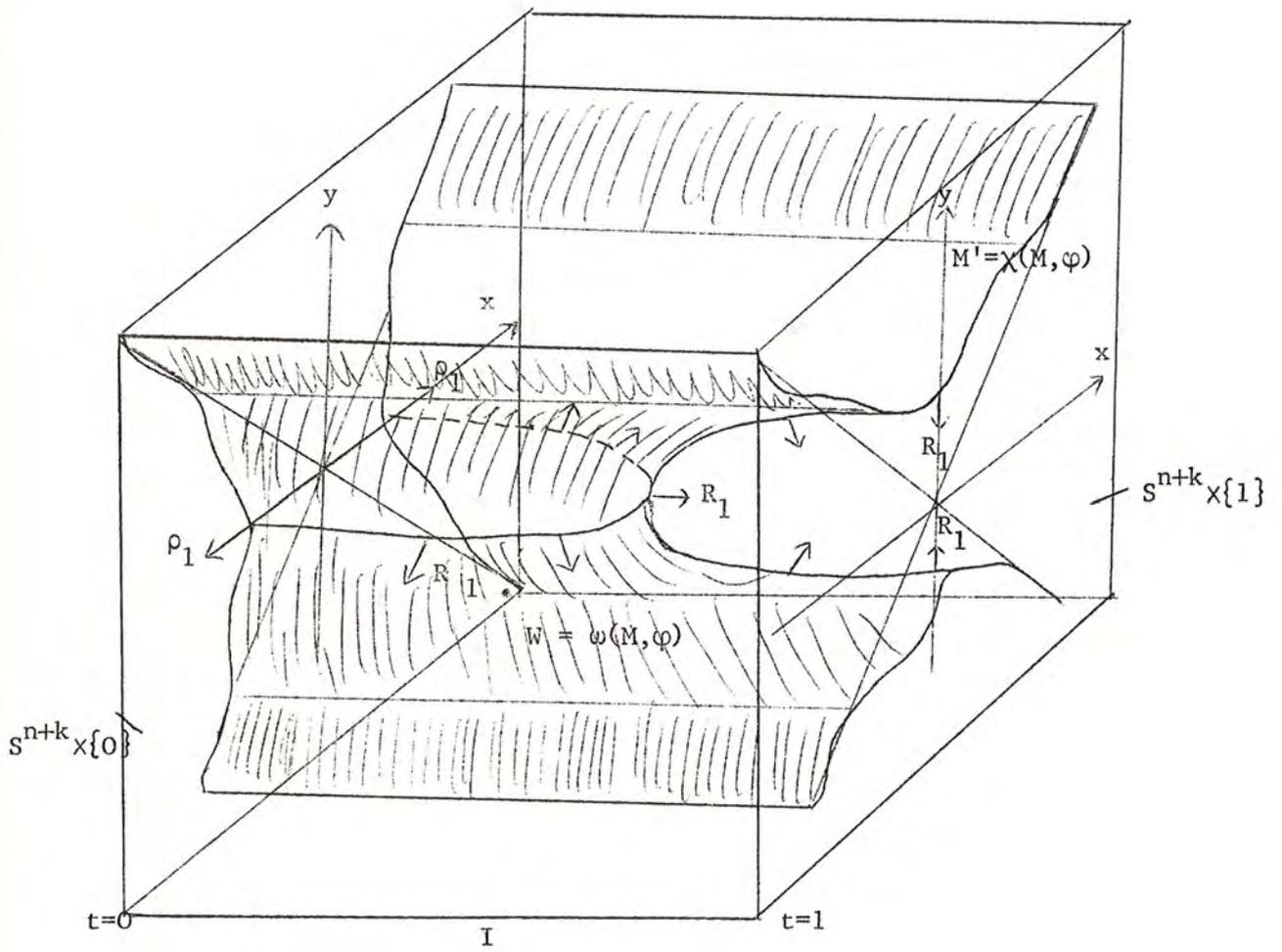
$$M' \text{ est donné par les équations } \begin{cases} \vec{z} = 0 \\ -|\vec{x}|^2 + |\vec{y}|^2 - a(\rho^2) = 0 \end{cases}$$

Il est immédiat que  $W = \omega(M, \varphi)$  et  $M' = \chi(M, \varphi)$ .

Il reste à voir que  $\rho$  se prolonge en une trivialisat ion  $R$  de  $\nu(W; S^{n+k} \times I)$ ; C'est bien évident en dehors de  $U \times I$  puisqu'alors  $W$  n'est autre que  $M \times I$ ; dans  $U$ , on remarque que dans le sous-espace  $\vec{z} = 0$ ,  $W$  est une hypersurface, et on prend  $R_i = \frac{\partial}{\partial z_i}$  ( $i=2, \dots, k$ ),  $R_1 = \text{Gradient}(-|\vec{x}|^2 + |\vec{y}|^2 + (1-2t) a(\rho^2))$ . Il est évident que ce champ prolonge  $(\rho_1, \dots, \rho_k)$

cqfd.

Dans la figure ci-dessous,  $p = 0$ ,  $n = 1$ ,  $k = 1$  (on a supprimé les coordonnées  $\vec{z}$ , puisque tout se passe dans  $\vec{z} = 0$ )



Puisque  $\pi_p(SO/SO(n-p)) = 0$  pour  $p < n-p$ , on peut toujours faire la chirurgie plongée en-dessous de la dimension moitié ( $p < n-p$ ) ; ceci démontre le théorème 4.4.

Il reste à montrer que  $\partial(\xi) = [\nu]$  pour  $p = n-p$  ; ceci découle du

Lemme 5.6 : Soit  $\partial$  la flèche bord de  $\pi_p(SO(p+\ell)/SO(p))$  dans  $\pi_{p-1}(SO(p))$ . Si on regarde une application  $f : S^p \rightarrow SO(p+\ell)/SO(p)$  comme un champ de  $\ell$ -repères sur  $S^p$  dans  $\mathbb{R}^{p+\ell}$ , alors  $\partial[f]$  classifie le fibré sur  $S^p$  orthogonal à ce champ de repères.  $\square$

Démonstration :

- (1) la flèche  $\pi_p(SO(p+1)/SO(p)) \rightarrow \pi_p(SO(p+\ell)/SO(p))$  étant surjective, on peut se borner au cas  $\ell = 1$ .
- (2) Si  $f$  est l'identité de  $S^p$  dans  $S^p = SO(p+1)/SO(p)$ ,  $\partial(\text{identité}) = \tau(S^p)$  (Steenrod [1] page 96 et suivantes), et  $f = \text{identité}$  définit un champ normal.
- (3) Cas général :  $f$  est  $n$  fois l'identité ( $[f] = n \in \pi_p(S^p)$ ). On voit facilement que  $\partial(f) = n \partial(1) = n \tau(S^p) = f^* \tau(S^p)$ . cqfd

La proposition qui suit montre, qu'en général, la non-trivialité du fibré normal  $\nu$  de  $\varphi_0$  est la seule obstruction à la chirurgie plongée sur  $\varphi_0$  :

Proposition 5.7 : Soit  $\partial : \pi_p(SO/SO(p)) \rightarrow \pi_{p-1}(SO(p))$  :

- (1) si  $p \neq 1,3,7$  la flèche  $\partial$  est injective.
- (2) si  $p = 1,3,7$  on a  $\partial : \mathbb{Z}_2 \rightarrow 0$   $\square$

En particulier, si  $p \neq 1,3,7$ ,  $\xi$  ne dépend pas de la trivilisation  $(\rho_1, \dots, \rho_k)$  choisie pour  $\nu(M^n; S^{n+k})$ . Si  $p = 1,3,7$ ,  $\nu$  est toujours trivial, mais  $\xi$  dépend à priori de  $\rho$  et peut-être non nul.

Démonstration de la proposition 5.7 : Nous voulons démontrer que pour  $p \neq 1, 3, 7$ ,  $\partial$  est injective, ou encore  $\pi_p(SO(p)) \xrightarrow{\cong} \pi_p(SO(p+2)) = \pi_p(SO)$  est surjective.

On considère le diagramme :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & \pi_{p+1}(S^{p+1}) = \mathbb{Z} & & & \\
 & & & \downarrow v & \searrow t & & \neq 0 \text{ si } p \neq 1, 3, 7 \\
 \pi_{p+1}(S^p) & \rightarrow & \pi_p(SO(p)) & \rightarrow & \pi_p(SO(p+1)) & \xrightarrow{u} & \pi_p(S^p) \xrightarrow{\delta} \pi_{p-1}(SO(p)) \\
 & & \searrow s & & \downarrow & & 1 \longrightarrow [\tau(S^p)] \\
 & & & & \pi_p(SO(p+2)) & & \\
 & & & & \downarrow & & \\
 & & & & \pi_p(S^{p+1}) = 0 & & 
 \end{array}$$

1<sup>er</sup> cas :  $p$  est pair :

Nous allons montrer que  $\delta : \pi_p(S^p) \rightarrow \pi_{p-1}(SO(p))$  est injective, ce qui est manifestement suffisant.

Soit  $\chi : \pi_{p-1}(SO(p)) \rightarrow H^p(S^p) = \mathbb{Z}$  l'application "classe d'Euler".

Si on identifie  $\pi_p(S^p)$  avec  $\mathbb{Z}$ ,  $\chi \circ \delta$  devient, pour  $p$  pair, la multiplication par 2 de  $\mathbb{Z}$  dans  $\mathbb{Z}$ ; en effet :

$$\chi \circ \delta(n) = \chi([\tau(S^p)]) = 2n \quad \text{car} \quad \chi[\tau(S^p)] = 2. \quad \text{Donc } \delta \text{ est injective.}$$

2<sup>ème</sup> cas :  $p$  est impair :

Il suffit de montrer que  $t$  est surjective sur l'image de  $u$  (où  $t=uv$ ).

Mais  $t$  est la multiplication par 2, en effet :  $t(1)$  est l'image de  $[\tau(S^{p+1})]$  par la flèche  $u$ , c'est-à-dire l'obstruction à trouver une section du fibré en sphères associé à  $\tau(S^{p+1})$ ; donc  $t(1)$  est la classe d'Euler de  $\tau(S^{p+1})$ , c'est-à-dire 2 puisque  $(p+1)$  est pair. Il reste

donc à montrer que l'image de  $u$ , c'est-à-dire le noyau de  $\delta$ , est contenue dans  $2\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z} = \pi_p(S^p)$  : cela vient de ce que pour  $p \neq 1, 3, 7$ , on a  $[\tau(S^p)] \neq 0$ , et dans tous les cas  $\text{Im } u \ni 2$ . cqfd.

Remarque 5.8 : Si  $p \leq \frac{n}{2}$ , la classe d'homotopie régulière d'un plongement  $\varphi_0: S^p \rightarrow M$  représentant  $\lambda \in \pi_p(M^n)$  est bien définie, ce qui montre que pour  $p \neq 1, 3, 7$ ,  $p \leq \frac{n}{2}$ ,  $\xi(\varphi_0)$  ne dépend que de  $\lambda$  et peut-être noté  $\xi(\lambda)$ .

Appendice (Méthode de Kervaire-Milnor) :

On part de  $(M, \rho, \varphi)$ , où  $\varphi$  est un plongement de  $S^p \times D^{n-p} \rightarrow M$ , et on essaye de modifier  $\varphi$  sans changer  $\varphi|_{S^p \times 0}$  de façon à pouvoir prolonger à  $W = \omega(M, \varphi)$  la trivialisatation  $\rho$ . L'obstruction à ce prolongement est un élément  $\gamma(\varphi) \in H^{p+1}(W, M; \pi_p(SO)) = \pi_p(SO)$ . On modifie  $\varphi$  par un élément  $[\alpha] \in \pi_p(SO(n-p))$ , représenté par  $\alpha: S^p \rightarrow SO(n-p)$ , en posant :  $\varphi_\alpha(u, v) = \varphi(u, \alpha(u).v)$  pour  $u \in S^p$ ,  $v \in D^{n-p}$ . On montre que la nouvelle obstruction est  $\gamma(\varphi_\alpha) = \gamma(\varphi) + s_*(\alpha)$ , où  $s_*: \pi_p(SO(n-p)) \rightarrow \pi_p(SO)$  est la stabilisation.

On en déduit que si  $s_*$  est surjective, on peut trouver un  $\alpha$  tel que  $\gamma(\varphi_\alpha) = 0$ , c'est-à-dire tel que  $\rho$  se prolonge à  $\omega(M, \varphi_\alpha)$ . Mais la suite exacte ci-dessous montre que la surjectivité de  $s_*$  équivaut à l'injectivité de  $\partial: \pi_p(SO(n-p)) \xrightarrow{s_*} \pi_p(SO) \rightarrow \pi_p(SO/SO(n-p)) \xrightarrow{\partial} \pi_{p-1}(SO(n-p)$

$$\xi \longrightarrow [v]$$

6 - Chirurgie en dimension moitié :

Rappelons que le théorème 4.4 nous permet de représenter tout élément  $[\Sigma^{n-1}] \quad 0 \in \mathbb{O}_{n-1}(\partial\pi)$  ( $n \geq 2k$ ) comme le bord d'une variété  $M^n$   $s$ -parallélisable et  $(k-1)$  - connexe.

1<sup>er</sup> cas :  $n = 2k+1$  - Nous ne ferons que citer le résultat (difficile !) de Kervaire-Milnor, en remarquant que pour montrer  $[\Sigma^{2k}] = 0 \in \mathbb{O}_{2k}(\partial\pi)$ , il suffit de supprimer par chirurgie le groupe  $\pi_k(M) = H_k(M; \mathbb{Z})$ . (On utilise la dualité de Poincaré et le lemme 1.5). Disons simplement que, d'après la proposition 5.5, il n'y a pas d'obstruction à la chirurgie plongée sur un élément de  $\pi_k(M)$  (qui, d'après Whitney, est toujours représenté par un plongement  $\varphi_0 : S^k \rightarrow M$ ). Toute la difficulté vient de ce qu'une chirurgie ne simplifie pas forcément l'homotopie de  $M$  en dimension  $k$  (le lemme 4.1 est bien entendu inapplicable, puisque  $p = q = k$ ). Le résultat remarquable est qu'en fait, on peut toujours construire une variété contractile  $M'$  ayant pour bord  $\Sigma$ , donc :

Théorème 6.1 :  $\mathbb{O}_{2k}(\partial\pi) = \{0\}$  pour tout  $k$ . □

2<sup>ème</sup> cas :  $n = 2k$  - Nous étudierons la situation en détail, car ce sont les éléments de  $\mathbb{O}_{2k-1}(\partial\pi)$  que l'on obtient à partir des singularités isolées d'hypersurfaces algébriques complexes.

Kervaire-Milnor démontrent le théorème suivant :

Théorème 6.2

Si  $k \neq 2$ ,  $\mathbb{O}_{2k-1}(\partial\pi)$  est fini cyclique - Plus précisément :

- (1) Si  $k$  est impair,  $\mathbb{O}_{2k-1}(\partial\pi)$  a au plus deux éléments, et est  $\{0\}$  si  $k = 1, 3, 7$  (ce ne sont pas les seules valeurs de  $k$  pour lesquelles ce groupe est  $\{0\}$ ).

(2) Si  $k$  est pair,  $k = 2m$ ,  $\pi_{4m-1}(\partial\pi)$  est d'ordre

$$2^{2m-4} (2^{2m-1} - 1) B_m j_m a_m / m, \text{ où}$$

$B_m = m^{\text{ème}}$  nombre de Bernouille

$a_m = 1$  ou  $2$  suivant que  $m$  est pair ou impair

$j_m =$  ordre du groupe cyclique  $J(\pi_{4m-1}(SO)) \subset \pi_{4m-1}$  (où  $J$  est le

$$J\text{-homomorphisme } J : \pi_{4m-1}(SO(N)) \rightarrow \pi_{4m-1+N}(S^N) = \pi_{4m-1}$$

"

□

Commençons par quelques remarques élémentaires : soit  $M^{2k}$  une variété  $(k-1)$ -connexe bordée par une  $(2k-1)$ -sphère homotopique  $\Sigma^{2k-1} = \partial M$ .

Alors  $\pi_k(M) = H_k(M)$  est un groupe abélien libre (de type fini car  $M$  est compacte). On a en effet un diagramme commutatif d'isomorphismes (il suffit bien entendu que  $H_{k-1}(\Sigma) = H_k(\Sigma) = \{0\}$ ) :

$$\begin{array}{ccc} H_k(M) & \xrightarrow{\cong} & H_k(M, \partial M) \\ \uparrow \cong \cap [M, \partial M] & & \uparrow \cong \cap [M, \partial M] \\ H^k(M, \partial M) & \xrightarrow{\cong} & H^k(M) \end{array}$$

D'après le théorème des coefficients universels (Spanier [1] p.243),

$$H^k(M) = \text{Hom}(H_k(M); \mathbb{Z}) \oplus \text{Ext}(H_{k-1}(M); \mathbb{Z})$$

Donc  $H_k(M) \cong \text{Hom}(H_k(M); \mathbb{Z})$ , ce qui montre que  $H_k(M)$  est sans torsion, d'où la conclusion.

La dualité de Poincaré fournit une forme bilinéaire (dite "forme d'intersection" car géométriquement elle correspond à l'intersection des cycles) que l'on note par un point :

$$H_k(M) \otimes H_k(M) \longrightarrow \mathbb{Z} \text{ définie par } x \cdot y = \langle x \cup i^* y', [M, \partial M] \rangle \text{ où}$$

$x' \in H^k(M, \partial M)$  ,  $y' \in H^k(M, \partial M)$  correspondent à  $x, y$  par dualité de Poincaré (i.e  $x = x' \cap [M, \partial M]$  ,  $y = y' \cap [M, \partial M]$  , où  $[M, \partial M]$  = classe fondamentale engendrant  $H_{2k}(M, \partial M) = \mathbb{Z}$ ) , où  $i^*$  est induit en cohomologie par l'inclusion  $i : M \rightarrow (M, \partial M)$  , et où  $\cup$  est le cup-produit  $H^k(M, \partial M) \otimes H^k(M) \xrightarrow{\cup} H^{2k}(M, \partial M)$  . Cette forme d'intersection est non-singulière (i.e a un déterminant égal à  $\pm 1$ ) puisqu'elle induit l'isomorphisme de  $H_k(M)$  sur  $\text{Hom}(H_k(M); \mathbb{Z})$  . Nous pouvons énoncer maintenant le lemme qui sert de point de départ à la démonstration du théorème 6.2 (un lemme analogue est utilisé pour le théorème 6.1).

Lemme 6.3 Soit  $M^{2k}$  une variété  $(k-1)$ -connexe de dimension  $2k$  ( $k \geq 3$ ) .

On suppose que  $H_k(M)$  est abélien libre et possède une base

$\{\lambda_1, \dots, \lambda_r, \mu_1, \dots, \mu_r\}$  telle que :

(1) Pour tout  $i, j$  on a :  $\lambda_i \cdot \lambda_j = 0$  ,  $\lambda_i \cdot \mu_j = \delta_{ij}$  (où  $\delta_{ij}$  est le symbole de Kronecker) .

(2) Toute sphère plongée dans  $M$  représentant une classe d'homologie dans le sous-groupe  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_r\}$  a un fibré normal trivial.

Alors on peut supprimer  $H_k(M)$  par une suite finie de Chirurgies.  $\square$

Démonstration Pour  $k \geq 3$  , on sait que tout élément de  $\pi_k(M^{2k})$  est représenté par un plongement  $\varphi_0 : S^k \rightarrow M$  , dès que  $M$  est simplement connexe. (Whitney [1], Haefliger [1], Milnor [5]). Supposons que  $\varphi_0$  représente le générateur  $\lambda_r$  : l'hypothèse (2) permet de prolonger  $\varphi_0$  en un plongement  $\varphi : S^k \times D^k \rightarrow M$  . Soit  $M' = \chi(M, \varphi)$  le résultat de la chirurgie sur  $\varphi$  , et soit  $M_0 = M - \text{int } \varphi(S^k \times D^k) = M' - \text{int } \psi(D^{k+1} \times S^{k-1})$  , où  $\psi : S^{k-1} \times D^{k+1} \rightarrow M'$  est relatif à la chirurgie inverse (i.e  $M = \chi(M', \psi)$ ) .

Les suites relatives d'homologie des paires  $(M, M_0)$  et  $(M', M_0)$  donnent le diagramme suivant, compte-tenu de ce que l'excision permet de remplacer  $(M, M_0)$  par  $(S^k \times D^k, S^k \times \partial D^k)$  et  $(M', M_0)$  par  $(S^{k-1} \times D^{k+1}, S^{k-1} \times \partial D^{k+1})$ , et d'appliquer l'isomorphisme de Thom à ces fibrés triviaux :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \mathbb{Z} & & & & \\
 & & \downarrow & \searrow & & & \\
 0 \rightarrow & H_k(M_0) & \rightarrow & H_k(M) & \rightarrow & \mathbb{Z} & \rightarrow H_{k-1}(M_0) \rightarrow 0 \\
 & \downarrow & & & & & \\
 & H_k(M') & & & & & \\
 & \downarrow & & & & & \\
 & 0 & & & & & 
 \end{array}$$

(1) La flèche  $H_k(M) \rightarrow \mathbb{Z}$  est définie par  $\alpha \rightarrow \alpha \cdot \lambda_r$  :

Il suffit de voir qu'un générateur de  $H_k(M, M_0)$  a une intersection égale à  $\pm 1$  avec le cycle  $\varphi(S^k \times 0)$  représentant  $\lambda_r$ , ce qui est évident (prendre par exemple  $\varphi(x \times D^k)$ ). On en déduit que la flèche  $H_k(M) \rightarrow \mathbb{Z}$  est surjective, puisque  $\mu_r \rightarrow \mu_r \cdot \lambda_r = \pm 1$ , et donc que  $H_{k-1}(M_0) = 0$ . Ceci montre que  $M'$  est  $(k-1)$ -connexe.

(2) La flèche diagonale  $\mathbb{Z} \rightarrow H_k(M)$  envoie  $1$  sur  $\lambda_r$  :

En effet, un générateur de  $H_{k+1}(M', M_0)$  est  $\psi(y \times D^{k+1})$ , et a pour bord  $\varphi(S^k \times y)$  (où  $y \in \partial D^k$ ) qui représente  $\lambda_r$ .

(3) On déduit de (1) que  $H_k(M_0)$  est isomorphe au sous-groupe de  $H_k(M)$  engendré par  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_r, \mu_1, \dots, \mu_{r-1}\}$ . Mais  $H_k(M')$  est un quotient de  $H_k(M_0)$  et a, d'après (2), une base  $\{\lambda'_1, \dots, \lambda'_{r-1}, \mu'_1, \dots, \mu'_{r-1}\}$  où chaque  $\lambda'_i$  (resp.  $\mu'_j$ ) est représenté par une sphère plongée dans  $M_0$ , qui dans  $M$  représente la classe  $\lambda_i$  (resp.  $\mu_j$ ) (La possibilité de représenter les  $\lambda'_i, \mu'_j$  par des sphères plongées dans  $M_0 \subset M'$  provient de la possibilité

disjoindre une  $k$ -sphère de  $\psi(S^{k-1} \times 0)$ .

On en déduit que la base  $\{\lambda'_1, \dots, \lambda'_{r-1}, \mu'_1, \dots, \mu'_{r-1}\}$  de  $H_k(M')$  vérifie les conditions (1) et (2) du lemme. Pour la condition (2), on remarque qu'une sphère plongée représentant une classe  $\sum_{i=1}^{r-1} n_i \lambda'_i$  peut-être poussée dans  $M_0$ , et représente alors une classe de  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_r\} \subset H_k(M)$ , ce qui montre que son fibré normal est trivial.

En itérant  $r$  fois cette construction on démontre le lemme. Le lecteur aura une bonne intuition de ce qui se passe en considérant le cas où  $M = T^2$  : une seule chirurgie sur un des générateurs de  $H_1(M)$  suffit alors à rendre  $M$  1-connexe (on obtient  $S^2$ ).

Remarque 6.4 Si  $k \neq 1, 3, 7$ , on peut d'après la proposition 5.5. ne faire que des chirurgies plongées, mais cela n'est pas nécessaire ici.

7 - Etude des groupes  $\oplus_{4m-1}(\partial\pi)$  ( $m \neq 1$ ) :

Lorsque  $k = 2m$  , la forme d'intersection est symétrique puisqu'il en est ainsi du cup-produit.

Pour appliquer le lemme 6.3 , il faut vérifier les conditions (1) et (2). Le lemme suivant montre que lorsque  $k = 2m$  , (2) est une conséquence de (1) :

Lemme 7.1 Soit  $M^{2k}$  une variété s-parallélisable,  $k = 2m$  . Soit  $\varphi_0 : S^k \rightarrow M$  un plongement représentant  $\lambda \in H_k(M)$  . Alors, si  $\nu$  désigne le fibré normal de  $\varphi_0$  , les deux conditions suivantes sont équivalentes :

(1)  $\lambda \cdot \lambda = 0$

(2)  $\nu$  est trivial. □

Démonstration Montrons tout d'abord que

$\lambda \cdot \lambda = \langle \chi(\nu) , [S^k] \rangle$  où  $\chi(\nu) \in H^k(S^k)$  est la classe d'Euler de  $\nu$  . Ceci découle facilement de la définition de la forme d'intersection en remarquant que  $\chi(\nu)$  n'est autre que la restriction à  $S^k$  de la classe de Thom  $u \in H^k(T, T_0)$  où  $\mathbb{F}$  est un voisinage tubulaire de  $\varphi_0(S^k)$  dans  $M$  , et où  $T_0 = T$  - section nulle (Milnor [6]) . Plus intuitivement, la nullité de  $\chi(\nu)$  équivaut à l'existence d'une section de  $\nu$  partout non nulle, c'est-à-dire à la possibilité de déplacer  $\varphi_0$  en  $\varphi_1$  par isotopie de façon que  $\varphi_0(S^k) \cap \varphi_1(S^k) = \emptyset$  , c'est-à-dire  $\lambda \cdot \lambda = 0$  .

Montrons maintenant que la nullité de  $\chi(\nu)$  équivaut à la trivialité de  $\nu$  .  $M$  étant s-parallélisable, on voit facilement que  $\nu$  est stablement trivial, et donc que  $\nu \oplus \mathbb{C}$  est trivial (à cause des dimensions, voir lemme 5.2) :

Dans la suite exacte :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & & & [\nu] \longrightarrow [\nu + \epsilon] = 0 \\
 & & & & & & \\
 \pi_k(S^k) & \xrightarrow{\delta} & \pi_{k-1}(SO(k)) & \rightarrow & \pi_{k-1}(SO(k+1)) & & \\
 \parallel & & \downarrow \chi & & & & \\
 \mathbb{Z} & & \mathbb{Z} & & & & 
 \end{array}$$

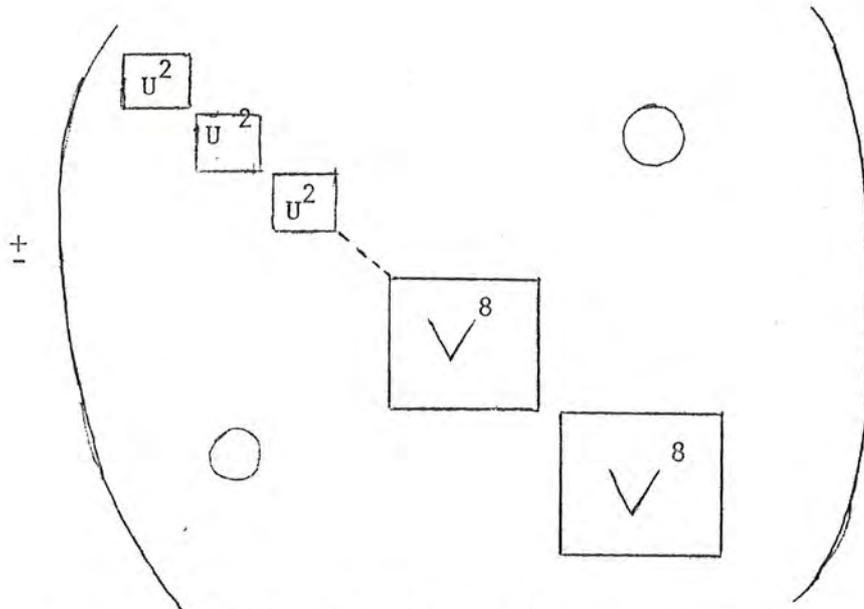
nous avons vu que si  $k$  est pair,  $\chi \circ \delta$  est la multiplication par 2, et est donc injective. (Voir dém. de la proposition 5.7, 1<sup>er</sup> cas) ; Puisque  $\nu \oplus \epsilon$  est trivial,  $\nu$  s'écrit  $\delta(\alpha)$ , donc  $\chi(\nu) = \chi \circ \delta(\alpha) = 2\alpha$  d'où la conclusion. cqfd

Remarque 7.2. On a démontré en même temps que lorsque  $k = 2m$ ,  $\lambda \cdot \lambda$  est toujours pair ( $= 2\alpha$ ). Le théorème suivant nous donne la structure de la forme d'intersection (Séminaire Cartan [1] exposé de J.P. Serre) :

Théorème 7.3. Soit  $q : \mathbb{Z}^t \otimes \mathbb{Z}^t \rightarrow \mathbb{Z}$  une forme bilinéaire symétrique de déterminant  $\pm 1$ . On suppose que  $q$  est indéfinie<sup>(\*)</sup> et que la forme quadratique associée à  $q$  ne prend que des valeurs paires. Alors il existe une base de  $\mathbb{Z}^t$  dans laquelle la matrice de  $q$  est :

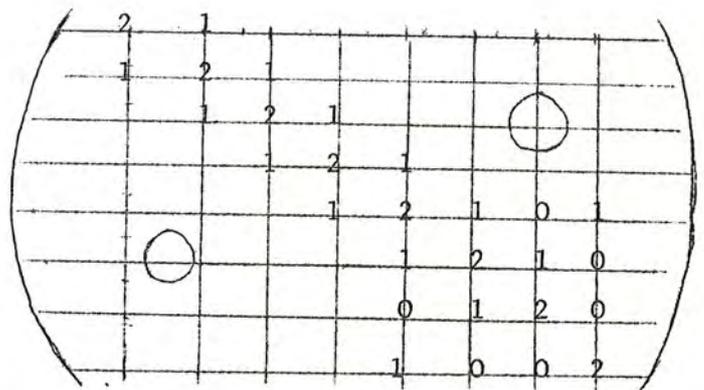
---

(\*) Cela signifie que  $q$  n'est ni définie positive, ni définie négative. On peut montrer (Milnor [5] lemme 8 page 52) que  $q$  est indéfinie si et seulement si  $\exists x \neq 0$ ,  $q(x,x) = 0$ .



$= \pm \text{diag } (U^2, \dots, U^2, V^8, \dots, V^8)$  , avec

$U^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  et  $V^8 =$



La signature (\*) de  $V^8$  est égale à 8 , et donc la signature  $\sigma(q)$  est divisible par 8 (\*\*). □

(\*) La signature  $\sigma(q)$  est la différence  $a-b$  , où  $a$ (resp. $b$ ) = nombre de signes + (resp.-) dans une diagonalisation sur  $\mathbb{Q}$  de  $q$  .

(\*\*) En fait,  $\sigma$  est divisible par 8 même si  $q$  est définie positive ou définie négative. (c'est surtout qu'elle soit de type II. cf Serre, Cours d'algèbre linéaire).

Nous admettrons ce théorème profond.

Dans le cas qui nous intéresse,  $q$  est la forme d'intersection de  $M$ , et on note  $\sigma(q) = \sigma(M)$ .

On en déduit aussitôt la :

Proposition 7.4. Soit  $M^{2k}$ ,  $k = 2m$ ,  $m > 1$ , une variété  $s$ -parallélisable  $(k-1)$ -connexe ayant pour bord une homologie-sphère. On peut tuer par un nombre fini de chirurgies le groupe  $H_k(M)$  si et seulement si la signature  $\sigma(M)$  est zéro.  $\square$

Démonstration Si  $\sigma(M) = 0$ , il est évident que la forme d'intersection est indéfinie ; il existe donc une base de  $H_k(M)$  dans laquelle elle soit représentée par la matrice  $\frac{1}{2} \text{diag} (U^2, \dots, U^2)$

Cette base vérifie alors les conditions du lemme 6.3 (on utilise ici le lemme 7.1).

Pour la réciproque, et pour que le critère  $\sigma(M) = 0$  soit utilisable, il reste à démontrer le :

Lemme 7.5. (Thom) La signature ne change pas lorsqu'on fait une opération de chirurgie.  $\square$

Il suffit, d'après la proposition 3.12, de montrer que la signature de deux variétés  $M^{4m}$  cobordantes est la même. En ajoutant un cône sur le bord (ce qui donne une homologie-variété ayant la même forme d'intersection) on se ramène au cas où  $\partial M = \emptyset$ . Il suffit alors de montrer que si  $M^{4m}$  est un bord,  $M = \partial W$ , alors  $\sigma(M) = 0$ , ce qui est fait dans (Hirzebruch [1] page 85) : on montre qu'alors le cône isotrope de la forme d'intersection contient un sous-espace de  $H_{2m}(M; \mathbb{R})$  de dimension moitié.

Rappelons qu'à partir de ce résultat, Hirzebruch démontre le théorème de l'indice (Hirzebruch [1] théorème 8.22 page 86) qui exprime  $\sigma(M)$  en fonction des classes de Pontryagin de  $M$ .

Compte tenu du théorème 4.4, de la proposition 7.4, et de la remarque 6.4, on en déduit la

Proposition 7.6. Soit  $M^{2k}$ ,  $k = 2m$ ,  $m > 1$ , une variété de dimension  $2k$   $s$ -parallélisable, bordée par une homologie-sphère. On peut rendre  $M$  contractile par une suite finie de chirurgies dans l'intérieur si et seulement si la signature  $\sigma(M)$  est zéro. Si  $M$  est trivialisée, toutes les chirurgies peuvent être choisies plongées.  $\square$

Bien entendu, une même variété  $\mathbb{R}^{2k-1}$  peut être bord de nombreuses variétés  $M^{2k}$   $s$ -parallélisables ayant des signatures différentes. On a en fait une connaissance précise de la situation grâce au théorème suivant dû à Kervaire-Milnor [2], dans lequel les notations ont été définies lors du théorème 6.2.

Théorème 7.7. Pour tout  $m$ , il existe une variété  $V_o^{4m}$  compacte, sans bord, presque parallélisable (\*) telle que  $\sigma(V_o^{4m}) = \sigma_m = 2^{2m-1}(2^{2m-1}-1)B_{m,j} a_m / m$

De plus, si  $V^{4m}$  est compacte, sans bord, presque parallélisable,  $\sigma(V^{4m})$  est un multiple de  $\sigma_m$ .  $\square$

La démonstration utilise le théorème de l'indice de Hirzebruch, que nous avons déjà mentionné.  $V^{4m}$  étant presque parallélisable, ses classes de Pontryagin  $p_1, \dots, p_{m-1}$  sont nulles, et le théorème de l'indice prend alors la forme

---

(\*) Cela signifie que  $V_o - \{x_o\}$  est parallélisable. Voir à ce sujet (Milnor [1]).

simple ci-dessous :

$$\sigma(V^{4m}) = 2^{2m}(2^{2m-1}-1) B_m p_m [M^{4m}] / (2m) !$$

où  $p_m \in H^{4m}(V; \mathbb{Z})$  est la seule classe de Pontryagin non nulle de  $V$ . Il reste à montrer que  $p_m[V^{4m}]$  est divisible par  $j_m a_m(2m-1)!$  si  $V^{4m}$  est presque parallélisable, et qu'il existe une variété  $V_o^{4m}$  réalisant l'égalité ; une des étapes de la démonstration consiste à relier  $p_m$  à l'obstruction  $\Theta(v, \rho)$  à prolonger une section  $\rho$  du fibré normal  $\nu(V^{4m}, S^{4m+N})$  au dessus de  $V - \{x_o\}$  en une section au-dessus de  $V$  toute entière ; on montre alors que  $J(\Theta(v, \rho)) = 0$  ce qui revient à dire que  $\Theta(v, \rho)$  est divisible par  $j_m$ . (Rappelons que  $\Theta(v, \rho) \in H^{4m}(V, V-x_o; \pi_{4m-1}(SO(N))) \cong \pi_{4m-1}(SO) \cong \mathbb{Z}$ ).

On en déduit la

Proposition 7.9. Pour chaque entier  $m$ , il existe une variété parallélisable  $M_o^{4m}$  dont le bord est la sphère standard  $S^{4m-1}$ , telle que  $\sigma(M_o^{4m}) = \sigma_m$ . Pour toute variété parallélisable  $M^{4m}$  dont le bord est la sphère standard  $S^{4m-1}$ ,  $\sigma(M^{4m})$  est un multiple de  $\sigma_m$ .  $\square$

Démonstration On enlève de  $V_o^{4m}$  l'intérieur d'un disque  $D^{4m}$  plongé, ce qui donne  $M_o^{4m}$ ,  $\partial M_o = S^{4m-1}$ ,  $\sigma(M_o) = \sigma(V_o)$ . cqfd

Nous pouvons alors énoncer le :

Théorème 7.10. Soient  $\Sigma_1, \Sigma_2$  deux  $(4m-1)$  sphères homotopiques,  $m > 1$ , bordant des variétés parallélisables, respectivement  $M_1, M_2$ . Alors  $\Sigma_1$  est h-cobordante à  $\Sigma_2$  si et seulement si  $\sigma(M_1) = \sigma(M_2) \pmod{\sigma_m}$ .  $\square$

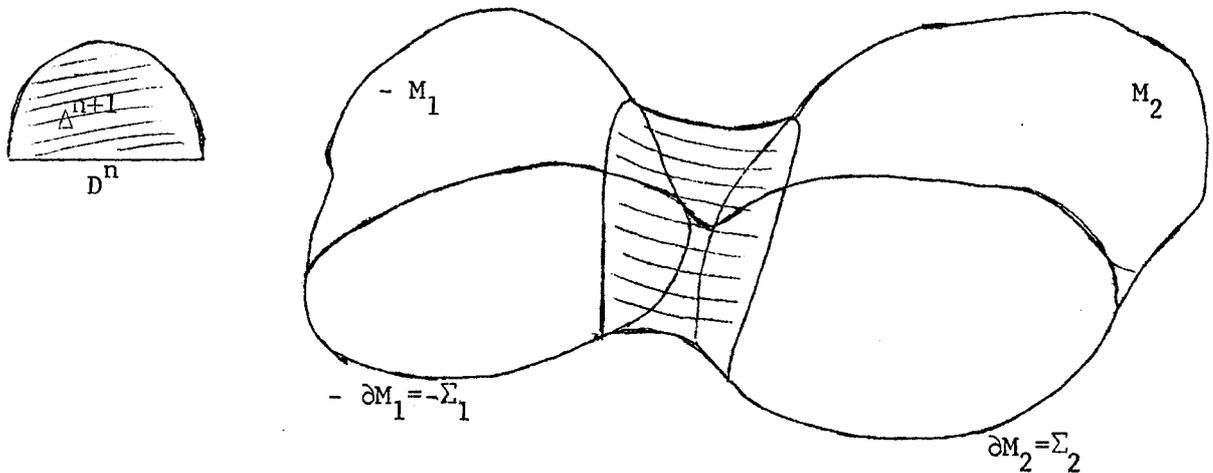
Démonstration Soit  $W$  un h-cobordisme entre  $(-\Sigma_1) \# (\Sigma_2)$  et  $S^{4m-1}$ . On peut construire une variété  $(-M_1, -\partial M_1) \# (M_2, \partial M_2)$  ayant pour bord  $(-\Sigma_1) \# (\Sigma_2)$  de la manière suivante (somme connexe le long du bord) :

$$(-M_1, \partial M_1) \# (M_2, \partial M_2) \stackrel{\text{déf.}}{=} \frac{[M_1 - i_1(0)] + [M_2 - i_2(0)]}{\left. \begin{array}{l} \{i_1(tu) = i_2(1-t)u\}, 0 < t < 1 \\ u \in S^n \cap \Delta^{n+1} \end{array} \right\}}$$

où :

$$i_1 \text{ (resp } i_2) : (\Delta^{n+1}, D^n) \rightarrow (M_1, \partial M_1) \text{ (resp. } (M_2, \partial M_2))$$

est un plongement conservant l'orientation,  $\Delta^{n+1}$  étant le demi-disque (voir figure) :



On recolle alors  $W$  et  $(-M_1, -\partial M_1) \# (M_2, \partial M_2)$  suivant leur bord commun pour obtenir une variété  $M$   $s$ -parallélisable bordée par  $S^{4m-1}$ . D'après la proposition 7.9, on a  $\sigma(M) = 0 \pmod{\sigma_m}$ . Mais on voit facilement que  $\sigma(M) = -\sigma(M_1) + \sigma(M_2)$ , d'où  $\sigma(M_1) = \sigma(M_2) \pmod{\sigma_m}$ . Réciproquement, supposons que  $\sigma(M_1) = \sigma(M_2) \pmod{\sigma_m}$ . Il existe  $M_0$  parallélisable bordée par  $S^{4m-1}$  telle que  $\sigma(M_1) = \sigma(M_2) + \sigma(M_0)$ . Soit  $(M, \partial M) = (-M_1, -\partial M_1) \# (M_2, \partial M_2) \# (M_0, \partial M_0)$ . Alors  $\partial M = (-\Sigma_1) \# (\Sigma_2) \# (S^{4m-1})$  est difféomorphe à  $(-\Sigma_1) \# (\Sigma_2)$ . Mais  $\sigma(M) = -\sigma(M_1) + \sigma(M_2) + \sigma(M_0) = 0$ ,

donc  $(-\Sigma_1) \# (\Sigma_2)$  est h-cobordante à  $S^{4m-1}$ , donc  $\Sigma_1$  est h-cobordante à  $\Sigma_2$ . cqfd

Nous voyons donc que  $\Theta_{4m-1}(\partial\pi)$  est, pour  $m > 1$ , un sous-groupe du groupe fini cyclique  $\mathbb{Z}_{\sigma_m}$ , et est donc fini cyclique. Plus précisément, on a le :

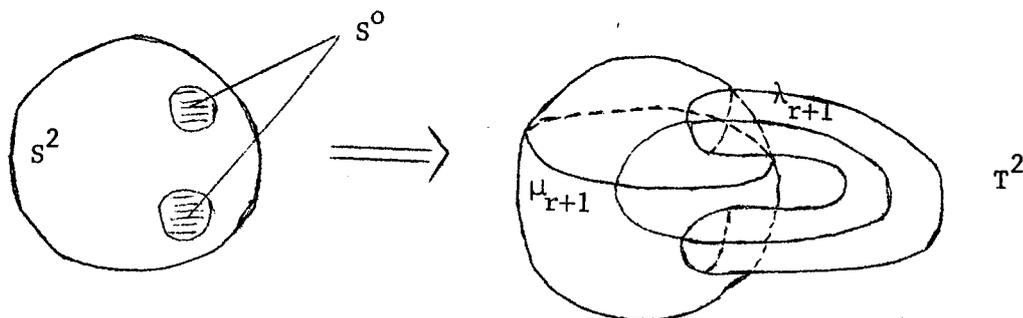
Théorème 7.11. Pour  $m > 1$ ,  $\Theta_{4m-1}(\partial\pi)$  est un groupe cyclique d'ordre  $\sigma_m/8$ .  $\square$

On montre d'abord que si une variété parallélisable  $M^{4m}$  borde une  $(4m-1)$  sphère homotopique,  $\sigma(M^{4m})$  est divisible par 8. Nous avons remarqué en énonçant le théorème 7.3. que même sans l'hypothèse "q est indéfinie," on avait  $\sigma(q)$  divisible par 8 (voir séminaire Cartan [1], exposé de J.P. Serre) A ce sujet on peut faire la remarque suivante :

Remarque 7.12. Lorsque  $\sigma \neq 0$ , la forme d'intersection n'a aucune raison d'être indéfinie, et le théorème 7.3 de classification ne s'applique pas pour déterminer sa structure. On peut cependant utiliser l'artifice qui consiste à rajouter à  $H_k(M^{2k})$  une paire  $(\lambda_{r+1}, \mu_{r+1})$  de générateurs qui puissent être supprimés par une chirurgie sur  $\lambda_{r+1}$ . On remplace alors la matrice A de la forme d'intersection par la matrice  $\text{diag}(A, U^2)$  qui est la matrice d'une forme indéfinie.

Pour cela, on fait la chirurgie sur une sphère  $S^{k-1}$  plongée dans  $M$ , qui représente  $0 \in \pi_{k-1}(M)$ .

Exemple  $M = S^2$ ,  $k = 1$ . On fait la chirurgie sur  $S^0$  et on obtient  $T^2$  (ici  $A = (0)$ ).



Il faut remarquer cependant que le théorème de classification 7.3 n'est pas nécessaire pour démontrer le théorème 7.11 : il suffit de savoir que, si  $\sigma = 0$ , il existe une base symplectique, que  $\sigma$  est divisible par 8, et de connaître la matrice  $V^8$ .

Il reste à montrer que l'application définie comme suit de  $\mathbb{R}_{4m-1}(\partial\pi)$  dans  $\mathbb{Z}_{\sigma_m/8}$  est un isomorphisme :

Si  $\Sigma$  est bordée par  $M$ , on associe à  $\Sigma$  l'entier  $\sigma(M)/8$  modulo  $\sigma_m/8$ . La bonne définition et l'injectivité découlent du théorème 7.10. La surjectivité découle de la

**Proposition 7.13. (Plombage)** Il existe une variété  $W_0^{4m}$   $(2m-1)$ -connexe parallélisable ayant pour bord une homologie-sphère (une sphère homotopique si  $m > 1$ ) et telle que  $\sigma(W_0) = 8$ .  $\square$

**Démonstration** Définissons ce que Milnor appelle le "plumbing" (Milnor [1]) :

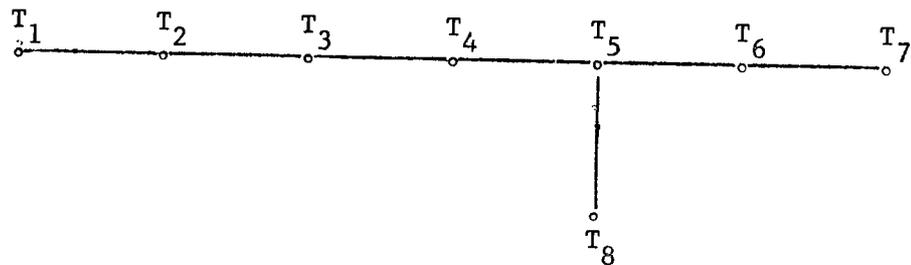
on considère un voisinage tubulaire  $T$  de la diagonale dans  $S^{2m} \times S^{2m}$  (par exemple l'espace total du fibré tangent en disques de  $S^{2m}$ ).  $T$  est une variété de dimension  $4m$  ayant le type d'homotopie de  $S^{2m}$ ; le nombre d'intersection du  $2m$ -cycle fondamental avec lui-même est égal à la caractéristique d'Euler de  $\tau(S^{2m})$ , c'est-à-dire 2.

Soit  $D_1^{2m} \subset S^{2m}$  un petit disque ; au-dessus de  $D_1^{2m}$ ,  $\tau(S^{2m})$  est trivial, et est donc difféomorphe à  $D_1^{2m} \times D_2^{2m}$ . Le plombage de deux exemplaires de  $T$ , notés  $T'$  et  $T''$ , (ou encore plombage suivant le diagramme . . . . .) consiste à recoller  $T'$  et  $T''$  par un difféomorphisme  $\varphi : D_1' \times D_2' \rightarrow D_1'' \times D_2''$  défini à l'aide de deux difféomorphismes  $h : D_1' \rightarrow D_2''$  et  $k : D_2' \rightarrow D_1''$ , par :  $\varphi(x', y') = (ky', hx')$ .

On plombe avec le signe + (resp. -) si  $h$  et  $k$  conservent (resp. inversent) l'orientation. On rend le résultat du plombage différentiable en arrondissant les angles, et on le note  $T' \square T''$ .

Considérons la matrice  $V^8$  définie dans l'énoncé du théorème 7.3, et notons  $V = (m_{ij})$  (en particulier pour tout  $i$ ,  $m_{ii} = 2$ ).

On plombe ensemble 8 copies  $T_1, \dots, T_8$  de  $T$ , en plombant  $T_i$  avec  $T_j$  en  $|m_{ij}|$  points avec le signe de  $m_{ij}$  (voir Browder [1]). Si on représente chaque  $T_i$  par un sommet d'un graphe, et si l'on met une arête entre  $T_i$  et  $T_j$  lorsqu'on les plombe, on obtient le diagramme de Dynkin du groupe de Lie exceptionnel  $E_8$  (voir aussi Séminaire Cartan [1] exposé de J.P. Serre)



Soit  $W_0$  la variété obtenue ainsi.  $W_0$  est connexe et simplement connexe (puisque'il en est ainsi du graphe) ainsi que son bord si  $m > 1$ . La proposition en découle facilement. cqfd

Remarque Dans (Milnor [1]) il faut faire une chirurgie sur  $W_0$ , car la matrice utilisée a un graphe non simplement connexe.

8 . Etude des groupes  $\Theta_{2k-1}(\partial\pi)$  ( $k$  impair)

Pour  $k$  impair, la forme d'intersection est une forme symplectique, puisque le cup-produit est antisymétrique. ( $\lambda.\lambda = 0$  ,  $\lambda.\mu = -\mu.\lambda$ )

Il existe donc toujours une base symplectique (Artin [1]) c'est-à-dire une base  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_r, \mu_1, \dots, \mu_r\}$  telle que  $\lambda_i.\lambda_j = \mu_i.\mu_j = 0$  ,  $\lambda_i.\mu_j = \delta_{ij}$

**[A]**  $k = 1, 3, 7$  Pour  $k = 1$  , tout se fait directement, et on a

$$\Theta_1(\partial\pi) = \{0\} .$$

Pour  $k = 3, 7$  ,  $\pi_{k-1}(SO(k)) = 0$  et le fibré normal  $\nu$  de  $S^k$  dans  $M^{2k}$  est toujours trivial, ce qui permet d'appliquer le lemme 6.3. On en déduit le :

Théorème 8.1  $\Theta_1(\partial\pi) = \Theta_5(\partial\pi) = \Theta_{13}(\partial\pi) = \{0\}$  .

**[B]**  $k \neq 1, 3, 7$

Le problème est ici de trouver une "bonne base symplectique" , c'est-à-dire une base  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_r, \mu_1, \dots, \mu_r\}$  symplectique, dans laquelle les plongements représentant les éléments du sous-groupe  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_r\}$  ont des fibrés normaux triviaux. La solution viendra d'une étude fine de la forme bilinéaire d'intersection (ou plutôt de la forme bilinéaire sur  $\mathbb{Z}_2$  qui s'en déduit). Précisément, nous allons exhiber une forme quadratique sur  $\mathbb{Z}_2$  ayant pour forme bilinéaire associée l'intersection modulo 2 ; et interprétable géométriquement :

D'après la proposition 5.7, la flèche

$$\partial : \pi_k(SO/SO(k)) = \mathbb{Z}_2 \rightarrow \pi_{k-1}(SO(k))$$

est un monomorphisme, ce qui montre qu'étant donné un plongement  $\varphi_0$  de  $S^k$  dans  $M$ , l'obstruction  $\xi$  à faire la chirurgie plongée sur  $\varphi_0$  ne dépend pas de la trivialisation de  $\nu(M^{2k}; S^{2k+1})$  choisie. D'autre part, d'après la remarque 5.8,  $\xi$  ne dépend que de la classe d'homotopie du plongement  $\varphi$  et définit donc une application  $\xi : H_k(M) \rightarrow \mathbb{Z}_2$  qui vérifie :  $\xi(x) = 0$  équivaut à la trivialité du fibré normal d'un plongement de  $S^k$  dans  $M$  qui représente  $x$ .

Proposition 8.2. On a l'identité :

$$\xi(x+y) = \xi(x) + \xi(y) + (x,y) \pmod{2} \quad \text{ou encore :}$$

$$\xi : H_k(M) \otimes \mathbb{Z}_2 \rightarrow \mathbb{Z}_2 \quad \text{est une forme quadratique sur } \mathbb{Z}_2$$

ayant pour forme bilinéaire associée l'intersection modulo 2.  $\square$

Démonstration Nous utiliserons une suite de lemmes de nature géométrique (comparer à la démonstration algébrique de Kervaire-Milnor) Cette démonstration provient d'un cours professé à Orsay en 1966-1967 par L. Siebenmann.

Lemme 8.3. Soit  $k$  impair,  $k \geq 3$ , et soit  $x \in \pi_k(M^{2k})$ . Il existe exactement deux classes (à homotopie régulière près) d'immersions de  $S^k$  dans  $M^{2k}$ , qui représentent  $x$ . (Il n'y a pas ici d'hypothèse sur  $M$ )  $\square$

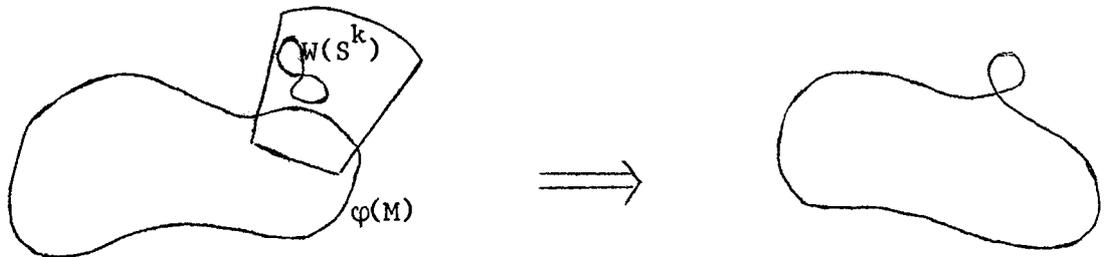
Démonstration D'après le théorème de classification des immersions (Hirsh [1], Smale [3]) les classes d'immersions correspondent aux classes d'homotopie de sections du fibré des monomorphismes fibrés de  $\tau(S^k)$  dans  $f^*(\tau M^{2k})$ , où  $f : S^k \rightarrow M^{2k}$  est une application quelconque dans la classe d'homotopie de  $x$  (et où  $\tau$  désigne le fibré tangent); les fibres sont isomorphes à la variété de Stiefel  $V_{2k,k}$  des  $k$ -repères orientés dans  $\mathbb{R}^{2k}$ . Or pour

$i < k$  ,  $\pi_i(V_{2k,k}) = 0$  , et pour  $k$  impair,  $k > 1$  ,  $\pi_k(V_{2k,k}) = \mathbb{Z}_2$  .

Les classes d'immersions sont donc en correspondance biunivoque avec les éléments de  $H^k(S^k; \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2$  (Steenrod [1] th.37,5 page 186) . cqfd

Lemme 8.4 Si  $M^{2k}$  est simplement connexe, et si  $k \geq 3$  , chaque élément  $x \in \pi_k(M)$  est représenté par un plongement, et par une immersion ayant un seul point de self-intersection.  $\square$

L'existence du plongement a déjà été utilisée au paragraphe 4. Pour construire l'immersion, on utilise l'immersion  $W : S^k \rightarrow \mathbb{R}^{2k}$  donnée par Whitney ([1]) : cette immersion a un seul point de self-intersection, et il découle de la classification des immersions qu'elle n'est pas régulièrement homotope à un plongement (Smale [3] théorème C). Soit  $\varphi$  un plongement représentant  $x \in \pi_k(M)$  . On fait la somme connexe de  $\varphi(S^k)$  et de  $W(S^k)$  , où l'immersion  $W$  est définie dans un domaine de carte de  $M$  difféomorphe à  $\mathbb{R}^{2k}$  (voir figure) : on en déduit l'immersion cherchée. cqfd



Lemme 8.5. Si  $M^{2k}$  est simplement connexe, et si  $k$  est impair,  $k \geq 3$  , les deux classes d'immersion à homotopie régulière près correspondant à  $x \in \pi_k(M)$  sont représentées respectivement par un plongement et une immersion ayant un seul point de self-intersection.

Plus précisément, la classe d'une immersion est définie par le nombre modulo 2 de self-intersections qu'elle possède.  $\square$

Ce lemme est démontré pour  $M^{2k} = \mathbb{R}^{2k}$  dans (Smale [3]) en utilisant (Whitney [1]). Pour  $M^{2k}$  simplement connexe quelconque, on sait d'après le lemme 8.3 qu'il n'y a que deux classes. On connaît deux représentants par le lemme 8.4. La démonstration de (Whitney [1]) de l'invariance par homotopie régulière du nombre modulo 2 de self-intersection est encore valable lorsqu'on remplace  $\mathbb{R}^{2k}$  par  $M^{2k}$ , ainsi que le procédé d'élimination des paires de points de self-intersection. Ceci démontre le lemme.

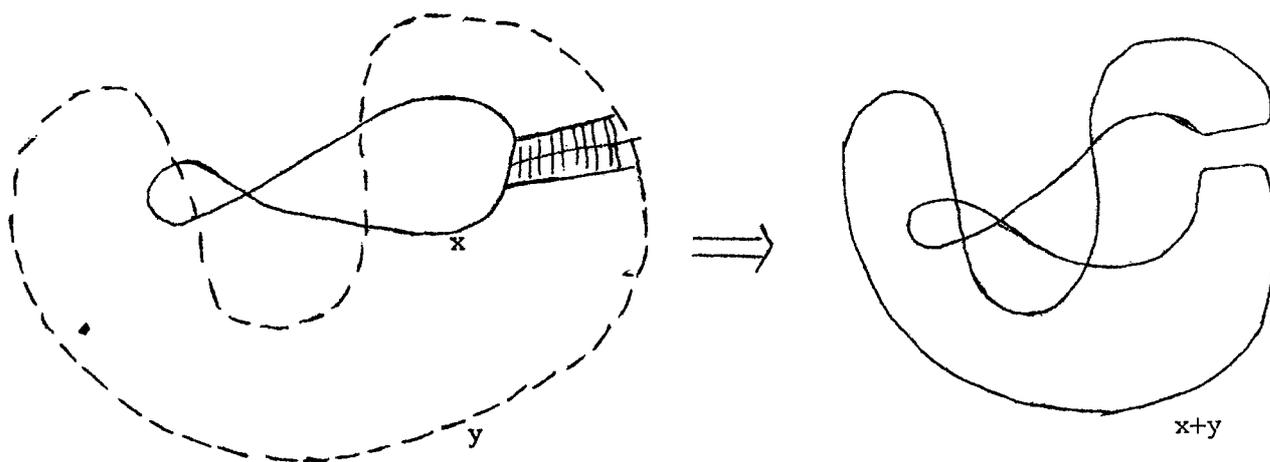
Lemme 8.6. Soit  $M^{2k}$  une variété  $(k-1)$  connexe stablement parallélisable, bordée par une homologie-sphère,  $k$  impair  $\neq 1, 3, 7$ . (Conditions permettant de définir  $\xi$ ) Notons  $C_x$  la classe des immersions représentant  $x \in H_k(M)$  qui ont  $\xi(x)$  points de self-intersection modulo 2. Alors  $C_x$  est celle des deux classes qui a un fibré normal trivial (l'autre classe ayant un fibré normal non trivial).  $\square$

#### Démonstration

- (i)  $\xi(x) = 0$  : On a vu que dans ce cas, le fibré normal du plongement est trivial. Le fibré normal de l'immersion est alors non trivial, puisque celle-ci est obtenue par somme connexe avec l'immersion  $W$  de Whitney qui a dans ce cas un fibré normal non trivial.
- (ii)  $\xi(x) = 1$  : Le plongement a un fibré normal non trivial ; le fibré normal de l'immersion est trivial : en effet, ce fibré est représenté par l'élément non nul dans  $\mathbb{Z}_2$ , et il en est de même pour celui de  $W$  ; par somme connexe, on obtient un fibré normal représenté par  $0 \in \mathbb{Z}_2$ , c'est-à-dire trivial (on a utilisé le fait qu'un fibré de dimension  $k$  stablement trivial sur  $S^k$  a "une seule façon" d'être non trivial).

cqfd

Démonstration de la proposition    Compte tenu du lemme 8.6 on vérifie facilement sur les fibrés que  $C_{x+y}$  est représentée par la somme connexe de  $C_x$  avec  $C_y$  : le nombre de points de self-intersection de cette immersion est  $\xi(x) + \xi(y) + x \cdot y$ , d'où la formule. cqfd



On a donc trouvé une forme quadratique sur  $\mathbb{Z}_2$ , à savoir

$\xi : H_k(M) \otimes \mathbb{Z}_2 \rightarrow \mathbb{Z}_2$ , qui est non singulière (puisque'il en est ainsi de l'intersection). Il n'y a que deux classes, à isomorphisme près, de formes quadratiques non singulières définies sur un espace vectoriel de dimension finie sur  $\mathbb{Z}_2$  (W.Browder [1]), classifiées par leur "invariant de Arf" dans  $\mathbb{Z}_2$ .

Définition 8.7. Soit  $(\lambda_1, \dots, \lambda_r, \mu_1, \dots, \mu_r)$  une base symplectique de  $(x, y)_2$  (forme réduite modulo 2). La quantité  $c(\xi) = \sum_{i=1}^r \xi(\lambda_i) \xi(\mu_i) \in \mathbb{Z}_2$  est indépendante du choix de la base symplectique, et s'appelle l'invariant de Arf de  $\xi$ .

□

Pour la démonstration (élémentaire) voir par exemple (Browder [1]) où l'on montre que  $c(\xi) = 1$  si et seulement si  $\xi$  envoie la majorité des éléments de

$H_k(M) \otimes \mathbb{Z}_2$  sur  $1 \in \mathbb{Z}_2$ .

Théorème 8.9. Soit  $M^{2k}$  une variété  $(k-1)$ -connexe stablement parallélisable bordée par une homologie-sphère,  $k \neq 1, 3, 7$ . On a associé à  $M$  une application  $\xi : H_k(M) \rightarrow \mathbb{Z}_2$ .

On peut rendre  $M$  contractile par une suite finie de chirurgies dans l'intérieur si et seulement si  $c(\xi) = 0$ . Si  $M$  est trivialisée, toutes les chirurgies peuvent être choisies "plongées".  $\square$

Démonstration C'est celle de (Kervaire-Milnor [1]) : soit

$\{\lambda_1, \dots, \lambda_r, \mu_1, \dots, \mu_r\}$  une base symplectique de  $H_k(M)$  pour l'intersection (donc aussi pour l'intersection modulo 2)

En permutant l'ordre, ou en échangeant  $\lambda_i$  et  $\mu_i$ , on peut supposer que :

$$\begin{cases} \xi(\lambda_i) = \xi(\mu_i) = 1 & \text{pour } i \leq s \\ \xi(\lambda_i) = 0 & \text{pour } i > s \end{cases}$$

puisque  $c(\xi) = 0$ , on a  $s = 0$  modulo 2.

Soit  $\{\lambda'_1, \dots, \lambda'_r, \mu'_1, \dots, \mu'_r\}$  la nouvelle base symplectique définie par :

$$\begin{cases} \lambda'_{2i-1} = \lambda_{2i-1} + \lambda_{2i} & \lambda'_{2i} = \mu_{2i-1} - \mu_{2i} \\ \mu'_{2i-1} = \mu_{2i-1} & \mu'_{2i} = \lambda_{2i} \end{cases} \quad \text{pour } 2i \leq s$$

$$\lambda'_i = \lambda_i, \quad \mu'_i = \mu_i \quad \text{pour } i > s$$

On a  $\xi(\lambda'_1) = \dots = \xi(\lambda'_r) = 0$ , ce qui permet d'appliquer le lemme 6.3, la nullité de  $\xi(\lambda'_i)$  équivalent à la trivialité du fibré normal d'un plongement représentant  $\lambda'_i$ .  $\text{cqfd}$

Théorème 8.10 Pour  $k$  impair  $\neq 1, 3, 7$ , on a

$$\Theta_{2k-1}(\partial\pi) = \{0\} \quad \text{ou}$$

$$\Theta_{2k-1}(\partial\pi) = \mathbb{Z}_2 \quad \square$$

Démonstration Elle est analogue (et plus simple car l'orientation n'intervient pas) à la démonstration dans le cas où  $k$  est pair : si

$c(M_1) = c(M_2)$ ,  $M = (M_1, \Sigma_1) \# (M_2, \Sigma_2)$  borde  $\Sigma_1 \# \Sigma_2$  et vérifie  $c(M) = 0$

Donc  $\Sigma_1$  est h-cobordante à  $-\Sigma_2$ , et de même  $\Sigma_2$  est h-cobordante à  $-\Sigma_1$ .

Par plombage suivant le diagramme  $\circ \text{---} \circ$ , on construit une variété parallélisable  $(k-1)$ -connexe  $M^{2k}$  avec  $c(M) = 1$ , dont le bord est une homotopie-sphère appelée la "sphère de Kervaire". Le problème est donc de décider si la sphère de Kervaire est ou non h-cobordante à la sphère standard, ce qui est en particulier étudié par Browder (Browder [2]).

Théorème 8.11

$$\Theta_n(\partial\pi) = \mathbb{Z}_2 \quad \text{pour } n = 4m+1, \quad n \neq 2^k - 3$$

$$\Theta_{29}(\partial\pi) = \Theta_{61}(\partial\pi) = \{0\} \quad \square$$

BIBLIOGRAPHIE

=====

- E. Artin [1] Algèbre géométrique-Gauthier-Villars-Paris 1967
- W. Browder [1] Surgery on simply connected manifolds. Notes mimeo-graphées. Princeton University 1969  
[2] The Kervaire invariant of  $n$  framed manifolds and its generalization. Annals of Math 90 (1969) P. 157-186
- P.E.Conner, E.E.Floyd [1] Differentiable periodic maps. Ergebnisse der Mathematik. Band 33. Springer-Verlag (1964)
- H. Cartan [1] Séminaire Cartan 1961-1962. Exposés 14-15  
[2] Séminaire Cartan 1961-1962. Exposés 4 à 7
- M. Hirsh [1] Immersion of manifolds. Trans.Amer.Math.Soc. 93(1959) pages 242-276
- A. Haefliger [1] Plongements de variétés dans variétés. Commentarii Mathematici Helvatici t.36(1961) p. 47-82  
[2] Knotted  $(4k-1)$ -sphères in  $6k$ -space. Annals of Math. 75 (1962) p. 452-466  
[3] Sphères d'homotopie nouées. Séminaire Bourbaki 17<sup>ème</sup> année 1964-65. exposé n° 280
- F. Hirzebruch [1] Topological methods in algebraic geometry. "Ergebnisse der Mathematik. Band 131. Springer-Verlag (1966)
- J.Milnor, M.A.Kervaire [1] Groups of homotopy spheres I. Annals of Math. 77 (1963) p.504-537  
[2] Bernouilli numbers, homotopy groups, and a theorem of Rohlin-Proz. Int.congress of Mathematicians 1958 Edimburg
- J. Cerf [1] Topologie de certains espaces de plongements - Bull. Soc. Math. France 89 (1961) p. 227-380

- J. Milnor
- [1] Differentiable manifolds which are homotopy spheres. Mimeographed. Princeton University 1959
  - [2] Morse theory. Annals of Mathematics studies n° 51. Princeton University 1963
  - [3] Lectures on the h-cobordism theorem. Princeton Mathematical notes 1965
  - [4] On simply connected 4-manifolds-Symposium Topologia Algebraica, Mexico, 1958, p.122-128
  - [5] A procedure for killing homotopy groups of differentiable manifolds. Symposia in Pure Math. AMS vol VIII (1961), p.39-55
  - [6] Lectures on characteristic classes. Mimeographed. Princeton University
- L. Siebenmann
- [1] Cours fait à Orsay en 1966-67 (dont seule la première partie a été rédigée). Centre de Math. de l'Ecole Polytechnique, 17 rue Descartes. Paris 5°
- S. Smale
- [1] Generalized Poincaré conjecture in dimensions greater than four. Ann. of Math. 74(1961) p.391-406
  - [2] On the structure of manifolds. Amer. Journal of Math. 84(1962) p.387-399
  - [3] The classification of immersions of spheres in euclidean spaces- Ann. of Math. 69(1959) p.327-344
- E. Spanier
- [1] Algebraic Topology. Mac Graw Hill 1966
- N. Steenrod
- [1] The topology of fibre bundles. Princeton University press 1951
- H. Whitney
- [1] Self intersections of a smooth n.manifold in  $2n$  space. Annals of Math. (45) 1944 p.220-246