

Corrélat

BIOLOGIE MOLÉCULAIRE, ÉVOLUTION, GRAPHS (THÉORIE DES), LINÉAIRE ET MULTILINÉAIRE (ALGÈBRE), MODÈLE, MORPHOGENÈSE ANIMALE, MORPHOGENÈSE VÉGÉTALE, PHARMACOLOGIE CLINIQUE, POLLUTION, RADIOBIOLOGIE, RÉGULATIONS BIOCHIMIQUES, RENOUVELLEMENT BIOLOGIQUE, TÉRATOLOGIE ANIMALE, TÉRATOLOGIE VÉGÉTALE.

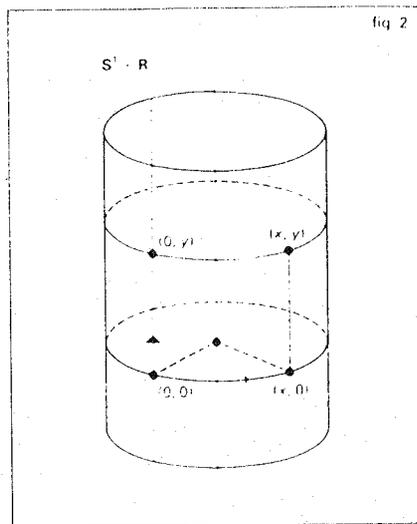
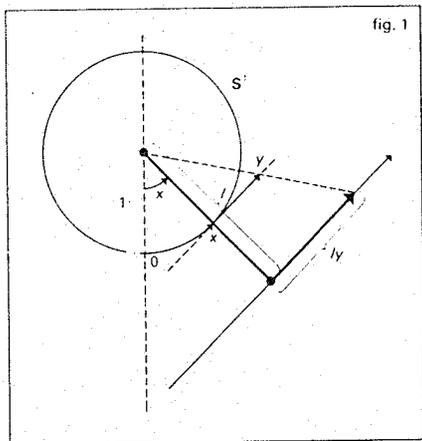
Nous n'avons pas dans cet article la prétention de déployer exhaustivement la théorie, mais simplement d'introduire le lecteur à quelques points de vue et, dans une petite mesure, à quelques méthodes de ce beau domaine des mathématiques. Les premiers chapitres décrivent en assez grand détail des exemples tournant autour du pendule et introduisent des comportements asymptotiques de plus en plus complexes dont l'analyse nécessite les concepts plus abstraits de la dernière partie.

SYSTÈMES DYNAMIQUES DIFFÉRENTIABLES

1. *Le pendule sans frottement, un système hamiltonien*
2. *Le pendule avec frottement linéaire, un système structurellement stable*
3. *Bifurcation de cycles-limites et auto-oscillations*
4. *Perturbations périodiques d'un pendule sans frottement et difféomorphismes du plan conservant les aires*
5. *Perturbations périodiques d'auto-oscillations et « courbes de Birkhoff »*
6. *Couplage d'auto-oscillations et attracteurs étranges*
7. *Hyperbolicité*
8. *Mesures invariantes et exposants de Liapunov*
9. *Propriétés génériques*

1 *Le pendule sans frottement, un système hamiltonien*

L'étude qualitative de l'ensemble des mouvements possibles d'un pendule rigide dans un plan vertical offre une illustration simple de la notion de système dynamique. Si l'expérience « montre » qu'il ne suffit pas de se donner la position initiale du pendule pour caractériser son mouvement, elle suggère par

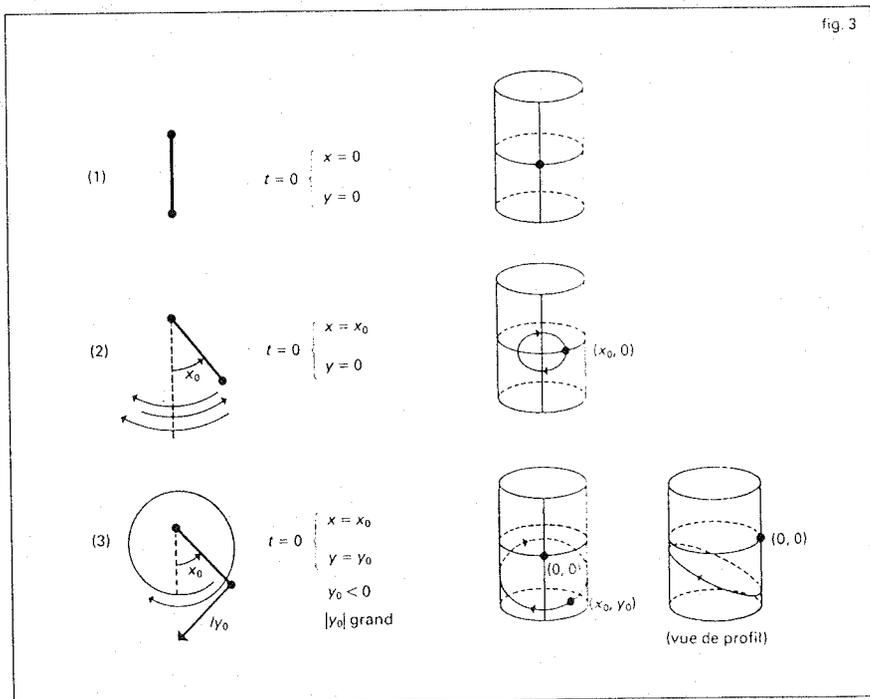


contre que la connaissance à un instant donné de sa position et de sa vitesse implique celle de son mouvement à tout instant ultérieur (et passé, mais il s'agit là d'expérience de « pensée »).

La position est repérée par un angle ou, ce qui revient au même, par un point x du cercle S^1 de rayon 1 centré sur le point de suspension et contenu dans le plan des oscillations; la vitesse angulaire est repérée par un nombre réel y (fig. 1). L'ensemble des couples (x, y) constitue l'espace de phase du pendule: c'est un cylindre (fig. 2), produit topologique d'un cercle par une droite (on note ce produit $S^1 \times \mathbb{R}$).

Chaque mouvement est représenté par une courbe orientée (éventuellement réduite à un point si le pendule reste immobile) tracée sur le cylindre et paramétrée par le temps qu'on suppose s'étendre de $-\infty$ à $+\infty$. Chaque courbe décrit une évolution au cours du temps de la position et de la vitesse du pendule, mais une même courbe géométrique correspond à une infinité de mouvements déduits les uns des autres par une translation du temps; on appelle *courbes intégrales* ou

Sans doute née avec le mémoire que Poincaré écrivit en 1881 « sur les courbes définies par des équations différentielles », où l'étude quantitative (analytique) locale des équations différentielles dans le champ complexe est remplacée par leur étude qualitative (géométrique) globale dans le champ réel, la théorie des systèmes dynamiques a pour ambition une description aussi précise que possible du comportement asymptotique (en *temps infini*) des solutions des (de la plupart des, de certaines) équations différentielles; la mécanique céleste et les accélérateurs de particules sont des exemples où l'intérêt de tels problèmes est manifeste, mais aussi les oscillations électriques et la turbulence hydrodynamique encore si mal comprise. Il est remarquable que beaucoup des idées fondatrices viennent d'un très petit nombre de tels exemples, en particulier le problème des trois corps et les équations du type Van der Pol.



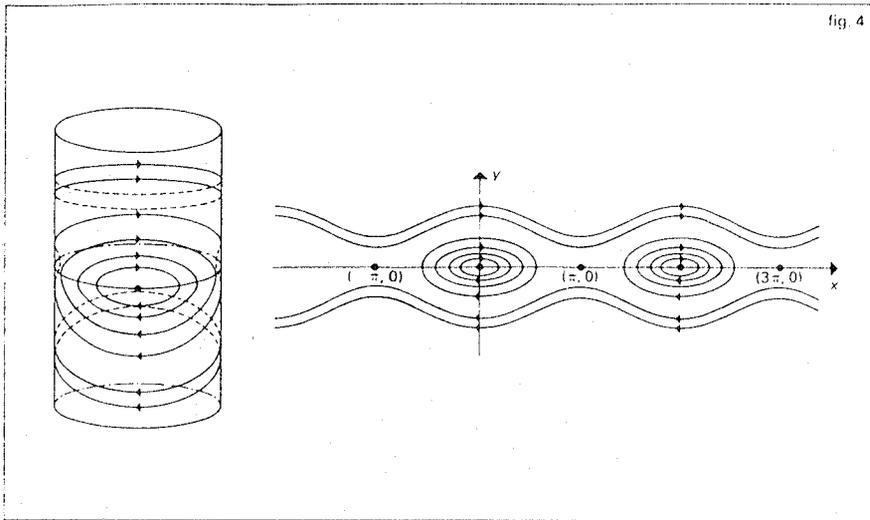


fig. 4

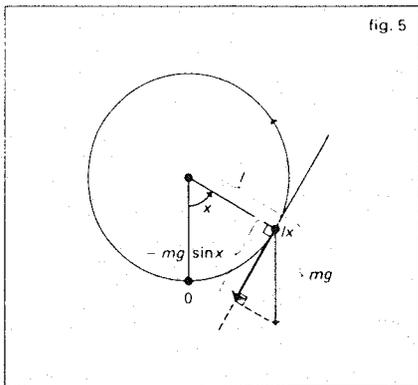


fig. 5

orbites ces courbes géométriques orientées : deux d'entre elles ne peuvent s'intersecter en vertu des remarques qui précèdent, c'est précisément ce qu'on a gagné à remplacer l'espace des positions (cercle) par l'espace de phase (cylindre).

La figure 3 représente quelques expériences et leur traduction dans l'espace de phase : la première rappelle que si, à un instant donné, x est égal à 0 (position la plus basse) ainsi que y (vitesse nulle) il en est de même à tout instant ultérieur (et passé) : on dit que (0, 0) est un *équilibre* ; la deuxième concerne les *petites oscillations* autour de la position d'équilibre : le pendule étant supposé sans frottement, la conservation de l'énergie implique des oscillations entre la position de départ (à vitesse nulle) et la position symétrique par rapport au point de suspension. Dans l'espace de phase, ces oscillations correspondent à des *orbites périodiques* (courbes intégrales homéomorphes à un cercle). Dans la troisième, enfin, la vitesse initiale est suffisante pour que l'énergie totale dépasse l'énergie potentielle maximale : la vitesse ne s'annule jamais et, l'énergie se conservant, le pendule revient après chaque tour en un point donné avec une vitesse identique.

Il est maintenant possible d'esquisser le *portrait de phase* (ensemble des courbes intégrales) ; le dessin sur le cylindre étant difficile, on a considéré ce dernier comme un rouleau d'imprimerie, ce qui permet de représenter les courbes intégrales dans le plan : chaque figure tracée sur le cylindre donnera par impression une figure plane périodique en x (fig. 4) ; on notera que pour éviter les inconvénients de l'imprimerie on a rétabli le sens de l'axe des x en retournant la feuille). Pour les lecteurs mathématiciens, le cylindre n'est autre que le fibré tangent

du cercle, et le déroulement représente le passage au revêtement universel.

Il semble difficile d'analyser par une expérience l'allure des courbes intégrales au voisinage du point $(\pi, 0)$ du cylindre : en effet, ce point correspond à la position d'équilibre supérieure, qui est instable dans le sens où la moindre perturbation amène le pendule à occuper des positions très éloignées.

Le temps est venu de remarquer que la figure 4 n'est autre qu'une résolution presque complète de l'équation de Newton, $\vec{F} = m\vec{\gamma}$, c'est-à-dire (fig. 5) :

$$-mg \sin x = ml \frac{d^2x}{dt^2},$$

qu'on écrira :

$$(N_1) \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 \sin x, \quad \left(\omega = \sqrt{\frac{g}{l}} \right)$$

On a noté l la distance du centre de gravité au point de suspension, m la masse, et déroulé le cercle (comme plus haut le cylindre) en considérant x comme une variable réelle.

L'équation (N_1) s'écrit encore comme *équation différentielle autonome* du premier ordre dans \mathbb{R}^2 :

$$(P_1) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = -\omega^2 \sin x \end{cases}$$

ou
$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = X(x, y),$$

et s'interprète comme un *champ de vecteurs* X dans \mathbb{R}^2 (indépendant du temps) périodi-

que en x (de période 2π), c'est-à-dire un champ de vecteurs tangents au cylindre (fig. 6).

Les solutions de (P_1) sont les courbes paramétrées $(x(t), y(t))$ qui ont pour dérivée (vecteur vitesse) au temps t le vecteur $(y(t), -\omega^2 \sin x(t))$: ce sont les courbes intégrales dont certaines ont été esquissées sur la figure 4. Les équilibres (courbes intégrales réduites à un point) sont encore appelés *singularités* : ce sont les points (x, y) en lesquels le vecteur $X(x, y)$ s'annule. Le fait que les courbes intégrales remplissent le plan (le cylindre) et ne se rencontrent pas deux à deux est la traduction géométrique du théorème fondamental d'existence et d'unicité des solutions d'équations différentielles.

Il se trouve que l'absence supposée de frottement permet de trouver très facilement les courbes intégrales :

L'équation (P_1) s'écrit en effet sous la forme *hamiltonienne* :

$$(P_1) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y}(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x}(x, y). \end{cases}$$

où $H(x, y) = (y^2/2) + \omega^2(1 - \cos x)$ est proportionnelle à l'énergie totale du pendule dans la position x , avec la vitesse y (H est périodique en x et définit donc une fonction sur le cylindre, appelée *hamiltonien*).

On vérifie immédiatement que, le long d'une courbe intégrale $(x(t), y(t))$, H reste constante (conservation de l'énergie) : ces courbes sont donc contenues dans les courbes de niveau de H , ce qui permet de tracer la figure 7.

Il peut être agréable de remarquer que le plongement F du cylindre dans \mathbb{R}^3 défini par $F(x, y) = (\sin x, -y, (y^2/2) + \omega^2(1 - \cos x))$ transforme H en la hauteur au-dessus du plan horizontal (fig. 7 bis où la forme des courbes d'énergie constante devient évidente). Pour une autre représentation, cf. fig. 33 bis.

On constate en particulier qu'il existe deux courbes intégrales issues du point $(\pi, 0)$ sur le cylindre (le point lui-même n'appartient pas à ces courbes) : celles-ci traduisent l'existence pour chaque position $x \neq \pi$ du pendule de deux vitesses initiales y_1, y_2 de signe contraire telles que lorsque le temps devient très grand le pendule tende vers la position d'équilibre supérieur (fig. 7). Il apparaît sur la figure 7 (et à l'expérience) que les deux équilibres $(0, 0)$ et $(\pi, 0)$ sont de nature différente : seul $(0, 0)$ est *stable au sens de Liapunov* (le nom de Liapunov reviendra plusieurs fois dans cet article : ses contributions - dès sa thèse en 1892 - à la théorie de la stabilité sont fondamentales), ce qui signifie que si (x_0, y_0) est assez proche de $(0, 0)$ la portion de la courbe intégrale passant par (x_0, y_0) et correspondant à des temps ultérieurs reste assez proche de $(0, 0)$.

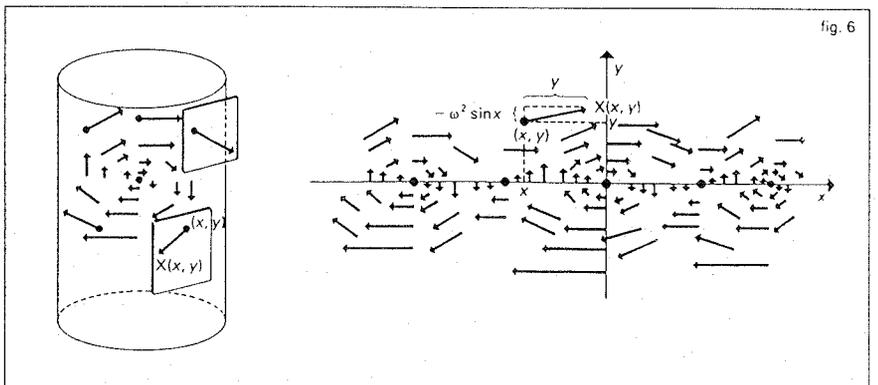


fig. 6

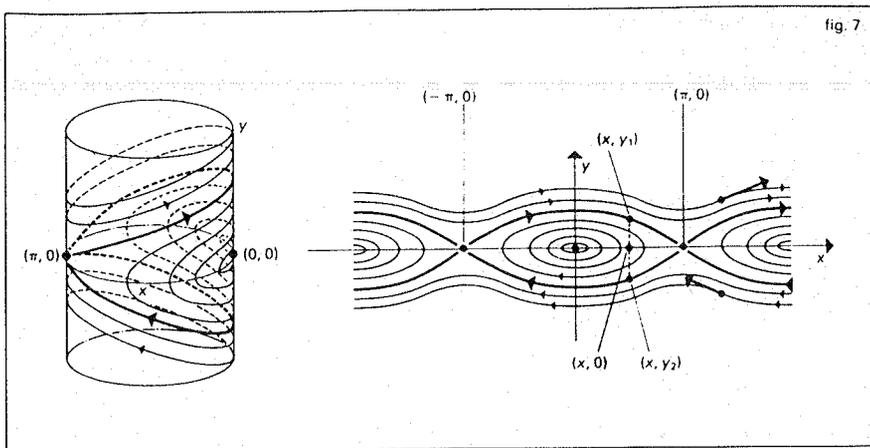


fig. 7

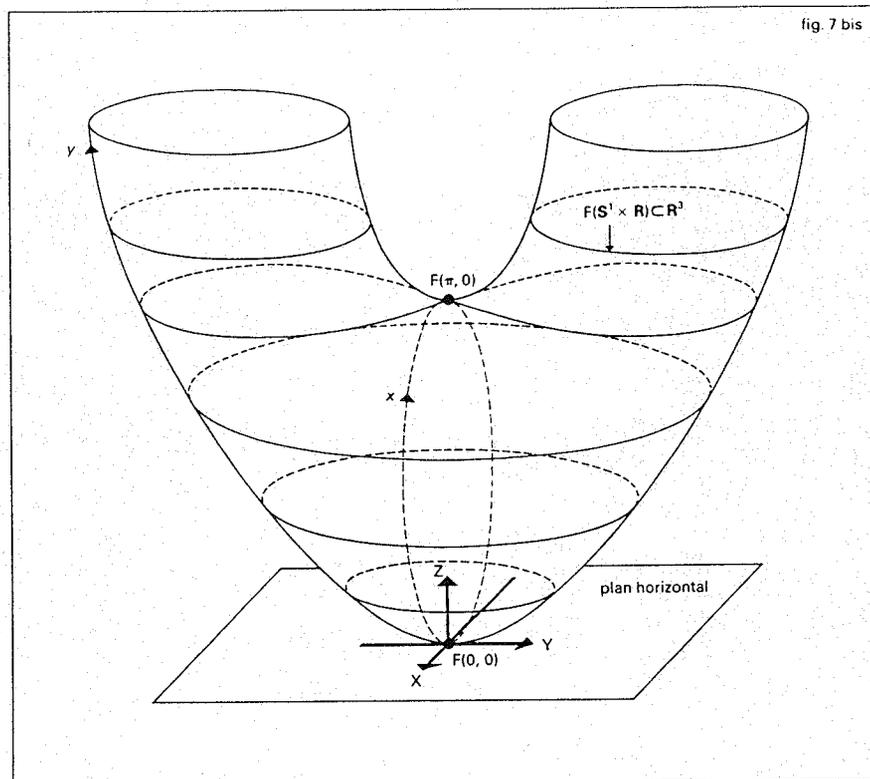


fig. 7 bis

particulier joué par la courbe de niveau dégénérée $H_0(\bar{x}, y) = 0$.

Dans les deux cas, on note une grande ressemblance qualitative entre le portrait de phase de (P_1) au voisinage d'un de ses équilibres et le portrait de phase des équations linéarisées en ces équilibres. Plus précisément, on déduit du lemme de Morse (cf. SINGULARITÉS DES FONCTIONS DIFFÉRENTIABLES) l'existence au voisinage de $(0, 0)$ (resp. de $(\pi, 0)$) d'un changement de coordonnées différentiable transformant les lignes de niveau de H en les lignes de niveau de H_0 (resp. de H_0); il y a bien entendu des différences quantitatives : par exemple, dans le cas elliptique (valeurs propres purement imaginaires), la période des oscillations dépend de leur amplitude (c'est-à-dire de la courbe intégrale considérée) pour l'équation (P_1) , mais n'en dépend pas pour l'équation linéarisée.

Nous verrons dans le chapitre suivant que cette ressemblance est un phénomène très général dans le cas hyperbolique (valeurs propres non purement imaginaires) et est au contraire forcée par le caractère hamiltonien de (P_1) dans le cas elliptique.

Au début de ce chapitre, nous avons dit que le point de vue des systèmes dynamiques consistait en la considération simultanée de l'ensemble des mouvements possibles, c'est-à-dire de l'ensemble des courbes intégrales. Pour formaliser cela, introduisons le flot de l'équation (P_1) (ou du champ de vecteurs X) : c'est la famille de difféomorphismes $(\varphi_t)_{t \in \mathbb{R}}$ du cylindre (bijections du cylindre différentiables ainsi que leurs inverses) définie par $\varphi_t(x_0, y_0) = (x, y)$ si x et y sont respectivement la position et la vitesse au temps t du pendule quand, à l'instant 0, celui-ci a la position x_0 et la vitesse y_0 . On peut dire que $(\varphi_t)_{t \in \mathbb{R}}$ est la solution de (P_1) , puisque cette définition équivaut à $\frac{d\varphi_t}{dt}(x, y) = X(\varphi_t(x, y))$. Du caractère autonome de l'équation (champ de vecteurs indépendant du temps) on déduit immédiatement que $(\varphi_t)_{t \in \mathbb{R}}$ est un groupe à un paramètre de difféomorphismes, c'est-à-dire vérifie $\varphi_{s+t} = \varphi_s \circ \varphi_t$ quels que soient les réels s et t ; en particulier, $\varphi_{-t} = (\varphi_t)^{-1}$. On dit encore que $(\varphi_t)_{t \in \mathbb{R}}$ est le système dynamique associé à l'équation (ou au champ de vecteurs). Le fait que les φ_t soient différentiables est une conséquence des théorèmes classiques de dépendance des solutions d'équations différentielles en fonction des données initiales. Sur une variété compacte,

caractère autonome de l'équation (champ de vecteurs indépendant du temps) on déduit immédiatement que $(\varphi_t)_{t \in \mathbb{R}}$ est un groupe à un paramètre de difféomorphismes, c'est-à-dire vérifie $\varphi_{s+t} = \varphi_s \circ \varphi_t$ quels que soient les réels s et t ; en particulier, $\varphi_{-t} = (\varphi_t)^{-1}$. On dit encore que $(\varphi_t)_{t \in \mathbb{R}}$ est le système dynamique associé à l'équation (ou au champ de vecteurs). Le fait que les φ_t soient différentiables est une conséquence des théorèmes classiques de dépendance des solutions d'équations différentielles en fonction des données initiales. Sur une variété compacte,

On aurait pu s'en rendre compte par une étude purement locale en linéarisant le champ de vecteurs (l'équation différentielle) P_1 au voisinage de chacun d'eux :

Au voisinage de $(0, 0)$, l'équation (P_1) s'écrit :

$$(P_1) \begin{cases} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{cases} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha(x, y) \\ \beta(x, y) \end{pmatrix},$$

où $\alpha(x, y) = 0$ et $\beta(x, y) = -\omega^2(\sin x - x)$ sont du troisième ordre en (x, y) et donc petits par rapport au premier terme lorsque (x, y) est proche de $(0, 0)$.

L'équation différentielle linéaire dans \mathbb{R}^2 obtenue en supprimant α et β est appelée linéarisée de (P_1) en $(0, 0)$: remarquer qu'elle n'est plus périodique en x ; ses valeurs propres $\pm i\omega$ sont imaginaires et ses courbes intégrales sont des ellipses (fig. 8 a); on a indiqué le spectre imaginaire de la matrice), courbes de niveau du hamiltonien :

$$H_0(x, y) = \frac{y^2}{2} + \omega^2 \frac{x^2}{2}$$

qui, ce n'est pas un hasard, n'est autre que la partie quadratique du développement de Taylor de H en $(0, 0)$. On dit que $(0, 0)$ est un centre.

Au voisinage de $(\pi, 0)$, l'équation (P_1) s'écrit :

$$(P_1) \begin{cases} \frac{d\bar{x}}{dt} \\ \frac{d\bar{y}}{dt} \end{cases} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \omega^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bar{\alpha}(\bar{x}, \bar{y}) \\ \bar{\beta}(\bar{x}, \bar{y}) \end{pmatrix},$$

où $\bar{x} = x - \pi$, et où $\bar{\alpha}(\bar{x}, \bar{y}) = 0$, $\bar{\beta}(\bar{x}, \bar{y}) = \omega^2(\sin \bar{x} - \bar{x})$ sont du troisième ordre en (\bar{x}, \bar{y}) et donc petits par rapport au premier terme lorsque (x, y) est proche de $(\pi, 0)$.

Les valeurs propres de la linéarisée de (P_1) en $(\pi, 0)$ sont maintenant réelles (égales à $\pm \omega$) et les courbes intégrales sont des hyperboles (fig. 8 b); on a indiqué le spectre réel de la matrice), courbes de niveau du hamiltonien $H_0(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{y^2}{2} - \omega^2 \frac{\bar{x}^2}{2}$ qui, ce n'est toujours pas un hasard, coïncide avec la partie quadratique du développement de Taylor de H en $(\pi, 0)$. On dit que $(\pi, 0)$ est un col (encore appelé selle). On notera le rôle

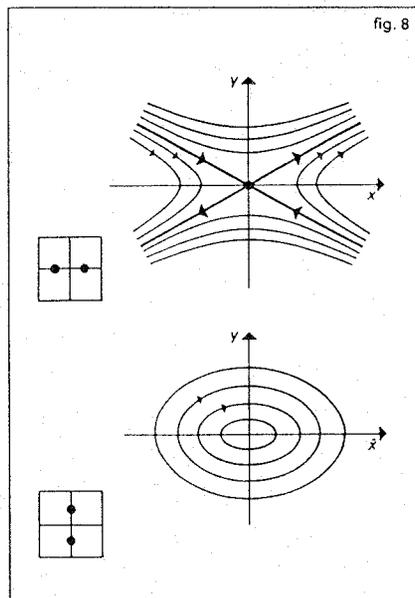


fig. 8

il y a équivalence entre les notions de champ de vecteurs et de flot ; dans le cas général, il faut éventuellement modifier la longueur des vecteurs (et non leur direction, ce qui revient à changer la loi du temps) pour que les solutions existent pour tout temps t et définissent donc un flot (et cela même pour des problèmes naturels : Gerver a donné récemment (1983) une démonstration heuristique de l'existence de solutions sans collision du « problème des cinq corps » telles que tous les corps partent à l'infini en un temps fini). Ici l'existence du hamiltonien H fournit une propriété supplémentaire : chacun des difféomorphismes φ_t conserve les aires (aire $\varphi_t(U) = \text{aire } U$, cf. fig. 9 où s et t sont positifs), ce qui équivaut au niveau différentiel à :

$$\begin{aligned} \text{div } X(x, y) &= \frac{\partial(y)}{\partial x} + \frac{\partial(-\omega^2 \sin x)}{\partial y} \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial H}{\partial y}(x, y) \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial H}{\partial x}(x, y) \right) = 0, \end{aligned}$$

et explique que les matrices des équations linéarisées en $(0, 0)$ et $(\pi, 0)$ soient de trace nulle (le flot de l'équation linéarisée en un équilibre n'est autre que le flot des dérivées des φ_t en cet équilibre).

Finissons ce chapitre par une petite excursion non autonome, introduisant les variables action-angle et montrant l'invariance adiabatique de l'action : posons

$$x = \frac{1}{\omega} \cdot \sqrt{2I\omega} \sin \varphi, \quad y = \sqrt{2I\omega} \cos \varphi,$$

c'est-à-dire :

$$I = \frac{H_x(x, y)}{\omega} = \frac{\omega x^2}{2} + \frac{y^2}{2\omega} = \text{aire bordée par l'ellipse } H_x = H_x(x, y),$$

$\varphi = \text{Arc tg } \frac{\omega x}{y}$. L'équation (L) : $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$, linéarisée en $(0, 0)$ de (P_1) , prend la forme :

$$(L) \quad \begin{cases} \frac{dI}{dt} = 0 \\ \frac{d\varphi}{dt} = \omega, \end{cases}$$

particulièrement simple (on pourrait faire quelque chose d'analogue pour (P_1) mais les formules ne seraient plus aussi explicites).

Remarquons que la transformation $(x, y) \mapsto (I, \varphi)$ conserve les aires ; les varia-

bles (I, φ) sont les variables (action, angle) de la mécanique hamiltonienne (cf. MÉCANIQUE ANALYTIQUE), en particulier l'action reste constante au cours d'un mouvement.

Supposons maintenant que la longueur du pendule (resp. le champ de gravitation) varie lentement en fonction du temps ; plus précisément, considérons l'équation (L) :

$$(\tilde{L}) \quad \frac{d^2x}{dt^2} + [\omega(\epsilon t)]^2 x = 0,$$

où $\omega(\lambda)$ est une fonction deux fois continûment différentiable de λ . On peut montrer que, de façon surprenante, si $(x(t), y(t))$ est une solution de (L), et si

$$I(t) = \frac{\omega(\epsilon t)x(t)^2}{2} + \frac{y(t)^2}{2\omega(\epsilon t)}$$

est le rapport de l'énergie à la fréquence (action) à l'instant t , $I(t)$ reste presque constant sur des intervalles de temps très grands (de l'ordre de $1/\epsilon$) ; on dit que I est un invariant adiabatique de (L).

La démonstration repose sur la technique de moyennisation introduite par Van der Pol et intensivement utilisée (et perfectionnée) par Krilov et Bogolioubov. On écrit (L) dans les variables (I, φ) :

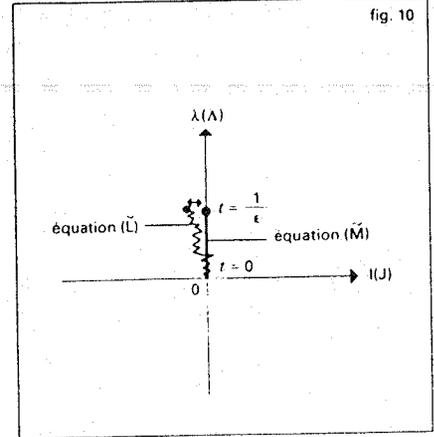
$$(\tilde{L}) \quad \begin{cases} \frac{d\varphi}{dt} = \omega(\lambda) + \epsilon \frac{\omega'(\lambda)}{2\omega(\lambda)} I \sin 2\varphi \\ \qquad \qquad \qquad = \omega(\lambda) + \epsilon f(I, \varphi, \lambda) \\ \frac{dI}{dt} = -\epsilon \frac{\omega'(\lambda)}{\omega(\lambda)} I \cos 2\varphi = \epsilon g(I, \varphi, \lambda) \\ \frac{d\lambda}{dt} = \epsilon \end{cases}$$

et on la compare à l'équation moyennée en φ :

$$(\tilde{M}) \quad \begin{cases} \frac{dJ}{dt} = \epsilon \bar{g}(J, \lambda) = \frac{\epsilon}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(J, \varphi, \lambda) d\varphi = 0 \\ \frac{d\lambda}{dt} = \epsilon. \end{cases}$$

L'idée, que l'on retrouvera au chapitre 3 sous le déguisement des formes normales, est de simplifier l'équation (L) par un changement de variables de la forme $P = I + \epsilon k(I, \varphi)$, où k est une fonction périodique en φ ; on obtient :

$$\frac{dP}{dt} = \epsilon [g(I, \varphi, \lambda) + \frac{\partial k}{\partial \varphi}(I, \varphi, \omega(\lambda))] + O(\epsilon^2).$$



Il existe k périodique en φ telle que le terme en ϵ s'annule car g est de moyenne nulle en ϵ (sinon il faudrait garder $\epsilon \bar{g}(I, \lambda)$). Pour un tel choix, qui fournit un vrai changement de variables si ϵ est assez petit, P ne varie que de $O(\epsilon)$ sur un temps de l'ordre de $1/\epsilon$, ce qui entraîne le même résultat pour I . L'équation (M) décrit l'évolution systématique, le passage à (L) amène des oscillations autour de cette évolution moyenne (fig. 10).

Nous reviendrons sur cet exemple au chapitre 4 à propos de la résonance paramétrique. Ce procédé de moyennisation est très utilisé en mécanique céleste, en physique, en ingénierie, souvent dans des circonstances où il n'est pas justifié. Quant à l'invariance adiabatique de l'action, elle a été mise en avant en 1911 par Lorentz et Einstein pour expliquer la constance surprenante du rapport énergie-fréquence de radiation d'un atome, les champs électromagnétiques extérieurs variant lentement par rapport à la fréquence d'oscillation de l'atome.

2 La pendule avec frottement linéaire, un système structurellement stable

Nous avons pu déterminer exactement les courbes intégrales de l'équation du pendule sans frottement en utilisant la conservation de la fonction H le long de ces courbes.

Si on suppose maintenant, ce qui est plus réaliste, que le pendule possède un certain frottement, la détermination explicite de ces courbes intégrales se complique énormément mais, au moins dans le cas d'un frottement dépendant linéairement de la vitesse, leur allure qualitative peut être encore facilement décrite en mêlant analyse locale par linéarisation aux équilibres et propriétés globales de la fonction H .

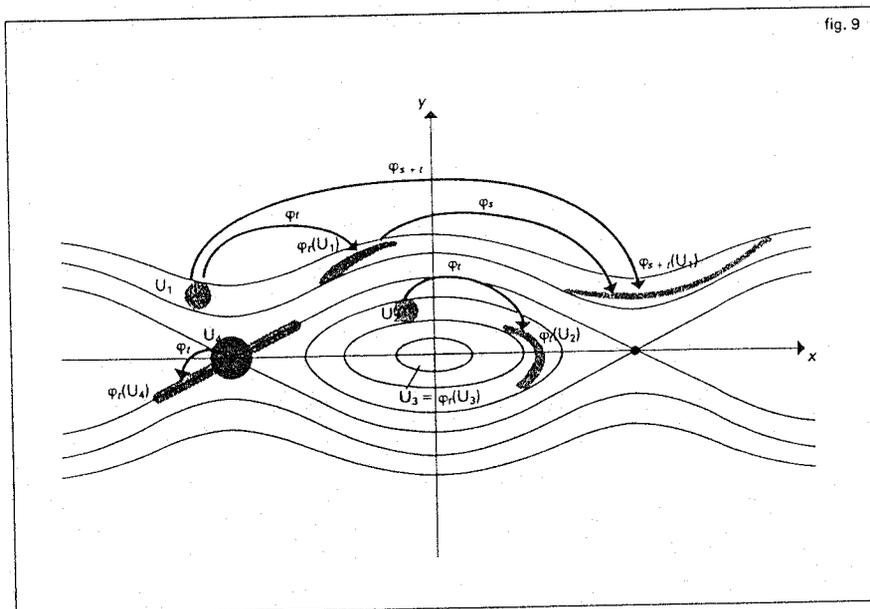
Plus précisément, si le frottement est proportionnel à la vitesse, l'équation de Newton devient :

$$(N_2) \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 \sin x - \rho \frac{dx}{dt}, \quad \rho > 0,$$

ou encore :

$$(P_2) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = -\omega^2 \sin x - \rho y. \end{cases}$$

L'allure des courbes intégrales est en grande partie dictée par l'observation suivante : la fonction H définie à propos de (P_1) est non croissante le long d'une courbe intégrale de (P_2) (dissipation de l'énergie) ; elle est même strictement décroissante en tous les points où $y \neq 0$ (on dit que H est une fonction de



Liapunov pour (P_2) dans le complémentaire de $y = 0$). En effet,

$$\frac{d}{dt} [H(x(t), y(t))] = (\omega^2 \sin x)y + y(-\omega^2 \sin x - \rho y) = -\rho y^2 < 0.$$

Corrélativement, la divergence du champ de vecteurs défini par (P_2) est $-\rho$: le flot associé « diminue » les aires.

D'autre part, les deux équilibres sont maintenant hyperboliques : au voisinage de $(0, 0)$, (P_2) s'écrit :

$$(P_2) \begin{cases} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{cases} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -\rho \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha(x, y) \\ \beta(x, y) \end{pmatrix},$$

alors qu'au voisinage de $(\pi, 0)$, dans les coordonnées \bar{x}, y introduites à propos de (P_1) , elle s'écrit :

$$(P_2) \begin{cases} \frac{d\bar{x}}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{cases} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \omega^2 & -\rho \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bar{\alpha}(\bar{x}, y) \\ \beta(\bar{x}, y) \end{pmatrix}.$$

Le portrait de phase de l'équation linéarisée en $(0, 0)$ dépend de la taille de ρ : la figure 11 résume la situation en présentant simultanément le portrait de phase, le nom de la singularité et, dans un encart, le spectre de la matrice :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -\rho \end{pmatrix};$$

notons que les figures 8 et 11 étaient connues du célèbre mécanicien russe N. E. Joukovsky (elles apparaissent explicitement dans sa Thèse sur la cinématique des corps liquides publiée en 1876).

Au contraire, le portrait de phase de l'équation linéarisée en $(\pi, 0)$ est qualitativement indépendant de la taille de ρ et ressemble à celui obtenu pour $\rho = 0$ (le spectre de la matrice :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \omega^2 & -\rho \end{pmatrix}$$

est toujours formé de deux valeurs propres réelles de signes opposés).

On peut maintenant donner une idée assez précise du portrait de phase de (P_2) suivant les valeurs de ρ :

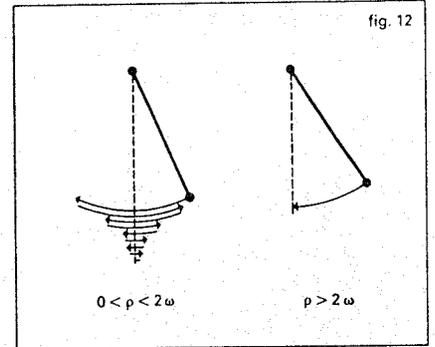
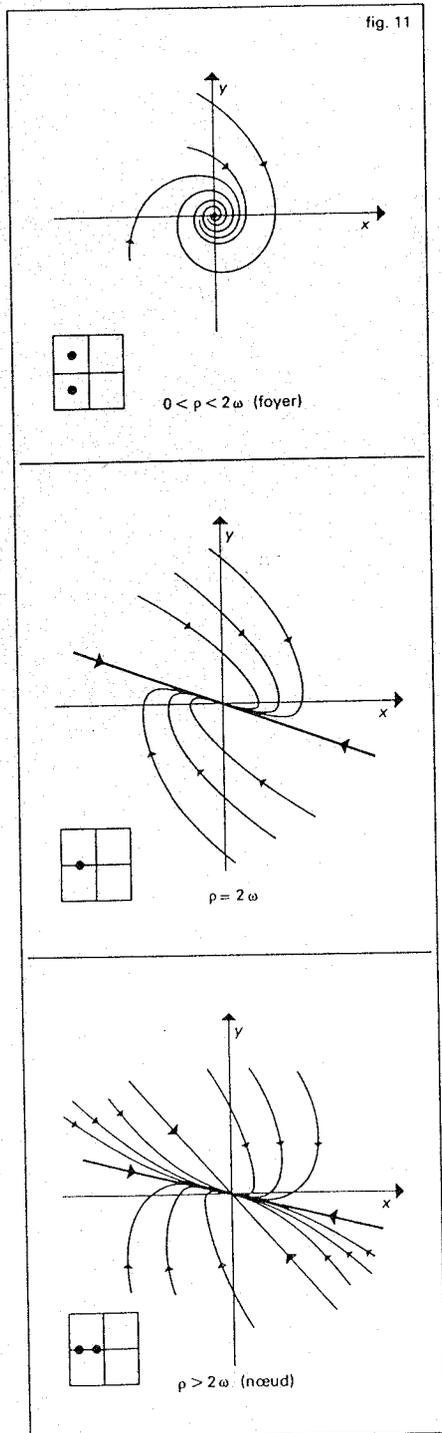
– Le théorème de linéarisation de Hartman (1963) sur lequel nous reviendrons affirme en effet l'existence d'un changement de coordonnées continûment dérivable défini au voisinage de $(0, 0)$ (resp. de $(\pi, 0)$) transformant localement (P_2) en l'équation linéarisée en $(0, 0)$ (resp. en $(\pi, 0)$). Il faut noter qu'un changement de coordonnées qui ne serait que continu serait insuffisant pour distinguer entre les différentes situations représentées sur la figure 11; cependant, une telle distinction est nécessaire si l'on veut rendre compte de l'expérience; si ρ est petit, l'amortissement au voisinage de la position d'équilibre inférieure s'accompagne d'oscillations, si ρ est grand il n'y a pas d'oscillation (fig. 12). Dans les deux cas, on n'atteint la position d'équilibre qu'au bout d'un temps infini (ce qui, tout comme l'infinité d'oscillations, souffre d'un manque certain de réalisme, mais notre pendule est idéal...).

Nous venons en passant de prouver la *stabilité asymptotique* de l'équilibre $(0, 0)$ de l'équation (P_2) : si (x_0, y_0) est assez proche

de $(0, 0)$ la portion de la courbe intégrale passant par (x_0, y_0) et correspondant à des temps ultérieurs reste assez proche de $(0, 0)$ (stabilité au sens de Liapunov) et tend vers $(0, 0)$ lorsque le temps tend vers l'infini ($(0, 0)$ est un *attracteur* de l'équation (P_2)).

En combinant ces informations locales avec celles qui sont données par la décroissance de H le long des courbes intégrales de (P_2) , on obtient les figures 13 (cas $0 < \rho < 2\omega$), 14 (cas $\rho = 2\omega$) et 15 (cas $\rho > 2\omega$).

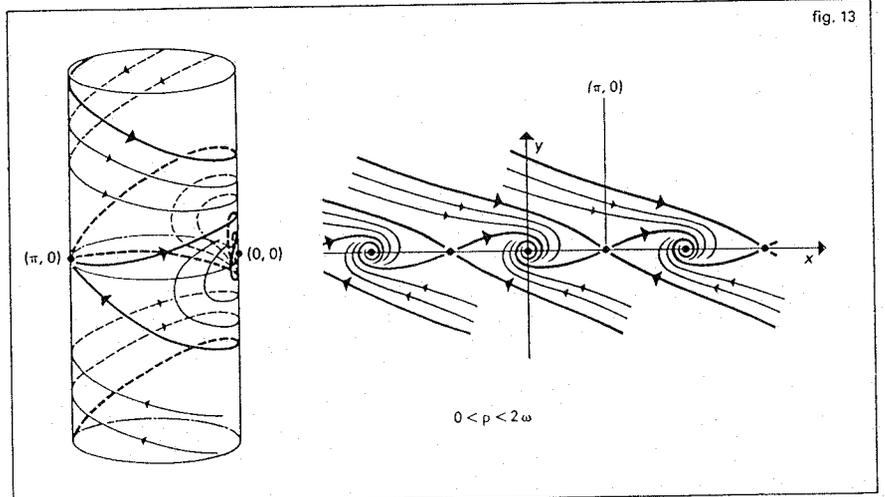
Un mouvement typique du pendule amorti se lit sur ces figures : après un nombre fini de tours complets, d'autant plus grand que la vitesse initiale était grande, il y a amortissement au voisinage de la position d'équilibre inférieure; ce n'est que dans les cas (rares!) où le point initial (x_0, y_0) est situé sur la courbe $W^s(\pi, 0)$ réunion de $(\pi, 0)$ et des deux



courbes intégrales tendant vers le point $(\pi, 0)$ du cylindre que la position asymptotiquement atteinte sera la position d'équilibre supérieure. Le complémentaire de cette courbe est le *bassin* de l'attracteur $(0, 0)$. Cette courbe et sa compagne définie de façon analogue en renversant le temps, appelées respectivement *variété stable* $W^s(\pi, 0)$ et *variété instable* $W^u(\pi, 0)$ (unstable en anglais) de l'équilibre hyperbolique $(\pi, 0)$ ont une importance fondamentale pour l'étude géométrique de l'équation et nous les retrouverons, elles ou leurs avatars, tout au long de l'article. Elles sont définies par :

$$W^s(\pi, 0) = \{(x, y) \in S^1 \times \mathbb{R}, \lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi_t(x, y) = (\pi, 0)\}$$

$$W^u(\pi, 0) = \{(x, y) \in S^1 \times \mathbb{R}, \lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi_t(x, y) = (\pi, 0)\},$$



où $(\varphi_t)_{t \in \mathbb{R}}$ est le flot de l'équation, défini au chapitre 1.

Pour l'équation linéarisée en $(\pi, 0)$, dont le flot est le groupe à un paramètre de transformations linéaires :

$$\left[\exp t \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \omega^2 & -\rho \end{pmatrix} \right]_{t \in \mathbb{R}}$$

dans les coordonnées (\tilde{x}, y) , ce sont les directions propres E^s et E^u de la matrice :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \omega^2 & -\rho \end{pmatrix};$$

pour l'équation (P_2) ce sont des courbes indéfiniment différentiables (en fait analytiques), même en $(\pi, 0)$, où elles sont tangentes respectivement à E^s et E^u (fig. 16). Notons que cela ne découle pas du théorème cité de Hartman, puisque le changement de coordonnées fourni par ce dernier n'est en général pas deux fois différentiable (en dimension supérieure à deux, il n'est en général même pas différentiable mais seulement continu!).

L'existence de $W^u(\pi, 0)$ manifeste l'instabilité asymptotique de l'équilibre supérieur : il existe des données initiales (x_0, y_0) aussi proches que l'on veut de $(\pi, 0)$ telles que $\varphi_t(x_0, y_0)$ sorte d'un voisinage fixé (assez petit) de $(\pi, 0)$ pour tout t assez grand.

Revenant sur le théorème de linéarisation de Hartman, remarquons qu'il joue le rôle que tenait le lemme de Morse dans la situation hamiltonienne du chapitre 1. Si $\lambda_s = (-1/2)(\rho + \sqrt{\rho^2 + 4\omega^2}) < 0$ et $\lambda_u = (1/2)(-\rho + \sqrt{\rho^2 + 4\omega^2}) > 0$ sont les valeurs propres de $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \omega^2 & -\rho \end{pmatrix}$, un changement de coordonnées linéaire transforme en effet l'équation :

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \omega^2 & -\rho \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

en :

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_s & 0 \\ 0 & \lambda_u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

c'est-à-dire en :

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \text{grad} f(x, y),$$

champ de gradient de la forme quadratique

$$f(x, y) = \lambda_s \frac{x^2}{2} + \lambda_u \frac{y^2}{2}.$$

De même que le lemme de Morse, le théorème de Hartman est valable en toutes dimensions : il affirme qu'en une *singularité hyperbolique* p d'un champ de vecteurs différentiable défini sur une variété différentiable, c'est-à-dire en un équilibre de l'équation associée tel que le spectre de l'équation linéarisée ne rencontre pas l'axe imaginaire, il existe un homéomorphisme local h qui, au voisinage de la singularité, transporte le flot $(\varphi_t)_{t \in \mathbb{R}}$ de l'équation sur le flot $(D\varphi_t(p))_{t \in \mathbb{R}}$ de l'équation linéarisée. On dit que h est une *conjugaison topologique locale* entre l'équation et sa linéarisée, ou encore une *linéarisation topologique locale* de l'équation. En dimension supérieure à deux, h n'est en général pas un difféomorphisme, comme le montre l'exemple :

$$\frac{dx}{dt} = ax, \quad \frac{dy}{dt} = (a-c)y + \varepsilon xz, \quad \frac{dz}{dt} = -cz,$$

$$a > c > 0, \quad \varepsilon \neq 0,$$

au voisinage de $(0, 0, 0)$. Cependant, s'il n'y a pas de *résonance* entre les valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ de l'équation linéarisée, c'est-à-dire

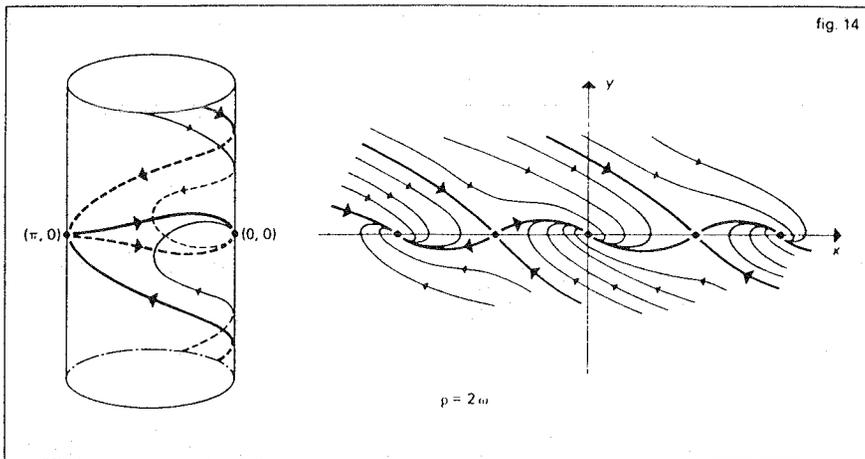


fig. 14

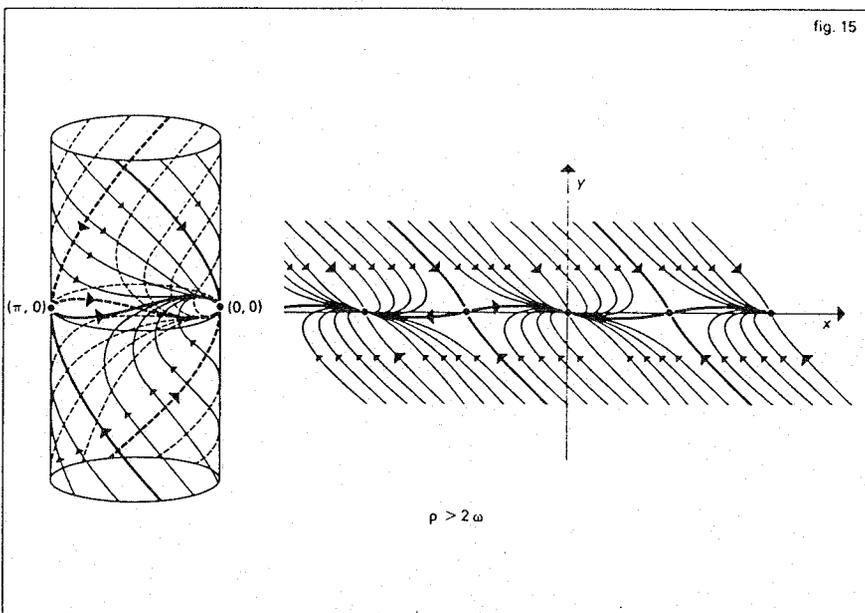


fig. 15

pas de relation de la forme :

$$\lambda_i = \sum_{j=1}^n m_j \lambda_j,$$

où les m_j sont des entiers positifs ou nuls de somme supérieure à 1, et si le champ est indéfiniment différentiable, h est un difféomorphisme indéfiniment différentiable (*théorème de Sternberg*, 1958). Dans le cas de champs de vecteurs analytiques complexes, la démonstration de l'existence d'une linéarisation analytique remonte à la Thèse de Poincaré (1879) dans les cas non résonnants où le spectre est entièrement contenu dans un demi-plan ouvert de \mathbb{C} , et à Siegel (1952) dans le cas contraire considérablement plus difficile où les conditions de non-résonance ne suffisent plus à cause des problèmes de « petits dénominateurs » que nous retrouverons dans un autre contexte au chapitre 4.

Le lemme de Morse étant à la base de la théorie de la stabilité des fonctions différentiables (cf. SINGULARITÉS DES FONCTIONS DIFFÉRENTIABLES), on ne s'étonnera pas qu'il en soit de même du théorème de Hartman dans le monde des systèmes dynamiques : effectivement, deux champs de vecteurs linéaires hyperboliques suffisamment proches étant topologiquement conjugués (pas différentiablement, car les valeurs propres seraient des invariants), on voit que si l'on perturbe légèrement un champ de vecteurs X ayant une singularité hyperbolique en p , le nouveau champ Y aura

également une singularité hyperbolique en un point q proche de p (cela découle du théorème des fonctions implicites) et il existera un homéomorphisme h d'un voisinage U de p sur un voisinage V de q transportant le flot de X sur le flot de Y , donc les courbes intégrales orientées de X sur les courbes intégrales orientées de Y (on dit que X est *localement structurellement stable* en p). Pour que cela soit correct, il faut que la perturbation soit petite ainsi que toutes ses dérivées partielles d'ordre un.

Remarque. On peut se demander quel est ici l'analogie du théorème de stabilité locale des fonctions au voisinage d'un point où les

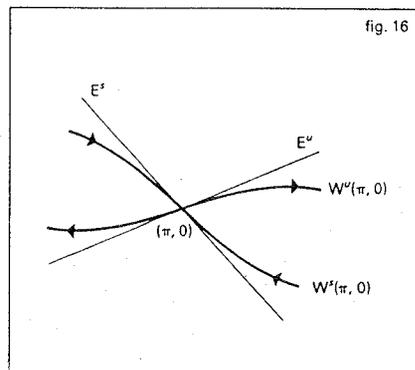


fig. 16

dérivées partielles ne sont pas toutes nulles, conséquence immédiate du théorème des fonctions implicites. C'est le théorème de la *boîte de flot* (*flow-box*), également conséquence du théorème des fonctions implicites, qui affirme qu'au voisinage d'un point p où il ne s'annule pas, un champ de vecteurs est différentiablement conjugué à un champ de vecteurs constant (fig. 17) et est donc localement structurellement stable.

Nous pouvons introduire maintenant la notion globale de *stabilité structurelle*. Appelons deux équations (champs de vecteurs) *topologiquement équivalentes* s'il existe un homéomorphisme (global) transportant les courbes intégrales orientées (mais non paramétrées) de l'une sur les courbes intégrales orientées de l'autre (demander que les paramétrages soient préservés est trop exigeant, les périodes des orbites périodiques seraient par exemple des invariants). A partir de ce que nous venons de dire, il est possible de montrer que les diverses équations (P₂) obtenues en faisant varier $\rho > 0$ sont topologiquement équivalentes; cet exemple montre bien les limitations de cette notion, puisqu'une distinction telle qu'amortissement avec ou sans oscillation lui échappe. Appelons une équation *structurellement stable* si toute équation assez proche (au sens discuté plus haut dans les problèmes locaux) lui est topologiquement équivalente. Cette propriété concerne l'ensemble du portrait de phase (c'est-à-dire le système dynamique) et non pas une courbe intégrale (c'est-à-dire un mouvement) particulière. Sa définition remonte à Andronov et Pontryaguine qui parlaient de systèmes grossiers (1937). Les équations (P₂) sont structurellement stables pour $\rho \neq 0$ alors que l'équation (P₁) ($\rho = 0$) ne l'est pas. Lorsque dans une famille d'équations on en rencontre une qui n'est pas structurellement stable, on dit qu'il y a *bifurcation*: le portrait de phase change brusquement de nature; c'est le cas pour $\rho = 0$ dans la famille des équations (P₂) où ρ passerait d'une valeur positive à une valeur négative.

On voit facilement qu'au niveau local une condition nécessaire de stabilité structurelle est que toutes les singularités de l'équation soient hyperboliques. Une première source de bifurcations est donc fournie par les singularités non hyperboliques (comme (0, 0)

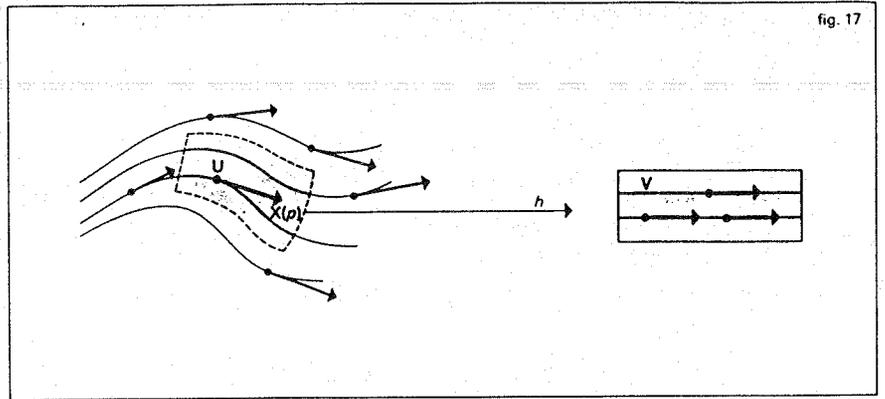


fig. 17

à la base de tant de développements dans la théorie des systèmes dynamiques; elle s'écrit :

(N₃) $\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 \sin x - f_\mu(x) \frac{dx}{dt}$

c'est-à-dire :

(P₃) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = -\omega^2 \sin x - f_\mu(x)y \end{cases}$

3 Bifurcation de cycles-limites et auto-oscillations

Si, au pendule avec frottement du chapitre précédent, on fournit un peu d'énergie lors de chaque passage par la position d'équilibre inférieure, on peut s'attendre à ce qu'une oscillation se maintienne sans amortissement.

Dans l'espace de phase, une telle oscillation correspond asymptotiquement à un *cycle-limite* stable, premier exemple d'un *attracteur* qui ne soit pas un équilibre. Il semble que ce soit lord Rayleigh qui ait, en 1877, écrit la première équation de ce type à propos de sa théorie des instruments à archet. L'équation (N₃) correspondante est en rapport étroit avec la célèbre équation de Van der Pol (1920) :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \mu(x^2 - 1) \frac{dx}{dt} + x = 0,$$

Le (petit) paramètre μ est destiné à mettre en évidence l'apparition par bifurcation du cycle limite; quant à f_μ c'est une fonction périodique dont le graphe entre $-\pi$ et $+\pi$ est représenté sur la figure 18 pour diverses valeurs de μ proches de 0 : en dehors d'un voisinage de 0, $f_\mu(x) = \rho$ comme dans le chapitre précédent; au voisinage de 0, on pourra supposer que $f_\mu(x) = x^2 - \mu$.

$$(N_3) \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 \sin x - f_\mu(x) \frac{dx}{dt}$$

c'est-à-dire :

$$(P_3) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = -\omega^2 \sin x - f_\mu(x)y \end{cases}$$

La figure 18 indiquée la forme du graphe de $F_\mu(x) = \int_0^x f_\mu(t) dt$ (qui coïncide avec le déploiement versel de la singularité (1/3) x^3 au voisinage de 0).

Si H est défini comme dans les chapitres précédents, on constate que :

$$\frac{d}{dt}(H(x(t), y(t))) = -f_\mu(x)y^2$$

le long d'une courbe intégrale $(x(t), y(t))$ de (P₃). Si $\mu < 0$, le comportement des courbes intégrales est donc qualitativement le même que dans le chapitre 2 : l'équilibre (0, 0) est asymptotiquement stable; si $\mu > 0$, H ne décroît le long d'une courbe intégrale de (P₃) qu'en dehors d'une étroite bande axée sur la génératrice $x = 0$ du cylindre.

Si $|\mu|$ est assez petit, il est facile de montrer que le comportement qualitatif de la variété stable de l'équilibre $(\pi, 0)$ ne change pas lorsque μ passe d'une valeur négative à une valeur positive. Pour étudier ce qui se passe au voisinage de (0, 0) il est commode de faire sur l'équation (P₃) (déroulée dans R²) le changement de variables (non périodique en x) :

$$z = y + F_\mu(x).$$

C'est l'analogue de celui qui permet à Liénard d'étudier l'équation de Van der Pol; on obtient l'équation :

$$(Q_3) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = z - F_\mu(x) \\ \frac{dz}{dt} = -\omega^2 \sin x \end{cases}$$

dans laquelle on peut supposer que :

$$F_\mu(x) = \frac{x^3}{3} - \mu x$$

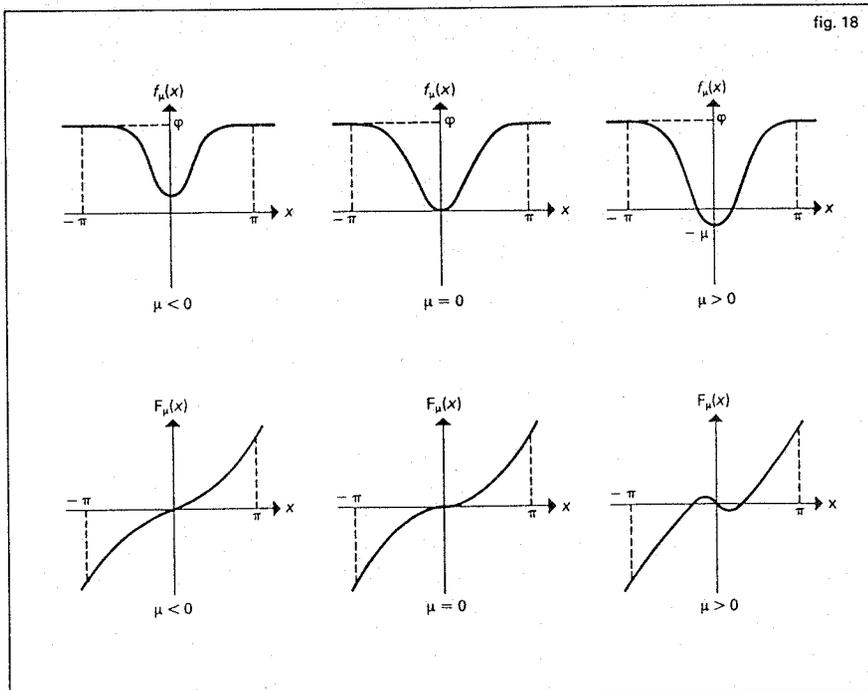


fig. 18

pourvu qu'on ne s'intéresse qu'à des morceaux de courbes intégrales pour lesquels $|x|$ reste assez petit.

On notera (Q_3) l'équation ainsi obtenue :

$$(Q_3) \begin{cases} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dz}{dt} \end{cases} = \begin{pmatrix} \mu & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{x^3}{3} \\ \omega^2(x - \sin x) \end{pmatrix}$$

Pour $|\mu| < 2\omega$ (ce qu'on suppose évidemment), les valeurs propres de l'équation linéarisée en $(0, 0)$ sont :

$$\lambda_\mu = \frac{\mu}{2} + i\sqrt{\omega^2 - \frac{\mu^2}{4}}$$

et $\bar{\lambda}_\mu$, associées par exemple aux vecteurs propres $e_\mu = (\lambda_\mu, -\omega^2)$ et \bar{e}_μ . Dans la base $\{e_\mu, \bar{e}_\mu\}$ un vecteur réel (x, z) a des coordonnées de la forme $\xi, \bar{\xi}$, où :

$$\xi = \frac{z\bar{\lambda}_\mu + \omega^2 x}{\omega^2(\lambda_\mu - \bar{\lambda}_\mu)} = \frac{-z + i\omega x}{2\omega^2} + O(|\mu|);$$

Il suffit de connaître ξ pour repérer un tel vecteur, ce qui revient à choisir une identification de \mathbb{R}^2 avec \mathbb{C} . L'équation linéarisée s'écrit alors :

$$\frac{d\xi}{dt} = \lambda_\mu \xi;$$

si on remplace ξ par $\eta = \lambda_\mu \xi$, l'équation (Q_3) devient :

$$(Q_3) \begin{cases} \frac{d\eta}{dt} = \lambda_\mu \eta + \frac{\lambda_\mu}{2i\sqrt{\omega^2 - \frac{\mu^2}{4}}} \\ \left[-\frac{(\eta + \bar{\eta})^3}{3} + \bar{\lambda}_\mu(\eta + \bar{\eta} - \sin(\eta + \bar{\eta})) \right] \\ = \lambda_\mu \eta + \frac{1}{2i\sqrt{\omega^2 - \frac{\mu^2}{4}}} \\ \left(\frac{\omega^2 - \lambda_\mu}{6 - \frac{\lambda_\mu}{3}} \right) (\eta + \bar{\eta})^3 + O(|\eta|^5). \end{cases}$$

Enfin on remarque, comme l'a fait Poincaré dans sa Thèse à propos du problème de linéarisation évoqué au chapitre 1, qu'un changement de variables bien choisi de la forme :

$$\xi = \eta + \sum_{k+l=3} \gamma_{kl} \eta^k \bar{\eta}^l$$

transforme cette équation en :

$$(Q_3) \frac{d\xi}{dt} = \lambda_\mu \xi + \frac{1}{2i\sqrt{\omega^2 - \frac{\mu^2}{4}}} \left(\frac{\omega^2 - \lambda_\mu}{6 - \frac{\lambda_\mu}{3}} \right) \xi |\xi|^2 + O(|\xi|^4)$$

(c'est la présence de la résonance $\lambda_0 = 2\lambda_0 + \bar{\lambda}_0$ qui empêche l'annulation du terme en $|\xi|^2$).

Si on oublie les termes d'ordre supérieur ou égal à quatre dans le développement de Taylor, on obtient une équation :

$$(Q_3) \frac{d\xi}{dt} = \lambda_\mu \xi + \frac{1}{2i\sqrt{\omega^2 - \frac{\mu^2}{4}}} \left(\frac{\omega^2 - \lambda_\mu}{6 - \frac{\lambda_\mu}{3}} \right) \xi |\xi|^2$$

invariante par rotation (le remplacement de ξ par $e^{i\alpha}\xi$ ne change pas la forme de l'équation); on dit que (Q_3) est une forme normale approchée de (Q_3) . L'invariance rend évidente la détermination d'éventuelles orbites périodiques de (Q_3) entourant $(0, 0)$: celles-ci ne peuvent être que des cercles

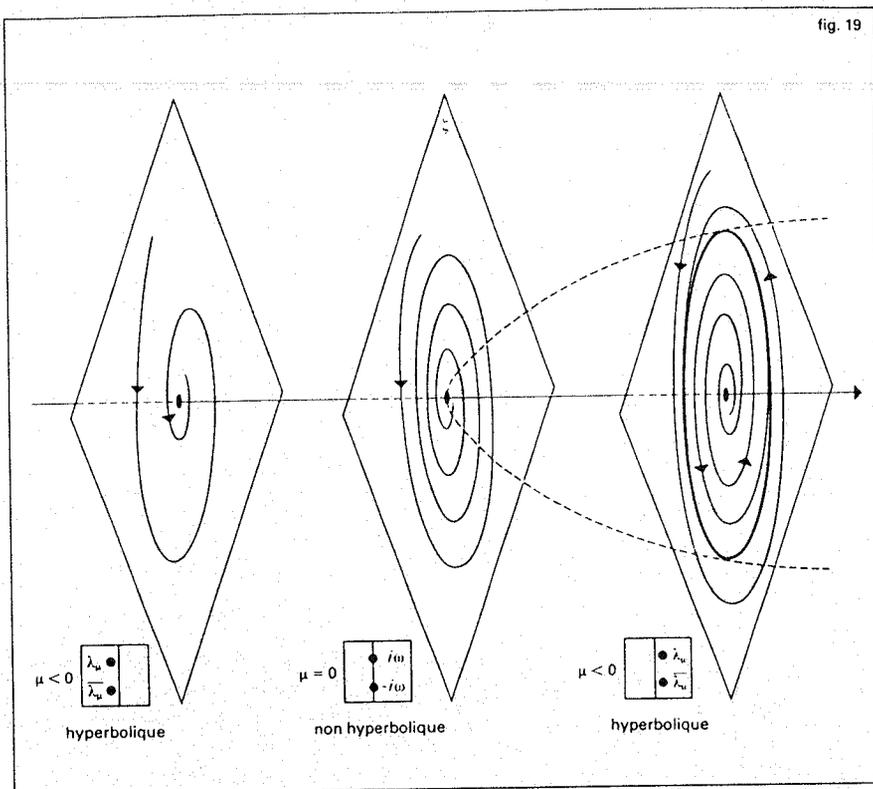


fig. 19

centrés en $(0, 0)$; en écrivant l'orthogonalité de ξ et $\frac{d\xi}{dt}$, on obtient $|\xi|^2 = 3\mu$. Pour $\mu > 0$, (Q_3) possède donc une orbite périodique qui est un cercle de centre $(0, 0)$ et de rayon $\sqrt{3\mu}$ (dans le plan complexe de la variable ξ).

La figure 19 indique les portraits de phase de (Q_3) pour diverses valeurs de μ proches de 0 (on a représenté ces portraits de phase dans l'espace produit $\mathbb{R} \times \mathbb{C}$ pour faire apparaître la rapide croissance de la taille de l'orbite périodique en fonction du paramètre ξ et on a mis dans un encart le spectre de l'équation linéarisée en $\xi = 0$).

Pour $\mu < 0$, $\xi = 0$ est un attracteur ponctuel (équilibre asymptotiquement stable); c'est encore vrai pour $\mu = 0$, mais avec une attraction beaucoup moins forte (due seulement aux termes non linéaires du développement de Taylor); pour $\mu > 0$, $\xi = 0$ est devenu un répulseur, et c'est l'orbite périodique venant de naître qui attire asymptotiquement les courbes intégrales (attracteur périodique ou cycle-limite).

Il se trouve qu'on peut montrer que les termes négligés en passant de (Q_3) à (Q_3) ne changent pas le comportement qualitatif des courbes intégrales dans un voisinage de $(0, 0)$ (uniforme en μ pourvu que $|\mu|$ soit assez petit) : cela vient essentiellement de ce que la force de l'attraction de l'orbite périodique de (Q_3) pour $\mu > 0$ est assez grande par rapport à la perturbation qui fait passer de (Q_3) à (Q_3) ; techniquement, on peut regarder comment se transforme par le générateur φ_1 du flot $(\varphi_t)_{t \in \mathbb{R}}$ de (Q_3) des courbes fermées voisines de l'orbite périodique de (Q_3) et montrer que la transformation ainsi définie est une contraction dans un espace de courbes régulières bien choisi; l'unique point fixe de cette contraction est une orbite périodique de (Q_3) ; cette méthode de transformées de graphes remonte à J. Hadamard et joue un rôle important dans la recherche de sous-variétés invariantes normalement hyperboliques d'un flot (c'est-à-dire

préservées par tous les φ_t et telles que les répulsions ou attractions dans les directions normales l'emportent sur celles qui existent éventuellement dans les directions tangentielles).

Si $\mu > 0$ est assez petit, cette orbite périodique de (Q_3) se trouve tout entière dans une région où (Q_3) et (Q_3) coïncident, ce qui montre l'existence d'une orbite périodique pour (Q_3) , donc pour (P_3) .

En travaillant un peu plus, on prouve que (Q_3) (donc (P_3)) ne possède pas d'autre orbite périodique (cela découle de ce qui précède au voisinage de $(0, 0)$ et plus généralement d'un raisonnement de monotonie analogue à celui qu'on fait classiquement pour l'équation de Van der Pol, cf. Lefschetz, *Differential Equations, Geometric Theory*).

On a esquissé sur la figure 20 le portrait de phase de l'équation (P_3) pour $\mu > 0$ petit : pour presque toute donnée initiale, le mouvement asymptotique est une oscillation non amortie de période proche de $\frac{2\pi}{\omega}$ et dont

l'amplitude est bien déterminée, contrairement à ce qui se passe pour le pendule sans frottement.

L'apparition d'un cycle limite par déstabilisation d'un équilibre est appelée dans la littérature *bifurcation de Hopf* (bifurcation d'Andronov chez certains auteurs russes); elle et ses généralisations (apparition de tores invariants sur lesquels les courbes intégrales sont presque quasi périodiques) jouent un grand rôle dans les modèles décrivant l'établissement de la turbulence hydrodynamique à partir d'un régime laminaire lorsque varie un certain paramètre (le nombre de Reynolds par exemple).

Remarquons qu'il s'agit d'un problème de perturbation, de caractère local, donc susceptible d'une approche analytique. Peut-être est-il bon de comprendre exactement ce qu'on perturbe et, pour cela, de contempler un instant la situation dégénérée dans laquelle $f_\mu(x)$ est remplacé au voisinage de 0 par la fonction constante égale à $-\mu$, tout en valant ρ hors d'un voisinage un peu plus

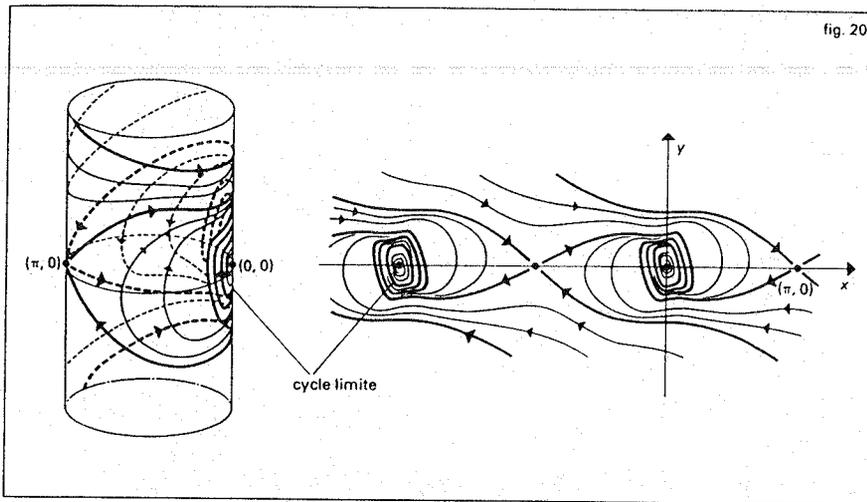


fig. 20

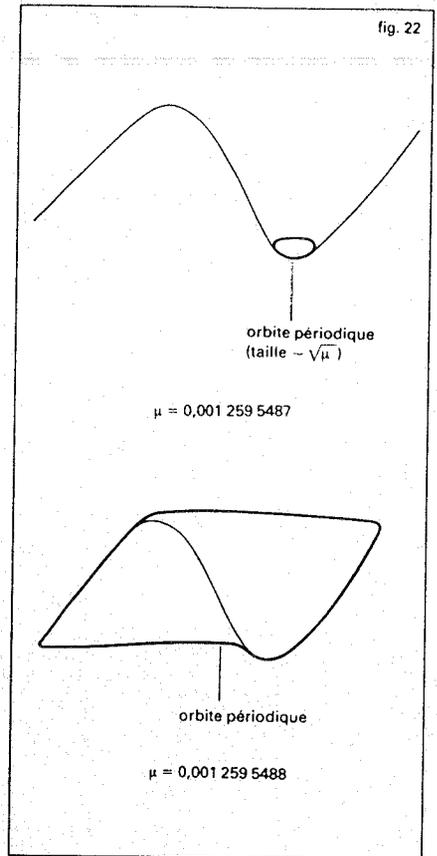


fig. 22

grand. L'équation (Q_3) est alors remplacée par l'équation :

$$\frac{d\xi}{dt} = \lambda_\mu \xi - i \frac{\omega^2}{12 \sqrt{\omega^2 - \frac{\mu^2}{4}}} |\xi|^2,$$

et la figure 19 est remplacée par la figure 21 (qui géométriquement ne se distingue pas de la figure correspondant à la famille d'équations linéaires $\frac{d\xi}{dt} = \lambda_\mu \xi$).

On constate que le rôle de la partie réelle du coefficient de $|\xi|^2$ dans (Q_3) a été de courber en un paraboloïde dans la direction des μ positifs le plan $\mu = 0$ entièrement rempli d'orbites périodiques de l'équation :

$$\frac{d\xi}{dt} = i\omega \left(1 - \frac{1}{12} |\xi|^2\right) \xi.$$

Ce sont en quelque sorte les orbites périodiques de cette équation particulière (ou même de l'équation linéarisée $\frac{d\xi}{dt} = i\omega \xi$ qui don-

nent naissance à l'ensemble des orbites périodiques des diverses équations (Q_3) pour μ positif.

Le théorème de bifurcation de Hopf assure que la situation décrite sur l'exemple se produit « en général » (au renversement simultané du temps et du paramètre près) lorsque, en fonction d'un paramètre μ , le spectre de l'équation linéarisée en un équilibre comporte un couple de valeurs propres imaginaires conjuguées traversant l'axe imaginaire. Cela vient de ce qu'« en général » la partie réelle des termes non linéaires significatifs de la forme normale est non nulle. Récemment, Alexander et Yorke ont montré que l'existence dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ d'une famille à un paramètre d'orbites périodiques des équations de la famille (fig. 19 et 21) ne dépend que de l'hypothèse sur les spectres et est de nature purement topologique (cf. *infra*, Deuxième excursion topologique; ce ne sera plus le cas pour la bifurcation d'une orbite périodique en un tore invariant); curieusement, la démonstration fait intervenir la fibration de Heinz Hopf (celui de la

bifurcation étant Eberhart). Notons enfin que la théorie des *variétés centrales* fournit des généralisations de ce théorème à \mathbb{R}^n et même à des espaces de dimension infinie, ce qui permet de l'appliquer à l'équation de Navier-Stokes (voir par exemple les travaux de Iooss).

Remarque 1. En fournissant de l'énergie de manière constante, on peut entretenir un mouvement de rotation du pendule.

L'équation correspondante :

$$(N'_3) \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 \sin x - \rho \frac{dx}{dt} + a$$

intervient dans les modèles de moteurs électriques synchrones.

On peut montrer par exemple que, si $a > 0$ et $\rho > 0$ sont assez petits et a assez grand par rapport à ρ , le portrait de phase contient un unique cycle limite faisant le tour du cylindre.

Remarque 2. La famille d'équations :

$$\epsilon \frac{d^2x}{dt^2} + (x^2 - 1) \frac{dx}{dt} + x - 1 + \mu = 0;$$

très proches de l'équation de Van der Pol, montre bien le caractère local des affirmations du théorème de bifurcations de Hopf. Le changement de variables :

$$z = \epsilon \frac{dx}{dt} + \frac{x^3}{3} - x$$

la transforme en :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{1}{\epsilon} \left(z - \frac{x^3}{3} + x \right) \\ \frac{dz}{dt} = 1 - \mu - x. \end{cases}$$

Une bifurcation de Hopf se produit pour $\mu = 0$ au point $x = 1, z = -2/3$. Si $\epsilon > 0$ est assez proche de 0, la croissance en $\sqrt{\mu}$ de la taille de l'orbite périodique qui naît est complètement occultée par une croissance

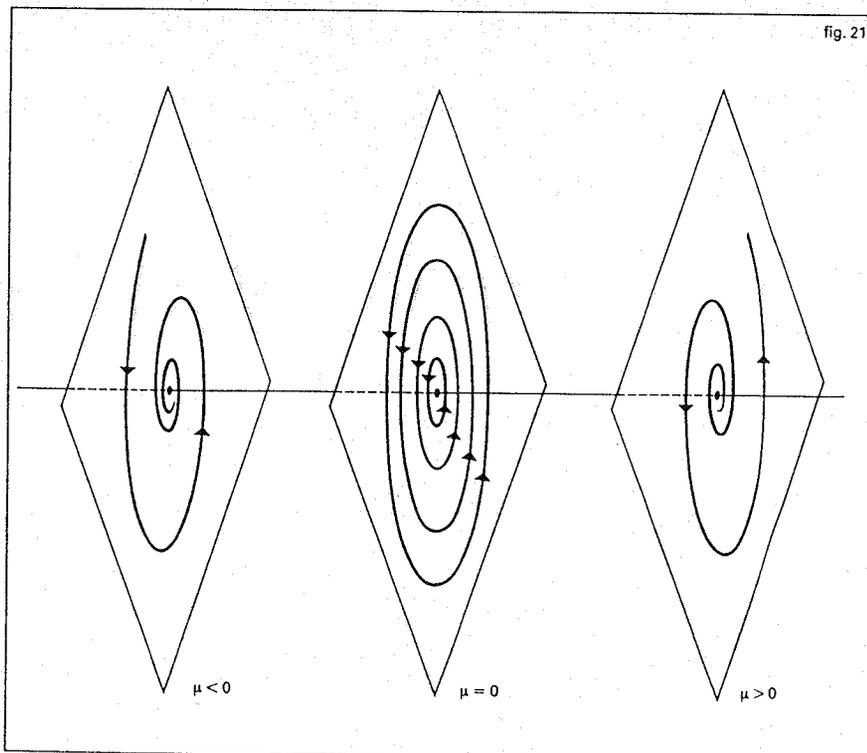


fig. 21

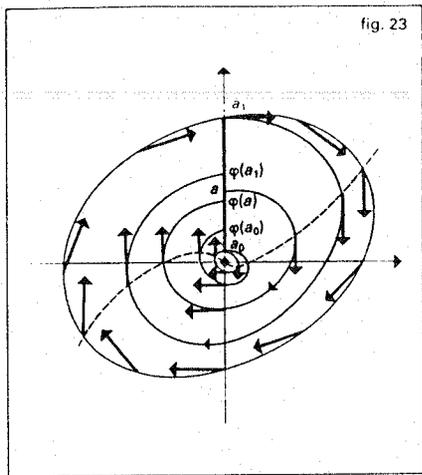


fig. 23

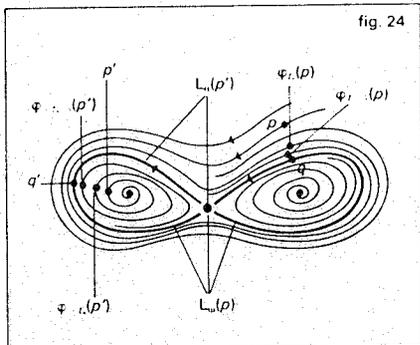


fig. 24

infiniment plus rapide qui se produit peu après et qui est due à la forme *perturbation singulière* des équations (à la limite $\epsilon = 0$ on obtient des équations dont l'ordre s'est abaissé). La figure 22 correspond au cas où $\epsilon = 0,01$; à gauche, $\mu = 0,001\ 259\ 5487$ et, à droite, $\mu = 0,001\ 259\ 5488$. Ce phénomène, baptisé *effet canard*, n'a pu être bien élucidé que grâce aux méthodes de l'analyse non standard qui permettent de supposer ϵ infiniment petit et non nul (travaux de Benoît-Callot-Diener; cf. ANALYSE NON STANDARD).

Trois excursions topologiques

Première excursion topologique : les théorèmes de Poincaré-Bendixson et Poincaré-Hopf

Revenons à l'équation (Q₃) : il eût été possible de prouver l'existence d'une orbite périodique pour $\mu > 0$ par d'autres méthodes analytiques, par exemple la méthode de moyennisation rencontrée au chapitre 1 ou la réduction à l'étude locale d'un difféomorphisme de \mathbb{R} au voisinage d'un point fixe, mais aussi par une méthode purement topologique en constatant l'existence, autour de $(0, 0)$, d'un anneau A (homéomorphe au produit topologique $S^1 \times I$ du cercle par un intervalle) dans lequel « entre » le champ de vecteurs (Q₃) (fig. 23).

On constate que chaque courbe intégrale issue d'un point du rayon $I = A \cap \{(x, z) \in \mathbb{R}^2, x = 0, z > 0\}$ revient ultérieurement couper ce rayon, définissant une application de premier retour (ou application de Poincaré) φ de I dans I . Les théorèmes généraux sur les équations différentielles prouvent la continuité (et même la différentiabilité) de cette application. Si $a = a_0$ est sur le bord inférieur de A , $\varphi(a_0) > a_0$; si $a = a_1$ est sur le bord supérieur, $\varphi(a_1) < a_1$; un argument de continuité montre alors l'existence d'au moins un point \bar{a} de I où $\varphi(\bar{a}) = \bar{a}$, c'est-à-dire d'une orbite périodi-

que de (Q₃) entièrement située dans l'anneau A . Remarquons que cette partie de l'argument se généralise aux dimensions supérieures, toute application continue d'un disque de dimension n dans lui-même ayant au moins un point fixe (théorème de Brouwer). Bien entendu, il faut des renseignements plus précis de monotonie sur φ , liés à la dimension un, pour conclure à l'unicité de l'orbite périodique.

Ce qui précède est un exemple très particulier des raisonnements qui mènent au théorème de Poincaré-Bendixson, spécifique des équations dans le plan, et dont l'inexistence en dimension supérieure nous vaudra de rencontrer des *attracteurs étranges*.

Pour énoncer ce théorème, il faut introduire la notion d'ensemble limite d'un flot $(\varphi_t)_{t \in \mathbb{R}}$ dans \mathbb{R}^2 (qui s'étend immédiatement au cas d'une variété quelconque) : pour tout point p de \mathbb{R}^2 , on note :

$$L_\omega(p) = \{q \in \mathbb{R}^2, \exists 0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n < \dots, \lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = +\infty \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi_{t_n}(p) = q\}$$

$$L_\alpha(p) = \{q \in \mathbb{R}^2, \exists 0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n < \dots, \lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = +\infty \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi_{-t_n}(p) = q\}$$

$L_\omega(p)$ (resp. $L_\alpha(p)$) est appelé *ensemble ω -limite* (resp. *ensemble α -limite*) du point p . Le théorème affirme qu'étant donné un flot de difféomorphismes continûment dérivables de \mathbb{R}^2 , tout ensemble limite compact non vide et ne contenant pas d'équilibre ne peut être qu'une orbite périodique.

Plus généralement, s'il n'y a qu'un nombre fini de singularités (équilibres) chaque ensemble limite est ou bien une orbite périodique ou bien l'union de singularités et de courbes intégrales $\varphi_t(x)$ telles que leurs limites $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \varphi_t(x)$ soient des singularités (fig. 24).

Ce théorème n'est vrai que sur le plan et la sphère; sur le tore, par exemple, il existe des champs de vecteurs sans singularité dont toutes les courbes intégrales sont denses. Enfin, si l'on remplace l'ensemble des courbes intégrales d'un flot sur \mathbb{R}^2 par un *feuilletage* de codimension 1 avec singularités (décomposition du plan en union disjointe de courbes et de points [singularités] ressemblant à un flot en dehors des singularités), on obtient des comportements récurrents plus complexes pouvant comporter des courbes denses; introduits par Thurston dans ses études du groupe des difféomorphismes d'une surface, de tels feuilletages ont été

systématiquement étudiés par Rosenberg sous le nom suggestif de *labyrinthes*. On trouvera dans la Thèse de Levitt (1983) un panorama de l'étude dynamique des feuilletages des surfaces.

D'autres contraintes topologiques très générales existent, fondées sur l'importante notion d'*indice* d'une singularité isolée d'un champ de vecteurs X , introduite implicitement par Poincaré dès 1880 (avec un signe opposé au nôtre). Cet indice est le nombre algébrique de tours (dans le sens trigonométrique) qu'effectue la direction orientée du vecteur $X(x, y)$ quand (x, y) parcourt dans le sens trigonométrique un cercle centré sur la singularité et assez petit pour que le vecteur ne s'annule en aucun de ses points.

La figure 25 donne quelques exemples de calculs d'indice.

Un peu d'homotopie (cf. TOPOLOGIE ALGÈBRE) permet de montrer que si, par déformation continue du champ, on passe d'un groupe de singularités isolées à un autre, la somme de leurs indices reste constante. Il n'est alors pas étonnant que les indices des singularités hyperboliques soient ± 1 , car toute singularité isolée peut être transformée en une réunion d'un nombre fini de singularités hyperboliques par une petite déformation (fig. 26, inspirée par le déploiement versel de l'ombilic elliptique, cf. SINGULARITÉS DES FONCTIONS DIFFÉRENTIABLES); ces dernières sont en quelque sorte les briques élémentaires qui, par déformation et coalescence, permettent de construire les singularités plus complexes (donc moins stables).

Soit \mathcal{D} un compact connexe de \mathbb{R}^2 bordé par un nombre fini de courbes fermées (sous-variété compacte à bord). Supposons que le champ X « entre » dans \mathcal{D} (en particulier, X ne s'annule pas sur le bord de \mathcal{D} : fig. 27, relative à une seule singularité d'indice $2 - 3 = -1$).

Le théorème de Poincaré-Hopf assure dans ce cas particulier que, si X ne s'annule dans \mathcal{D} qu'en des points isolés, la somme des indices de ses singularités dans \mathcal{D} est égale à $2 - n$, où n est le nombre de composantes dans le bord de \mathcal{D} ; en particulier, si \mathcal{D} n'est pas un anneau, X doit avoir au moins une singularité dans \mathcal{D} . La notion d'indice a un sens pour un champ de vecteurs sur une surface (et même sur une variété quelconque). Le théorème général, démontré par Poincaré en 1880 pour la sphère, en 1885 pour les surfaces (sous des hypothèses de « généricité »), et par Hopf en 1926 pour

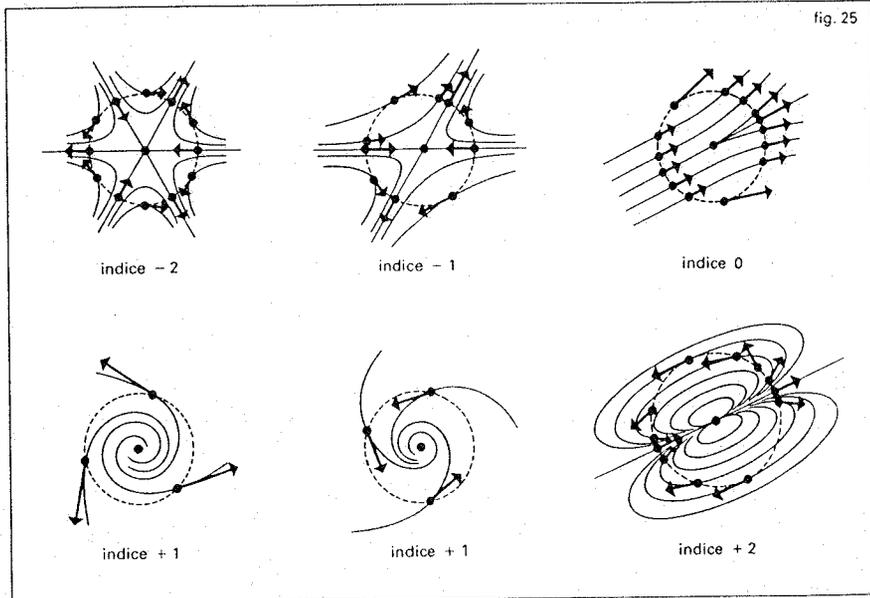


fig. 25

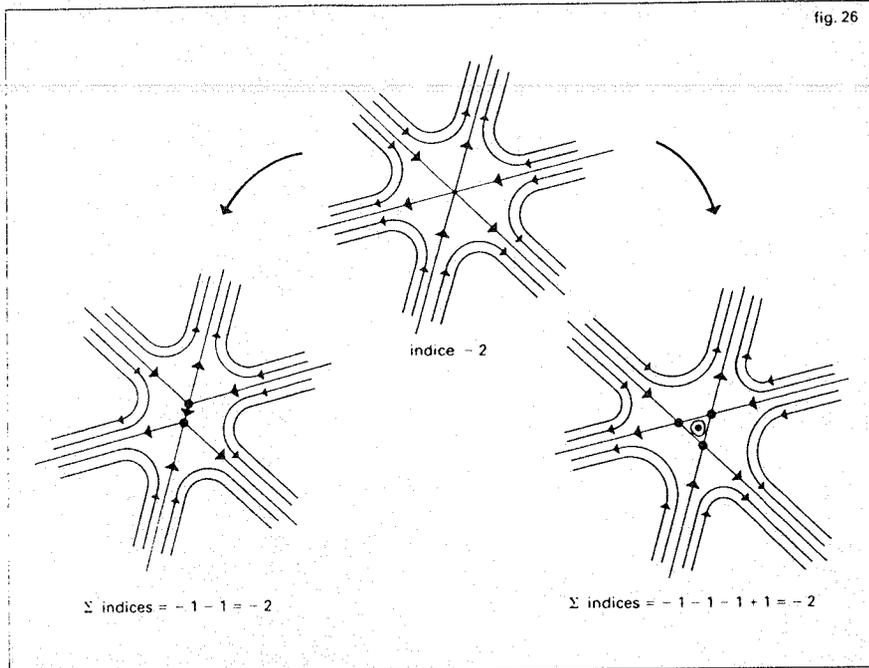


fig. 26

les variétés de dimension quelconque, affirme l'égalité entre la somme des indices des singularités (supposées toutes isolées) d'un champ de vecteurs sur une variété compacte M et la caractéristique d'Euler-Poincaré $\chi(M)$ de M (on comparera à l'énoncé analogue pour les fonctions de Morse). Si M est une surface, $\chi(M)$ est la somme alternée du nombre de sommets moins le nombre d'arêtes plus le nombre de faces d'une triangulation de M ; par exemple $\chi(S^2) = 2$ pour la sphère (regarder un tétraèdre) : tout champ de vecteurs sur S^2 a donc au moins une singularité (on ne peut pas peigner une sphère sans faire un épi). Par contre $\chi(T^2) = 0$ pour le tore et il existe effectivement des champs de vecteurs sans singularité sur le tore ; nous les retrouverons au chapitre 6.

Deuxième excursion topologique : indice de Fuller, théorème de Seifert, et démonstrations topologiques des théorèmes de bifurcation d'orbites périodiques

De l'indice d'un point singulier isolé d'un champ de vecteurs X à l'indice d'un point fixe isolé p d'une application continue f d'une variété M dans elle-même, il n'y a qu'un pas : on se ramène à $M = \mathbb{R}^n$ par le choix d'une carte locale et on calcule l'indice du champ de vecteurs qui, à q voisin de p , associe le vecteur $f(q) - q \in \mathbb{R}^n$. Une homotopie évidente montre que l'indice de p comme singularité d'un champ X est égal à l'indice de p comme point fixe de φ_t , $(\varphi_t)_t \in \mathbb{R}$ étant le flot associé à X et t_0 un réel non nul quelconque. Le théorème de Poincaré-Hopf se généralise : si tous les points fixes d'une application f d'une variété compacte sont isolés, la somme de leurs indices est égale au nombre de Lefschetz de f , intersection homologique dans $M \times M$ du graphe de f et de la diagonale (graphe de l'identité), et donc égale à la caractéristique d'Euler $\chi(M)$ si f est homotope à l'identité.

Considérons maintenant le couple (T, \mathcal{O}) formé d'un réel positif T et d'une orbite périodique isolée de période T du champ de vecteurs X sur la variété M . Soit Σ un petit morceau d'hypersurface coupant transversalement \mathcal{O} au point p , et soit f le difféomorphisme local de Σ qui à q associe le premier point où l'orbite de q rencontre à nouveau Σ (comparer à la fig. 28). Si T_0 est la période

minimale de \mathcal{O} et si $T = nT_0$ (n entier positif, bien entendu), on définit l'indice de Fuller $i(T, \mathcal{O})$ comme étant l'indice du point fixe p de f divisé par n . Étant donné un sous-ensemble compact Ω de $]0, +\infty[\times M$ dont le bord ne contient aucun couple (t, x) tel que l'orbite de x soit périodique de période t , et dont l'intérieur ne contient que des orbites périodiques (T, \mathcal{O}) isolées, la somme des indices de Fuller $i(T, \mathcal{O})$ correspondants peut être définie homologiquement et est invariante par homotopie du champ X tant que la condition au bord reste remplie (théorème de Fuller, 1967). La nécessité de travailler dans le produit de M par $]0, +\infty[$ vient de ce que, si la période des orbites périodiques considérées n'est pas bornée, on ne peut espérer aucune invariance, les orbites pouvant disparaître par bifurcation de Hopf (période minimale devenant brutalement 0) ou dans le bleu du ciel (période minimale tendant vers l'infini).

Ce théorème a permis à Fuller de redonner une démonstration du théorème de Seifert (1950) affirmant que tout champ de vecteurs sur la sphère de dimension trois suffisamment proche du champ de Hopf possède au moins une orbite périodique (les orbites du champ de Hopf sont les cercles de Clifford, fibres de la fibration de Hopf H de S^3 sphère unité de \mathbb{C}^2 sur la sphère de Riemann $S^2 = P_1(\mathbb{C})$, définie par $H(z_1, z_2) = [z_1, z_2]$ en coordonnées homogènes, c'est-à-dire les intersections avec S^3 des droites complexes de \mathbb{C}^2).

On ne sait toujours pas si un champ de vecteurs C^∞ sur la sphère de dimension trois doit nécessairement posséder une orbite périodique (cf. *infra*, chap. 6).

Le théorème de Fuller a été récemment (1977) utilisé par Chow, Mallet-Paret et Yorke pour donner une nouvelle démonstration topologique du théorème de bifurcation de Hopf, améliorant celle d'Alexander et Yorke à laquelle on a fait allusion plus haut ; dans son esprit, cette démonstration est analogue aux démonstrations qu'a données Rabinowitz de théorèmes de bifurcation de points singuliers. L'existence dans l'espace produit $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ (\mathbb{R} espace du paramètre μ) d'une famille à un paramètre d'orbites périodiques des équations :

$$\frac{dx}{dt} = f_\mu(x), f_\mu(0) = 0,$$

définies dans \mathbb{R}^n , est assurée dès qu'il existe une valeur propre $i\omega(0)$ de la dérivée $Df_\mu(0)$ qui vérifie $r_\mu - r_\mu \neq 0$, où $r_\mu(r_-)$ est le nombre de valeurs propres de $Df_\mu(0)$ traversant l'axe imaginaire en $i\omega(0)$ de gauche à droite (droite à gauche) lorsque μ passe d'une valeur négative à une valeur positive.

Ce type de théorème est assez puissant pour impliquer par exemple les généralisations qu'ont données Weinstein et Moser du théorème de Liapounov sur l'existence d'orbites périodiques dans tout voisinage d'un point singulier d'un champ de vecteurs hamiltonien non dégénéré X_0 dont les surfaces d'énergie sont compactes (pour les définitions, cf. *infra*, chap. 4) : l'idée est de construire, en ajoutant un gradient, une famille à un paramètre de champs de vecteurs X satisfaisant aux conditions du théorème et ne pouvant avoir d'orbite périodique que pour $\mu = 0$ (c'est l'exact opposé du théorème de Hopf générique où, l'origine étant un attracteur ou un répulseur, aucune orbite périodique proche de 0 ne peut exister pour $\mu = 0$).

Troisième excursion topologique : structures de contact et équations différentielles implicites

Voici enfin un résultat d'inexistence d'orbites périodiques, conséquence d'un théorème remarquable démontré récemment (1982) par Bennequin.

Soit :

$$f\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right) = 0$$

une équation différentielle « implicite » (par opposition aux équations dans lesquelles dx/dt est « explicite » en fonction de t et x). La recherche de solutions $x = \psi(t)$ d'une telle équation conduit évidemment à des fonctions ψ multiformes et il est naturel de lui substituer la notion plus géométrique de solution obtenue en l'interprétant comme la trace sur la surface Σ d'équation $f(t, x, y) = 0$ de la structure de contact naturelle \mathcal{C} de l'espace des jets $J^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^3$ (cf. SINGULARITÉS DES FONCTIONS DIFFÉRENTIABLES). Cette idée remonte à Lie et Poincaré ; c'est d'ailleurs à ce propos que Poincaré a été amené à considérer des champs de vecteurs sur d'autres surfaces que le plan ou la sphère. Les coordonnées sont ici t (source), x (but), y (dérivée dx/dt), et \mathcal{C} est le champ des noyaux de la 1-forme différentielle (cf. VARIÉTÉS DIFFÉRENTIABLES) $\omega(t, x, y) = y dt - dx$ (penser à $y = dx/dt$), c'est-à-dire le champ de plans qui au point (t_0, x_0, y_0) associe le plan d'équation $y_0(t - t_0) - (x - x_0) = 0$. La dite trace est un champ de droites sur Σ ,

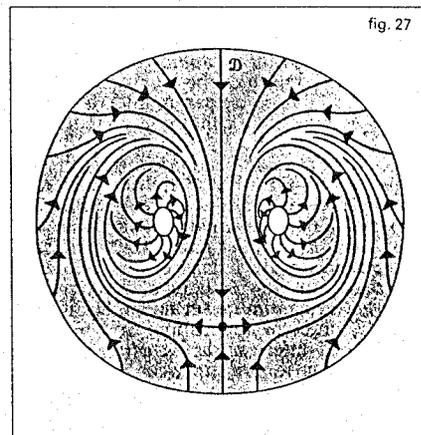


fig. 27

orientable car Σ l'est, dont les « courbes intégrales » (bien définies à la paramétrisation près) sont par définition les « solutions » de l'équation $f(t, x, dx/dt) = 0$. (De même, la considération d'hypersurfaces dans $J^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ conduit à la théorie géométrique des équations aux dérivées partielles du premier ordre.)

La forme ω est une *forme de contact*, autrement dit $\omega \wedge d\omega$ ne s'annule en aucun point (forme volume); d'après le *théorème de Frobenius*, cela implique que le champ de plans \mathcal{C} n'est au voisinage d'aucun point de \mathbb{R}^3 le champ des plans tangents aux feuilles d'un feuilletage de \mathbb{R}^3 par des surfaces : les seules variétés intégrales de l'équation proposée sont des exemples. Le *théorème de Bennequin* affirme que, si Σ est une sphère ou un plan (surface de genre 0) et si une courbe de Legendre tracée sur Σ est homéomorphe à un cercle, il existe un point de la courbe où le plan de \mathcal{C} est tangent à Σ (c'est-à-dire qu'aucune solution de l'équation $f(t, x, dx/dt) = 0$ n'est homéomorphe à un cercle). Ce résultat est assez fort pour impliquer l'existence de structures de contact « exotiques » sur \mathbb{R}^3 , c'est-à-dire de champs de plans localement (analogue du théorème de Darboux sur les formes symplectiques) mais non globalement difféomorphes à la structure \mathcal{C} . Plus précisément, si α est une 1-forme différentielle suffisamment générale sur \mathbb{R}^3 , l'ensemble des points (t, x, y) où $\alpha \wedge d\alpha$ s'annule est une hypersurface régulière S .

Si, en (t_0, x_0, y_0) , le champ \mathcal{A} des noyaux de α est tangent à S , le champ de directions défini par \mathcal{A} sur S possède en ce point une singularité qui, au premier ordre, est un col ou un centre. Dans ce dernier cas, la famille à un paramètre de champs obtenus en prenant les traces de \mathcal{A} sur une famille de surfaces parallèles à S présente, au passage de S , une bifurcation de Hopf; on déduit alors de ce qui précède que la restriction de \mathcal{A} à l'une des composantes connexes (difféomorphes à \mathbb{R}^2) de l'intersection du complémentaire de S avec un voisinage de (t_0, x_0, y_0) est une structure de contact exotique.

4 Perturbations périodiques d'un pendule sans frottement et difféomorphismes du plan préservant les aires

L'application au pendule des chapitres 1 et 2 d'une perturbation dépendant périodiquement du temps introduit une grande complexité de comportement, celle précisément dont Poincaré disait à la fin du troisième tome de ses *Méthodes nouvelles de la mécanique céleste* (chap. XXXIII, p. 389, 1899) : « On sera frappé de la complexité de cette figure que je ne cherche même pas à tracer. Rien n'est plus propre à nous donner une idée de la complication du problème des trois corps et en général de tous les problèmes de dynamique où il n'y a pas d'intégrale uniforme et où les séries de Bohlman sont divergentes. » Dans les quatre-vingts ans écoulés depuis la publication de ces lignes, de grands pas ont été faits vers la compréhension de ces situations, certains prévus par Poincaré, d'autres qui l'auraient certainement surpris (mais auraient fait grand plaisir à Weierstrass); les plus marquants sont le développement, à la suite de Hadamard (1898) et Morse (1921), des méthodes de dynamique symbolique qui ont conduit à l'analyse par Birkhoff, puis Smale, de la dynamique associée à un point homocline, la démonstration par Birkhoff en 1913 du dernier théorème géométrique de Poincaré assurant l'existence de mouvements périodiques sous-harmoniques, enfin, dans les an-

nées cinquante et soixante, le théorème de Kolmogorov, Arnold, Moser (K.A.M.), affiné plus tard par Rüssmann et Herman, qui assure l'existence de familles de mouvements quasi périodiques et résout ainsi le problème de la stabilité des mouvements périodiques elliptiques d'un système hamiltonien à deux degrés de liberté (malheureusement celui qui décrit le système solaire en a plus de deux). La démonstration de ce dernier théorème est rendue très difficile par la présence de *petits dénominateurs* qui font diverger les classiques séries de perturbation (le premier théorème surmontant une difficulté de ce type a été démontré par Siegel en 1942). Un nouveau progrès dans le problème des mouvements quasi périodiques a été accompli récemment par Aubry et Mather à l'aide de méthodes variationnelles inspirées par la physique et rejoignant celles qui ont été utilisées dès 1932 par Hedlund à propos des géodésiques sur un tore riemannien. Notons que, s'il aurait surpris Poincaré et Birkhoff, le théorème de K.A.M. a également surpris la plupart des physiciens, puisqu'il restreint beaucoup les possibilités de validité de l'hypothèse ergodique de Boltzmann.

Les équations étudiées dans ce chapitre et le suivant sont de la forme :

$$\frac{dX}{dt} = f(X, t)$$

où $X = (x, y)$ varie dans \mathbb{R}^2 (ou plutôt dans le cylindre $S^1 \times \mathbb{R}$), et $f: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ vérifie $f(X, t + T) = f(X, t)$ (T est la *période*). Plutôt qu'assimiler une telle équation à un champ de vecteurs dépendant du temps, nous l'écrivons comme un champ de vecteurs autonome (indépendant du temps) sur $\mathbb{R}^2 \times S^1_T$ ou $(S^1 \times \mathbb{R}) \times S^1_T$ (coordonnées X, τ), où $S^1_T = \mathbb{R}/T\mathbb{Z}$ est un cercle de longueur T :

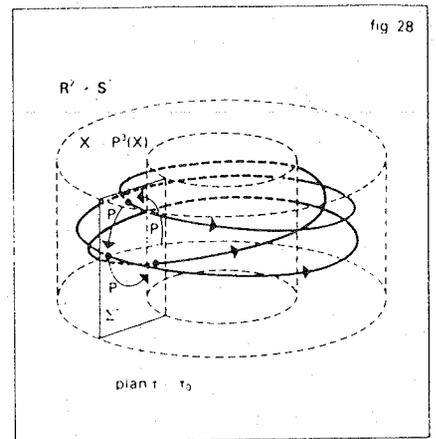
$$(*) \quad \begin{cases} \frac{dX}{d\tau} = f(X, \tau) \\ \frac{d\tau}{d\tau} = 1. \end{cases}$$

Nous ne considérons que des équations telles que la courbe intégrale issue d'un point (X_0, τ_0) recoupe au bout d'un temps T le plan (ou le cylindre) $\tau = \tau_0$ (ce n'est pas automatique, certaines courbes intégrales pourraient se perdre à l'infini); si $(\varphi_t)_{t \in \mathbb{R}}$ est le flot de $(*)$, φ_T induit donc un difféomorphisme P du plan (cylindre) $\tau = \tau_0$ sur lui-même, appelé *application de Poincaré* ou *application de premier retour*. Si on change τ_0 , on remplace P par une application conjuguée $h^{-1} \circ P \circ h$ (h difféomorphisme de \mathbb{R}^2).

La connaissance de P équivaut à la connaissance de $(*)$: à un point fixe de P (c'est-à-dire $P(X_0) = X_0$) correspond une orbite périodique de période T de $(*)$, à un point périodique de période q de P (c'est-à-dire $P^q(X) = X$) correspond une orbite périodique de période qT de $(*)$, appelée *sous-harmonique* (fig. 28 dans le cas où $q = 3$).

Plus généralement, une courbe intégrale de $(*)$ correspond à une *orbite* de P (c'est-à-dire la suite des $P^n(X)$, $n \in \mathbb{Z}$, pour un X dans \mathbb{R}^2) : on est donc amené à considérer P comme un flot à temps discret (remplacement de $(\varphi_t)_{t \in \mathbb{R}}$ par $\varphi_n = P^n$, $n \in \mathbb{Z}$).

Toutes les notions définies pour les flots gardent un sens pour les flots à temps discret, en particulier les notions de stabilité : le spectre de l'équation linéarisée en un équilibre devient le spectre de la dérivée du difféomorphisme en un point fixe; le rôle de l'axe imaginaire est tenu maintenant par le cercle unité : il y a évidemment une exponentielle entre les deux comme on le voit en se rappelant que la solution générale de l'équation différentielle $\frac{dX}{dt} = AX$



est $\varphi_t(X_0) = e^{tA} \cdot X_0$. On peut donc parler de *point fixe hyperbolique* (le spectre de la dérivée ne rencontre pas le cercle unité) ou elliptique (le spectre est sur le cercle unité). Les variétés *stable* et *instable* d'un équilibre hyperbolique, introduites au chapitre 2, ont leurs analogues pour les points fixes hyperboliques; si $P(X_0) = X_0$ et si le spectre de $DP(X_0)$ est formé de deux valeurs propres réelles λ_1, λ_2 vérifiant $0 < |\lambda_1| < 1 < |\lambda_2|$, la variété stable :

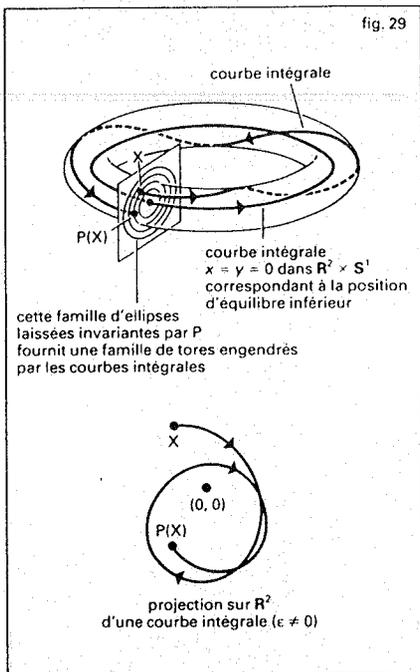
$$W^s(X_0) = \{X \mid \lim_{n \rightarrow +\infty} P^n(X) = X_0\}$$

et la variété instable :

$$W^u(X_0) = \{X \mid \lim_{n \rightarrow -\infty} P^n(X) = X_0\}$$

sont deux courbes lisses injectivement immergées dans \mathbb{R}^2 et laissées invariantes par P : la démonstration (valable également en dimension quelconque) se fait par exemple en utilisant la méthode des *transformées de graphes* évoquée au chapitre 3 à propos de la bifurcation de Hopf. Comme pour les flots, le *théorème de linéarisation de Hartman* fournit un homéomorphisme local h conjuguant P et $DP(X_0)$ au voisinage d'un point fixe hyperbolique (c'est-à-dire $P = h^{-1} \circ DP(X_0) \circ h$); dans le cas de \mathbb{R}^2 , cet homéomorphisme local est continûment différentiable; dans le cas de \mathbb{R}^n il est indéfiniment différentiable pourvu que certaines conditions de non-résonance soient satisfaites par les valeurs propres de P (*théorème de Sternberg*, qui a été récemment étendu aux germes d'action hyperbolique de $\mathbb{Z}^p \times \mathbb{R}^q$, par Dumortier-Roussarie et Chaperon). Dans le cadre holomorphe, les théorèmes de linéarisation de Poincaré et de Siegel ont également leur contrepartie pour les difféomorphismes. On comprend donc très bien la dynamique de P au voisinage d'un tel point fixe; par contre, la dynamique globale associée aux intersections des variétés stables et instables, que rien n'interdit, va amener la situation incroyablement complexe dont parlait Poincaré. Pour les points fixes elliptiques, il n'y a pas de théorème de linéarisation, et le théorème de K.A.M. montrera qu'au voisinage d'un tel point la dynamique de P est en général beaucoup plus riche que celle de $DP(X_0)$ bien qu'elle en retienne quelques traits.

Le saut dans la complexité des phénomènes décrits dans ce chapitre par rapport à ceux des chapitres précédents vient du saut (de deux à trois) de la dimension de l'espace de phase, saut qui se traduit ici par le remplacement d'un flot sur une surface par un difféomorphisme sur cette même surface (\mathbb{R}^2 ou $S^1 \times \mathbb{R}$) : il n'existe pas, par exemple, de théorème jouant le rôle pour les difféomorphismes du plan du théorème de Poincaré-Bendixson : il serait intéressant de savoir s'il



Les équations (N₄), (H), (M) correspondent à des champs de vecteurs dans $\mathbb{R}^2 \times S^1$ dont la divergence est nulle; leurs flots conservent donc le volume, d'où l'on déduit immédiatement que P conserve les aires ($\det P = 1$). De plus, la linéarité de (H) (ou (M)) implique la linéarité de P.

Pour $\epsilon = 0$, l'application de Poincaré P définie par le plan $\tau = 0$ est l'application linéaire de \mathbb{R}^2 (coordonnées $x, y = dx/dt$):

$$P \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \exp T \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos T\omega & \frac{1}{\omega} \sin T\omega \\ -\omega \sin T\omega & \cos T\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Sa trace, égale à $2 \cos T\omega$, est en valeur absolue inférieure à 2 tant que ω n'est pas un multiple entier de π/T ; dans ce cas, le spectre de P est un couple de valeurs propres distinctes imaginaires conjuguées situées sur le cercle unité de \mathbb{C} (P est elliptique). Remarquons que si une application linéaire Q conserve les aires et est proche de P, son spectre aura la même propriété. On en déduit que, si ω n'est pas un multiple entier de π/T , l'équilibre inférieur est stable au sens de Liapunov pour l'équation (M) tant que $|\epsilon|$ est assez petit (fig. 29).

Au contraire, P est l'identité si $\omega = \frac{2k\pi}{T}$,

k entier, moins l'identité si $\omega = \frac{(2k+1)\pi}{T}$,

k entier. Pour ϵ différent de 0, il peut apparaître des intervalles de valeurs de ω proches des multiples entiers de π/T pour lesquelles l'équilibre inférieur devient instable (apparition de valeurs propres réelles $\lambda, 1/\lambda$ pour l'application de Poincaré qui devient hyperbolique): pour le voir, on évalue P en résolvant l'équation par la méthode de variation des constantes et on étudie sa trace; on peut aussi chercher ω en fonction de ϵ de façon que (M) possède une solution périodique non triviale de période T (qui correspond à l'existence d'une valeur propre 1 pour P) ou 2T (valeur propre -1), ce qui fournit la frontière entre les régions elliptiques et hyperboliques (fig. 30); les zones hachurées sont celles où P est hyperbolique). On cherche de telles solutions sous forme de développements en ϵ par une méthode d'identification terme à terme.

L'existence de ces zones hyperboliques montre que l'invariance adiabatique de l'action évoquée à la fin du chapitre 1 n'a pas toujours lieu sur un temps infini dans le cas d'une équation linéaire de la forme :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2(1 + \epsilon \cos \alpha t)x,$$

α petit, bien qu'elle ait lieu sur un temps de l'ordre de $1/\alpha$; en effet, si (ω, ϵ) est dans

une telle zone, l'instabilité a pour conséquence une variation indéfinie de l'action au cours du temps. Si α est petit, ces zones sont très nombreuses, puisqu'elles sont centrées sur les points $\omega = m\alpha/2$ (m entier), $\epsilon = 0$. Arnold a montré qu'une conséquence du théorème de K.A.M. est en fait l'invariance adiabatique de l'action sur un temps infini dès que la non-linéarité de l'équation rend dépendante de l'amplitude la période des oscillations.

Nous revenons maintenant à l'équation non linéaire :

$$(N_4) \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega(t)^2 \sin x,$$

dont nous étions partis, avec par exemple :

$$\omega(t) = \omega \left(1 + \epsilon \cos \frac{2\pi t}{T} \right), \quad \epsilon \text{ petit.}$$

Nous pourrions alternativement considérer une perturbation périodique du pendule conduisant à une équation de la forme :

$$(N'_4) \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 \sin x + g(t),$$

où par exemple :

$$g(t) = \epsilon \cos \frac{2\pi t}{T}, \quad \epsilon \text{ petit.}$$

Lorsque $\epsilon = 0$, l'application de Poincaré $P = P_0$ des champs de vecteurs (*) associés à (N₄) ou (N'₄) dans $(S^1 \times \mathbb{R}) \times S^1_T$ coïncide avec le difféomorphisme φ_T de $S^1 \times \mathbb{R}$, où $(\varphi_t)_{t \in \mathbb{R}}$ est le flot de l'équation :

$$(N_1) \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 \sin x.$$

Nous supposons qu'il n'y a pas résonance paramétrique, c'est-à-dire que $DP_0(0, 0)$ est elliptique avec deux valeurs propres distinctes.

Si $|\epsilon|$ est petit, l'application de Poincaré P_ϵ associée à (N₄) ou (N'₄) est une perturbation de P_0 qui possède encore deux points fixes, l'un elliptique, l'autre hyperbolique : pour (N₄) c'est évident, car les points fixes sont les mêmes que pour P_0 , pour (N'₄) c'est une conséquence du théorème des fonctions implicites. Puisque P_ϵ conserve les aires, un argument remontant à Poincaré montre que, dans le cylindre $S^1 \times \mathbb{R}$, la variété stable et la variété instable du point fixe hyperbolique X_h se rencontrent; on peut montrer qu'en général (par exemple dans les équations que nous avons choisies) leur intersection est transversale (contrairement à ce qui se passe pour P_0 où, si elles ne se confondaient pas, elles devraient être disjointes) : ce sera par exemple une conséquence des méthodes de Melnikov que nous

existe une différence aussi marquée dans le passage de la dimension n à la dimension n + 1 pour n > 3.

Nous traitons dans ce chapitre des systèmes conservatifs (pas de frottement), pour lesquels P conserve les aires, et dans le chapitre suivant des systèmes dissipatifs.

Et, pour commencer, remplaçons notre vieux pendule par une balançoire sur laquelle une petite fille fléchit et étend périodiquement ses petites jambes; l'équation du mouvement est de la forme :

$$(N_4) \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega(t)^2 \sin x$$

où $\omega(t)^2 = \frac{g}{l(t)}$ est périodique, de période T.

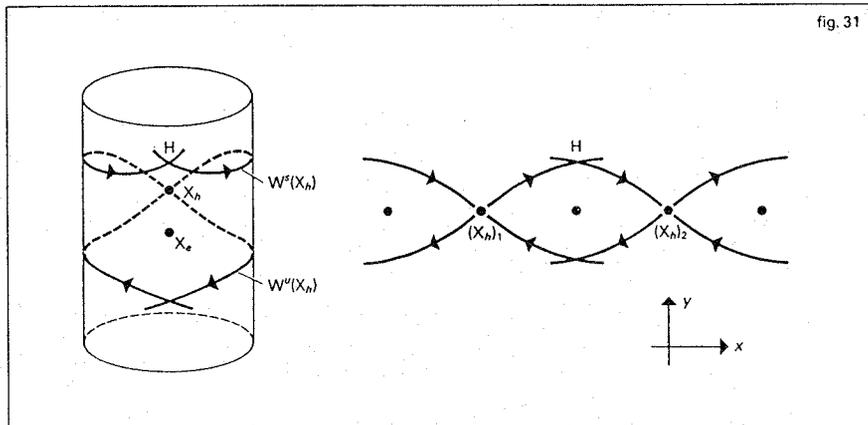
L'équation des « petits mouvements », c'est-à-dire l'équation linéarisée en $x = dx/dt = 0$, n'est autre que l'équation de Hill :

$$(H) \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega(t)^2 x,$$

qui intervient comme équation aux variations dans l'étude de la stabilité d'orbites périodiques dans sa théorie de la Lune.

Il nous faut tout d'abord étudier la stabilité de la position d'équilibre inférieure, ce qui mettra en évidence le phénomène de la résonance paramétrique. Comme il s'agit de petits mouvements, il semble légitime de commencer par étudier (H); nous le ferons sur le cas particulier de l'équation de Mathieu :

$$(M) \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 \left(1 + \epsilon \cos \frac{2\pi t}{T} \right) x.$$



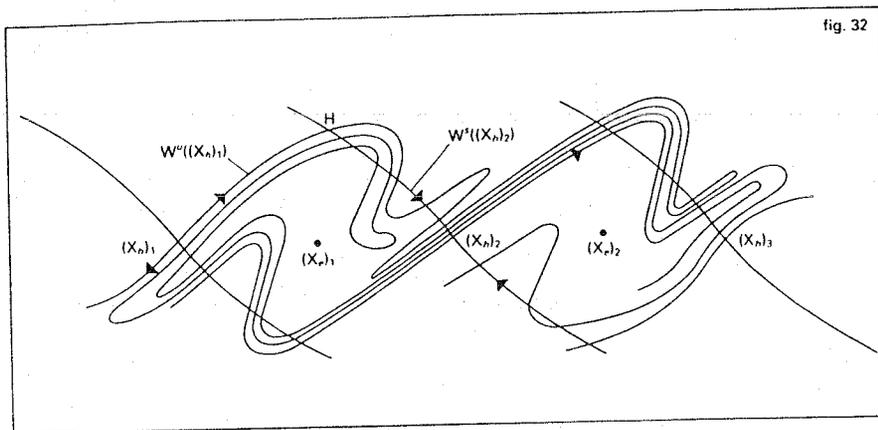


fig. 32

exposerons dans le chapitre 5 (les premiers exemples analytiques ont été donnés par Cherry). Dans la situation déroulée sur le plan, ce sont les variétés stables et instables de deux points fixes hyperboliques consécutifs $(X_{n,1})$ et $(X_{n,2})$ qui s'intersectent (fig. 31).

Dès qu'existe un point d'intersection transversale H (point homocline), il en existe une infinité : à cause de l'invariance des variétés stables et instables, $P_\epsilon^n(H)$ est en effet un point homocline pour tout n , tendant vers $X_{n,2}$ (resp. vers $(X_{n,1})$ dans la situation déroulée où le terme *hétérocline* serait plus adéquat) si n tend vers $+\infty$ ou $-\infty$. Ce fait oblige $W^u(X_{n,1})$ et $W^s(X_{n,2})$ à se replier indéfiniment, ce qui les rend bien difficiles à dessiner globalement (fig. 32, d'après Zehnder) et justifie les exclamations de Poincaré.

Nous allons en déduire, suivant Smale, qu'il existe alors un ensemble de Cantor K plongé dans $S^1 \times R$, contenant H et X_n et invariant par une certaine puissance P_ϵ^N de P_ϵ , sur lequel la dynamique induite par P_ϵ^N peut être explicitement décrite et est en rapport étroit avec le jeu de « pile ou face », donc très erratique ; en particulier, tout point de K (donc le point H) est limite de points périodiques de P_ϵ^N (donc de P_ϵ) contenus

dans K , résultat déjà connu de Birkhoff.

Bien entendu, en itérant P_ϵ , on peut, dans la démonstration, remplacer H par un point homocline \tilde{H} arbitrairement proche de X_n , assez proche en particulier pour être dans une région où P_ϵ est presque linéaire (c'est important car en itérant on reviendra « souvent » dans cette région). L'idée est de considérer la restriction à un petit rectangle R contenant X_n d'un itéré P_ϵ^N de P_ϵ bien choisi, en particulier de telle façon que l'intersection entre R et $P_\epsilon^N(R)$ contienne au moins deux morceaux (deux composantes connexes) comme sur la figure 33 où, en plus du déroulement, on a représenté l'identification du cylindre $S^1 \times R$ au plan privé de l'origine par le difféomorphisme qui à $(e^{ix}, y) \in S^1 \times R$ associe $e^{y+ix} \in C - \{0\} = R^2 - \{0\}$, ce qui revient à transformer les génératrices du cylindre en demi-droites du plan passant par l'origine (la figure 33 bis correspond au cas où $\epsilon = 0$: on y retrouve dans cette nouvelle présentation du cylindre le portrait de phase du pendule sans frottement).

Dans ces nouvelles coordonnées, l'action de P_ϵ^N sur R se voit beaucoup plus facilement : on l'a représentée schématiquement sur la figure 34.

Si l'orbite $(p_n)_{n \in Z}$ d'un point p_0 sous

l'action du difféomorphisme P_ϵ^N reste dans R , p_n est pour tout n dans l'intersection $P_\epsilon^N(R) \cap R$, formée des deux « rectangles verticaux » Δ_0^+ et Δ_1^+ (la figure 35 est une représentation schématique). On peut donc associer à p_0 une suite $(i_n(p_0))_{n \in Z}$ dont tous les termes sont égaux à 0 ou 1 par la règle $p_n \in \Delta_{i_n(p_0)}^+$. Cette suite décrit l'« histoire » de l'orbite de p_0 . Étant donné une suite finie $\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}$ de zéros et de uns, l'ensemble $\Delta_{\alpha_0 \dots \alpha_{n-1}}^+$ des points p pour lesquels $p \in \Delta_{\alpha_0}^+, (P_\epsilon^N)^1(p) \in \Delta_{\alpha_1}^+, \dots, (P_\epsilon^N)^{n-1}(p) \in \Delta_{\alpha_{n-1}}^+$ est un « rectangle vertical » dont l'épaisseur tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$; de même, l'ensemble $\Delta_{\alpha_n \dots \alpha_1}^-$ des p pour lesquels $(P_\epsilon^N)^{-1}(p) \in \Delta_{\alpha_n}^-, \dots, (P_\epsilon^N)^{-n}(p) \in \Delta_{\alpha_1}^-$ est un « rectangle horizontal » dont l'épaisseur tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. L'intersection $\Delta_{\alpha_n \dots \alpha_1, \alpha_0 \dots \alpha_{n-1}} = \Delta_{\alpha_n \dots \alpha_1}^- \cap \Delta_{\alpha_0 \dots \alpha_{n-1}}^+$ est donc un « carré » dont les côtés tendent vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$ (fig. 35). On en déduit qu'un point p_0 dont l'orbite reste dans R est entièrement déterminé par la suite $(i_n(p_0))_{n \in Z}$ et que, réciproquement, à toute telle suite de zéros et de uns correspond un tel point p_0 .

L'ensemble des suites $(\alpha_n)_{n \in Z}$ de zéros et de uns, que l'on note $\{0, 1\}^Z$, peut être muni de la « topologie produit » : deux suites sont proches si elles coïncident sur un segment fini assez long. L'espace topologique obtenu est homéomorphe au classique ensemble de Cantor qu'on obtient en retranchant d'un intervalle le tiers médian et en recommençant cette opération indéfiniment sur les intervalles restant (fig. 36).

L'application S de $\{0, 1\}^Z$ dans R définie en associant à la suite $(\alpha_n)_{n \in Z}$ l'unique point p_0 de R qui vérifie $(P_\epsilon^N)^n(p_0) \in \Delta_{\alpha_n}^+$ pour tout n dans Z est un homéomorphisme sur son image (l'inverse est $p_0 \mapsto (i_n(p_0))_{n \in Z}$) qui conjugue P_ϵ^N au décalage de virgule (Shift) $\sigma : \{0, 1\}^Z \rightarrow \{0, 1\}^Z$ défini par $\sigma((\alpha_n)_{n \in Z}) = (\beta_n)_{n \in Z}$, $\beta_n = \alpha_{n+1}$. Autrement dit, $S^{-1} \circ P_\epsilon^N \circ S = \sigma$; l'étude des orbites de P_ϵ^N qui restent dans R se ramène donc à celle de σ qui est à la base de la formulation probabiliste du jeu de « pile ou face » : c'est ce qu'on appelle faire de la *dynamique symbolique*.

Pour montrer ce qu'on a gagné, notons seulement qu'un point $\pi = (\alpha_n)_{n \in Z}$ de $\{0, 1\}^Z$ est périodique ($\exists k, \sigma^k(\pi) = \pi$) si et seulement si la suite α_n est périodique ($\alpha_{n+k} = \alpha_n$ pour tout n) ; on en déduit l'existence d'une infinité d'orbites périodiques de P_ϵ^N , à savoir celles des points de la forme

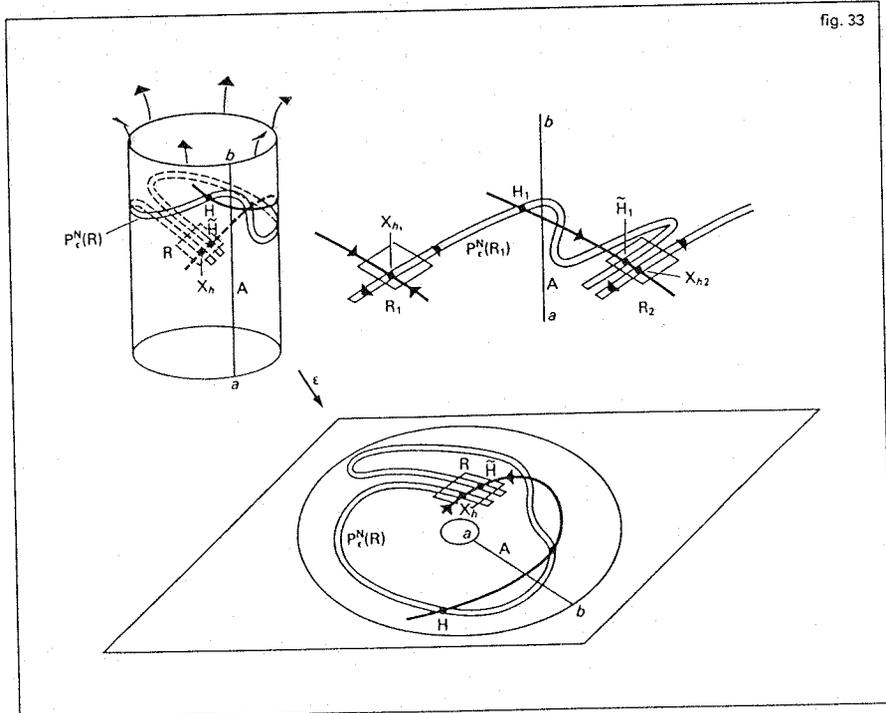


fig. 33

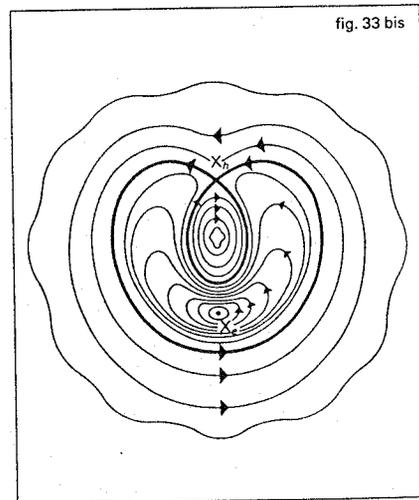
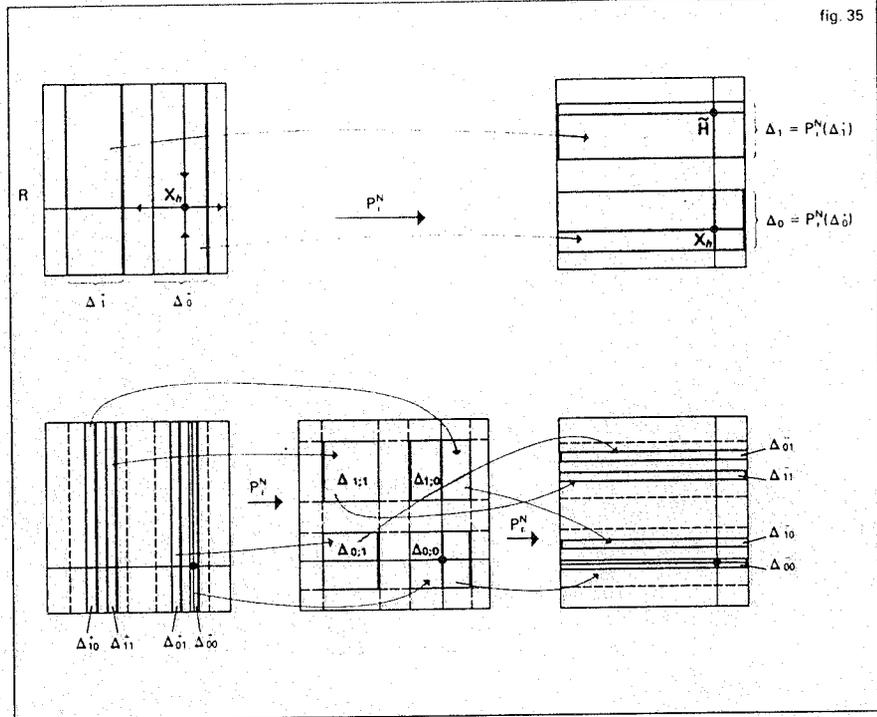
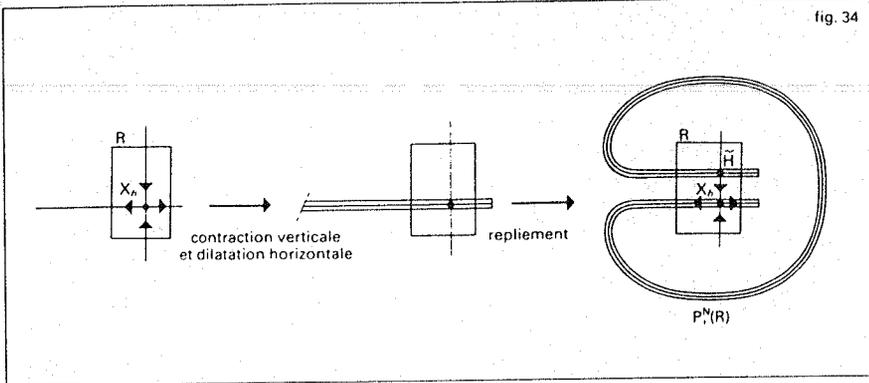


fig. 33 bis



obtient la forme normale approchée $\Pi_\epsilon(\zeta) = \zeta e^{i(b_0(\epsilon) + b_1(\epsilon)|\zeta|^2)}$ qui, comme le fait P_0 , laisse invariant chaque cercle centré en $\zeta = 0$, et qui sur chacun de ces cercles induit une rotation dont l'angle varie (décroit ici) lorsque le rayon croît (propriété de torsion (twist) typiquement non linéaire (fig. 38, que l'on comparera à la fig. 9).

La description de la dynamique de P_ϵ , obtenue en tenant compte des termes $O(|\zeta|^4)$ supprimés, est l'objet de théorèmes très remarquables, le théorème géométrique de Poincaré-Birkhoff et le théorème de Kolmogorov-Arnold-Moser (plus exactement ici le théorème des courbes invariantes).

Le résultat est (approximativement) décrit sur la figure 39, que nous allons commenter.

Tout d'abord, cette figure ne décrit qu'un « petit » voisinage \mathcal{O} du point fixe elliptique. Dans ce voisinage, P_ϵ laisse invariantes une infinité de courbes fermées proches de cercles centrés sur le point fixe mais, contrairement à ce qui se passe pour Π_ϵ , ces courbes fermées ne remplissent pas le voisinage \mathcal{O} : leur intersection avec un rayon issu du point fixe est homéomorphe à l'ensemble de Cantor déjà rencontré ; cependant, elles sont de plus en plus denses au voisinage du point fixe (ce dernier est un point de densité, au sens où la mesure de Lebesgue relative de l'intersection avec un rayon tend vers 1 lorsque la longueur du rayon tend vers 0).

Les zones intermédiaires, nommées domaines d'instabilité par Birkhoff, sont bordées par des courbes invariantes lipschitziennes (théorie de Birkhoff) ; elles contiennent des points périodiques elliptiques et hyperboliques dont la période est d'autant plus grande que l'on est proche du point fixe (un point périodique de période q est elliptique si c'est un point fixe elliptique de P_ϵ^q ; on parle de même d'orbite périodique elliptique). Autour des points périodiques elliptiques de période q , la dynamique de P_ϵ^q est analogue à celle de P_ϵ au voisinage de son point fixe (cela explique en particulier que beaucoup de chercheurs essaient d'appliquer à ce problème les méthodes du groupe de renormalisation). Quant aux points périodiques hyperboliques de période q , leurs variétés stables et instables (définies en les considérant comme points fixes de P_ϵ^q) s'intersectent transversalement suivant une figure complexe, qui est l'exact analogue de la figure 32.

Les théorèmes cités affirment en fait que cette description correspond à la dynamique, au voisinage d'un point fixe elliptique, d'un difféomorphisme du plan conservant les aires suffisamment général (on dit plutôt générale, cf. chap. 9).

L'importance de l'existence de courbes fermées invariantes qui l'entourent dans tout voisinage du point fixe tient à ce qu'elle implique immédiatement la stabilité de ce dernier (au sens de Liapunov dans le futur et le passé) : l'orbite d'un point proche est en effet piégée par ces courbes qui séparent chacune l'espace en deux morceaux invariants par P_ϵ (cela ne sera plus vrai en dimension supérieure).

$S(\pi)$ (la méthode de Melnikov, exposée dans le chapitre suivant, peut également servir à prouver l'existence d'orbites périodiques de longues périodes de P_ϵ dans cette région de $S^1 \times \mathbb{R}$).

Cette étude a été formalisée par Smale en 1965 dans un exemple presque identique, devenu célèbre sous le nom de fer à cheval, et c'est ce nom que nous utiliserons pour signifier une situation analogue à celle qui est décrite par la figure 34 ; à l'origine, il y a les travaux de Cartwright-Littlewood et Levinson dont nous parlerons au chapitre suivant, premiers exemples d'équations différentielles structurellement stables ayant une infinité d'orbites périodiques. La figure 37 est une (difficile !) tentative de représenter l'ensemble $K = S(\{0, 1\}^{\mathbb{Z}}) \subset \mathbb{C} \times \mathbb{R}$ (qui est invariant par P^N et contient X_ϵ et \bar{H}). Elle montre que K , donc $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$, est homéomorphe à l'ensemble produit de $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$ par lui-même ; cette propriété de l'ensemble de Cantor d'ignorer les dimensions (il est homéomorphe à son carré) est la raison profonde de l'existence de courbes de Peano (courbes continues remplissant tout le plan).

Étudions maintenant la dynamique de P_ϵ au voisinage de son point fixe elliptique X_ϵ , proche de $(0, 0)$: celle-ci n'est pas facile à deviner ; en particulier il n'est pas clair a priori qu'il y ait stabilité au sens de Liapunov (définition analogue pour les difféomorphismes à celle qui a été donnée pour les flots

au chapitre 1). Comme dans le chapitre 3, on commence par écrire l'équation sous une forme où la géométrie sous-jacente apparaît mieux ; lorsque $\epsilon = 0$, (N_4) et (N_4) se réduisent à (N_1) et il suffit de reprendre l'équation (Q_3) dans le cas où F_μ est identique à 0 (donc $z = y$) et $\mu = 0$, c'est-à-dire :

$$(Q_4) \quad \frac{d\zeta}{dt} = i\omega\zeta - \frac{i\omega}{12} \zeta |\zeta|^2 + O(|\zeta|^4).$$

Cette équation équivaut (variation des constantes) à l'équation intégrale :

$$\zeta(t) = e^{i\omega t} \zeta(0) + \int_0^t e^{i\omega(t-s)} \left[-\frac{i\omega}{12} \zeta(s) |\zeta(s)|^2 + O(|\zeta(s)|^4) \right] ds.$$

L'application P_0 , définie par intégration de (Q_4) pendant le temps T , peut donc s'écrire :

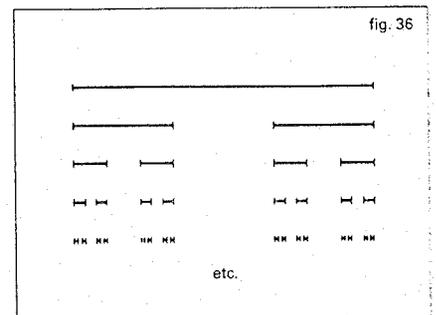
$$(R_4) \quad P_0(\zeta) = \zeta e^{i\omega T(1 - \frac{1}{12} |\zeta|^2)} + O(|\zeta|^4).$$

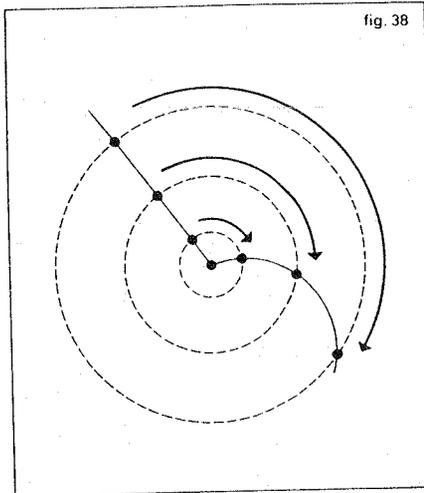
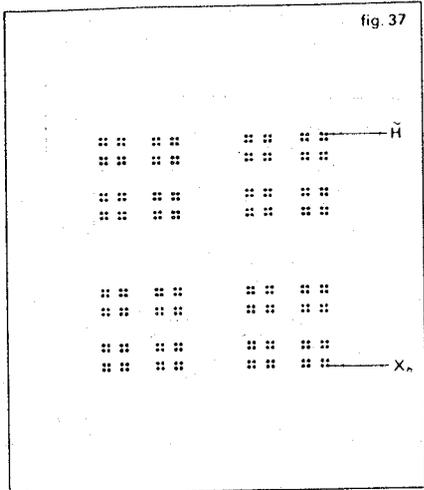
Si ϵ est assez petit, l'application P_ϵ aura une forme analogue :

$$P_\epsilon(\zeta) = \zeta e^{i(b_0(\epsilon) + b_1(\epsilon)|\zeta|^2)} + O(|\zeta|^4),$$

$$b_0(0) = \omega T, \quad b_1(0) = \frac{-\omega T}{12},$$

dans des coordonnées centrées sur son point fixe elliptique X_ϵ . Si on oublie les termes d'ordre supérieur ou égal à quatre, on





Si on compare au théorème de bifurcation de Hopf décrit au chapitre 3, ou plutôt à son analogue pour les familles de difféomorphismes, la difficulté est ici beaucoup plus grande car les cercles laissés invariants par la forme normale approchée n'ont a priori aucune robustesse vis-à-vis des perturbations (ils ne sont pas normalement hyperboliques). Cela se retrouve au niveau des démonstrations : théorème usuel des contractions pour Hopf, théorème raffiné de fonctions implicites dans un espace vectoriel métrique (non normé) complet (théorème de Nash-Moser sous la forme donnée par Sergeraert ou Hamilton qu'utilise Herman dans la démonstration - sans doute la plus transparente de toutes - qu'il a donnée du théorème de Rüssmann).

Lorsque le difféomorphisme n'est que peu différentiable, ces théorèmes deviennent faux ; des contre-exemples ont été donnés par Takens (en classe C^1) et Herman (en classe $C^{3-\epsilon}$). Il est clair que la méthode ne fonctionne pas, puisqu'on ne peut même pas écrire de forme normale approchée. Enfin, même dans le cas indéfiniment différentiable C^∞ , il existe des difféomorphismes conservant les aires qui possèdent une orbite dense dans un disque centré sur un point fixe elliptique : une telle orbite passe au voisinage de chaque point du disque et sa présence exclut la possibilité d'une courbe fermée invariante entourant le point fixe. Ces exemples non génériques sont dus à Anosov et Katok ; ils sont rendus possibles par le viol de la propriété de torsion : leur forme normale formelle est linéaire.

Le destin des cercles invariants de Π_ϵ sur lesquels Π_ϵ induit une rotation d'angle $2\pi p/q$ est d'être en général transformés en un nombre fini d'orbites périodiques de période q de P_ϵ .

Cela est vrai pour tout $p/q < b_0(\epsilon)/2\pi$ et assez proche de $b_0(\epsilon)/2\pi$ mais, si q n'est pas trop grand par rapport à :

$$\left(\frac{b_0(\epsilon) - p}{2\pi - q}\right)^{-1}$$

La démonstration en est rendue difficile par la présence de *petits dénominateurs* qui font diverger les changements de coordonnées formels (c'est-à-dire définis par des séries éventuellement divergentes) mettant P_ϵ sous forme normale, même si P_ϵ est analytique.

Par exemple, si $b_0(\epsilon)/2\pi$ n'est pas rationnel, il existe un changement de coordonnées formel conservant les aires qui transforme P_ϵ en une application de la forme $\zeta \mapsto \zeta e^{i\alpha(|\zeta|^2)}$ laissant invariant chaque cercle de centre O (forme normale de Birkhoff). Ces changements de coordonnées peuvent être obtenus en composant une infinité de changements de coordonnées analogues à celui qui, dans l'équation (Q₃) du chapitre 3, fait passer de η à ζ , c'est-à-dire :

$$\zeta = \eta + \sum_{k+l=m} \gamma_{kl} \eta^k \bar{\eta}^l, \quad m = 2, 3, \dots;$$

leur divergence vient de ce que les coefficients γ_{kl} sont de la forme :

$$\frac{a_{kl}}{e^{ib_0(\epsilon)} - e^{i(k-l)b_0(\epsilon)}}$$

et comportent donc des dénominateurs pouvant devenir arbitrairement petits quand $(k-l)$ est assez grand ; elle a donc pour cause la présence, dans tout voisinage de P_ϵ , d'applications ayant un point fixe *résonnant* (c'est-à-dire tel que la dérivée en ce point soit une rotation périodique) pour lesquelles certains de ces dénominateurs s'annulent.

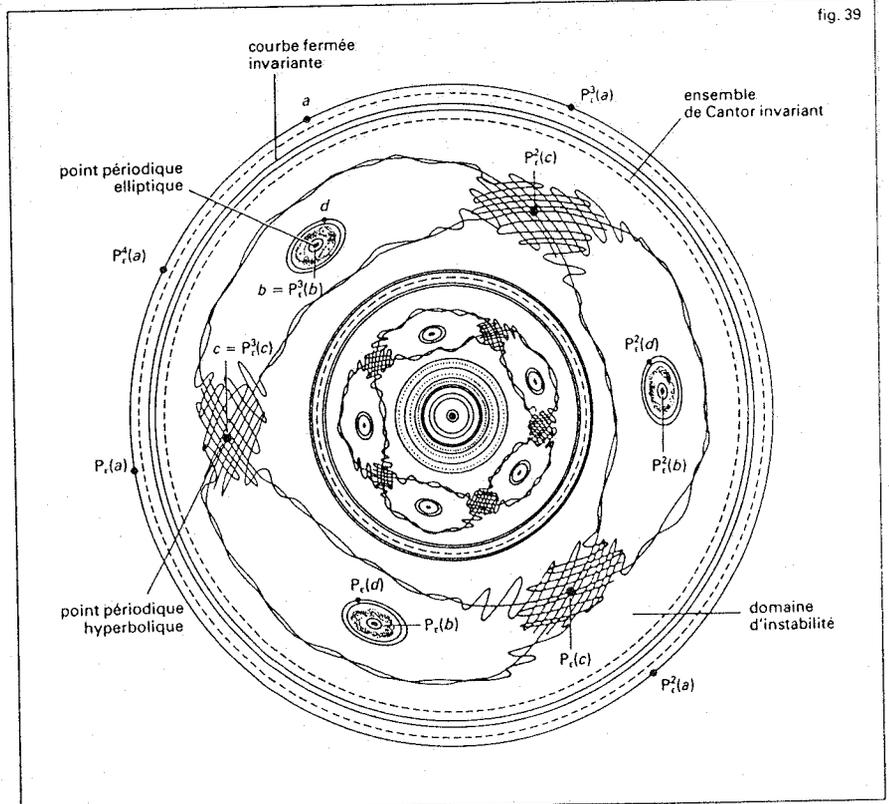
A posteriori, cette divergence n'est pas pour nous étonner puisque dans ces coordonnées la dynamique de P_ϵ apparaît comme beaucoup trop simple !

C'est à Kolmogorov (1954) que revient l'idée de localiser le problème au voisinage d'un cercle invariant de la forme normale tronquée Π_ϵ et non plus au voisinage du point fixe elliptique lui-même. Plus précisément, Kolmogorov choisit un cercle sur lequel Π_ϵ induit une rotation d'angle $2\pi\omega$, où ω est mal approché par les rationnels, c'est-à-dire : il existe des constantes $C > 0$ et $\beta > 0$ telles que, pour tout rationnel p/q , on ait :

$$\left|\omega - \frac{p}{q}\right| > \frac{C}{|q|^{2+\beta}}$$

ce choix est naturel dans la mesure où l'on s'attend à ce que les cercles sur lesquels Π_ϵ induit une rotation d'angle $2\pi p/q$, donc entièrement formés de points périodiques de période q , soient détruits par la perturbation qui fait passer de Π_ϵ à P_ϵ . La deuxième idée est de chercher dans ce voisinage une courbe fermée invariante par P_ϵ sur laquelle P_ϵ induit un difféomorphisme conjugué à la rotation d'angle $2\pi\omega$ (ce qui signifie qu'il

existe un difféomorphisme de cette courbe sur un cercle, transformant la restriction de P_ϵ en cette rotation). La troisième idée est d'utiliser à cette fin une méthode d'itération rapide (type méthode de Newton). Les premières démonstrations complètes de théorèmes de ce type ont été données par Arnold (1961) dans le cas analytique et Moser (1962) dans le cas différentiable. Une version très intéressante de ce théorème a été donnée par Rüssmann (1970) : on n'exige plus que P_ϵ préserve les aires et, au lieu de trouver des courbes invariantes, on trouve des courbes dont l'image (globale, pas celle de chaque point) est obtenue par un déplacement constant le long des rayons (courbes *translatées*) ; ce théorème de Rüssmann joue un rôle important dans l'étude des bifurcations des difféomorphismes non conservatifs de \mathbb{R}^2 au voisinage d'un point fixe elliptique ; il montre que, dans ce problème, la conservation de l'aire joue le rôle d'une condition de *codimension 1* (annuler la translation).



la démonstration en est locale et aisée alors que, si q est trop grand, elle devient globale et d'une grande subtilité. Cela vient de ce que P^q ne peut être considéré comme une perturbation de Π^q au voisinage du cercle incriminé que si q n'est pas trop grand par rapport au rayon de ce cercle. Dans ce cas, il est facile de prouver à l'aide du théorème des fonctions implicites usuel l'existence d'une courbe fermée proche d'un cercle transformée « radialement » par P^q (fig. 40) ; la conservation de l'aire implique qu'une telle courbe recoupe son image : les points d'intersection sont des points fixes de P^q , c'est-à-dire des points périodiques de période q de P_e .

Zehnder a pu montrer qu'en général on obtient ainsi deux orbites périodiques, l'une elliptique, l'autre hyperbolique. En considérant ces orbites périodiques comme des « souvenirs de résonances », c'est-à-dire comme obtenues par perturbation à partir d'un point fixe elliptique d'un difféomorphisme proche dont la dérivée en ce point est $\xi \mapsto e^{i2\pi p/q} \xi$, il a pu montrer également qu'il y a « en général » intersection transversale des variétés stables et instables des orbites périodiques hyperboliques comme sur la figure 39.

Si q est grand, on ne peut prouver l'existence de ces orbites périodiques qu'en utilisant des arguments plus globaux. Considérons la région située entre deux courbes invariantes correspondant à des angles $2\pi\omega_1$ et $2\pi\omega_2$ tels que $\omega_1 < p/q < \omega_2$; en itérant q fois P_e , on obtient un difféomorphisme de cet anneau qui conserve les aires et qui « fait tourner les bords » dans deux sens différents (fig. 41, à comparer avec la fig. 33 bis ; cela n'a vraiment de sens que si on déroule l'anneau...).

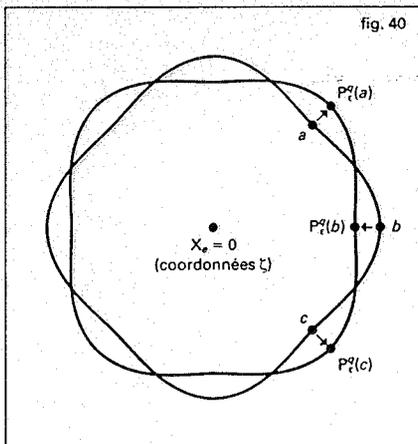


fig. 40

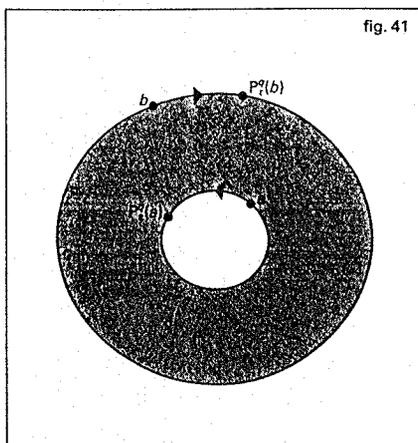


fig. 41

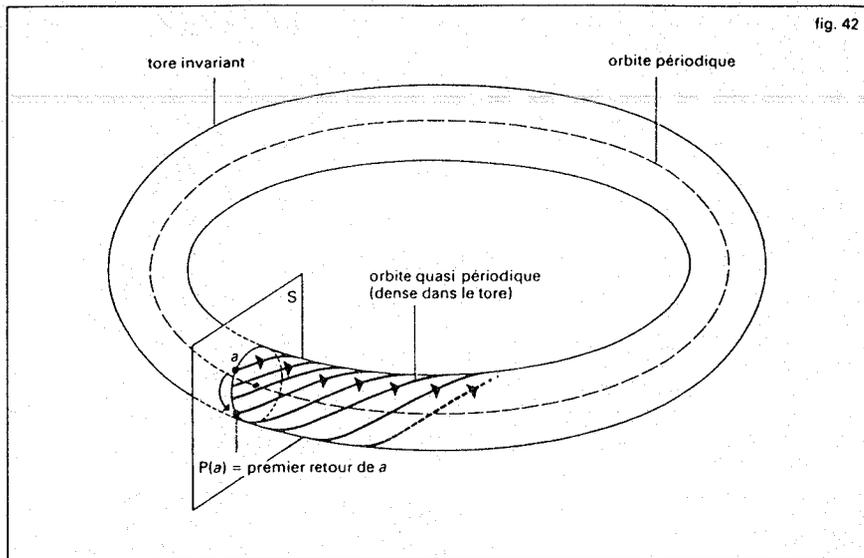


fig. 42

Par une interprétation très subtile de la conservation de l'aire (existence de « presque-orbites » traversant l'anneau d'un bord à l'autre) et un argument plus classique de variation d'angle, Birkhoff a démontré en 1912 que, comme l'avait conjecturé Poincaré la même année, juste avant sa mort, un tel homéomorphisme a au moins deux points fixes (la démonstration de l'existence du deuxième date en fait de 1925). Un tel théorème semblait jusqu'ici échapper aux méthodes habituelles de la topologie algébrique, mais Conley et Zehnder viennent (déc. 1982) d'en donner une démonstration très simple fondée sur la très classique approche variationnelle, qui a le mérite immense de se généraliser aux dimensions supérieures (cf. *infra*, *Excursion variationnelle*). Notons que de tels difféomorphismes de l'anneau se présentent naturellement dans le fameux problème du *billard*, étudié par Birkhoff, auquel toute cette théorie s'applique (cf. chap. 8).

Revenons maintenant à la taille du voisinage dans lequel l'analyse qui précède est valable, problème important pour les applications (stabilisation de plasmas, dit-on, etc.) qui est actuellement l'objet de nombreuses recherches fondées sur la technique du « groupe de renormalisation ». Si les démonstrations initiales donnaient un voisinage beaucoup plus petit que ne le faisaient les simulations numériques (par exemple celles de Henon et Heiles sur le mouvement d'une étoile dans une galaxie cylindrique), une nouvelle démonstration de Herman fondée sur le théorème de point fixe de Leray-Schauder donne, dans le cas d'une classe de nombres ω spécialement mal approchés par les rationnels, des estimations plus raisonnables. C'est d'autant plus important qu'il est bien difficile de distinguer numériquement une courbe d'un ensemble de Cantor à petits trous. Cette remarque n'est pas gratuite dans la mesure où Aubry et Mather ont montré récemment que les cercles invariants de Π_ϵ sur lesquels Π_ϵ induit une rotation d'angle $2\pi\omega$ se transforment, lorsque ω est trop bien approché par les rationnels, en ensembles de Cantor invariants par P_ω , intermédiaires entre des orbites périodiques et des courbes fermées invariantes.

Nous finirons ce chapitre par quelques commentaires hamiltoniens, volontairement restreints, puisque nous avons choisi de ne pas développer ici tout ce formalisme.

Soit $H(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$ une fonction différentiable définie sur R^{2n} . Le système dynamique hamiltonien associé à H s'écrit

(comparer à l'écriture de (P_1) au chap. 1) :

$$(H) \begin{cases} \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y_i}, \dots, \frac{dx_n}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y_n} \\ \frac{dy_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \dots, \frac{dy_n}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_n} \end{cases}$$

et le flot associé laisse évidemment invariante chaque hypersurface de niveau Σ_c de H (hypersurfaces d'énergie constante $H = c$).

Si n est égal à 2 (systèmes à deux degrés de liberté, par exemple le *problème restreint des trois corps*), ces hypersurfaces sont de dimension trois. L'étude de la restriction de (H) à une hypersurface Σ_c au voisinage d'une orbite périodique se ramène à l'étude précédente en considérant l'application de Poincaré P définie par le flot sur un petit morceau de surface S transverse à l'orbite périodique (fig. 42). Celle-ci conserve les aires et la seule différence avec les exemples précédents est que le temps de retour sur le plan n'est plus constant : la dynamique de P ne renseigne plus que sur la géométrie du portrait de phase de (H) dans Σ_c et non sur les paramétrages des courbes intégrales.

Cependant, sur un *tore invariant* de (H) correspondant à une courbe invariante de P sur laquelle P est conjuguée à une rotation d'angle $2\pi\omega$, Kolmogorov a montré que, si ω est mal approché par les rationnels, les courbes intégrales sont *quasi périodiques* : cela signifie qu'il existe un système de coordonnées sur le tore (c'est-à-dire un système de coordonnées périodiques en les deux variables sur R^2) dans lequel la restriction au tore du champ de vecteurs Ξ_H défini par H est un champ constant de pente irrationnelle. La démonstration, qui revient à rendre constant le temps de premier retour sur S , se ramène à la résolution d'une *équation aux différences* :

$$\xi(\theta + \omega) - \xi(\theta) = \varphi(\theta)$$

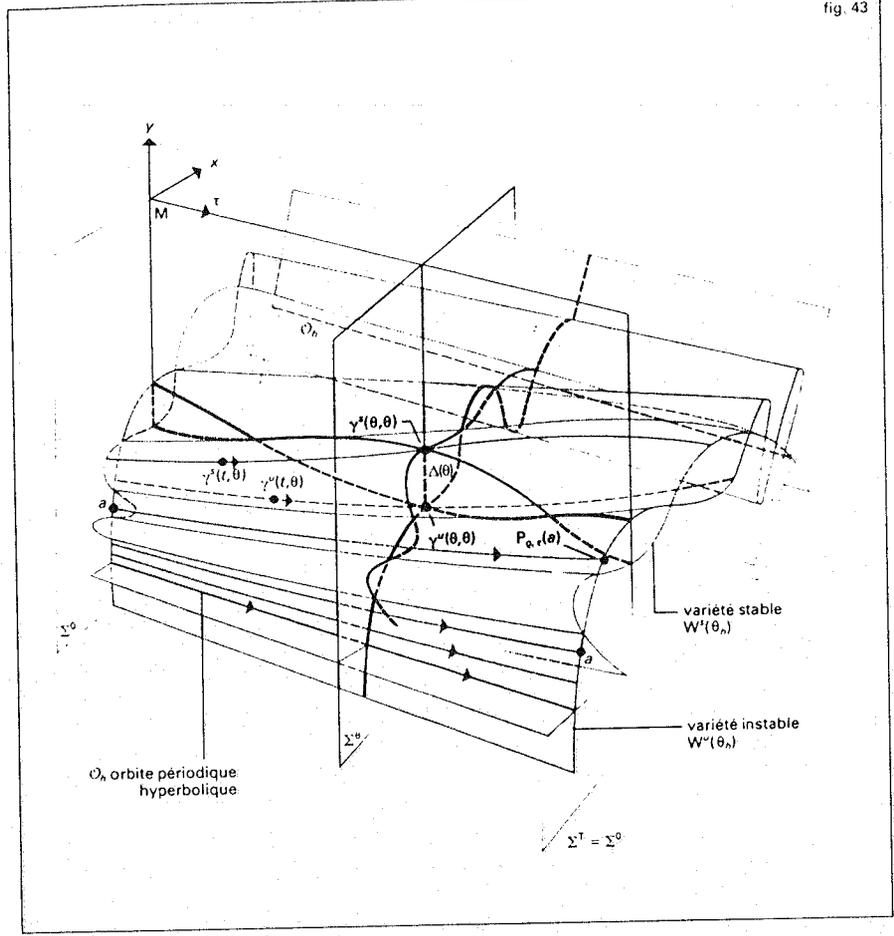
(on cherche ξ Z -périodique connaissant φ Z -périodique telle que $\int_0^1 \varphi(\theta) d\theta = 0$).

La résolution formelle par séries de Fourier montre immédiatement qu'il y a un problème de petits dénominateurs, ici très simple.

La figure 42 représente une partie d'une telle courbe intégrale dans une hypersurface d'énergie constante (cette courbe est dense sur le tore). Comme précédemment, l'existence de tels tores dans tout voisinage de l'orbite périodique prouve sa stabilité au sens de Liapunov.

Si maintenant on fait varier l'énergie, on

fig. 43



est amenés à considérer Ξ_H comme une famille à un paramètre $(\Xi_H | \Sigma_c)_c$ de champs de vecteurs. Les bifurcations qui se produisent sont très riches (bifurcation d'orbites périodiques à partir de résonances, etc.); étudiées par Deprit et Henrard, Meyer, Palmore, Abraham, Takens, elles sont joliment dessinées dans l'ouvrage *Foundations of Mechanics* d'Abraham et Marsden.

Lorsque le nombre de degrés de liberté est supérieur à deux, les choses se compliquent : les théorèmes de K.A.M. fournissent des tores invariants T^n pour des systèmes voisins de systèmes complètement intégrables, mais de tels tores ne séparent plus en deux composantes les surfaces d'énergie constante, qui sont de dimension $2n - 1$, et leur existence, si elle suffit à ruiner l'hypothèse ergodique de Boltzmann, ne suffit plus à assurer des résultats de stabilité : c'est le phénomène de *diffusion d'Arnold* dont des illustrations numériques ont été obtenues par Froeschle en couplant légèrement deux difféomorphismes de \mathbb{R}^2 ayant un point fixe elliptique. En conclusion, notre connaissance du portrait de phase d'équations telles que (N_4) ou (N'_4) est loin d'être complète. Ce long chapitre a donné le premier rôle aux orbites périodiques (et quasi périodiques) et c'est d'elles encore dont il sera question dans l'excursion variationnelle qui suit. Dans l'étude des points homoclines, nous avons vu que les points périodiques de P_ϵ étaient denses dans l'ensemble de Cantor invariant associé à un tel point ; dans la situation de la figure 39, il n'est pas déraisonnable de conjecturer avec Poincaré que les points périodiques sont denses au voisinage du point fixe, c'est-à-dire que les orbites périodiques (de longues périodes) sont denses au voisinage d'une orbite périodique elliptique d'un système hamiltonien à deux degrés de liberté.

L'importance de ces orbites pour la description des mouvements généraux est donc très grande. Finissons comme nous avons commencé, en citant Poincaré (*Méthodes nouvelles de la mécanique céleste*, t. I, chap. III, p. 82) : « D'ailleurs, ce qui nous rend ces solutions périodiques si précieuses, c'est qu'elles sont pour ainsi dire la seule brèche par où nous puissions essayer de pénétrer dans une place jusqu'ici réputée inabordable. »

Excursion variationnelle

On sait, depuis les travaux de Maupertuis, Euler, Lagrange, Hamilton, Jacobi, que le principe de moindre action est l'un des fondements possibles de la mécanique, les équations du mouvement apparaissant comme les équations d'Euler associées à l'intégrale d'action (cf. CALCUL DES VARIATIONS et MÉCANIQUE ANALYTIQUE, ainsi que Arnold, *Méthodes mathématiques de la mécanique classique*) ; cela reste vrai pour des équations hamiltoniennes du type (H) (cf. *supra*) et ce même si H dépend du temps.

En particulier, une orbite périodique de période T de (H) n'est autre qu'un point critique de la fonctionnelle :

$$\gamma \mapsto S(\gamma) = \int_{\gamma(0, T)} \sum_{i=1}^n y_i dx_i - H(x, y, t) dt$$

définie sur un espace de fonctions $\gamma : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ suffisamment régulières (par exemple l'espace de Sobolev H^1) telles que $\gamma(0) = \gamma(T)$. Le lecteur pourra formellement vérifier que l'accroissement $\delta S(\gamma) = S(\gamma + \delta\gamma) - S(\gamma)$ correspondant à un

accroissement $\delta\gamma = (\delta x_1, \dots, \delta x_n, \delta y_1, \dots, \delta y_n)$ de γ se met sous la forme :

$$\delta S(\gamma) = \int_0^T \left[- \sum_{i=1}^n \left[\frac{dy_i}{dt} + \frac{\partial H}{\partial x_i} \right] \delta x_i + \sum_{i=1}^n \left[\frac{dx_i}{dt} - \frac{\partial H}{\partial y_i} \right] \delta y_i \right] dt.$$

Cette approche a donné de nombreux résultats, en particulier lorsque les surfaces d'énergie constante ont de bonnes propriétés de convexité (travaux de Weinstein, Moser, Rabinowitz, Clarke, Ekeland, Lasry...), mais les orbites périodiques relevant de l'application du théorème géométrique de Poincaré-Birkhoff dont il a été question dans ce chapitre semblaient lui échapper. On peut s'en étonner aujourd'hui au vu de la grande simplicité de la démonstration que Conley et Zehnder viennent de donner (déc. 1982) du théorème suivant, conjecturé du bout des lèvres par Arnold, qui implique le théorème de Poincaré-Birkhoff : Soit $f : T^2 \rightarrow T^2$ un difféomorphisme du tore ayant un relèvement à \mathbb{R}^2 de la forme $\tilde{f}(x, y) = (x + \varphi(x, y), y + \psi(x, y))$, où φ et ψ sont périodiques de période 1 en x et y . Si f préserve les aires et le centre de gravité (c'est-à-dire :

$$\int_{[0, 1]^2} \varphi(x, y) dx dy = \int_{[0, 1]^2} \psi(x, y) dx dy = 0,$$

ce qui évite toute « rotation » systématique, cf. *infra*, *Excursion homologique*, in chap. 5), f possède au moins trois points fixes (et en général au moins quatre). Les hypothèses permettent d'écrire f comme l'application de premier retour (au bout d'une période) d'une équation différentielle du type (H) dont le hamiltonien est périodique en t de période 1. La méthode variationnelle s'applique sans problème à la fonctionnelle S (ou plutôt à celle, analogue mais symétrique, obtenue en remplaçant $y dx$ par $(1/2)(y dx - x dy)$) ; un argument classique du type Liapunov-Schmidt (troncature des séries de Fourier) ramène le problème en dimension finie, et un argument de topologie algébrique permet de conclure à l'existence d'au moins trois points critiques (le nombre 3 est le nombre minimal de points critiques que possède une fonction différentiable sur T^2). L'intérêt de la méthode est qu'elle se généralise aux difféomorphismes symplectiques du tore T^{2n} qui conservent le centre de gravité : ceux-ci doivent posséder au moins $(n + 1)$ points fixes (et en général au moins 2^n) ; l'inconvénient est qu'elle nécessite des hypothèses rigides de type métrique alors que des hypothèses topologiques plus souples seraient peut-être (?) suffisantes.

Un autre succès récent de l'approche variationnelle fut la démonstration par Aubry, puis Mather, de l'existence dans les zones d'instabilité d'ensembles de Cantor invariants de nombre de rotation donné.

Disons simplement que la méthode généralise la remarque suivante, due à Birkhoff : parmi tous les polygones à q côtés inscrits dans un convexe du plan, et ayant un ordre fixé de leurs sommets, ceux dont la somme des longueurs des côtés est maximale (resp. minimax) définissent des trajectoires périodiques de période q du jeu de billard correspondant (pour la définition, cf. chap. 8).

5 Perturbations périodiques d'auto-oscillations et « courbes de Birkhoff »

Nous reprenons l'étude du chapitre précédent en présence d'un frottement ou d'une excitation s'annulant avec la vitesse. Plus

précisément, nous considérons des équations du type suivant, généralisant (N'_4) :

$$(N_5) \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 \sin x - f(x) \frac{dx}{dt} + g(t),$$

$$g(t+T) = g(t),$$

qu'on écrira :

$$(P_5) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = -\omega^2 \sin x - f(x)y + g(\tau) \\ \frac{d\tau}{dt} = 1 \end{cases}$$

ou :

$$(Q_5) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = z - F(x) \\ \frac{dz}{dt} = -\omega^2 \sin x + g(\tau) \\ \frac{d\tau}{dt} = 1 \end{cases}$$

Nous envisagerons tout d'abord le cas où $|f(x)|$ et $|g(t)|$ sont petits (plus précisément les petites perturbations périodiques des équations (N_2) et (N_3)), occasion de discuter la fonction de Melnikov, la bifurcation de Hopf des difféomorphismes, et la belle théorie des difféomorphismes du cercle, puis le cas où $|f(x)|$ et $|g(t)|$ sont très grands, qui se réduit pratiquement à l'équation de Van der Pol forcée étudiée par Cartwright-Littlewood, Levinson, Levi, exemple dont l'importance historique et paradigmatique est considérable.

L'équation :

$$(N'_5) \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 \sin x - \rho \frac{dx}{dt} + \varepsilon p(t),$$

avec par exemple $p(t) = \cos \frac{2\pi t}{T}$, $|\varepsilon|$ petit, peut être considérée, lorsque $|\rho|$ est petit, comme une perturbation de l'équation (N'_4).

Si $\rho = 0$, les variétés stables et instables du point fixe hyperbolique $X_h \in S^1 \times \mathbb{R}$ de l'application de Poincaré $P_{\varepsilon} = P_{0,\varepsilon}$ ont une intersection transverse, donc insensible aux petites perturbations.

Il en est donc de même tant que $|\rho|$ est assez petit (c'est-à-dire qu'il existe un point fixe hyperbolique de l'application de Poincaré $P_{\rho,\varepsilon}$ associée à (N_5) et ses variétés stables et instables se coupent transversalement). Cependant, si $\varepsilon = 0$, on déduit du chapitre 2 qu'il n'y a plus d'intersection dès que $\rho \neq 0$ (fig. 13, 14, 15 si $\rho > 0$).

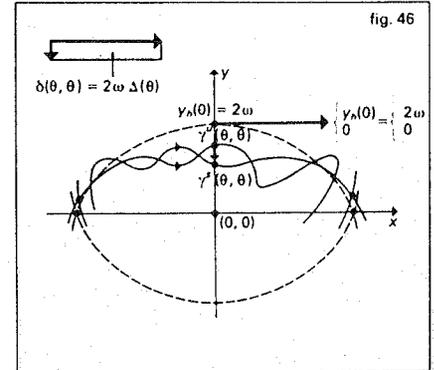
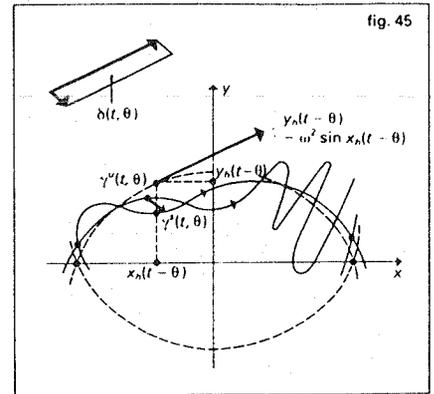
Afin d'évaluer la région du plan (ρ, ε) correspondant à des paramètres pour lesquels l'application de Poincaré $P_{\rho,\varepsilon}$ associée à (N_5) possède des points homoclines, nous introduisons la fonction de Melnikov, de portée assez générale, mais surtout utile dans l'étude des petites perturbations de systèmes conservatifs. Nous raisonnerons sur la figure 43, faite dans l'espace de phase $(S^1 \times \mathbb{R}) \times S^1_T$ (déroulé en $\mathbb{R}^2 \times [0, T]$) de l'équation (P_5).

Dans le cas où $\rho = \varepsilon = 0$, cette figure devient une partie du portrait de phase de l'équation :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 \sin x, \quad \frac{d\tau}{dt} = 1$$

(fig. 44).

Au point fixe hyperbolique X_h de l'application de Poincaré $P_{\rho,\varepsilon}$ correspond une orbite périodique « hyperbolique » \mathcal{O}_h de l'équation différentielle; aux variétés stables et instables de X_h correspondent les variétés stables et instables $W^s(\mathcal{O}_h)$ et $W^u(\mathcal{O}_h)$ de \mathcal{O}_h , définies de façon analogue (ensemble des courbes intégrales positivement ou négativement asymptotiques à \mathcal{O}_h). Lorsque $\rho = \varepsilon = 0$, ces variétés invariantes se confondent; la remarque évidente qui est à la base de la méthode de Melnikov est la transversalité de l'unique intersection des courbes intégrales situées sur ces variétés avec le plan M d'équation $x = 0$ (fig. 44). Cette transversalité est encore réalisée pour ρ, ε assez petits et il existe donc pour tout θ une unique courbe intégrale $t \rightarrow \gamma^s(t, \theta)$ contenue dans $W^s(\mathcal{O}_h)$ telle que $\gamma^s(\theta, \theta) \in M$; de même, il existe une unique courbe intégrale $t \rightarrow \gamma^u(t, \theta)$ contenue dans $W^u(\mathcal{O}_h)$ telle que $\gamma^u(\theta, \theta) \in M$ (on paramètre les courbes intégrales de façon que $\tau(t) = t$). Les deux points $\gamma^u(\theta, \theta)$ et $\gamma^s(\theta, \theta)$ sont situés sur la droite « verticale » intersection de M et de $\Sigma^0 = \{(x, y, \tau) | \tau$



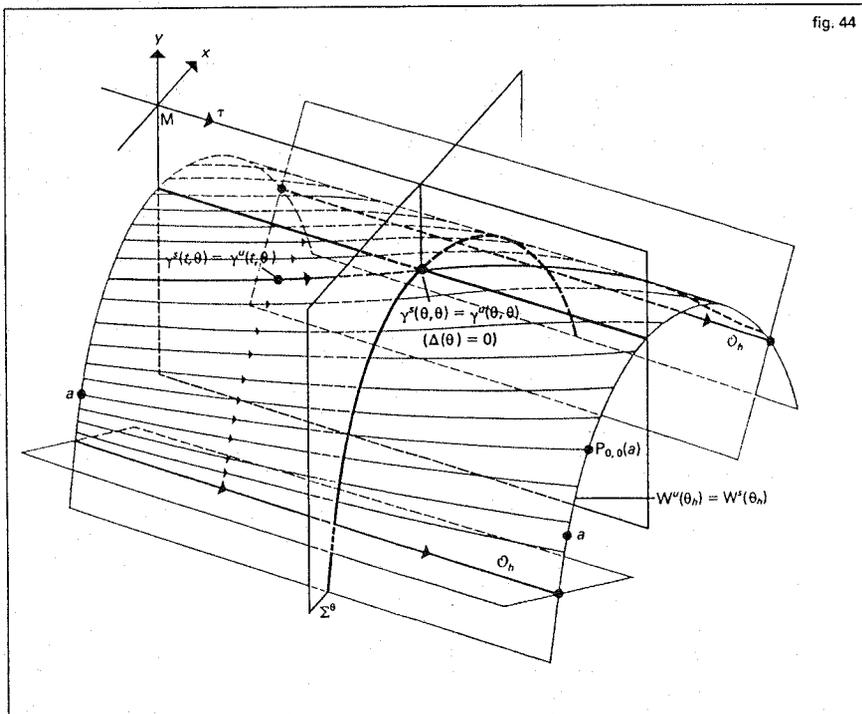
$= \theta$). On note $\Delta(\theta)$ la distance $\gamma^s(\theta, \theta) - \gamma^u(\theta, \theta)$ mesurée suivant cette droite (parallèle à l'axe des y ; fig. 43). Il n'est pas difficile d'effectuer un calcul approché de $\Delta(\theta)$: Soit $t \rightarrow (x_h(t), y_h(t))$ la paramétrisation de la variété instable (stable) de l'équilibre hyperbolique de l'équation (P_1) (pendule sans frottement) telle que $x_h(0) = 0$; on note $\delta(t, \theta)$ l'aire algébrique du parallélogramme de $\mathbb{R}^2 \equiv \Sigma^t$ engendré par les vecteurs $\gamma^s(t, \theta) - \gamma^u(t, \theta)$ et $(y_h(t - \theta), -\omega^2 \sin x_h(t - \theta))$ (fig. 45). Lorsque $t = \theta$, ces deux vecteurs sont orthogonaux, et $\delta(\theta, \theta) = y_h(0) \cdot \Delta(\theta) = 2\omega\Delta(\theta)$ (fig. 46).

En dérivant $\delta(t, \theta)$ par rapport au temps et en tenant compte des comportements asymptotiques de $\gamma^s(t, \theta)$ et $\gamma^u(t, \theta)$, on montre que :

$$\delta(\theta, \theta) = \rho \int_{-\infty}^{+\infty} y_h^2(t - \theta) dt - \varepsilon \int_{-\infty}^{+\infty} p(t) y_h(t - \theta) dt + O(|\rho| + |\varepsilon|)^2.$$

Il est pratiquement clair sur la figure 43 qu'il existe θ_0 tel que $\Delta(\theta_0) = 0$ si et seulement si $W^s(\mathcal{O}_h)$ et $W^u(\mathcal{O}_h)$ se rencontrent; on montre également que l'intersection est transversale si et seulement si $\Delta(\theta)$ s'annule transversalement en θ_0 (c'est-à-dire, avec une dérivée non nulle). On obtient alors facilement la figure 47 qui décrit, suivant les valeurs de (ρ, ε) assez proches de $(0, 0)$, le comportement des variétés stables et instables du point fixe hyperbolique de l'application de Poincaré $P_{\rho,\varepsilon}$ (ou plus exactement d'une moitié de celles-ci). Comme d'habitude, on a déroulé $S^1 \times \mathbb{R}$ sur \mathbb{R}^2 .

Ce type d'étude est possible chaque fois qu'on connaît explicitement la solution non perturbée $(x_h(t), y_h(t))$. De nombreux calculs, faisant intervenir des fonctions spéciales, ont été faits dans des cas concrets, notamment par Holmes. Par la même méthode, on peut décrire les bifurcations des orbites périodiques sous-harmoniques de larges périodes, voisines de ces variétés



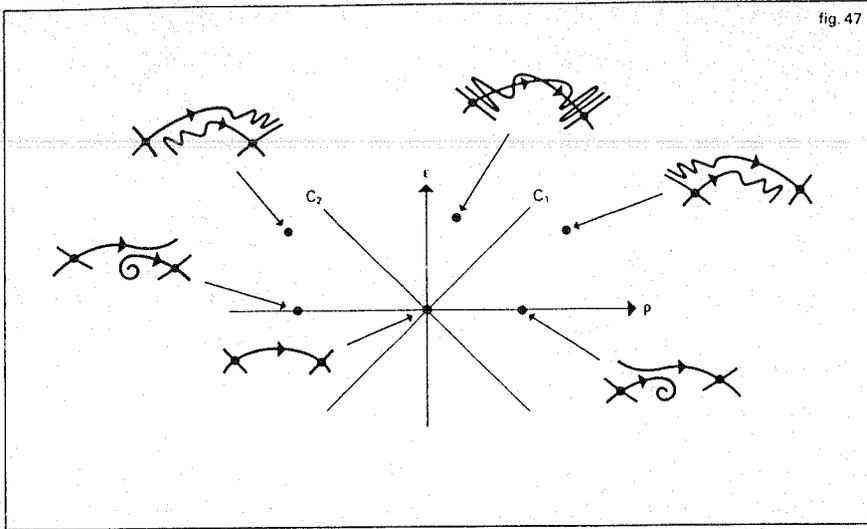


fig. 47

stables et instables (voir les travaux de Chow, Hale, Mallet-Paret). L'existence de ces orbites périodiques est beaucoup plus facile à mettre en évidence que celle des orbites périodiques de larges périodes voisines d'un point fixe elliptique (cf. chap. 4), au moins pour celles qui ne passent que deux fois au voisinage du point fixe hyperbolique. Les courbes C_1 et C_2 de la figure 47 correspondent aux cas où les variétés stables et instables du point fixe hyperbolique de $P_{\rho, \epsilon}$ sont tangentes. Les travaux de Newhouse montrent qu'au voisinage d'une telle situation il doit « génériquement » exister une infinité d'orbites périodiques asymptotiquement stables (ou asymptotiquement stables pour P^{-1}), ce qui donne de beaux exemples de systèmes dynamiques ayant de manière stable une infinité d'attracteurs.

Pour étudier $P_{\rho, \epsilon}$ au voisinage de $(0, 0)$ lorsque $\rho \neq 0$, il est commode de la considérer comme une perturbation de $P_{\rho, 0}$ (qui n'est autre que φ_T , où $(\varphi_t)_{t \in \mathbb{R}}$ est le flot de l'équation (P_2)). Le phénomène de résonance paramétrique ne se produit pas ici puisque, si $\rho \neq 0$, le point $(0, 0)$ est un point fixe hyperbolique de $P_{\rho, 0}$ (le spectre de $DP_{\rho, 0}(0, 0)$ est strictement à l'intérieur du disque unité si $\rho > 0$ et strictement à l'extérieur si $\rho < 0$). L'analogie pour $\rho > 0$ de la figure 30 est représenté sur la figure 48 : les zones hachurées correspondent aux cas où le point fixe de $P_{\rho, \epsilon}$ proche de $(0, 0)$ cesse d'être un attracteur.

Si par contre on remplace le frottement linéaire $\rho dx/dt$ par le terme non linéaire $f_{\mu}(x) dx/dt$ introduit au chapitre 3, une phénoménologie très riche apparaît, due en particulier à la possibilité de résonances entre la période T des oscillations forcées et la période propre, voisine de $2\pi/\omega$, de l'auto-oscillation qui naît par « bifurcation de

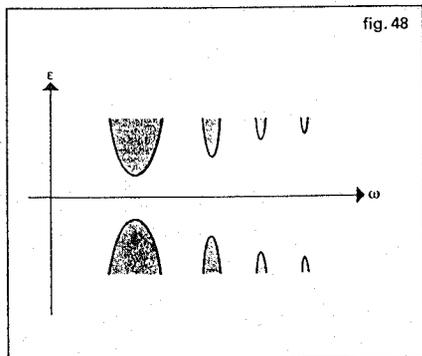


fig. 48

Hopf » pour $\mu > 0$ lorsque $\epsilon = 0$. Autrement dit, pour retrouver ce phénomène de résonance paramétrique, on compense la non-conservativité du système par la présence d'un paramètre faisant passer l'équilibre considéré de l'attraction à la répulsion. Nous ne décrivons pas en détail ces phénomènes, nous contentant du « cas général » où T ne résonne « pas trop » avec $2\pi/\omega$; c'est une nouvelle occasion de rencontrer la bifurcation de Hopf, cette fois pour des difféomorphismes (apparition de courbes fermées invariantes attractantes par déstabilisation d'un point fixe dans une famille de difféomorphismes ou, ce qui revient au même, apparition de tores invariantes attractants par déstabilisation d'une orbite périodique dans une famille d'équations différentielles).

Nous noterons $P_{\mu, \epsilon}$ l'application de Poincaré de l'équation :

$$(N_5) \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 \sin x - f_{\mu}(x) \frac{dx}{dt} + \epsilon p(t)$$

$$\text{(avec par exemple } p(t) = \cos \frac{2\pi t}{T} \text{);}$$

Comme au chapitre 4, celle-ci peut être évaluée à l'aide de la formulation intégrale de (N_5) (méthode de variation des constantes).

En particulier, dans les coordonnées locales ξ du chapitre 3, l'intégration pendant le temps T de (N_5) fournit :

$$(R_5) \quad P_{\mu, \epsilon}(\xi) = \xi \left[1 + \frac{\mu T}{2} - \frac{T}{6} |\xi|^2 \right] \cdot e^{i[T\sqrt{\omega^2 - \frac{\mu^2}{4} - \frac{\omega^2 T}{12} |\xi|^2}]} + O(|\mu| |\xi|^3 + |\xi|^4),$$

que l'on comparera à la formule (\bar{R}_4) du chapitre 4.

Pour $\mu > 0$, l'orbite périodique de (N_5) apparue par bifurcation de Hopf (cf. chap. 3) est laissée invariante par $P_{\mu, 0}$; on retrouve sur (R_5) que cette courbe est proche du cercle $|\xi| = \sqrt{3\mu}$.

Lorsque T n'est pas un multiple entier de $2\pi/\omega$, le théorème des fonctions implicites assure l'existence pour $|\epsilon|$ petit d'un unique point fixe $X_{\mu, \epsilon}$ de $P_{\mu, \epsilon}$, proche de $(0, 0)$ et dépendant différentiablement de ϵ et μ .

La distance du spectre $\{\lambda_{\mu, \epsilon}, \bar{\lambda}_{\mu, \epsilon}\}$ de $DP_{\mu, \epsilon}(X_{\mu, \epsilon})$ à celui de $DP_{\mu, 0}(0, 0)$ est de l'ordre de ϵ ; la figure 49 représente ces spectres dans le cas général : on remarquera que les deux paramètres réels μ, ϵ peuvent être remplacés par le paramètre complexe $\lambda_{\mu, \epsilon}$ (on suppose toujours $|\mu|$ et $|\epsilon|$ assez petits).

Si qT n'est pas un multiple entier de $2\pi/\omega$ pour $q = 2, 3$ ou 4 (c'est-à-dire $\lambda_{0, 0}^q \neq 1$, $q = 2, 3$ ou 4), il existe un système de coordonnées (encore appelé ξ) centré sur $X_{\mu, \epsilon}$ et dépendant différentiablement de μ, ϵ dans lequel $P_{\mu, \epsilon}$ s'écrit, à des termes d'ordre 4 près, comme une forme normale approchée :

$$(R_5) \quad P_{\mu, \epsilon}(\xi) = \xi [1 + a_0(\mu, \epsilon) + a_1(\mu, \epsilon) |\xi|^2] \cdot e^{i(b_0(\mu, \epsilon) + b_1(\mu, \epsilon) |\xi|^2)} + O(|\xi|^4),$$

$$\text{où : } a_0(0, 0) = 0, \quad a_1(0, 0) = -\frac{T}{6},$$

$$b_0(0, 0) = \omega T, \quad b_1(0, 0) = -\frac{\omega T}{12},$$

et, bien entendu,

$$\lambda_{\mu, \epsilon} = [1 + a_0(\mu, \epsilon)] e^{ib_0(\mu, \epsilon)}.$$

La démonstration est la même que dans l'établissement des formes normales approchées du chapitre 3; l'exclusion des résonances fortes $\lambda_{0, 0}^q = 1$, $q = 2, 3$ ou 4 , vient de ce qu'une relation de la forme $\lambda_{0, 0}^q = 1$

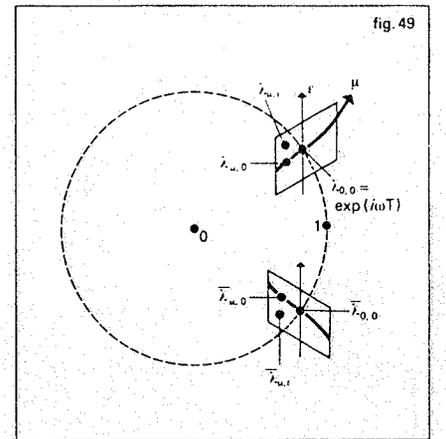


fig. 49

rend impossible l'élimination des termes $(\bar{\xi})^{q-1}$ dans le développement de Taylor de $P_{\mu, \epsilon}$ en $X_{\mu, \epsilon}$ par un changement de variables dépendant continûment de μ, ϵ au point $\mu = \epsilon = 0$ (présence dans le changement de variables de termes en :

$$\frac{(\bar{\eta})^{q-1}}{\lambda_{\mu, \epsilon} - (\bar{\lambda}_{\mu, \epsilon})^{q-1}}$$

qui « explosent » pour $\mu = \epsilon = 0$ et ce même si, dans notre cas, le développement de Taylor de $P_{0, 0}(\xi)$ ne comporte pas lui-même de terme $(\bar{\xi})^{q-1}$).

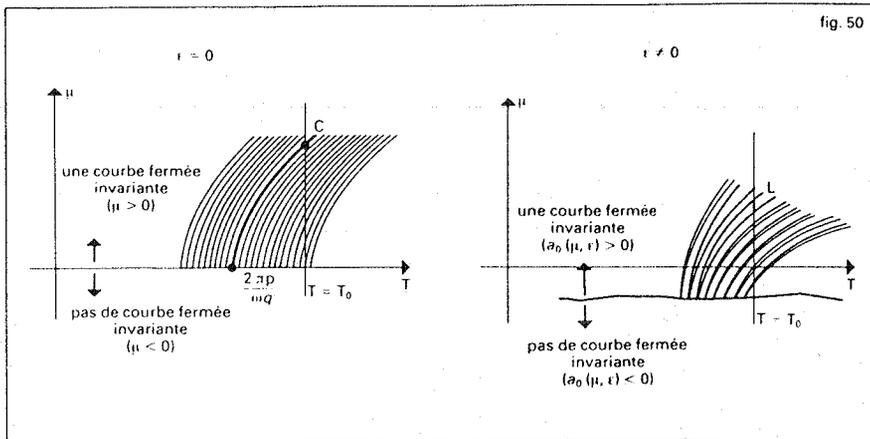
Lorsque $q = 2, 3$ ou 4 , ces termes sont de degré inférieur ou égal à 3 et concurrencent le terme en $|\xi|^2$ dans la détermination de la dynamique des formes normales approchées au voisinage de $\xi = 0$.

L'étude de (R_5) , fondée sur la méthode des transformées de graphes, est en tout point parallèle à l'étude de (Q'_3) faite au chapitre 3 : lorsque $a_0(\mu, \epsilon)/a_1(\mu, \epsilon)$ est négatif, c'est-à-dire $a_0(\mu, \epsilon) > 0$, $P_{\mu, \epsilon}$ laisse invariante une courbe fermée $C_{\mu, \epsilon}$ entourant $X_{\mu, \epsilon}$, proche dans les coordonnées ξ du cercle :

$$|\xi| = \sqrt{\frac{a_0(\mu, \epsilon)}{a_1(\mu, \epsilon)}}$$

et attirant tout point $\xi \neq 0$ voisin de 0 (c'est-à-dire $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{distance}(P_{\mu, \epsilon}^n(\xi), C_{\mu, \epsilon}) = 0$). Le

passage de $\lambda(\mu, \epsilon)$ de l'intérieur à l'extérieur du cercle unité de C correspond donc au remplacement d'un attracteur ponctuel de $P_{\mu, \epsilon}$ par un attracteur homéomorphe à un cercle. Ce théorème de bifurcation de Hopf



des difféomorphismes, bien que fortement analogue à son cousin du chapitre 3, en diffère assez profondément ; tout d'abord, ce n'est pas un théorème de nature topologique ne concernant que le spectre : si dans une famille F_μ à un paramètre de difféomorphismes locaux de \mathbb{R}^2 fixant 0, le spectre de $DF_\nu(0)$ traverse le cercle unité de \mathbb{C} lorsque ν varie, il se peut qu'aucun des F_ν ne possède de courbe fermée invariante entourant 0, et ce même s'il n'y a pas de résonance. L'existence de telles courbes dépend de conditions non linéaires comme l'« attractivité » du point fixe 0 de $P_{0,0}$. D'autre part, le passage d'un difféomorphisme à sa forme normale approchée simplifie exagérément la dynamique sur les courbes invariantes, remplaçant en particulier par des rotations périodiques les difféomorphismes de ces courbes ayant des orbites périodiques isolées et masquant ainsi le phénomène connu des physiciens sous le nom d'acrochage de fréquences (qui implique également une perte de régularité de la courbe invariante lorsque μ croît, suggérée par le passage de la figure 15 à la figure 13).

La figure 50 indique les zones de l'espace des paramètres (T, μ) où se produit ce phénomène lorsqu'on fixe une valeur de ϵ ; il faut bien entendu que ϵ soit non nul, car $P_{\mu,0}$ faisant partie du groupe à un paramètre associé à l'équation (N_3) , sa restriction à une courbe fermée invariante est toujours différemmentiellement conjuguée à une rotation et n'a donc pas d'orbite périodique isolée. Sur cette figure 50, C désigne (dans le cas $\epsilon = 0$) la courbe formée des couples (T, μ) tels que $P_{\mu,0}$ ait une courbe fermée invariante $C_{\mu,0}$ sur laquelle il induit un difféomorphisme conjugué à la rotation d'angle $2p\pi/q\omega$; L désigne (pour $\epsilon \neq 0$) la languette formée des couples (T, μ) tels que $P_{\mu,\epsilon}$ ait une courbe fermée invariante $C_{\mu,\epsilon}$ sur laquelle il induit un difféomorphisme ayant un nombre pair d'orbites périodiques isolées de période q (faisant p tours avant de se refermer), une moitié étant attractante et l'autre répulsive (ces orbites s'éliminent par paires sur le bord de la languette).

La figure 51 indique la dynamique de la restriction, notée f , de $P_{\mu,\epsilon}$ à $C_{\mu,\epsilon}$ lorsque (T, μ) est dans la languette représentée sur la figure 50 (on a choisi $p = 2, q = 5$).

On voit que, lorsque μ décroît, $T = T_0$ et $\epsilon \neq 0$ étant fixés, la restriction de $P_{\mu,\epsilon}$ à sa courbe fermée $C_{\mu,\epsilon}$ passe par une infinité de bifurcations consistant en l'apparition et la disparition de paires d'orbites périodiques dont la période tend vers l'infini quand μ se rapproche de la valeur pour laquelle se produit la bifurcation de Hopf. Sur la famille d'équations différentielles autonomes (*) dans $\mathbb{R}^2 \times S^1$ associée à (N_3) , cela correspond à l'apparition et à la disparition d'orbites périodiques de période qT situées

sur un tore invariant et le parcourant q fois dans une direction (celle de S^1) et p fois dans l'autre. En général, contrairement à ce qui se passe pour $\epsilon = 0$, chacune de ces paires d'orbites périodiques existe stablement sur tout un intervalle de valeurs de μ : c'est de là que vient la dénomination *acrochage de fréquences*.

Le phénomène que nous venons de décrire est aujourd'hui bien compris : son analyse repose sur le nombre de rotation d'un homéomorphisme du cercle, introduit par Poincaré en 1885. L'importance de cette notion et la beauté de la théorie des difféomorphismes du cercle qu'elle a suscitée (théorèmes de Denjoy, Arnold, Herman) justifient qu'on s'y arrête quelque peu.

Un homéomorphisme f du cercle de rayon 1 de \mathbb{R}^2 dans lui-même conservant l'orientation peut toujours se relever (se « dérouler ») en un homéomorphisme \tilde{f} de \mathbb{R} dans \mathbb{R} de la forme $\tilde{f}(\theta) = \theta + \varphi(\theta)$, où φ est une fonction 2π -périodique (c'est-à-dire $\varphi(\theta + 2\pi) = \varphi(\theta)$ pour tout θ) ; f est alors défini en interprétant θ comme un angle, c'est-à-dire $f(\theta \text{ modulo } 2\pi) = \tilde{f}(\theta) \text{ modulo } 2\pi$. Poincaré définit le nombre de rotation $\rho(f)$ de \tilde{f} comme la limite (dont il montre qu'elle est uniforme et indépendante de θ) :

$$\rho(f) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\tilde{f}^n(\theta) - \theta}{n} \in \mathbb{R}.$$

On se convainc facilement de ce que la classe $\rho(f)$ de $\rho(\tilde{f})$ modulo 2π est indépendante du choix du relèvement \tilde{f} et représente une rotation moyenne de f (regarder l'exemple

d'une rotation : les \tilde{f} sont des translations $\tilde{f}(\theta) = \theta + \alpha + k, k \in 2\pi\mathbb{Z}$).

Les propriétés de ρ sont les suivantes :
 1. ρ ne dépend que de la classe de conjugaison de f dans le groupe des homéomorphismes du cercle (c'est-à-dire $\rho(f) = \rho(h^{-1} \circ f \circ h)$).
 2. ρ dépend continûment de f (uniformité de la limite).

3. *Théorème de Poincaré* : $\rho(f) \in 2\pi\mathbb{Q}/2\pi\mathbb{Z}$ (c'est-à-dire $\rho(f)/2\pi$ est rationnel modulo 1) si et seulement si f a un point périodique. Si $\rho(f) = 2\pi p/q$ modulo 2π avec p et q premiers entre eux, tous les points périodiques de f ont pour période q .

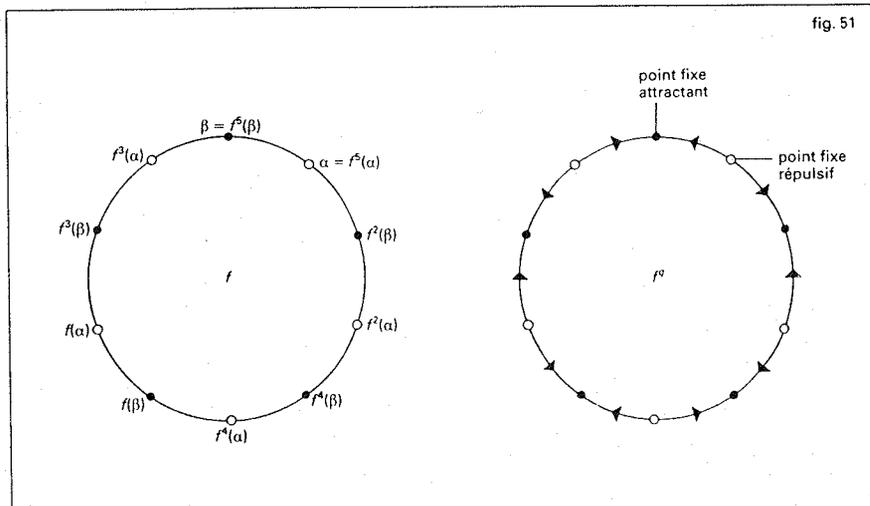
4. *Théorème de Denjoy* (1932 et 1946) : si f est un difféomorphisme de classe C^2 , et si $\rho(f) \notin 2\pi\mathbb{Q}/2\pi\mathbb{Z}$, f est conjugué par un homéomorphisme à la rotation d'angle $\rho(f)$.

5. *Théorème d'Herman* (1976) : il existe un sous-ensemble A de $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ dont le complémentaire a une mesure de Lebesgue égale à 0 tel que, si f est de classe C^∞ et si $\rho(f) \in 2\pi A/2\pi\mathbb{Z}$, l'homéomorphisme conjuguant f à la rotation d'angle $\rho(f)$ soit de classe C^∞ .

Poincaré eût été surpris par ces deux derniers théorèmes : par analogie avec la théorie des groupes fuchsien, il croyait possible l'existence de difféomorphismes analytiques f du cercle vérifiant $\rho(f) \notin 2\pi\mathbb{Q}/2\pi\mathbb{Z}$ et laissant invariant un ensemble de Cantor dans le cercle (et donc non topologiquement conjugués à une rotation). De tels difféomorphismes existent en classe C^1 (contre-exemples de Denjoy obtenus en « gonflant » une orbite d'une rotation non périodique) mais pas en classe $C^k, k \geq 2$. Quant au théorème d'Herman, remarquable contrepoint entre les propriétés arithmétiques du nombre de rotation et les propriétés de régularité de l'homéomorphisme conjuguant f à une rotation, il est la version globale (conjecturée par Arnold) d'un théorème antérieur d'Arnold qui montre le résultat lorsque f est analytique et suffisamment proche de la rotation d'angle $\rho(f)$ en utilisant la méthode d'itération rapide citée au chapitre 4.

La figure 50 apparaît maintenant comme la division du plan des paramètres (T, μ) suivant la valeur de $\rho(P_{\mu,\epsilon}|_{C_{\mu,\epsilon}})$. Si $T = T_0$ et ϵ sont fixés, l'application $\mu \mapsto \rho(P_{\mu,\epsilon}|_{C_{\mu,\epsilon}})$ est non croissante au voisinage de la valeur de μ pour laquelle apparaît $C_{\mu,\epsilon}$.

Si $\epsilon = 0$, cette application est différentiable ; lorsque $\epsilon \neq 0$, au contraire, cette application est localement constante sur une infinité d'intervalles (dont la réunion des intérieurs est localement dense) où elle prend



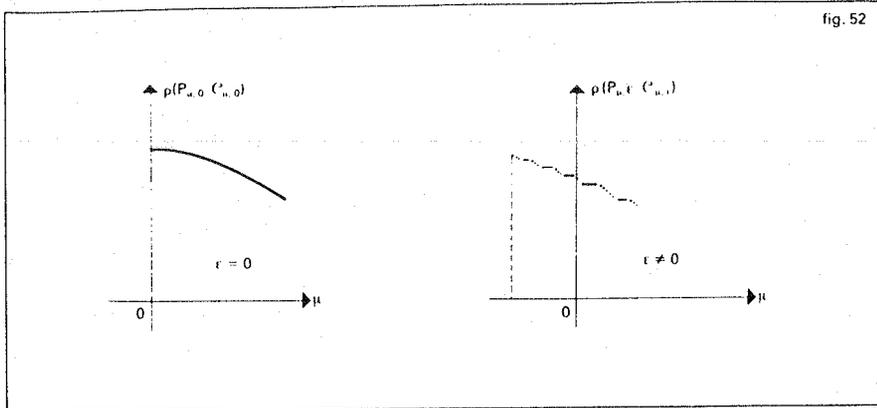


fig. 52

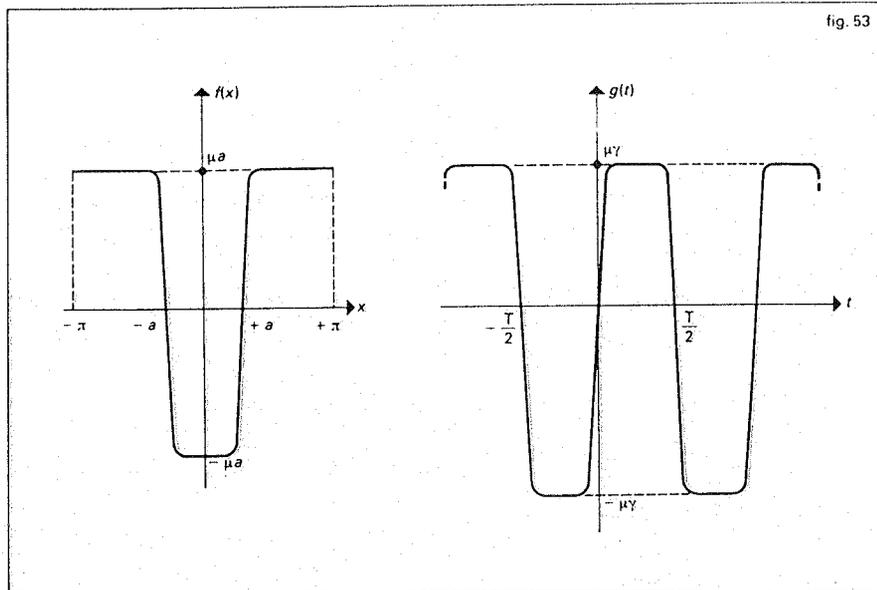


fig. 53

des valeurs de la forme $2\pi p/q$ (modulo $2\pi\mathbb{Z}$). Son graphe, analogue à celui de la fonction singulière de Lebesgue, est un escalier du diable (fig. 52, pour $T = T_0$ et ϵ fixés).

Ce comportement est générique pour des familles à un paramètre de difféomorphismes du cercle : il existe en général un ouvert dense de valeurs du paramètre pour lesquelles le difféomorphisme possède un nombre fini d'orbites périodiques attractantes et un nombre égal d'orbites périodiques répulsives comme sur la figure 51, où l'on a noté $f = P_{\mu, \epsilon}|_{C_{\mu, \epsilon}}$. De tels difféomorphismes sont structurellement stables (une petite perturbation conduit à un difféomorphisme topologiquement conjugué), et l'affirmation ci-dessus rentre dans le cadre du théorème de stabilité de Peixoto que nous évoquerons au chapitre 9.

Un complément apporté par Herman à son théorème (et déjà observé par Arnold dans le cas local) nous permet de préciser ce qui précède. En étudiant les propriétés de l'application $f \mapsto \rho(f)$ en un point où f est différentiablement conjuguée à une rotation, il montre que dans toute famille à un paramètre (C^1 par rapport au paramètre) de difféomorphismes f_μ de classe C^3 du cercle où le nombre de rotations $\rho(f_\mu)$ varie effectivement, l'ensemble des valeurs du paramètre μ pour lesquelles f_μ est différentiablement conjuguée à une rotation non périodique est de mesure de Lebesgue positive. Ce résultat s'applique dans notre cas : les intervalles de valeurs de μ sur lesquels $\rho(P_{\mu, \epsilon}|_{C_{\mu, \epsilon}})$ est constant sont denses au voisinage de la bifurcation de Hopf, mais leur

complémentaire est un ensemble de Cantor de mesure de Lebesgue positive.

Les courbes invariantes de $P_{\mu, \epsilon}$ que nous venons de voir apparaître par bifurcation de Hopf ne persistent, quand on continue à faire varier les paramètres, que si leur attraction reste appréciable (hyperbolicité normale), et les modalités de leur disparition sont loin d'être bien comprises, sauf bien sûr si cette dernière correspond à une bifurcation de Hopf inversée.

Ce problème n'est pas étranger à celui, évoqué au chapitre 4, de la taille du domaine de validité du théorème de K.A.M., ce qui montre sa difficulté.

Le cas où la disparition coïncide avec l'existence sur la courbe d'un nombre fini d'orbites périodiques a fait l'objet d'études numériques de Curry et Yorke (1978) et de travaux plus théoriques de Aronson, Chory, Mac Gehee, Hall (1982). Lorsque l'attraction devient insuffisante, une dynamique complexe peut apparaître avec, en particulier, création de points homoclines : le difféomorphisme s'aperçoit en quelque sorte que les variétés stables et instables de points périodiques hyperboliques consécutifs n'ont plus aucune raison de coïncider pour former une portion de courbe différentiable, et peuvent au contraire s'intersecter transversalement ; si simultanément les orbites périodiques coalescent par paires et sont sur le point de disparaître, la courbe peut perdre sa différentiabilité par une suite infinie de repliements s'accumulant au voisinage des points périodiques. Newhouse, Palis, et Takens ont montré qu'après qu'elle a disparu, un itéré de f (d'autant plus grand qu'on est plus proche

du point de disparition) possède un fer à cheval. Des attracteurs étranges « à la Hénon » (cf. chap. 6) semblent également surgir : c'est l'un des modèles de ces routes vers la turbulence qui sont depuis une dizaine d'années l'objet d'un riche dialogue entre mathématiciens, numériciens, physiciens théoriciens et physiciens expérimentateurs (on en reparlera à l'occasion dans les chapitres suivants).

La diminution de l'attraction qu'exerce une courbe invariante peut être liée à la proximité d'une courbe invariante répulsive, situation qui dans le cas plus simple de points fixes d'un endomorphisme de l'intervalle a été proposée par Pommeau et Manneville comme modèle de l'intermittence (bouffées de turbulence). Dans le cas des flots de \mathbb{R}^2 , la situation générale est également très simple, puisqu'elle se ramène à l'étude des points fixes d'une application de Poincaré : une orbite périodique attractante et une orbite périodique répulsive se rapprochent, se confondent (l'unique orbite survivante est alors répulsive d'un côté, attractante de l'autre), et disparaissent. Dans le cas des difféomorphismes de \mathbb{R}^2 que nous considérons ici, la dynamique devient très complexe au moment de la disparition sur toute une plage de valeurs des paramètres. Dans l'espace produit de \mathbb{R}^2 par l'espace des paramètres, cette complexité est de type hamiltonien (cf. chap. 4, en particulier fig. 39) et peut conduire à des courbes de Birkhoff (souvent appelées attracteurs de Birkhoff) analogues à celles que nous rencontrerons dans la deuxième partie de ce chapitre.

Nous considérons maintenant le cas où, dans l'équation (N_3), les termes d'excitation $-f(x) dx/dt$ et $g(t)$ sont très grands.

On supposera que $f(x) = \mu a \varphi(x/a)$ pour x compris entre $-\pi$ et $+\pi$, où φ est une fonction paire dérivable très proche de la fonction valant -1 entre -1 et $+1$ et $+1$ ailleurs, a est assez petit, et μ est très grand. De même, on choisira $g(t) = \mu \gamma p(t)$, où p est une fonction impaire dérivable T -périodique, très proche de la fonction T -périodique qui vaut -1 entre $-T/2$ et 0 et $+1$ entre 0 et $T/2$ (fig. 53).

Le changement de variables :

$$X = \frac{1}{a}x, \quad Z = \frac{1}{a^2\mu}z, \quad \epsilon = \frac{1}{a\mu}, \quad b = \frac{\gamma}{a^2}$$

transforme (Q_3) en l'équation :

$$(S_5) \quad \begin{cases} \frac{dX}{dt} = \frac{1}{\epsilon}(Z - \Phi(X)) \\ \frac{dZ}{dt} = -\epsilon\omega^2\left(\frac{1}{a}\sin aX\right) + bp(t), \end{cases}$$

où : $\Phi(X) = \int_0^X \varphi(t) dt$ est représentée sur la figure 54 (pour des valeurs de X comprises entre $-\pi/a$ et π/a).

Si a est assez petit et si $\omega = 1$ (ce qu'on peut supposer par un changement de mesure

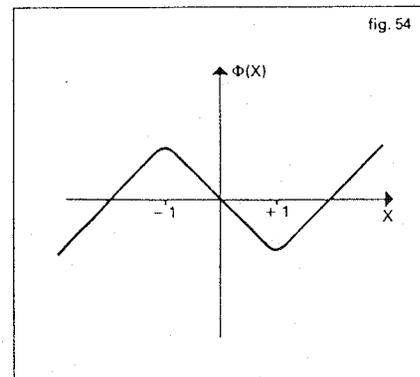
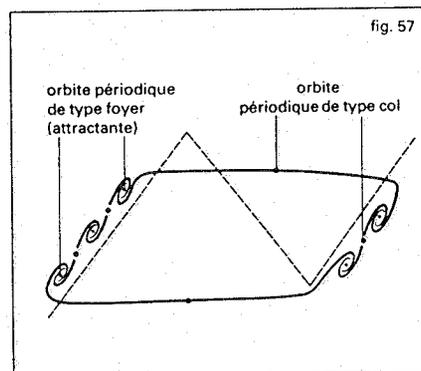
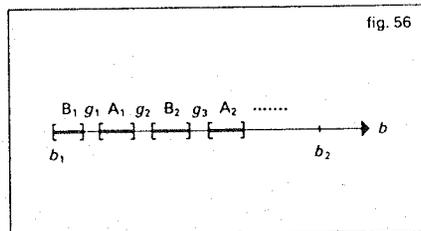
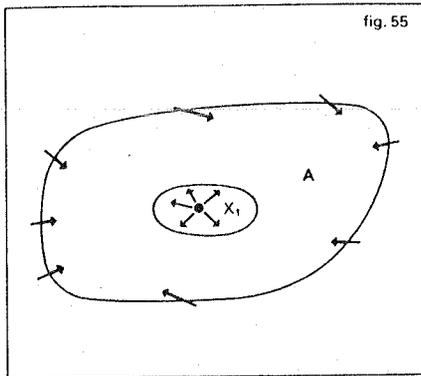


fig. 54



des itérés positifs de A est (pour $\mu > 0$ assez petit) une courbe fermée très différentiable, il n'en est plus de même pour l'équation (L) : trois types de comportement (A, B, et g) se partagent l'intervalle $[b_1, b_2]$ (fig. 56, où la somme des longueurs des g_i tend vers 0 avec ϵ).

Lorsque b appartient à l'un des intervalles A_i , il ne se passe rien d'autre que ce qu'on attendrait dans (N_5) lorsque μ grandit : les accrochages de fréquences font perdre de plus en plus de régularité à la courbe invariante, jusqu'à ce que l'intersection des itérés de l'anneau ressemble à la figure 57, que l'on comparera à la figure 51, mais également à la figure 13. Sur la figure 57, l'intersection :

$$\bigcap_{n=0}^{+\infty} P_b^n(A)$$

coïncide avec l'union de l'orbite périodique attractante et de la variété instable de l'orbite périodique de type col (union des variétés instables pour $P_b^{2n_i+1}$ des différents points de l'orbite).

L'unique attracteur de P_b est dans ce cas l'orbite périodique de type foyer ; la période commune des deux orbites périodiques est grande $((2n_i + 1)$ avec n_i de l'ordre de $1/\epsilon$), constante sur A_i , et décroît quand on passe de A_i à A_{i+1} (remplacement de n_i par $n_{i+1} = n_i - 1$). Nous ne parlerons pas des g_i , zones complexes de bifurcation.

Lorsque b appartient à l'un des intervalles B_i , une nouvelle paire (col-foyer) d'orbites périodiques apparaît, de période $(2n_i - 1)$. L'existence dans l'anneau d'orbites périodiques de périodes minimales $2n_i - 1$ et $2n_i + 1$ est l'indice d'une grande complexité topologique de

$$\bigcap_{n=0}^{+\infty} P_b^n(A);$$

par exemple, cette intersection n'est sûrement pas homéomorphe à un cercle, car le nombre de rotation de la restriction de P_b serait un rationnel de dénominateur égal à la fois à $2n_i - 1$ et à $2n_i + 1$!

Par analogie (mais seulement par analogie) avec une construction faite par Birkhoff en 1932, nous appellerons cette intersection une *courbe de Birkhoff* ; ce n'est pas un « attracteur » au sens actuel du mot (cf. chap. 6), même si ce sens est encore mouvant : pour presque tous les points z , les itérés $P^n(z)$ tendent, lorsque n tend vers $+\infty$, vers l'une des deux orbites périodiques attractantes.

Les points de

$$\bigcap_{n=0}^{+\infty} P_b^n(A)$$

dont les itérés ne tendent pas vers l'une de ces deux orbites forment un ensemble de Cantor invariant C (qui contient les deux orbites périodiques de types col associées), et la courbe de Birkhoff

$$\bigcap_{n=0}^{+\infty} P_b^n(A)$$

n'est autre que la réunion des deux orbites périodiques attractantes et de la variété instable de C (définie chap. 7 : C est un exemple d'ensemble invariant hyperbolique) : c'est une *courbe étrange* qui, bien que topologiquement distincte d'un cercle, sépare le plan de la même façon que le ferait un cercle, ce qui ne l'empêche pas localement de ressembler au produit d'un ensemble de Cantor par un intervalle. Nous n'essaierons pas de tracer ce joli monstre (le lecteur déçu comprendra en regardant les dessins de Marie Charpentier dans le *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 1935) ; la figure 58 (prise dans l'article de Levi) représente simplement ses sous-ensembles invariants (qu'on a reproduits également dans le cas où b est dans A_i , ce qui permet la comparaison avec la fig. 57).

L'existence de C et la dynamique de $P_b|C$ (en particulier l'existence d'une infinité d'orbites périodiques, et d'une infinité d'orbites chaotiques), mais aussi la *stabilité structurelle* de P_b se prouvent par des méthodes de dynamique symbolique analogues à celles qu'on a utilisées au chapitre 4 pour élucider la structure associée aux points homoclines. Puisque c'est en réfléchissant à cet exemple que Smale inventa le fer à cheval, cela ne doit pas nous étonner. En fait, l'application de ces méthodes demande un très gros travail, et (L) est une des rares équations explicites en dimension trois dont on soit capable d'exhiber précisément le comportement géométrique.

L'idée exploitée par Levi est la suivante : il commence par montrer la présence dans A d'un petit rectangle r (fig. 59) ayant la propriété que, pour tout point z de A, il existe un entier $n(z) > 0$ tel que $P_b^{n(z)}(z)$ soit dans r ; il montre alors qu'avant de revenir dans r les images de r par les itérés de P_b sont étirées et pliées comme sur la figure 59, ce qui commence à faire penser au fer à cheval...

Le phénomène vient de ce qu'au voisinage du point V (fig. 59) le champ de vecteurs dépendant du temps associé à (L) a un comportement complexe dû à la présence du segment UV séparant une zone où le champ est dirigé vers la droite (et très grand) d'une zone où il est dirigé vers la gauche (et également très grand). Cela est analogue à ce qui se passe dans l'effet canard discuté au chapitre 3 et peut être analysé à l'aide de l'analyse non standard (cf. ANALYSE NON STANDARD).

du temps), l'équation (S₃) est pratiquement identique à l'équation suivante, étudiée par Levinson dans les années quarante à la suite des travaux de Cartwright et Littlewood sur l'équation de Van der Pol, et plus récemment par Levi :

$$(L) \quad \begin{cases} \frac{dX}{dt} = \frac{1}{\epsilon}(Z - \Phi(X)) \\ \frac{dZ}{dt} = -\epsilon X + bp(t) \end{cases}$$

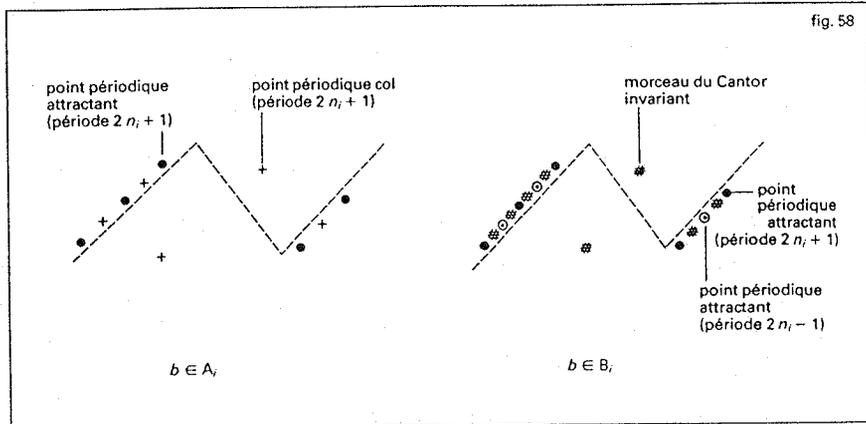
où $\epsilon > 0$ est petit ; cette équation équivaut encore à :

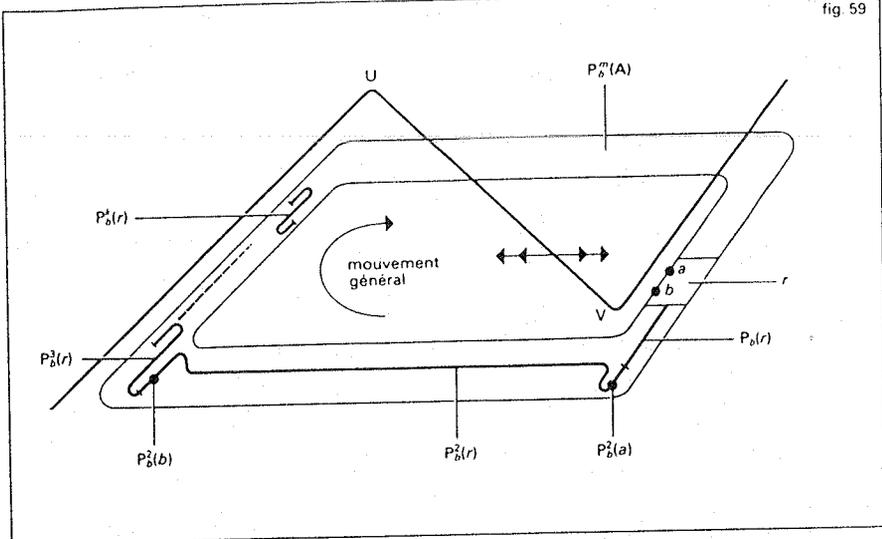
$$(L) \quad \epsilon \frac{d^2X}{dt^2} + \Phi(X) \frac{dX}{dt} + \epsilon X = bp(t).$$

Lorsque, ϵ étant fixé, b varie dans un certain intervalle $[b_1, b_2]$ (auquel nous nous limiterons), l'application de Poincaré P_b de (L) semble avoir beaucoup en commun avec l'application $P_{\mu, \epsilon}$ de l'équation (N₅) pour $\mu > 0$: il existe en effet un point fixe répulsif X_r (spectre de la dérivée $DP_b(X_r)$ tout entier hors du disque unité de C) entouré d'un anneau invariant A (c'est-à-dire $P_b(A) \subset A$) qui attire en particulier tous les points « repoussés » par X_r (fig. 55, très schématisée, où les flèches indiquent très grossièrement l'action de P_b).

Mais, alors que dans le cas de l'équation (N₅) l'intersection :

$$\bigcap_{n=0}^{+\infty} P_{\mu, \epsilon}^n(A)$$





Pour finir, notons que, au bout de suffisamment d'itérations, l'image de A ressemble beaucoup à une courbe fermée; on peut alors penser à P_b comme à une application du cercle sur le cercle. La différence avec (N_3) est que cette application n'est plus bijective; en particulier, l'unique nombre de rotation est remplacé par un intervalle de nombres de rotation, ce qui autorise des orbites périodiques de périodes différentes.

La réduction (au moins heuristique) d'une équation différentielle en dimension trois à une application non injective (endomorphisme) en dimension un, éventuellement discontinue, est assez fréquente; nous la rencontrerons encore au chapitre 6 à propos de l'attracteur de Lorenz (à la différence près que dans ce cas on ne sait pas vraiment montrer que le modèle géométrique reflète bien les propriétés de l'équation).

*Excursion homologique :
nombre de rotation
et cycles asymptotiques*

Ainsi que l'a remarqué Herman, le nombre de rotation $\rho(f)$ d'un homéomorphisme f du cercle S^1 conservant l'orientation peut être défini par $\rho(f) = \mu(\varphi)$, où $\tilde{f} = \text{Id} + \varphi$ est un relèvement de f en un difféomorphisme de \mathbb{R} , et μ une mesure de probabilité sur le cercle (mesure de Radon de masse totale égale à 1) invariante par f ; une telle mesure existe toujours, mais n'est unique que si $\frac{1}{2\pi} \cdot \rho(\tilde{f})$ est irrationnel.

Si X est un espace métrique connexe compact ayant, par exemple, le type d'homotopie d'une variété, et f un homéomorphisme de X isotope à l'identité qui préserve la mesure de probabilité μ , on peut leur associer de façon analogue une classe de rotation $\rho_\mu(f)$ appartenant au quotient du premier groupe d'homologie $H_1(X, \mathbb{R})$ de X par un certain sous-groupe Γ contenu dans $H_1(X, \mathbb{Z})$ (et donc discret). Par exemple, lorsque X est le tore T^n de dimension n , Γ coïncide avec $H_1(T^n, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^n \subset \mathbb{R}^n \cong H_1(T^n, \mathbb{R})$, et la classe de rotation $\rho_\mu(f)$ peut être naturellement considérée comme un élément de $T^n = \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$; si μ définit le volume sur T^n la nullité de $\rho_\mu(f)$ s'interprète comme la conservation par f du centre de gravité au sens de l'excursion variationnelle du chapitre 4.

Plus généralement, si X est une variété différentiable orientable de dimension n et si μ définit le volume sur X (mesure de

Lebesgue normalisée), la dualité de Poincaré associée à $\rho_\mu(f)$ l'élément de $H^{n-1}(X, \mathbb{R})$ qui fait correspondre à chaque $(n-1)$ -cycle le volume total balayé par ses images par une isotopie de f à l'identité.

Ces classes de rotation, définies sous leur forme la plus générale par Fathi et Visetti, avaient été primitivement construites par Schwartzman dans le cas des flots sous le nom de cycles asymptotiques et utilisées par ce dernier pour caractériser les flots possédant une section globale (hypersurface rencontrant transversalement chaque courbe intégrale). On peut dans ce cas les décrire simplement en termes des courants géométriques de Ruelle et Sullivan.

6 Couplage d'auto-oscillations et attracteurs étranges

La simplicité des attracteurs que nous avons rencontrés jusqu'ici (sous-espaces homéomorphes à des points, des cercles ou des tores) nous a dispensés de donner de ce terme une définition plus précise qu'« ensemble des mouvements asymptotiques dans un système dissipatif ». Même dans le pendule forcé que nous avons étudié à la fin du chapitre 5, la plupart des courbes intégrales de la région considérée tendaient asymptotiquement vers l'une ou l'autre de deux orbites périodiques, et la complexité de l'ensemble invariant que nous avons trouvé pour l'application de Poincaré (localement le produit d'une droite par un ensemble de Cantor) reflétait seulement l'intrication des bassins d'attraction de ces orbites. Dans les exemples de ce chapitre, c'est l'attracteur lui-même qui sera responsable de la complexité et un essai de définition vaut d'être tenté : on appellera attracteur d'un système dynamique (à temps continu ou discret) un sous-ensemble fermé invariant (c'est-à-dire une réunion d'orbites) de l'espace de phase, attirant tous (presque tous serait plus raisonnable) les points d'un voisinage (le bassin de l'attracteur) lorsque le temps croît, et ayant une certaine forme d'indécomposabilité, par exemple la possession d'une orbite dense (c'est-à-dire une orbite venant arbitrairement près de chaque point du sous-ensemble). Si, comme pour les courbes de Birkhoff, cette dernière condition n'est pas remplie, on parlera d'« ensemble invariant attractant ». Notons que cette quasi-homogénéité implique qu'un attracteur est, au voisinage de chacun de ses points, ou bien très simple (par exemple une variété), ou bien très compliqué (au mieux un ensemble de Cantor). Suivant une tradition dont

l'origine est mal établie, l'adjectif étrange sera accolé à tout attracteur ne ressemblant pas à ceux qu'on a déjà rencontrés dans les chapitres précédents. Cela implique souvent une dépendance sensible des conditions initiales (croissance exponentielle avec le temps des erreurs sur les données), propriété quelquefois exigée (avec raison) comme certificat d'étrangeté et souvent assimilée (à tort) à la notion de comportement chaotique (comme le dit Thom, quoi de moins chaotique qu'un difféomorphisme d'Anosov linéaire sur le tore, cf. *infra*. 7).

Peu de résultats théoriques concernant la structure et la classification des attracteurs, mais chaque jour apporte de nouvelles équations susceptibles de posséder un attracteur étrange, issues de la physique (turbulence), de la chimie (réactions oscillantes), de l'économie... Une énorme masse d'expériences numériques commence à s'accumuler, expériences dont l'interprétation même est souvent sujette à caution : comment distinguer par exemple un honnête attracteur étrange d'une perfide orbite périodique de très longue période ?

Avant de passer en revue quelques exemples, nous allons montrer que tous peuvent se rencontrer dans le système formé par n pendules non linéaires faiblement couplés, c'est-à-dire dans les petites perturbations du système d'équations :

$$(N_3^q) \quad \frac{d^2 x_i}{dt^2} = -\sin x_i - f_{\mu_i}(x_i) \frac{dx_i}{dt}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

où f_{μ_i} est défini comme dans l'équation (N_3) du chapitre 3.

L'espace de phase est maintenant le produit de n exemplaires de $S^1 \times \mathbb{R}$, c'est-à-dire $T^n \times \mathbb{R}^n$ ($T^n = (S^1)^n =$ tore de dimension n) qu'on peut dérouler (dans n directions) sur \mathbb{R}^{2n} . Si les μ_i sont positifs, l'étude du chapitre 3 montre que le champ de vecteurs défini par (N_3^q) possède un ensemble invariant attractant homéomorphe au tore T^n ; d'autre part, pour des μ_i bien choisis, ce tore est un attracteur (toutes ses orbites sont denses et les mouvements asymptotiques sont quasi périodiques). Si nous introduisons un couplage suffisamment faible entre les pendules, par exemple en les reliant par des ressorts très lâches, un tore attractant homéomorphe à T^n continue à exister mais il est possible que sur ce tore le flot possède maintenant un attracteur étrange qui attire asymptotiquement presque toutes les courbes intégrales dans l'espace de phase. Le comportement asymptotique de ces dernières semblera erratique et il sera bien difficile de se persuader que le système observé obéit encore aux règles d'un strict déterminisme, ce qu'il fait cependant (il ne faut pas confondre déterminisme et possibilité pratique de prévision). Un tel exemple a été proposé pour la première fois en 1971 par Ruelle et Takens comme un modèle possible d'apparition de la turbulence hydrodynamique, à un moment où la pertinence même des équations de Navier-Stokes (cf. équations aux DÉRIVÉES PARTIELLES) dans les phénomènes turbulents était très discutée : le fait que des équations en dimension finie (et pas trop grande) puissent sous-tendre un comportement asymptotique aussi complexe peut faire espérer qu'une équation d'évolution aux dérivées partielles (qu'il faut penser heuristiquement comme une équation différentielle sur un espace de phase de dimension infinie) soit suffisamment riche pour contenir les phénomènes de turbulence.

Nous nous contenterons, suivant Ruelle, Takens et Newhouse, de montrer que par une perturbation arbitrairement petite (ainsi que ses dérivées) d'un champ de vecteurs quasi périodique sur T^n ($n > 4$) (par exemple celui qui est défini par (N_3^q)), on peut introduire

pratiquement n'importe quel attracteur étrange. Le champ de vecteurs sur ce tore est, pour un bon choix de coordonnées $\theta_1, \dots, \theta_n$, de la forme :

$$\frac{d\theta_i}{dt} = \omega_i$$

(on considère les θ_i comme des réels, en déroulant T^n sur R^n : un champ de vecteurs sur T^n correspond simplement à un champ de vecteurs sur R^n 2π -périodique par rapport à chaque variable). Au prix d'une perturbation arbitrairement petite, on peut supposer les réels ω_i de la forme $\omega_i = ck_i$, $c \in R$, $k_i \in Z$, $i = 1, 2, \dots, n$, les k_i étant de surcroît linéairement indépendants. Un difféomorphisme (changement de coordonnées) du tore, défini par un isomorphisme linéaire unimodulaire de R^n , transforme alors ce champ de vecteurs en un champ de la forme :

$$\frac{d\xi_i}{dt} = 0, \quad i = 1, \dots, n-1, \quad \frac{d\xi_n}{dt} = c,$$

dont l'application de Poincaré $P : T^{n-1} \rightarrow T^{n-1}$, définie en regardant le premier retour des courbes intégrales sur le tore $\xi_n = 0$, est l'identité. Il suffit donc de savoir approcher l'identité du tore T^{n-1} par un difféomorphisme P ayant un attracteur étrange. Cela peut être fait à partir d'un difféomorphisme f du tore T^{n-2} isotope à l'identité, c'est-à-dire joint à l'identité par une famille à un paramètre $(f_t)_{t \in [0,1]}$ de difféomorphismes, $f_0 = Id$, $f_1 = f$, et ayant un attracteur étrange : soit $(\varphi_t)_{t \in R}$ l'unique flot sur $T^{n-2} \times S^1 = T^{n-1}$ tel que $\varphi_t(\xi_1, \dots, \xi_{n-2}, 0) = (f_t(\xi_1, \dots, \xi_{n-2}), 2\pi t)$ (pour éviter des problèmes de différentiabilité, on suppose $f_t = f_0$ pour t voisin de 0 et $f_t = f_1$ pour t voisin de 1) ; son application de Poincaré sur $T^{n-2} \times \{0\}$ n'est autre que la restriction de $\varphi_{2\pi}$, c'est-à-dire f . Si ε est petit, le difféomorphisme φ_ε est proche de l'identité et commute (via la projection de $T^{n-2} \times S^1$ sur S^1) avec la rotation $\xi_{n-1} \mapsto \xi_{n-1} + 2\pi\varepsilon$ de S^1 .

On obtient \tilde{P} en choisissant $\varepsilon = 1/N$, N entier très grand, et en remplaçant cette

rotation par un difféomorphisme h proche n'ayant que deux orbites périodiques de période N , l'une attractante, l'autre répulsive (\tilde{P} devient un produit gauche au-dessus de h). Le difféomorphisme ainsi construit est très proche de l'identité si N est grand, et possède un attracteur homéomorphe à la réunion disjointe de N copies de l'attracteur de f .

Dans la suite du chapitre, nous donnons quelques exemples classiques de difféomorphismes et de flots ayant (ou semblant avoir) un attracteur étrange. Ces exemples sont décrits dans un espace euclidien mais peuvent être plongés dans n'importe quelle variété de même dimension. Au lecteur de reconnaître si les difféomorphismes correspondant sont ou non isotopes à l'identité.

Exemple 1 : le solénoïde de Smale. Il s'agit d'un difféomorphisme de R^3 qui applique un tore solide dans lui-même après l'avoir étiré et replié (fig. 60, où l'on a représenté une coupe $z = C^e$). Plus précisément, si on identifie le cercle S^1 à l'ensemble des nombres complexes z de module égal à 1 et le disque D^2 à l'ensemble des nombres complexes w de module inférieur ou égal à 1, la restriction de f au tore solide $S^1 \times D^2$ peut être définie par

$$f(z, w) = (z^2, \frac{1}{2}z + \frac{1}{4}w).$$

C'est un produit gauche au-dessus de l'application du cercle sur lui-même définie par $z \rightarrow z^2$ (doublement des angles).

Par récurrence, on voit que $f^n(S^1 \times D^2)$ s'enroule 2^n fois autour du tore, coupant chaque disque d'équation $z = \text{constante}$ transversalement en 2^n disques de rayon $(1/4)^n$. L'attracteur

$$A = \bigcap_{n=0}^{+\infty} f^n(S^1 \times D^2)$$

intersecte chaque disque suivant un ensemble de Cantor et est localement homéomorphe au produit de l'ensemble de Cantor par un intervalle (il est en fait réunion d'une famille non dénombrable de courbes). La figure 61, tirée d'un article de Ruelle, indique l'orbite d'un point X_0 arbitraire du tore solide : les itérés $f^n(X_0)$ se rapprochent de l'attracteur et, pour n assez grand, appartiennent pratiquement à l'attracteur (bien entendu ils ne peuvent y appartenir en toute rigueur que si l'on part d'un point $X_0 \in A$). La figure 61 représente $f^n(X_0)$ pour $51 \leq n \leq 5050$.

Le solénoïde A est un bon exemple d'ensemble invariant hyperbolique d'un difféomorphisme : en chaque point il existe une direction (celle du disque) dans laquelle f contracte et une direction (celle du cercle, le long de A) où f dilate, et ces directions dépendent continûment du point (cf. chap. 7) ; c'est aussi un exemple idéalement simple d'attracteur étrange : il attire tout un voisinage (son bassin), il possède une orbite dense, et il présente le phénomène de « dépendance sensible des conditions initiales » : même si X_0 et Y_0 sont initialement très proches, les destins de $f^n(X_0)$ et $f^n(Y_0)$ n'ont en général rien en commun, ce qui rend toute prédiction à long terme impossible. Ces deux derniers points peuvent se voir en utilisant une méthode de dynamique symbolique tout à fait analogue à celle qui a permis, au chapitre 4, d'analyser le fer à cheval (qui, lui, n'est pas un attracteur) : on découpe le tore solide en deux parties $\Delta_0^* = \{e^{i\theta}, w\}$, $0 \leq \theta < \pi$ et $\Delta_1^* = \{e^{i\theta}, w\}$, $\pi \leq \theta < 2\pi$ et on associe à un point X_0 la suite $(i_n)_n \in Z$ définie par $i_n = 0$ si $f^n(X_0) \in \Delta_0^*$, $i_n = 1$ si $f^n(X_0) \in \Delta_1^*$; il y a bien sûr ambiguïté si, par hasard, $f^n(X_0) \in \Delta_0^* \cap \Delta_1^*$, ce qui ne pouvait arriver dans le cas du fer à cheval.

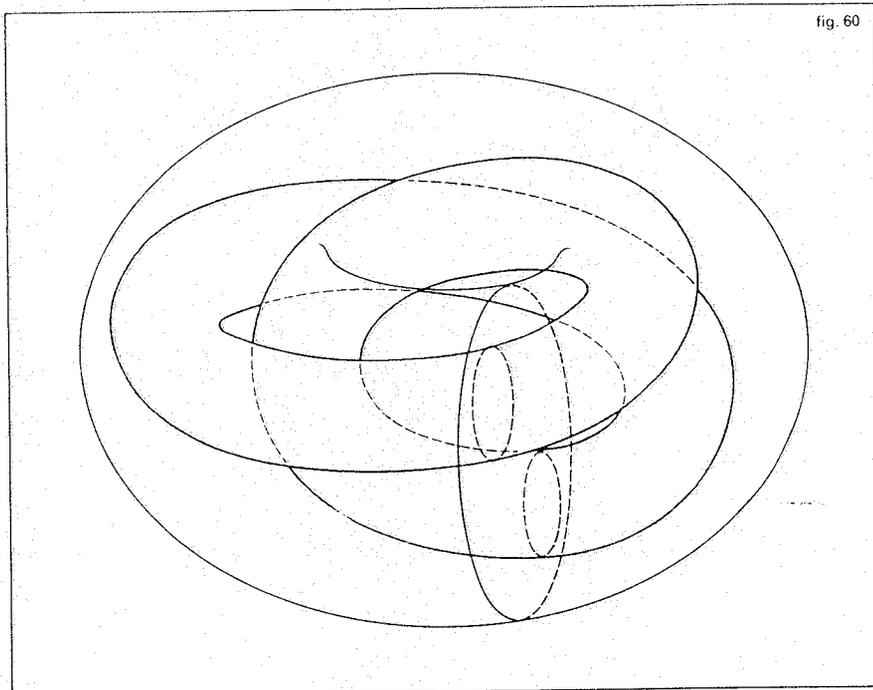


fig. 60

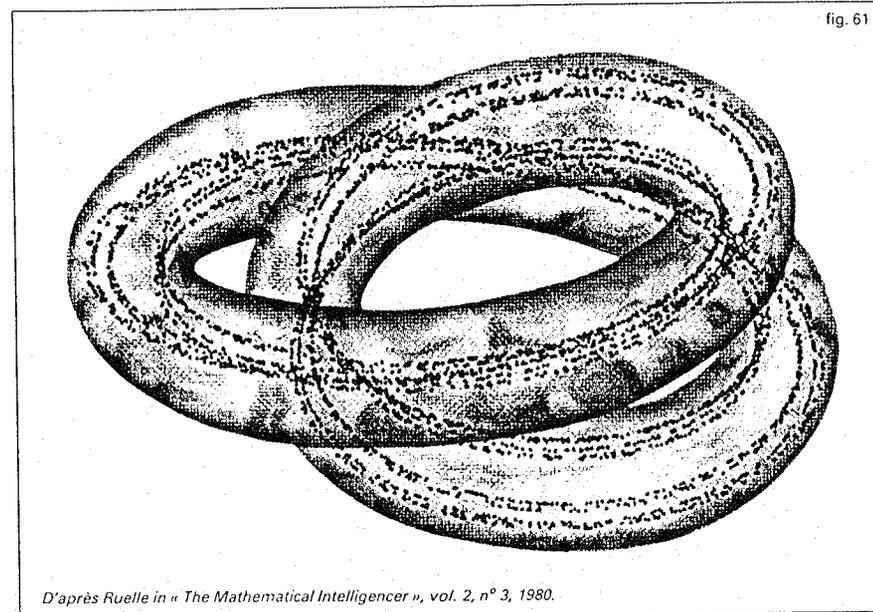


fig. 61

D'après Ruelle in « The Mathematical Intelligencer », vol. 2, n° 3, 1980.

Étant donné une suite finie $\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}$ de zéros et de uns, l'ensemble $\Delta_{\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}}^+$ des $X_0 \in S^1 \times D^2$ tels que $f^i(X_0) \in$ intérieur de $\Delta_{\alpha_i}^+$, $i = 0, \dots, n-1$, est un secteur d'angle $2\pi/2^n$; l'ensemble $\Delta_{\alpha_{-1}, \dots, \alpha_{-n}}^-$ des $X_0 \in S^1 \times D^2$ tels que $f^i(X_0) \in$ intérieur de $\Delta_{\alpha_i}^-$, $i = -1, -2, \dots, -n$, est un tube de rayon $(1/4)^n$ faisant une fois le tour de $S^1 \times D^2$. L'intersection $\Delta_{\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}; \alpha_{-1}, \dots, \alpha_{-n}} = \Delta_{\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}}^+ \cap \Delta_{\alpha_{-1}, \dots, \alpha_{-n}}^-$ définit donc, lorsque n tend vers l'infini, un unique point (z, w) qui appartient à A (en particulier, l'argument de z s'écrit $(0, \alpha_0, \alpha_1, \dots) \cdot 2\pi$ en base 2).

On vient de définir une application S de $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$ sur A qui, comme au chapitre 4, vérifie $f \circ S = S \circ \sigma$, où σ est l'homéomorphisme de *décalage de virgule*. Cette application est surjective mais non injective (elle l'était pour le fer à cheval); cependant, l'image réciproque d'un point de A ne contient jamais plus de deux éléments de $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$ et S rend pratiquement les mêmes services que si elle était bijective pour montrer l'existence d'orbites périodiques, d'orbites denses, etc.

Nous quitterons le solénoïde en signalant à son propos la théorie de Williams qui permet de comprendre la topologie et la dynamique des attracteurs hyperboliques ayant, comme A , la propriété que la restriction de f à l'attracteur est une dilatation : soit p_1 la projection de $S^1 \times D^2$ sur S^1 et π l'application de A dans le produit

$$\prod_{i=0}^{+\infty} (S^1)_i$$

d'une infinité de cercles définie par $\pi(X) = (p_1 \circ f^{-i}(X))_{i=0}^{+\infty}$; on peut montrer que $\pi(A)$ coïncide avec l'ensemble :

$$L = \{(z_i)_{i=0}^{+\infty} \in \prod_{i=0}^{+\infty} (S^1)_i, z_{i+1}^2 = z_i\}$$

et que π est un homéomorphisme de A sur L qui conjugue $f|_A$ à l'homéomorphisme g de L défini par $g((z_i)_{i=0}^{+\infty}) = (z_i^2)_{i=0}^{+\infty}$.

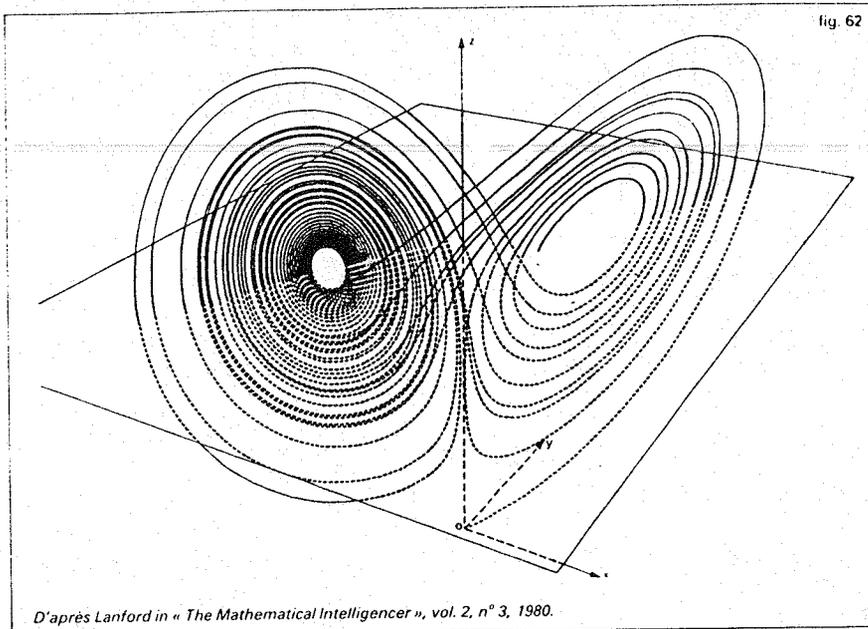
Pour les mathématiciens, L n'est autre que la *limite projective* $L = \varprojlim (S^1 \xrightarrow{\varphi} S^1 \xrightarrow{\varphi} S^1 \leftarrow \dots)$, avec $\varphi(z) = z^2$.

Dans le cas général, $\varphi: S^1 \rightarrow S^1$ est remplacé par une application continue dilatante $\varphi: K \rightarrow K$ d'une *variété branchue* K , et la même construction de limite projective permet de retrouver l'attracteur et la dynamique sur l'attracteur (fig. 69 et 70).

Exemple 2 : l'attracteur de Lorenz. En 1963, le météorologue Edward Lorenz publia un article qui, à cette époque, échappa complètement aux mathématiciens : il y écrivait la famille d'équations différentielles dans \mathbb{R}^3 ci-dessous, obtenue par une troncation « sauvage » à partir des équations de la convection (σ correspond à un nombre de Prandtl, r à un nombre de Rayleigh, et b à un facteur de forme) :

$$(M) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\sigma x + \sigma y \\ \frac{dy}{dt} = rx - y - xz \\ \frac{dz}{dt} = -bz + xy \end{cases}$$

et montrait numériquement qu'elle semblait, pour $\sigma = 10$, $r = 28$, $b = 8/3$, posséder un attracteur étrange (le mot n'était pas encore employé). La figure 62 (obtenue par Lanford) montre un morceau de la courbe intégrale passant par l'origine : cette courbe fait un certain nombre de tours α sur la boucle de droite, puis un certain nombre β à gauche, et ainsi de suite ; si on change un tant soit



D'après Lanford in « The Mathematical Intelligencer », vol. 2, n° 3, 1980.

peu la donnée initiale, on obtient une courbe intégrale analogue, mais la suite de nombres α, β, \dots est complètement différente, manifestant la dépendance sensible des conditions initiales (ce que Lorenz appelait l'*effet aile de papillon*, arguant que le battement des ailes d'un papillon pouvait suffire à modifier complètement les conditions météorologiques quelque temps après).

On ne sait toujours pas montrer que l'équation (M) possède un attracteur étrange, mais Guckenheimer et Williams ont construit des modèles géométriques analogues sur lesquels tout peut être démontré. La structure du flot est très riche ; il y a par exemple une infinité d'orbites périodiques nouées, c'est-à-dire plongées dans \mathbb{R}^3 de façon non triviale (Birman et Williams) ; de plus, le type topologique de l'attracteur peut varier continûment, ce qui montre sa complexité. Ces *attracteurs de Lorenz géométriques* sont obtenus par une construction de limite inverse analogue à celle qui fournit le solénoïde. Leur étude se ramène en deux étapes à celle d'un endomorphisme (application non inversible) discontinu d'un intervalle : existence sur un plan bien choisi d'une application de Poincaré P (non partout définie), puis quotient de P par un feuilletage invariant. Remarquons enfin que de nombreux exemples expérimentaux d'attracteurs étranges sont fondés sur une telle suite infinie de choix (ici, de quel côté tourner ?).

Exemple 3 : l'attracteur de Hénon et quelques autres. Si on cherche à transformer l'exemple du fer à cheval en un attracteur, il est naturel de considérer des applications du plan dans le plan appliquant un carré dans lui-même après étirement et repliement. Un exemple de ce type (au renversement de l'orientation près) a été proposé par Hénon en 1976 à la suite de calculs numériques de Pomeau et Ibanez sur les équations de Lorenz (pour des valeurs des paramètres autres que celles que nous avons citées). Il s'agit de l'application,

$$(H) \quad (x, y) \mapsto (y + 1 - ax^2, bx)$$

La figure 63 (tirée de l'article de Hénon) montre 10 000 points de l'orbite de $(0,631\ 354\ 48 ; 0,189\ 406\ 34)$ lorsque $a = 1,4$, $b = 0,3$, ainsi que trois agrandissements successifs de portions de cette orbite.

L'orbite semble parcourir un attracteur étrange localement homéomorphe au produit

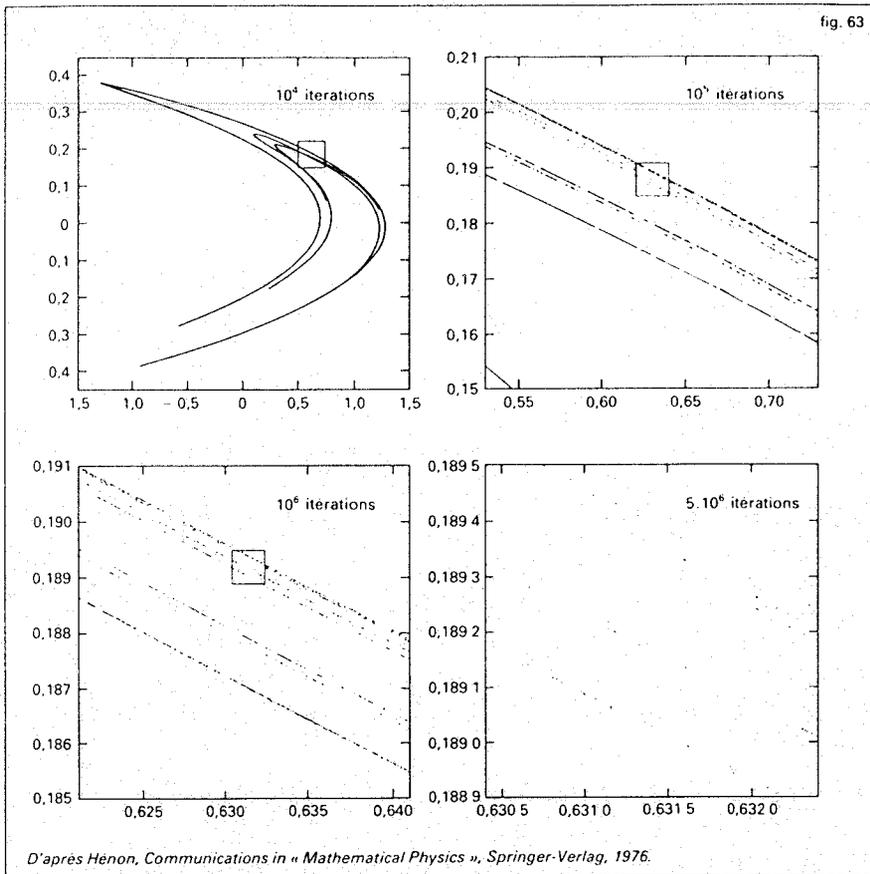
d'un ensemble de Cantor par un intervalle, mais cela n'a pas pu être démontré pour le moment : Misiurewicz et Szenc ont seulement montré l'existence d'un point homocline, et donc d'un ensemble de Cantor invariant ; Misiurewicz a réussi par contre à prouver l'existence d'un attracteur étrange dans un modèle linéaire par morceaux de ce difféomorphisme, proposé par Lozi. Des doutes ont été émis sur l'existence effective d'un attracteur étrange, en particulier par Newhouse qui avance la possibilité d'une orbite périodique attractante de très longue période ; remarquons qu'en changeant un peu a et b on peut obtenir comme attracteur des orbites périodiques de petites périodes.

D'autres exemples, généralisant celui de Hénon, ont été proposés dans le même esprit, en particulier les difféomorphismes de la forme (A.C.T.), $(x, y) \mapsto (y, f_\mu(y) + bx)$, étudiés par Arneodo, Coulet et Tresser (si $f_\mu(y) = \mu y(1-y)$, on retrouve l'exemple de Hénon). Dans la limite de contraction infinie ($b = 0$), l'image de \mathbb{R}^2 devient le graphe de l'endomorphisme f_μ . Le comportement dynamique étonnamment complexe de cette famille à un paramètre d'endomorphismes (que l'on peut restreindre à l'intervalle $[0, 1]$) a été étudié récemment par une foule d'auteurs (Sharkovskii, Feigenbaum, Coulet, Tresser, Misiurewicz, Collet, Eckman, Lanford, Milnor, Thurston, Bowen, Guckenheimer...).

Le problème de l'itération des endomorphismes polynomiaux (et des fonctions rationnelles) de \mathbb{C} avait été étudié par Julia et Fatou au début du siècle et vient d'être repris par Douady, Hubbard, Sullivan, Mañé, Sad (fig. 65). Nous ne ferons cependant qu'effleurer le sujet dans le cas réel. Tant que μ est inférieur ou égal à 1, l'origine est un attracteur global : pour tout x dans $[0, 1]$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_\mu^n(x) = 0$. Quand μ augmente,

l'origine devient un point fixe répulsif et un nouveau point fixe attractant apparaît pour $\mu = \mu_1$; puis ce nouveau point fixe devient à son tour répulsif et est remplacé, lorsque μ dépasse la valeur μ_2 , par une orbite périodique attractante de période 2 qui elle-même devient répulsive lorsque μ dépasse μ_3 et est remplacée par une orbite périodique attractante de période 2², etc. jusqu'à ce que, pour une valeur $\mu_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n = 3,569\ 94$, f_{μ_∞} ait

pour attracteur un ensemble de Cantor (adhérence d'une « orbite périodique de période 2^∞ »).



théorie en mentionnant deux outils topologiques permettant de mesurer la complexité d'un système dynamique, la dimension de Hausdorff d'un sous-ensemble invariant et l'entropie topologique.

Étant donné un compact K de \mathbb{R}^n et deux réels positifs d, ϵ , on note :

$$\mu(K, d, \epsilon) = \inf \sum_{i \in I} r_i^d,$$

où I parcourt l'ensemble des familles finies de boules de rayons $r_i < \epsilon, i \in I$, dont la réunion recouvre K . La limite $\mu(K, d)$ de la fonction décroissante $\epsilon \mapsto \mu(K, d, \epsilon)$ lorsque ϵ tend vers 0 est la mesure de Hausdorff d -dimensionnelle de K . Il existe un unique réel $\dim(K) > 0$, appelé dimension de Hausdorff de K , tel que $\mu(K, d) = +\infty$ si $d < \dim(K)$ et $\mu(K, d) = 0$ si $d > \dim(K)$. Lorsque K est une sous-variété de \mathbb{R}^n , d coïncide avec sa dimension usuelle et est donc entier, mais la réciproque n'est pas vraie : par exemple, un sous-ensemble de \mathbb{R} de mesure de Lebesgue positive a une dimension de Hausdorff égale à 1. L'ensemble de Cantor triadique décrit au chapitre 4 (fig. 36) a une dimension de Hausdorff égale à $\text{Log } 2 / \text{Log } 3$, et le solénoïde de l'exemple 1 a une dimension de Hausdorff égale à $3/2$. Sous le nom d'objets fractals, les compacts de \mathbb{R}^2 de dimension de Hausdorff strictement comprise entre un et deux ont fait récemment l'objet d'une grande campagne de promotion initiée par Mandelbrot. En dehors des attracteurs et des courbes de Sierpinski, on en rencontre de très beaux dans les frontières de bassins d'attraction, en particulier dans l'étude dynamique des polynômes d'une variable complexe (fig. 65, due à Maryvonne Daguette-Teissier).

Un théorème démontré par Douady et Oesterlé en 1980, et généralisé par Ledrappier, permet de borner la dimension de Hausdorff des ensembles invariants attractants d'un difféomorphisme f en fonction des exposants caractéristiques de f définis au chapitre 8. Ce théorème est valable en dimension infinie et concerne donc certaines équations aux dérivées partielles.

Quant à l'entropie topologique d'une application continue f d'un espace métrique M , elle mesure en quelque sorte le taux de croissance asymptotique du nombre d'orbites de f qu'on distingue par une observation de plus en plus fine ; plus précisément, appelons $s(n, \epsilon)$ le nombre maximal d'éléments d'un sous-ensemble E de M ayant la propriété que deux points x et y quelconques de E vérifient : distance $(f^k(x), f^k(y)) > \epsilon$ pour au moins un entier positif k inférieur à n , et définissons :

$$h(f, \epsilon) = \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log s(n, \epsilon).$$

L'entropie topologique de f est la limite $h(f) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} h(f, \epsilon)$. C'est un invariant de

conjugaison topologique de f (si g est un homéomorphisme de M , $h(g \circ f \circ g^{-1}) = h(f)$), dont on peut montrer que c'est la borne supérieure des entropies métriques $h_\mu(f)$ (cf. théorie ERGODIQUE) pour toutes les mesures de probabilité μ sur M invariantes par f . Si la dimension de M est un ou deux, il y a une forte relation entre la condition de positivité de $h(f)$ et l'abondance des points périodiques : théorème de Bowen et Franks montrant la positivité de $h(f)$ pour tout endomorphisme f de l'intervalle ayant un point périodique de période impaire, théorème de Katok affirmant qu'un difféomorphisme f de classe C^2 d'une surface vérifiant $h(f) > 0$ possède nécessairement des points périodiques hyperboliques ayant des points homoclines transversaux, théorème de Franks et Williams affirmant qu'un flot $(\varphi_t)_{t \in \mathbb{R}}$ sur la sphère de dimension trois vérifiant $h(\varphi_t) > 0$ possède nécessairement

Cet exemple montre bien la difficulté qu'il y a à définir le terme attracteur : l'ensemble de Cantor n'attire certainement pas tous les points d'un voisinage, puisqu'il est limite d'orbites périodiques répulsives. Des essais de définition, adaptés au comportement d'un système sous l'effet de petites perturbations aléatoires, ont été récemment proposés par Conley et Ruelle.

La figure 64 illustre cette suite de bifurcations dans l'espace produit $\mathbb{R} \times [0, 1]$ (les pointillés indiquent les répulseurs, les pleins indiquent les attracteurs ; le dessin n'est pas à l'échelle).

La suite μ_n converge vers μ_∞ comme une série géométrique dont la raison est universelle parmi les familles du même type (ayant en particulier un unique maximum non dégénéré), phénomène dont l'explication est fournie par des arguments de renormalisation analogues à ceux qui, en physique, prouvent l'universalité des exposants critiques. De même, la dynamique de f_{μ_∞} sur son attracteur est universelle : c'est l'adding machine des ergodiciens (addition de 1 sur les entiers dyadiques) ; on peut en déduire que f_{μ_∞} est topologiquement conjugué à la restriction de $f_{\mu_\infty}^2$ à un petit intervalle. Lorsque μ dépasse la valeur μ_∞ , des orbites périodiques de période impaire apparaissent, et la dynamique devient beaucoup plus compliquée. L'ordre dans lequel les différentes périodes apparaissent en fonction de μ est lui aussi universel (ordre de Sharkovski) ; par exemple, s'il existe une orbite périodique de période 3, il existe des orbites périodiques de toutes les périodes (comparer avec les homéomorphismes du cercle où une seule période existe à la fois !) : ce dernier théorème a été retrouvé par Li et Yorke, et baptisé du nom suggestif de *Period three implies chaos*. Les méthodes utilisées sont de type dynamique symbolique (invariants de pétrissage de Milnor et Thurston). Récemment, Jakobson a

montré l'existence d'un ensemble de mesure positive de valeurs de μ pour lesquelles f_μ possède une mesure invariante absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, ce qui implique un comportement asymptotique très complexe.

Des exemples de flots fondés sur ces endomorphismes ont également été étudiés, et tout une zoologie d'attracteurs étranges numériques provient d'équations décrivant des oscillations forcées avec feedback de la forme :

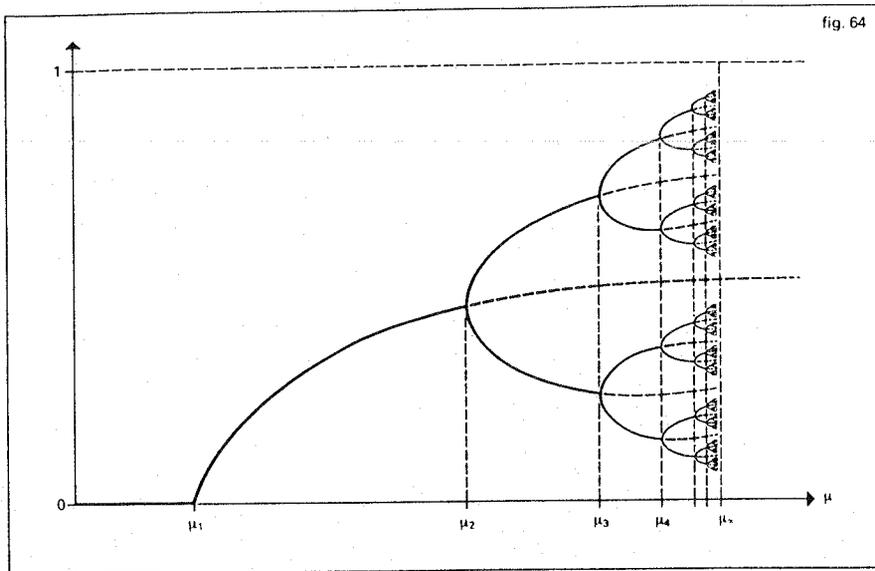
$$(N_6) \quad \begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} = -x - \rho \frac{dx}{dt} + \eta, \\ \frac{d\eta}{dt} = f_\mu(x) \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$\frac{d^3x}{dt^3} + \rho \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} = f_\mu(x).$$

Nous rencontrerons au chapitre 7 d'autres exemples d'attracteurs, en particulier les difféomorphismes d'Anosov sur le tore pour lesquels le tore entier est un attracteur. Il ne faudrait pas croire que les seules variétés pouvant être un attracteur soient des tores : une condition nécessaire et suffisante est l'existence d'un flot ou d'un difféomorphisme sur la variété ayant une orbite dense ; nous avons déjà signalé les exemples d'Anosov et Katok de difféomorphismes du disque ; mentionnons également le théorème de Fathi et Herman montrant l'existence sur la sphère S^3 de dimension trois d'un difféomorphisme minimal (c'est-à-dire dont toutes les orbites sont denses), en contraste avec la conjecture de Seifert selon laquelle tout champ de vecteurs C^∞ sur S^3 aurait au moins une orbite périodique (un contre-exemple en classe C^1 a été donné par Schweitzer à partir des contre-exemples de Denjoy déjà cités).

Finissons ce chapitre avec un peu de



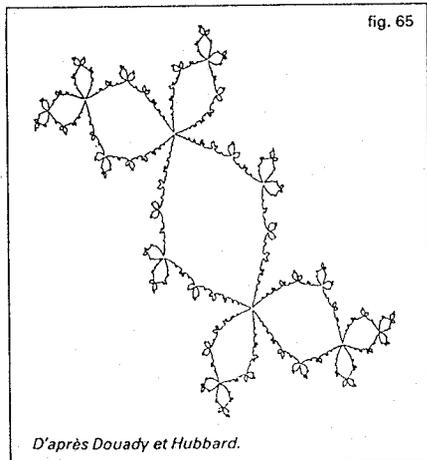
une infinité d'orbites périodiques nouées d'une infinité de façons (comparer à l'attracteur de Lorenz). Par contre, en dimension supérieure, un difféomorphisme peut avoir une entropie topologique positive sans posséder la moindre orbite périodique (Herman a même construit de tels f qui sont minimaux, c'est-à-dire dont chaque orbite est dense).

Enfin de nombreux travaux tournent autour de l'entropie conjecture de Shub qui concerne les liens existant entre l'entropie topologique de f et sa topologie algébrique. Un exemple en est le théorème de Manning qui, étant donné une application continue f d'une variété compacte M dans elle-même, minore $h(f)$ par le logarithme de la plus grande valeur propre de l'application induite par f sur le premier groupe d'homologie de M .

Un autre est le théorème de Ruelle et Sullivan, application de la théorie des courants géométriques, montrant que, sous une condition minime d'orientabilité, un difféomorphisme d'Anosov f (cf. chap. 7) a la propriété que $e^{h(f)}$ est une valeur propre de l'application qu'il induit sur le groupe d'homologie correspondant à sa dimension dilatante (« instable »).

7 Hyperbolicité

Les exemples des chapitres précédents ont fait apparaître la possibilité dès la dimension trois (dimension deux pour les difféomor-



phismes, un pour les endomorphismes) d'un comportement asymptotique complexe de certains ensembles de courbes intégrales (orbites); de plus, ce comportement, loin d'être exceptionnel, pouvait comme dans l'exemple 1 posséder une certaine stabilité vis-à-vis des perturbations des équations.

Nous donnons dans ce chapitre un aperçu de la structure de ces mouvements asymptotiques pour les systèmes dynamiques vérifiant l'axiome A de Smale, seule grande classe dont existe une théorie globale satisfaisante : la stabilité y est due en dernier ressort à la stabilité des points fixes hyperboliques des difféomorphismes d'un espace vectoriel normé complet. Ce dernier fait est très général : si l'attracteur d'un difféomorphisme ne change pas sous de petites perturbations éventuellement différentes à chaque itération, il est hyperbolique au sens défini ci-dessous (théorème de Franks).

Cette théorie a son origine dans les travaux d'Anosov sur le flot géodésique des variétés riemanniennes à courbure négative, flot relié en particulier au mouvement d'une masse ponctuelle sur la variété; nous décrirons succinctement le cas des surfaces de courbure négative constante à la fin du chapitre, mais nous parlerons surtout des systèmes dynamiques à temps discret (difféomorphismes), le cas des flots étant parallèle. Les références accessibles sont l'article de Smale dans le *Bulletin de l'A.M.S.*, le petit livre de Bowen, et le cours de Lanford aux Houches; un exposé plus technique se trouve dans le livre de Shub.

Commençons par préciser la notion de comportement asymptotique en définissant l'ensemble non errant $\Omega(f)$ d'un difféomorphisme f d'une variété M comme le complémentaire du sous-ensemble de M formé des points possédant un voisinage U tel que $f^k(U) \cap U$ soit vide pour tout entier k (points errants; dans le cas d'un flot, la condition devient $\varphi_t(U) \cap U$ vide pour $t > t_0$). Il est clair que $\Omega(f)$ est fermé, invariant par f (c'est-à-dire $f(\Omega) = \Omega$), et contient le sous-ensemble $\text{Per}(f)$ des points périodiques de f , donc aussi son adhérence $\overline{\text{Per}(f)}$; il contient également l'ensemble limite $L(f)$, réunion des ensembles ω -limite $L_\omega(x)$ et α -limite $L_\alpha(x)$ de tous les points x de M (pour leur définition, cf. *supra*, chap. 3) : en particulier, si M est compacte et si U est un voisinage de $\Omega(f)$, il existe pour tout x un entier $N > 0$ tel que $f^n(x)$ appartienne à U dès que $|n|$ est supérieur à N . Enfin, presque par définition, tout point de $\Omega(f)$ est

δ -pseudo-périodique pour tout $\delta > 0$ dans le sens suivant : appelons δ -pseudo-orbite de f une suite (finie ou infinie) de points $\dots, x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots$ de M tels que $d(f(x_n), x_{n+1}) < \delta$ pour tout n (c'est une (portion d') orbite si on se permet des erreurs de l'ordre de δ); un point x est dit δ -pseudo-périodique s'il existe une δ -pseudo-orbite de la forme $x_0 = x, x_1, \dots, x_p = x$.

Identifions les ensembles non errants des divers flots ou difféomorphismes rencontrés jusqu'ici : pour le pendule du chapitre 1, tout l'espace de phase est formé de points non errants, mais l'introduction du frottement au chapitre 2 réduit brutalement l'ensemble non errant à un couple de points (les deux équilibres); au chapitre 3, la non-linéarité permet à une orbite périodique de s'ajouter à ces deux points. Dans les deux chapitres suivants, l'ensemble non errant du flot se reconstitue par suspension à partir de celui du difféomorphisme de Poincaré P : dans la situation conservative du chapitre 4, le théorème de récurrence de Poincaré implique que $\Omega(P)$ contient tout un voisinage du point fixe elliptique; dans la situation dissipative de la fin du chapitre 5, $\Omega(P)$ est évidemment contenu dans la courbe de Birkhoff. Bien entendu, tous les attracteurs du chapitre 6 font partie de l'ensemble non errant du difféomorphisme ou du flot correspondant.

Dans tout ce qui suit, nous supposons que $\Omega(f)$ est compact. Introduisons maintenant la notion d'ensemble hyperbolique, déjà rencontrée sous les traits de point fixe hyperbolique, orbite périodique (normalement) hyperbolique, ensemble de Cantor invariant hyperbolique (dans le fer à cheval), attracteur hyperbolique (le solénoïde) : un sous-ensemble Λ de M invariant par f est dit hyperbolique si, pour tout point x de Λ , le comportement, par rapport à l'orbite de x , des orbites des points y de Λ proches de x est analogue au comportement des orbites au voisinage d'un point fixe hyperbolique : l'espace tangent en x à M se décompose en somme directe d'un sous-espace stable E_x^s correspondant aux directions dans lesquelles se trouvent des y proches dont l'orbite converge exponentiellement vers l'orbite de x , et d'un sous-espace instable E_x^u (unstable en anglais) correspondant aux directions dans lesquelles se trouvent des y proches dont l'orbite diverge exponentiellement de l'orbite de x , au moins tant qu'elle en est assez proche; on demande de plus que cette décomposition dépende continûment de x , et que le taux de convergence ou de divergence vérifie des estimations uniformes.

Techniquement, on demande que la restriction à Λ du fibré tangent à M admette une décomposition en somme directe topologique de deux sous-fibrés E^s et E^u invariants par l'application Tf tangente à f , et qu'il existe deux constantes $C > 0$, et $0 < \lambda < 1$, telles que, pour tout $n > 0$,

$$\|T_x f^n(\xi)\| < C\lambda^n \|\xi\| \quad \text{si } \xi \in E_x^s,$$

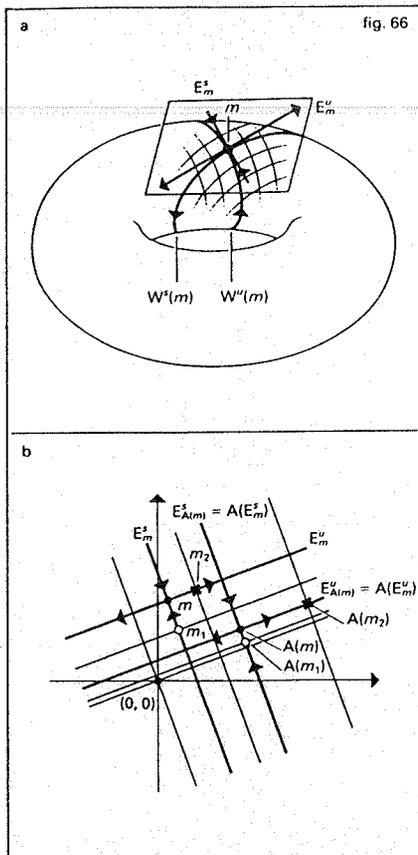
$$\text{et } \|T_x f^{-n}(\xi)\| < C\lambda^n \|\xi\| \quad \text{si } \xi \in E_x^u.$$

Cela suppose choisie sur M une métrique riemannienne; si Λ est compact, cette condition est indépendante du choix de la métrique; il est d'ailleurs possible (et nous le ferons désormais) de choisir cette dernière de façon que $C = 1$.

La définition est la même pour un flot, à l'exception de l'existence d'une direction neutre (celle du champ de vecteurs).

Particulièrement important du point de vue historique (flots géodésiques) est le cas où la variété M elle-même est hyperbolique (on dit que f est un difféomorphisme d'Anosov ou que φ_t est un flot d'Anosov).

En voici un exemple simple, dû à R. Thom : il s'agit du difféomorphisme f du tore $T^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ (produit de deux cercles de



respectivement parallèles aux sous-espaces propres de A . Pour la métrique usuelle de \mathbb{R}^2 , on peut prendre $C = 1$ et $\lambda = \lambda_s = 1/\lambda_u$. Les deux feuilletages (décomposition en union de courbes) définis dans \mathbb{R}^2 par ces droites sont invariants par A (l'image d'une de ces droites par A est une droite parallèle); les pentes étant irrationnelles, ils se projettent dans T^2 en deux feuilletages transverses (ici orthogonaux) invariants par f (feuilletage stable et feuilletage instable) dont chaque feuille est dense dans T^2 (fig. 66, à interpréter comme les figures des premiers chapitres : \mathbb{R}^2 est le déroulement (dans deux directions) de T^2).

En chaque point du tore passent deux courbes (la feuille de chacun des feuilletages) respectivement tangentes au sous-espace stable et au sous-espace instable; la feuille stable (instable) de x est envoyée par f sur la feuille stable (instable) de $f(x)$ et la restriction de f à la feuille stable (instable) est une contraction uniforme (resp. une dilatation uniforme).

Cette description globale de la dynamique est permise ici par la linéarité de A mais, de même qu'en un point fixe hyperbolique d'un difféomorphisme non linéaire existent des sous-variétés invariantes respectivement tangentes au sous-espace propre stable et au sous-espace propre instable de la dérivée, on peut démontrer (Hirsh, Pugh, Shub) l'existence de telles variétés stables et instables pour un ensemble hyperbolique général (avec une démonstration du même type bien que plus compliquée) : pour toute partie X de M , notons :

$$W^s(X) = \{y \in M, d(f^n(y), f^n(X)) \rightarrow 0 \text{ lorsque } n \rightarrow +\infty\}$$

$$W^u(X) = \{y \in M, d(f^{-n}(y), f^{-n}(X)) \rightarrow 0 \text{ lorsque } n \rightarrow +\infty\}$$

où d désigne la distance sur M définie par la métrique riemannienne. Si Λ est un fermé invariant hyperbolique pour f , $W^s(x)$ et $W^u(x)$ sont des sous-variétés injectivement immergées pour tout point x de Λ , tangentes en x respectivement à E_x^s et E_x^u . Si $\epsilon > 0$ est assez petit,

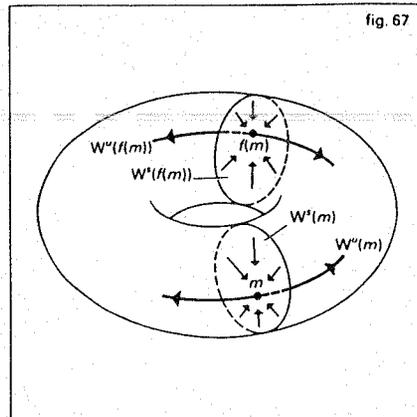
$$W_\epsilon^s(x) = \{y \in M, d(f^n(y), f^n(x)) < \epsilon \text{ pour tout } n > 0\}$$

$$W_\epsilon^u(x) = \{y \in M, d(f^{-n}(y), f^{-n}(x)) < \epsilon \text{ pour tout } n > 0\}$$

sont des disques plongés respectivement dans $W^s(x)$ et $W^u(x)$ et varient continûment avec x dans Λ . La figure 67 représente ces feuilletages invariants dans le cas très simple du solénoïde. Bien entendu, $W^s(x)$ et $W^s(y)$ ne peuvent se couper si x est différent de y ; de même pour $W^u(x)$ et $W^u(y)$; ainsi, lorsque f est un difféomorphisme d'Anosov, on retrouve comme dans l'exemple précédent deux feuilletages (décompositions de la variété en union de sous-variétés « parallèles ») transverses invariants, le feuilletage stable sur lequel f contracte et le feuilletage instable sur lequel f dilate.

Les propriétés très fortes de stabilité associées aux ensembles invariants hyperboliques découlent toutes du théorème fondamental suivant : *Tout morphisme approché d'un système dynamique dans un système dynamique hyperbolique est proche d'un unique vrai morphisme*. Plus précisément, si Λ est un ensemble hyperbolique pour f , il existe des nombres positifs α, K , et un voisinage U_Λ de Λ dans M , tels que, pour tout homéomorphisme h d'un espace topologique X dans lui-même et toute application continue i de X dans U_Λ telle que le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{i} & U_\Lambda \\ h \downarrow & & \downarrow f \\ X & \xrightarrow{i} & M \end{array}$$



commute à α près ($d(f \circ i, i \circ h) < \alpha$), il existe une unique application continue j de X dans M telle que $d(i, j) < Kd(f \circ i, i \circ h)$ rendant commutatif le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{j} & M \\ h \downarrow & & \downarrow f \\ X & \xrightarrow{j} & M \end{array}$$

c'est-à-dire $f \circ j = j \circ h$.

La démonstration se fait en étudiant l'application $k \mapsto f \circ k \circ h^{-1}$ de l'espace des applications continues $k : X \rightarrow M$ dans lui-même : au voisinage de i , cette application est proche d'un opérateur linéaire hyperbolique et possède donc un unique point fixe qui est l'application j cherchée. On voit d'ailleurs que rien ne change si on remplace f par un difféomorphisme g assez proche de f dans la topologie C^1 .

Si on choisit $X = \mathbb{Z}$, $h(i) = i + 1$, on obtient la propriété d'approximation de toute ϵ -pseudo-orbite (au sens défini plus haut) par une vraie orbite; en choisissant $X = M$, h proche de f , on peut en déduire la *stabilité structurelle* des difféomorphismes d'Anosov : si g est assez proche du difféomorphisme d'Anosov f dans la topologie C^1 , il existe un homéomorphisme j proche de l'identité, qui conjugue g à f ($g = j^{-1} \circ f \circ j$). Le comportement dynamique complexe de ces difféomorphismes résiste donc à de petites perturbations. Bien entendu, des théorèmes analogues valent pour les flots.

Introduisons enfin l'axiome A de Smale : un difféomorphisme f sera dit axiome A si $\Omega(f)$ est hyperbolique et si de plus $\Omega(f) = \overline{\text{Per}(f)}$. (c'est-à-dire si tout point de $\Omega(f)$ est limite de points périodiques). Dans le cas des flots, on demande que $\Omega(\varphi) = \overline{\Omega} \cup F$ (union disjointe), où F est l'ensemble (fini) des équilibres, tous hyperboliques, et $\overline{\Omega}$ est hyperbolique et coïncide avec l'adhérence de l'ensemble des orbites périodiques du flot.

Ces conditions sont assez fortes pour qu'il existe un bon théorème de structure, dû à Smale, le *théorème de décomposition spectrale*, assurant (dans le cas d'un difféomorphisme) l'existence d'une décomposition $\Omega(f) = \Omega_1 \cup \dots \cup \Omega_r \cup \Omega(f)$ en *ensembles hyperboliques basiques* Ω_i , c'est-à-dire en fermés invariants disjoints ayant les propriétés suivantes : les points périodiques de la restriction $f|_{\Omega_i}$ sont denses dans Ω_i , $f|_{\Omega_i}$ est *topologiquement transitif* (Ω_i est l'adhérence d'une orbite), et il existe un voisinage U de Ω_i tel que

$$\Omega_i = \bigcap_{n=-\infty}^{+\infty} f^n(U)$$

Le nom du théorème vient du cas particulier du difféomorphisme induit sur l'espace projectif complexe $P_{n-1}(\mathbb{C})$ par un élément du

longueur 1) défini à partir de l'automorphisme linéaire unimodulaire de \mathbb{R}^2 de matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Remarquons que, si $a/b, c/d$ est un point de \mathbb{R}^2 à coordonnées rationnelles, le point x correspondant sur T^2 est périodique pour f ; en effet, l'image par A^n de $a/b, c/d$ est de forme $(\alpha/bd, \beta/bd)$, α et β entiers, et il n'y a qu'un nombre fini de tels points à des translations entières près. Les points périodiques de f sont donc denses dans T^2 , ce qui montre que $\Omega(f) = T^2$.

Les valeurs propres de A sont :

$$\lambda_s = \frac{1}{2}(3 - \sqrt{5})$$

et
$$\lambda_u = \frac{1}{2}(3 + \sqrt{5}),$$

et les sous-espaces propres correspondants ont pour équation

$$y = -\frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})x$$

(correspondant à λ_s) et :

$$y = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)x$$

(correspondant à λ_u); on voit immédiatement que T^2 est hyperbolique pour f ; l'espace tangent en chaque point s'identifie canoniquement à \mathbb{R}^2 , $E_{(x_0, y_0)}^s$ est la droite :

$$y - y_0 = -\frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})(x - x_0),$$

et $E_{(x_0, y_0)}^u$ la droite :

$$y - y_0 = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)(x - x_0),$$

groupe linéaire $SL(n, \mathbb{C})$. Dans la démonstration, on explicite les Ω_i comme adhérences des classes d'équivalence de points périodiques pour la relation d'équivalence $p \sim q$ si les intersections W^u (orbite de p) \cap W^s (orbite de q) et W^s (orbite de p) \cap W^u (orbite de q) sont non vides et transverses.

Si $\text{Per}(f)$ est hyperbolique et si une suite de points périodiques p_i converge vers x , p_i est équivalent à p_j pour i et j assez grands à cause de la transversalité de $W^u_\varepsilon(x)$ et $W^s_\varepsilon(x)$ et de la continuité en x des variétés stables et instables : il n'y a donc qu'un nombre fini de classes d'équivalence.

Dans le même ordre d'idées, $\text{Per}(f)$ possède une structure de produit local dès qu'il est hyperbolique : cela signifie que si ε et δ sont assez petits, si x et y appartiennent à $\text{Per}(f)$ et sont distants de moins de δ , l'intersection de $W^s_\varepsilon(x)$ et $W^u_\varepsilon(y)$ est un unique point $[x, y]$ qui appartient à $\text{Per}(f)$ (fig. 68).

Cette structure de produit local permet de préciser le théorème d'approximation des ε -pseudo-orbites par de vraies orbites : Pour tout $\eta > 0$, il existe un $\varepsilon > 0$ tel que toute ε -pseudo-orbite (x_i) dans $\text{Per}(f)$ soit « η -pistée » par l'orbite d'un point x de $\text{Per}(f)$ (au sens où $d(f^i(x), x_i)$ est inférieur à η pour tout i); un tel x est forcément unique si η est assez petit (expansivité de $f|_{\text{Per}(f)}$). Ce théorème est l'outil fondamental d'étude de la dynamique d'un difféomorphisme axiome A; il implique par exemple que, pour chaque ensemble basique Ω_i , on ait

$$W^s(\Omega_i) = \bigcup_{x \in \Omega_i} W^s(x) \text{ et } W^u(\Omega_i) = \bigcup_{x \in \Omega_i} W^u(x),$$

ce qui donne un bon contrôle de la dynamique dans M tout entière en fonction de celle dans $\Omega(f)$ puisque

$$M = \bigcup_{i=1}^s W^s(\Omega_i) = \bigcup_{i=1}^s W^u(\Omega_i).$$

Il suffirait d'ailleurs d'étudier les attracteurs (ensembles basiques Ω_i tels que $W^s(\Omega_i)$ soit ouvert) : on voit en effet que presque tout point de M appartient au bassin d'un attracteur. En fait, la dynamique de f sur chacun des ensembles basiques Ω_i est très bien connue grâce aux méthodes de la dynamique symbolique, déjà rencontrées à propos du fer à cheval et du solénoïde.

La possibilité de coder les orbites de la restriction de f à Ω_i vient de l'existence de partitions de Markov de Ω_i : découvertes par Adler et Weiss pour les automorphismes linéaires du tore, par Sinai pour les difféomorphismes d'Anosov, et par Bowen pour les ensembles basiques généraux, ce sont des décompositions de Ω_i en union de Q sous-ensembles R_j , $j = 0, 1, \dots, Q-1$, les rectangles de la partition (ainsi nommés car contenant $[x, y]$ dès qu'ils contiennent x et y , (fig. 68)), ayant par rapport à f de « bonnes » propriétés que nous n'explicitons pas.

L'exemple le plus simple est la décomposition de l'ensemble de Cantor K du fer à cheval du chapitre 4 en $(K \cap \Delta_0^+) \cup (K \cap \Delta_1^-)$.

Exactement comme au chapitre 4 (ou au chap. 6 pour le solénoïde) on définit une application surjective $S : \Sigma_A \rightarrow \Omega_i$ en associant à une suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in \mathbb{Z}^{\mathbb{Z}}$ d'entiers égaux à $0, 1, \dots, Q-1$, l'unique point x de l'intersection

$$\bigcap_{n=-\infty}^{+\infty} f^{-n} R_{\alpha_n},$$

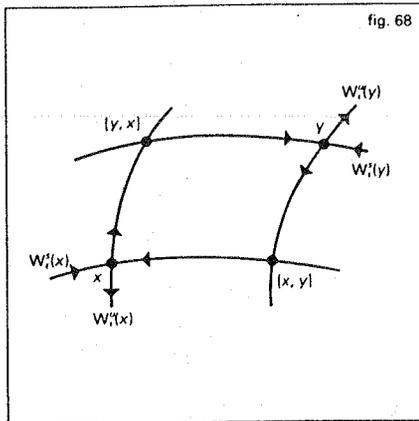


fig. 68

c'est-à-dire l'unique point x dont l'orbite ait l'« histoire » décrite par la suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ ($x \in R_{\alpha_0}$, $f(x) \in R_{\alpha_1}$, $f^{-1}(x) \in R_{\alpha_{-1}}$, etc.). Σ_A est maintenant le sous-espace de $\{0, 1, \dots, Q-1\}^{\mathbb{Z}}$ formé des suites $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ telles que $A_{\alpha_{n+1}\alpha_n} = 1$ pour tout n dans \mathbb{Z} , où $A = (A_{jk})$ est la matrice $Q \times Q$ définie par $A_{jk} = 1$ si l'intérieur de $R_k \cap f^{-1}(R_j)$ est non vide dans Ω_i , $A_{jk} = 0$ autrement (matrice de transition). L'application S vérifie $S \circ \sigma_A = f \circ S$, où $\sigma_A : \Sigma_A \rightarrow \Sigma_A$ est le décalage de virgule défini comme au chapitre 4 (le système dynamique défini par σ_A est appelé une sous-shift de type fini). De plus, l'image réciproque $S^{-1}(x)$ d'un point de Ω_i n'a jamais plus de Q^2 éléments et est réduite à un seul élément pour la plupart des points de Ω_i , ce qui permet de déduire de l'étude de σ_A beaucoup de renseignements sur la dynamique de $f|_{\Omega_i}$. Par exemple, $\alpha \in \Sigma_A$ est un point périodique de σ_A si et seulement si $S(\alpha) \in \Omega_i$ est un point périodique de f , ce qui a permis à Manning de prouver la rationalité de la fonction $\zeta_{f|\Omega_i}$, où :

$$\zeta_{f|\Omega_i}(t) = \exp \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{N_n(f)}{n} t^n,$$

et $N_n(f)$ est le nombre de points périodiques de période n de f . De même, les entropies topologiques $h(\sigma_A)$ et $h(f|_{\Omega_i})$ sont égales, ce qui permet de prouver l'entropie conjecture pour $f|_{\Omega_i}$ (Shub, Williams).

De nombreux attracteurs étranges vérifiant l'axiome A ont été étudiés : en plus du solénoïde (chap. 6), citons les difféomorphismes D.A. (dérivés d'Anosov) de Smale obtenus à partir d'un automorphisme linéaire

du tore en « gonflant » la variété instable de $(0, 0)$ suivant un procédé rappelant la construction de « contre-exemples de Denjoy » dans la théorie des difféomorphismes du cercle (fig. 69, que l'on comparera à la figure 66); l'attracteur est ici :

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} f^n(T^2 - \delta)$$

où δ est un petit disque centré en $(0, 0)$ et T^2 est la réunion de l'attracteur (qui coupe localement les feuilles du feuilletage stable suivant un ensemble de Cantor) et de la variété instable de $(0, 0)$, qui est un ouvert dense dont on a représenté une partie en grisé. Citons également les attracteurs de \mathbb{R}^2 de la forme :

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} f^n(D)$$

(cf. fig. 70, où l'on a représenté l'image par f du disque troué D), introduits par Plykin, qui sont les premiers exemples d'attracteurs hyperboliques dans \mathbb{R}^2 (ce que n'est sûrement pas l'attracteur de Hénon s'il existe!).

On a représenté sur les figures 69 et 70 le feuilletage stable, invariant par f et transverse à l'attracteur; la restriction de f à ce feuilletage est une contraction alors que, dans les deux cas, sa restriction à l'attracteur est une dilatation, ce qui permet d'appliquer la théorie de Williams décrite à propos du solénoïde : l'attracteur est homéomorphe à la limite projective $\varprojlim (K \xrightarrow{\varphi} K \xrightarrow{\varphi} K \dots)$, où

K est la « variété branchue » de dimension 1 obtenue en faisant le quotient d'un voisinage de l'attracteur (respectivement le complémentaire d'un petit disque δ centré sur $(0, 0)$ et un disque D percé de trois trous) par le feuilletage stable (on identifie à un point chaque feuille) et φ l'application dilatante induite par f (voir les figures; sur la figure 69, on remarquera que, en homologie, la matrice de φ est $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, ce qui n'est pas un

hasard). Rappelons également que la dynamique sur l'attracteur est l'extension naturelle de φ à la limite projective.

Un sous-produit de la démonstration du théorème de décomposition spectrale est le fait qu'un difféomorphisme d'Anosov vérifie l'axiome A. Nous avons indiqué plus haut la « stabilité structurelle » de ces difféomorphismes; en ce qui concerne les difféomorphismes axiome A généraux, deux théorèmes fondamentaux de stabilité existent : disons

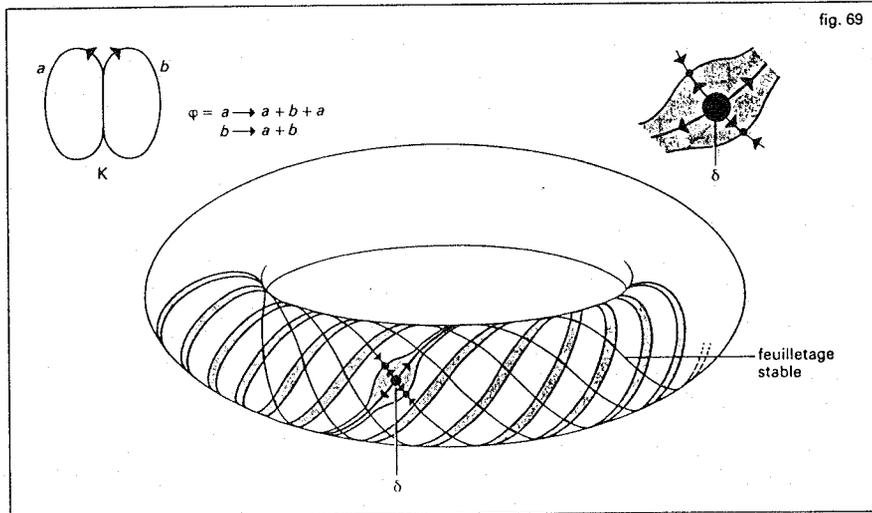


fig. 69

que f possède un cycle s'il existe i_0, \dots, i_r compris entre 1 et s tels qu'il existe une orbite issue (asymptotiquement) de Ω_{i_0} et aboutissant asymptotiquement à Ω_{i_1} , une orbite issue de Ω_{i_1} et aboutissant à Ω_{i_2} , ..., une orbite issue de $\Omega_{i_{r-1}}$ et aboutissant à Ω_{i_r} , c'est-à-dire tels que :

$$W^s(\Omega_{i_0}) \cap W^u(\Omega_{i_1}) \neq \emptyset, \dots, W^s(\Omega_{i_{r-1}}) \cap W^u(\Omega_{i_r}) \neq \emptyset.$$

Le théorème de Ω -stabilité de Smale affirme qu'un difféomorphisme f axiome A qui n'a pas de cycle est Ω -stable (si g est proche de f dans la topologie C^1 , $f|_{\Omega(f)}$ et $g|_{\Omega(g)}$ sont conjugués par un homéomorphisme de $\Omega(f)$ sur $\Omega(g)$).

L'absence de cycle permet de construire une filtration $M_1 \subset M_2 \subset \dots \subset M_r$ de M par des sous-variétés à bords invariantes telles que :

$$\Omega_i = \bigcap_{n=-\infty}^{+\infty} f^n(M_i - M_{i-1}),$$

ce qui ramène essentiellement l'étude à celle de la stabilité de $f|_{\Omega_i}$ pour chaque i . Cette dernière se montre comme pour les difféomorphismes d'Anosov en utilisant la propriété d'approximation des ϵ -orbites.

Enfin, comme beaucoup de théorèmes analogues (cf. SINGULARITÉS DES FONCTIONS DIFFÉRENTIABLES), le théorème de stabilité structurelle de Robbin-Robinson est fondé sur une propriété de transversalité. Rappelons que deux sous-variétés sont transverses si en chaque point d'intersection leurs espaces tangents engendrent l'espace tangent à la variété ambiante. Le théorème affirme qu'un difféomorphisme f axiome A qui vérifie la condition de transversalité forte ($W^s(x)$ et $W^u(y)$ transverses quels que soient x et y dans $\Omega(f)$) est structurellement stable : si g est C^1 -proche de f , il lui est conjugué par un homéomorphisme.

Réciproquement, il est possible de montrer que certaines formes très fortes de stabilité impliquent l'axiome A, mais on ne sait pas si la stabilité structurelle suffit à l'impliquer.

Signalons que, contrairement à ce qui se passe pour les orbites périodiques (théorème de Kupka-Smale), la non-transversalité des variétés stables et instables d'un ensemble

invariant hyperbolique Λ peut être un phénomène persistant, même en dimension deux : à l'aide de la notion d'épaisseur d'un ensemble de Cantor, Newhouse a montré qu'un difféomorphisme de classe C^2 d'une surface peut présenter d'une manière stable (insensible aux perturbations) la configuration de la figure 71, qui représente un ensemble invariant hyperbolique « sauvage » Λ , avec un ensemble de Cantor de points de tangence. Un tel difféomorphisme n'est pas structurellement stable (il n'est même pas Ω -stable) et il en est de même des difféomorphismes suffisamment voisins, ce qui montre que la stabilité n'est pas un phénomène aussi courant qu'on aurait pu l'espérer. Ces exemples sont importants car, sous certaines conditions, l'ensemble hyperbolique Λ en question peut être limite d'une infinité d'orbites périodiques attractantes de périodes arbitrairement grandes, porte ouverte à d'éventuelles confusions avec un attracteur étrange (exemple de l'attracteur de Henon ?)

Nous terminons ce chapitre par une courte discussion de l'exemple qui est à la base de la théorie des systèmes dynamiques hyperboliques, le flot géodésique sur une surface riemannienne compacte Σ de courbure négative constante égale à -1 . Une telle surface s'écrit comme le quotient du demi-plan $H = \{z = x + iy \in \mathbb{C} | y > 0\}$ muni de la métrique « hyperbolique » :

$$ds^2 = \frac{1}{y^2}(dx^2 + dy^2)$$

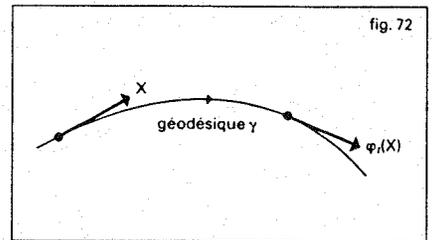
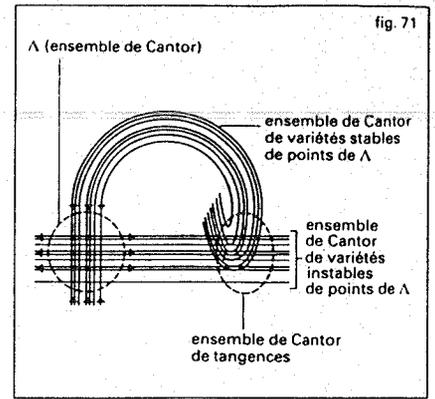
par un sous-groupe discret Γ du groupe $PSL(2, \mathbb{R})$ des isométries de H conservant l'orientation ; H est le plan de Lobatchevski, ou demi-plan de Poincaré et les éléments de $PSL(2, \mathbb{R})$ sont représentés par des matrices :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

à coefficients réels, de déterminant égal à 1, agissant sur H par :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot z = \frac{az + b}{cz + d}.$$

Le flot géodésique $(\varphi_t)_{t \in \mathbb{R}}$ est défini sur la variété de dimension trois $T_1\Sigma$ dont les points



sont les vecteurs de longueur 1 tangents à la surface Σ . Si $X \in T_1\Sigma$ est un tel vecteur tangent, $\varphi_t(X)$ est le vecteur tangent obtenu en suivant sur la longueur t dans la direction de X l'unique géodésique tangente à X (fig. 72).

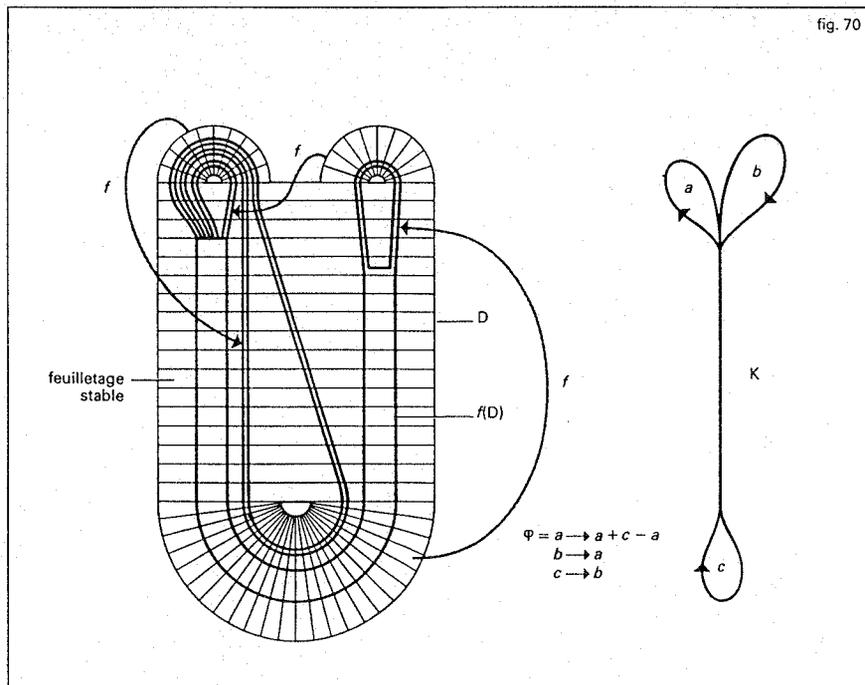
Une courbe intégrale du flot correspond donc à une géodésique orientée de Σ (les géodésiques sont solution d'une équation différentielle du second ordre ; par chaque point il en passe une infinité et le passage de Σ à $T_1\Sigma$, analogue au passage de (N_i) à (P_i) au chapitre 1, permet de les disjointre deux à deux).

La variété $T_1\Sigma$ étant le quotient de T_1H par l'action naturelle de Γ , la description locale du flot est la même pour $T_1\Sigma$ et T_1H .

Les géodésiques de H sont les demi-droites perpendiculaires à l'axe des x et les demi-cercles centrés sur l'axe des x . Étant donné une géodésique orientée γ , l'ensemble des géodésiques orientées qui lui sont positivement (resp. négativement) asymptotiques forme dans T_1H une sous-variété de dimension deux, la variété stable (resp. instable) de la courbe intégrale $\hat{\gamma}$ correspondant à γ (fig. 73 a dans H et fig. 73 b dans T_1H). Chacune de ces variétés est feuilletée par des courbes transportées les unes sur les autres par le flot, les variétés stables (resp. instables) des points de $\hat{\gamma}$; ces courbes sont en fait les courbes intégrales de deux autres flots sur T_1H (ou $T_1\Sigma$), les flots horocycliques, définis comme le flot géodésique mais à partir des horocycles orientés (cercles tangents à l'axe des x , orthogonaux aux géodésiques) (fig. 73).

Pour donner une idée de la richesse de ces flots sur $T_1\Sigma$, indiquons que chaque courbe intégrale d'un flot horocyclique est dense dans $T_1\Sigma$ (Hedlund, 1936) et que le flot géodésique sur $T_1\Sigma$ est ergodique (Hopf, 1939). Une description algébrique très simple peut en être donnée en remarquant que T_1H s'identifie naturellement à $PSL(2, \mathbb{R})$ (étant donné un vecteur X de longueur 1 tangent à H , il existe un unique élément de $PSL(2, \mathbb{R})$ transportant sur X le vecteur $(0, 1)$ tangent au point i). $T_1\Sigma$ s'identifie donc à l'espace homogène $PSL(2, \mathbb{R})/\Gamma$; le flot géodésique est défini par :

$$\varphi_t \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Gamma \right) = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Gamma$$



et les flots horocycliques par :

$$\psi \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Gamma \right) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Gamma$$

(resp. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Gamma$).

Les problèmes relatifs à ces flots deviennent alors très algébriques : par exemple, Ratner a montré que le simple isomorphisme mesurable des flots horocycliques sur $\text{PSL}(2, \mathbb{R})/\Gamma_1$ et $\text{PSL}(2, \mathbb{R})/\Gamma_2$ suffit à impliquer l'existence de $g \in \text{PSL}(2, \mathbb{R})$ tel que $\Gamma_2 = g^{-1}\Gamma_1g$.

Remarquons qu'en intervertissant l'ordre dans lequel on fait agir \mathbb{R} (via multiplication à gauche par les matrices : $\begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$) et Γ sur $\text{PSL}_2(\mathbb{R})$, on est amené à étudier l'action de Γ sur l'« espace » des géodésiques de \mathbb{H} ; en remplaçant \mathbb{H} par l'intérieur du disque unité, on voit que cet « espace » des géodésiques s'identifie naturellement au complémentaire de la diagonale dans le tore $S^1 \times S^1$ (une géodésique est déterminée par ses deux points à l'infini). Les propriétés du flot géodésique sur $\Sigma = \mathbb{H}/\Gamma$ sont reflétées dans celles de l'action « diagonale » de Γ sur $S^1 \times S^1$. On rejoint ainsi la théorie des groupes *fuchsians*, développée à partir de

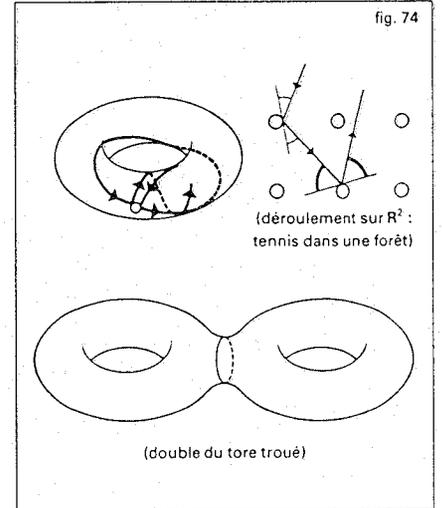
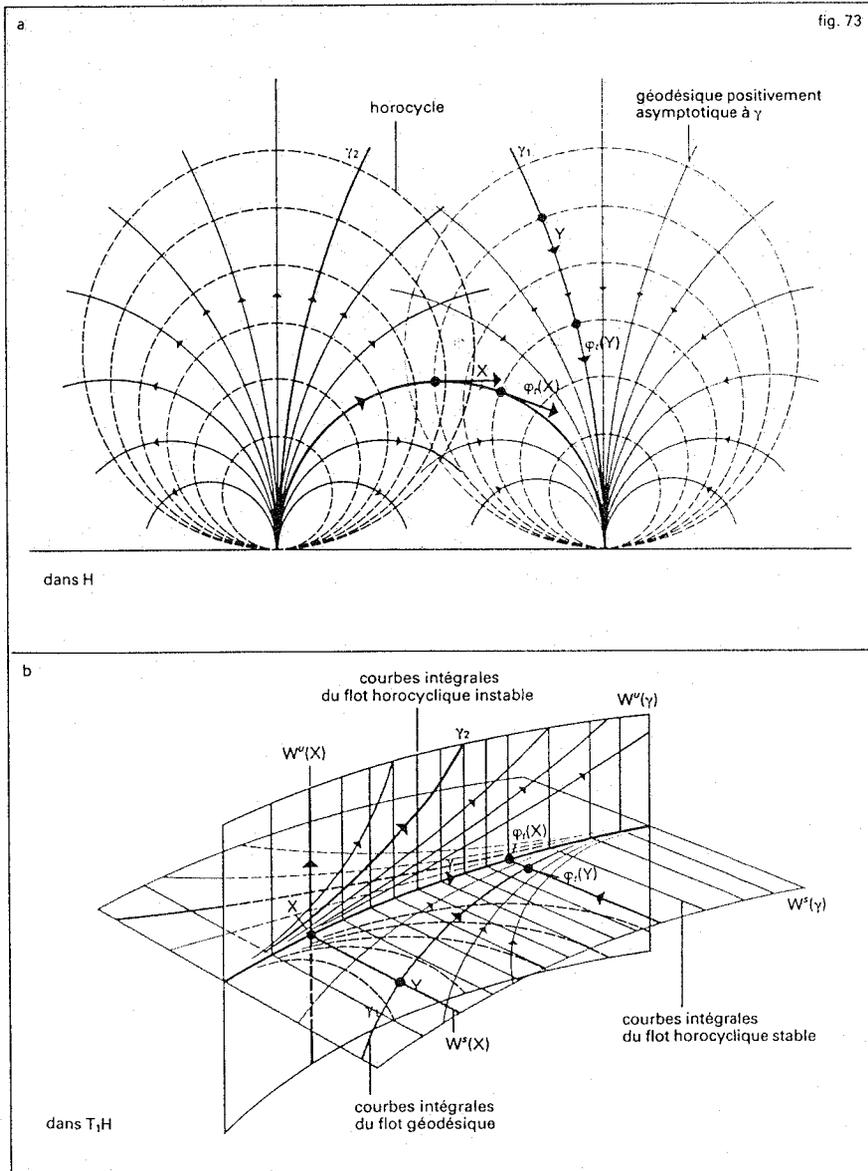
1882 par Poincaré à propos de ses recherches sur les équations différentielles linéaires du second ordre dans le domaine complexe, et très étudiée aujourd'hui (en particulier du point de vue dynamique, par Sullivan dans une suite de travaux fascinants); dans cette optique, la théorie des systèmes dynamiques devient en fait la théorie des actions différentiables des groupes sur les variétés et pas seulement celle des actions de \mathbb{Z} ou de \mathbb{R} .

8 Mesures invariantes et exposants de Liapunov

Nous abordons dans ce chapitre quelques aspects de la théorie ergodique des systèmes dynamiques qui, sous l'impulsion initiale de Birkhoff et von Neumann (démonstration en 1931 du théorème ergodique) puis de l'école russe (introduction de l'entropie métrique par Kolmogorov en 1958, travaux de Sinai sur l'hypothèse ergodique à partir de 1962), s'est beaucoup développée ces dernières années : lorsque la description géométrique d'un portrait de phase s'avère trop difficile, on la remplace par une description de type statistique; comme en thermodynamique, on cherche des « mesures d'équilibre » qui décrivent le comportement asymptotique de « presque toutes » les courbes intégrales (orbites) du

système. Dans le cas hamiltonien, il existe une mesure invariante lisse, la mesure de Liouville λ ; en 1885, Boltzmann émet sa fameuse hypothèse à propos de la théorie cinétique des gaz : en termes d'aujourd'hui, il suppose que la situation « générale » pour un système hamiltonien est l'*ergodicité* dans les hypersurfaces E d'énergie constante, c'est-à-dire que tout sous-ensemble mesurable A invariant par le flot et situé dans une hypersurface E vérifie $\lambda(A) = 0$ ou $\lambda(E - A) = 0$ (il supposait en fait que chaque orbite pouvait parcourir toute l'hypersurface E , ce qui est impossible). Le théorème de K.A.M. est venu infirmer cette hypothèse en montrant l'existence de familles de tores invariants de mesure totale positive pour les systèmes hamiltoniens suffisamment proches (dans la topologie C^k , k assez grand) d'un système complètement intégrable.

Cependant, pour certains systèmes dynamiques possédant une mesure invariante lisse, l'ergodicité a pu être démontrée. On a cité à la fin du chapitre 7 le flot géodésique sur une surface de courbure négative. Le *billard sur un tore troué* (fig. 74 a), dans lequel la boule se déplace sur le tore suivant des droites (après déroulement sur \mathbb{R}^2) et se réfléchit sur le bord du trou avec un angle de réflexion égal à l'angle d'incidence (fig. 74 b : tennis dans une forêt), est un cas limite d'un tel flot : si on imagine que la



trajectoire de la boule change de face chaque fois qu'il y a réflexion, on est amené à remplacer le tore troué par son double, isomorphe à une surface de genre deux (fig. 74 c). Ce billard est un modèle du système composé de deux particules se déplaçant sur un tore et ayant des chocs élastiques et son ergodicité pour la mesure invariante naturelle a été prouvée par Sinai. (C'est Kolmogorov qui, après avoir montré que l'hypothèse ergodique n'était pas vérifiée à cause des orbites périodiques elliptiques - théorème K.A.M. -, aurait suggéré qu'elle pouvait être rétablie par la prise en compte des chocs.) Le flot géodésique sur un ellipsoïde est au contraire « complètement intégrable »; le billard correspondant est un *billard elliptique*, lui aussi complètement intégrable dans le sens où il existe une famille à un paramètre de caustiques enveloppant les trajectoires (théorème de Poncelet, fig. 75, où l'on a représenté une telle caustique). Si on déforme un peu le bord, le théorème de K.A.M. montre que cette famille à un paramètre est remplacée par un ensemble de Cantor de caustiques. Par contre, de grandes déformations conduisent aux *stades* dont

l'ergodicité a pu être démontrée par Bunimovitch (fig. 76, où l'on a représenté un morceau de trajectoire du stade).

Dans le cas dissipatif, on s'intéresse essentiellement aux mesures invariantes supportées par les « attracteurs » du système, c'est-à-dire par celles qui décrivent la statistique de « suffisamment » d'orbites.

Il est bien naturel de commencer par des moyennes de mesures de Dirac δ_x , le long des orbites, c'est-à-dire (dans le cas d'un difféomorphisme f auquel nous nous limiterons) par les « limites vagues » de suites de mesures de la forme :

$$\mu_{n,x} = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \delta_{f^i(x)}$$

où x est un point de l'espace de phase. Si nous ne considérons que des orbites bornées, dire que la limite vague μ_x existe signifie que pour toute fonction φ continue sur l'espace de phase, la limite

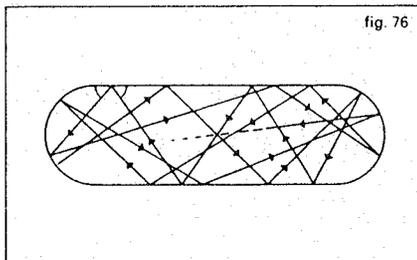
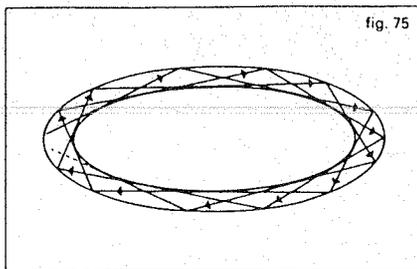
$$\mu_x(\varphi) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \varphi \circ f^i(x)$$

existe.

Lorsqu'elle existe, une telle mesure asymptotique est nécessairement invariante ($\mu_x(\varphi \circ f) = \mu_x(\varphi)$); d'autre part, la masse totale $\mu_x(1)$ est égale à 1 (on dit que μ_x est une mesure de probabilité). Ces deux propriétés impliquent, grâce au théorème de récurrence de Poincaré (cf. théorie ERGODIQUE) que le support de μ_x est contenu dans l'ensemble non errant $\Omega(f)$ de f (et donc que $\mu_x(X - \Omega(f)) = 0$). Dorénavant, nous supposons que $\Omega(f)$ est compact. Pour ce qui concerne l'existence de ces mesures μ_x , tournons-nous vers le théorème ergodique de Birkhoff (cf. théorie ERGODIQUE) : si $f: X \rightarrow X$ laisse invariante une mesure de probabilité μ , il existe un sous-ensemble Y de X de μ -mesure nulle tel que μ_x existe pour tout point x de $X - Y$; si de plus (f, μ) est ergodique (c'est-à-dire que les seuls ensembles mesurables invariants par f sont de mesure 0 ou 1), on peut choisir Y de façon que, pour tout x dans $X - Y$, μ_x soit égale à μ . Remarquons qu'a priori cette affirmation ne dit rien sur les points errants puisque, comme nous venons de le voir, $X - \Omega(f)$ est de μ -mesure nulle.

D'un autre côté, nous voyons que, quelle que soit la mesure de probabilité ergodique invariante par f , il existe un point x dans X tel que μ_x soit définie et égale à μ ; ce résultat prend tout son sel quand on se rend compte que, bien souvent, il existe énormément de mesures de probabilité ergodiques invariantes; dans le cas de l'homéomorphisme $\sigma: \{0, 1\}^Z \rightarrow \{0, 1\}^Z$ de décalage (shift) sur deux symboles introduit à propos du fer à cheval ou du solénoïde, on en construit très facilement une infinité, paramétrées par p , $0 < p < 1$, en donnant la mesure $p^\alpha(1-p)^{k-\alpha}$ au sous-ensemble de $\{0, 1\}^Z$ formé des suites $(a_i)_{i \in Z}$ telles que $a_i = a_{i+1}^0, \dots, a_k = a_{i+1}^0$, où α des a_i^0 sont des 0 (jeu de pile ou face biaisé encore appelé schéma de Bernoulli en souvenir des travaux de J. Bernoulli sur ce jeu). Toutes ces mesures sont bien sûr étrangères l'une à l'autre. Cependant, les expériences numériques suggèrent assez souvent qu'une mesure asymptotique bien définie puisse être associée à un « attracteur ».

Dans le cas des difféomorphismes axiome A, l'explication est donnée par le théorème de Ruelle (1975, étendu par Ruelle et Bowen aux flots axiome A). Rappelons que les attracteurs Ω_i d'un difféomorphisme axiome A sont caractérisés parmi les ensembles basiques par une variété stable $W^s(\Omega_i)$ (bassin) de mesure de Lebesgue positive, ce qui implique que, pour presque tout (au sens



de la mesure de Lebesgue) point x de X , l'orbite $f^n(x)$ tend vers un attracteur lorsque n tend vers $+\infty$. Le théorème de Ruelle affirme qu'il existe dans ces conditions un sous-ensemble Z_i de $W^s(\Omega_i)$, de mesure de Lebesgue nulle dans $W^s(\Omega_i)$, et une mesure de probabilité ergodique $\mu_{\Omega_i}^*$ sur Ω_i invariante par f telle que, pour tout x dans $W^s(\Omega_i) - Z_i$, μ_x existe et soit égale à $\mu_{\Omega_i}^*$. La mesure $\mu_{\Omega_i}^*$ ainsi canoniquement attachée à un attracteur axiome A peut être légitimement appelée mesure d'équilibre de cet attracteur. Le comportement statistique de presque tout x (au sens de la mesure de Lebesgue) est donc décrit, dans le cas d'un difféomorphisme axiome A, par la donnée d'un nombre fini de mesures ergodiques.

La mesure $\mu_{\Omega_i}^*$ a d'autres caractérisations, très intéressantes : c'est l'unique mesure ayant la propriété d'absolue continuité des mesures conditionnelles sur les variétés instables de l'attracteur par rapport à la mesure de Lebesgue sur ces variétés instables, propriété elle-même reliée au fait d'être limite de mesures stationnaires sous l'action de petites perturbations stochastiques (cette dernière propriété explique, d'après Ruelle, les résultats numériques); c'est aussi l'unique mesure qui maximise (c'est-à-dire rend égale à 0) l'expression :

$$h_\mu(f) - \int \sum_{\lambda_i^n > 0} m_x^{(i)} \lambda_i^n d\mu(x),$$

différence entre l'entropie métrique de μ (cf. théorie ERGODIQUE) et la moyenne de la somme (avec multiplicité) des exposants caractéristiques positifs (définis ci-dessous); on peut d'ailleurs écrire alternativement cette moyenne sous la forme :

$$\mu(\text{Log } J_x) = \int \text{Log } J_x(x) d\mu(x),$$

où $J_x(x)$ est le jacobien de la restriction $Df(x)|_{E_x^u}: E_x^u \rightarrow E_x^u$ de la dérivée de f au sous-espace instable en x . On comparera cette dernière caractérisation au principe variationnel de la mécanique statistique d'équilibre. Remarquons que, avec la fonction $\text{Log } J_x(x)$, on mesure le taux suivant lequel on perd de l'information sur la position de $f^n(x)$ quand on ne connaît pas exactement la position de x ; la non-nullité de l'entropie métrique $h_\mu(f)$ est donc une manifestation de la dépendance sensible des conditions initiales, cause essentielle du passage d'une

description géométrique des mouvements asymptotiques à une description statistique.

Remarquons enfin qu'en général $\mu_{\Omega_i}^*$ ne maximise pas l'entropie métrique de f ; il existe une mesure $\mu_{\Omega_i}^0$ réalisant le maximum (Parry, Bowen), c'est-à-dire telle que $h_{\mu_{\Omega_i}^0}(f) = h(f)$ (entropie topologique); cette mesure régit la répartition asymptotique des points périodiques de f dans Ω_i .

Nous ne rentrerons pas dans la démonstration du théorème de Ruelle, qui peut se faire en utilisant la dynamique symbolique des ensembles basiques, mais nous donnerons plutôt une idée de la mesure dans l'exemple, décrit au chapitre 6, du difféomorphisme f de $S^1 \times D^2$ dans lui-même ayant pour attracteur le solénoïde A. La mesure de Lebesgue (de Haar) $d\theta/2\pi$ sur le cercle $|z| = 1$ est une mesure de probabilité invariante ergodique pour l'application δ du cercle sur lui-même définie par $\delta(z) = z^2$ (c'est-à-dire $\delta(\theta) = 2\theta$ si $z = e^{i\theta}$). Le théorème de Birkhoff fournit alors un sous-ensemble Y de mesure nulle dans le cercle tel que, si $\alpha: S^1 \rightarrow \mathbb{R}$ est continue,

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \alpha(\delta^n(z)) = \int_0^{2\pi} \alpha(e^{i\theta}) \frac{d\theta}{2\pi}$$

pour tout z n'appartenant pas à Y . Notons Z l'ensemble des points (z, w) du tore solide $S^1 \times D^2$ dont la première coordonnée z appartient à Y . La mesure de Lebesgue de Z dans $S^1 \times D^2$ (qu'on peut dérouler en $\mathbb{R} \times D^2 \subset \mathbb{R}^3$) est nulle et il n'est pas difficile de montrer que si $\varphi: S^1 \times D^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est continue et si (z, w) n'appartient pas à Z ,

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \varphi(f^n(z, w)) = \mu_A^*(\varphi),$$

où la mesure d'équilibre μ_A^* est définie de la manière suivante :

1. On calcule la moyenne de φ (pour la mesure de Lebesgue $d\theta/2\pi$) sur chacun des brins du solénoïde A faisant une fois le tour du tore solide (morceaux de variétés instables), ce qui fournit une fonction $\hat{\varphi}$ sur l'ensemble de Cantor $K \cong \{0, 1\}^Z$ intersection d'un disque $z = C^k$ avec l'attracteur.
2. On moyenne $\hat{\varphi}$ sur K muni de la mesure produit correspondant à $p = 1/2$ décrite plus haut à propos du shift. Ce résultat devient plausible lorsqu'on remarque que la distance de $f^n(z, w_1)$ et $f^n(z, w_2)$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$ (invariance du feuilletage stable formé des disques $z = C^k$, sur lequel f est contractante).

Si on perturbe un peu le difféomorphisme f , on conserve un attracteur homéomorphe au solénoïde (stabilité structurelle) mais la mesure d'équilibre change; il faut maintenant affecter de poids les deux opérations de moyenne.

Dans cet exemple, l'absolue continuité par rapport à la mesure de Lebesgue de la mesure d'équilibre sur les variétés instables de l'attracteur A est évidente, et le comportement du couple $(f|A, \mu_A^*)$ ne se distingue pas d'un jeu de pile ou face au niveau probabiliste (en particulier, $h_{\mu_A^*}(f) = \text{Log } 2$ et coïncide donc dans ce cas très simple avec l'entropie topologique $h(f)$). Ce dernier fait est général : dès que la restriction de f à un attracteur hyperbolique A est topologiquement mélangante c'est-à-dire si pour tout couple (U, V) d'ouverts de A, il existe un entier $N > 0$ tel que, si $n > N$, on ait $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$, le couple $(f|A, \mu_A^*)$ est isomorphe au niveau probabiliste à un schéma de Bernoulli défini comme précédemment en remplaçant éventuellement $\{0, 1\}^Z$ par $\{0, 1, \dots, q-1\}^Z$ et en affectant, dans la définition de la mesure produit, chacun des entiers $i = 0, \dots, q-1$ d'une probabilité p_i , avec $\sum p_i = 1$.

Autrement dit, les propriétés probabilistes de $(f^i | \Lambda, \mu_\lambda^*)$ sont celles d'un jeu de pile ou face biaisé généralisé, nec plus ultra du comportement aléatoire.

La théorie ergodique des systèmes dynamiques ne vérifiant pas l'axiome A n'existe pas encore, mais une vaste généralisation de la notion d'hyperbolicité a été développée à partir de la notion d'exposant caractéristique (ou exposant de Liapunov, car introduite par ce dernier dans sa théorie de la stabilité). Soit f un difféomorphisme d'une variété compacte M , munie d'une métrique riemannienne, et μ une mesure de probabilité sur M invariante par f . Le théorème ergodique non commutatif d'Oseledets fournit un sous-ensemble B de M de mesure $\mu(B) = 1$, invariant par f , et pour chaque point x de B une décomposition :

$$T_x M = \bigoplus_{i=1}^{r(x)} W_i(x)$$

de l'espace tangent en x à M en somme directe de sous-espaces ayant les propriétés suivantes :

1. $\forall v \in W_i(x)$, les limites :

$$\chi^{\pm}(x, v) = \lim_{n \rightarrow \pm \infty} \frac{1}{n} \text{Log} \|Df^n v\|$$

existent, sont égales et indépendantes de v ($Df^n v$ est la dérivée en x de $f^n v$). On les note $\lambda_i(x)$ avec la convention que $\lambda_1(x) < \lambda_2(x) < \dots < \lambda_{r(x)}(x)$. Les $\lambda_i(x)$ sont les exposants caractéristiques de f au point x .

2. Les λ_i et les W_i dépendent « mesurablement » de x (mais pas continûment a priori).
3. Pour tout point x de B , $s(f(x)) = s(x)$, $\lambda_i(f(x)) = \lambda_i(x)$ et $W_i(f(x)) = Df_x(W_i(x))$.

Il est naturel de noter :

$$E^s(x) = \bigoplus_{\lambda_i(x) < 0} W_i(x)$$

et :

$$E^u(x) = \bigoplus_{\lambda_i(x) > 0} W_i(x)$$

et de les appeler respectivement sous-espace stable et sous-espace instable en x .

Vaste généralisation du théorème de décomposition spectrale d'une matrice, ce théorème a son pendant non linéaire (existence de variétés stables pour f) démontré par Piesin en 1977 : pour tout point x de B tel que $E^s(x)$ ne soit pas réduit à $\{0\}$, l'ensemble :

$$W^s(x) = \{y \mid \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \text{Log} d(f^n(x), f^n(y)) < 0\}$$

est une sous-variété immergée dans M , admettant $E^s(x)$ pour espace tangent en x , contenue dans B , et égale en fait à :

$$W^s(x) = \{y \mid \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \text{Log} d(f^n(x), f^n(y)) < \max_{\lambda_i(x) < 0} \{\lambda_i(x)\}\}$$

La démonstration est une application sophistiquée de la méthode des « transformées de graphes » qui sert à établir les théorèmes d'existence de variétés stables dans le cas d'un point fixe ou d'un ensemble hyperbolique.

Lorsque la mesure invariante μ est définie à partir de la mesure de Lebesgue par une densité différentiable, les feuilletages stables et instables ont la propriété d'absolue continuité des mesures conditionnelles par rapport à la mesure de Lebesgue des feuilles ; Piesin en déduit la formule de l'entropie (démontrée par ailleurs directement par Mañé) :

$$h_\mu(f) = \int_M \left[\sum_{\lambda_i(x) > 0} m_i(x) \lambda_i(x) \right] d\mu(x)$$

$(m_i(x) = \dim W_i(x))$

qui, ainsi qu'il fut déjà remarqué, rend manifeste le lien entre la positivité de $h_\mu(f)$ et la dépendance sensible des conditions initiales évidemment liée à la présence d'exposants $\lambda_i(x)$ positifs.

Enfin, dans le cas où aucun exposant n'est nul (hyperbolicité généralisée), le difféomorphisme f ressemble « presque partout » (au sens de la mesure invariante μ) à un difféomorphisme d'Anosov non uniforme (les rapports de dilatation et de contraction varient de façon non contrôlée mais, en oubliant un sous-ensemble de petite mesure, on peut supposer les feuilletages stables et instables continus).

Il est alors possible de montrer un théorème de structure, cousin ergodique du théorème de décomposition spectrale de Smale : le sous-ensemble B des théorèmes d'Oseledets et de Piesin se décompose (à un sous-ensemble de mesure nulle près) en parties (boréliennes) disjointes B_i invariantes par f , éventuellement en nombre infini, telles que $(f|B_i, \mu|B_i)$ soit ergodique pour tout i (composantes ergodiques, dont la dynamique peut se décrire à l'aide de schémas de Bernoulli (à un isomorphisme mesurable près)).

Il est vraisemblable que toute cette théorie s'applique aux équations de Navier-Stokes et donc au problème de la turbulence hydrodynamique (cf. TURBULENCE) : si on admet que ces équations définissent effectivement un système dynamique dans un certain ouvert \mathcal{O} de l'espace des champs de vitesses de divergence nulle définis dans un domaine \mathcal{D} de \mathbb{R}^3 et nuls au bord de \mathcal{D} , muni de la norme de Sobolev H^1 (ce qui semble être le cas dans les régimes faiblement turbulents), tout sous-ensemble attractant Λ contenu dans \mathcal{O} est compact, de dimension de Hausdorff finie (Mallet-Paret) et admet un plongement injectif dans un espace de dimension finie (Mañé). On peut alors définir des exposants caractéristiques qui forment une suite tendant vers $-\infty$. Le lecteur trouvera des exposés de synthèse sur cette question dans les travaux de Ruelle et se reportera aux belles expériences de Gollub et Swinney, et de Libchaber.

Au terme de cette excursion dans la théorie ergodique, signalons que le théorème d'Oseledets et la notion d'exposant caractéristique ont un sens pour des « applications fibrées » (skew products, ou produits gauches) $F = f \times A : X \times \mathbb{R}^n \rightarrow X \times \mathbb{R}^n$ de la forme $F(x, v) = (f(x), A(x)v)$, où A est une application de X dans $GL(n, \mathbb{R})$, groupe des isomorphismes linéaires de \mathbb{R}^n . Lorsque X est une variété, de fibré tangent $X \times \mathbb{R}^n$, et que $A(x)$ est la dérivée de f en x , on retrouve la situation précédente. Dans le cas général, on voit qu'il faut remplacer $Df_x^n = Df(f^{n-1}(x)) \circ \dots \circ Df(x)$ par $A_x^n(x) = A(f^{n-1}(x)) \circ A(f^{n-2}(x)) \circ \dots \circ A(x)$. Si, par exemple, $f : \{0, 1, \dots, n\}^{\mathbb{Z}} \rightarrow \{0, 1, \dots, n\}^{\mathbb{Z}}$ est l'homéomorphisme de décalage, on retrouve la théorie des produits aléatoires de matrices. On généralise de même la notion de structure hyperbolique (décomposition du fibré trivial $X \times \mathbb{R}^n \rightarrow X$ en somme directe continue de deux sous-fibrés invariants, l'un uniformément contractant, l'autre uniformément dilatant). Un théorème récent d'Herman fournit, à partir de la théorie des fonctions pluri-sous-harmoniques, des minoration d'exposants dans ce cadre. Par exemple, si $F : S^1 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow S^1 \times \mathbb{R}^2$ est défini par $f(e^{2\pi i\theta}, v) = (e^{2\pi i(\theta + \alpha)}, A(\theta)v)$, où :

$$A(\theta) = \begin{pmatrix} \cos 2\pi\theta & \sin 2\pi\theta \\ -\sin 2\pi\theta & \cos 2\pi\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda} \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{R}),$$

et :

$$\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q},$$

on obtient une minoration du plus grand exposant par $\text{Log}(\lambda/2 + 1/(2\lambda))$.

Notons que les matrices $A(\theta)$ ne sont hyperboliques que si :

$$|\cos \theta| > \frac{4}{\left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right)^2}$$

elliptiques sinon, et qu'il s'agit donc d'une lutte entre comportement hyperbolique et comportement elliptique. Notons également que pour des raisons évidentes d'homotopie $\{\theta \rightarrow A(\theta)\}$ est un générateur du groupe de Poincaré de $SL(2, \mathbb{R})$, F ne possède pas de structure hyperbolique bien qu'ayant au niveau probabiliste un comportement hyperbolique pour $\lambda > 1$.

Des difféomorphismes fibrés apparaissent naturellement dans de nombreux problèmes ; en particulier, la structure du spectre de l'équation de Hill discrétisée est intimement liée à l'existence de structures hyperboliques ou d'exposants caractéristiques pour de tels difféomorphismes.

Que la tension elliptique-hyperbolique soit un phénomène subtil est attesté par l'étude au voisinage d'un point fixe elliptique d'un difféomorphisme local du plan préservant les aires : on a vu au chapitre 4 que le comportement elliptique se produit sur un ensemble de mesure positive (courbes invariantes données par le théorème de K.A.M.), mais on ne sait pas s'il en est de même du comportement hyperbolique ; il existe bien sûr en général une infinité de points homoclines, ce qui assure la positivité de l'entropie topologique (existence de fers à cheval), mais tout cela pourrait ne concerner qu'un sous-ensemble du plan de mesure nulle auquel cas l'entropie métrique serait nulle. Pour le moment personne n'en sait rien.

9 Propriétés génériques

Que dire d'un système dynamique « général » ? Voilà une question bien vague...

Certains théorèmes sont universellement valables et limitent en quelque sorte l'« espace » de tous les systèmes dynamiques (théorèmes d'existence et d'unicité locales de Cauchy-Kowalewska, théorème ergodique de Birkhoff, théorème de Piesin...) mais, de même que le lemme de Sard pour la théorie des fonctions différentiables, ces théorèmes contraignent peu la géométrie du système.

Peut-on alors répéter ce qui a si bien réussi pour les fonctions (cf. SINGULARITÉS DES FONCTIONS DIFFÉRENTIABLES), c'est-à-dire définir une classe de systèmes dynamiques assez particulière pour que la dynamique des éléments de cette classe soit géométriquement descriptible, et assez générale pour contenir « presque tous » les systèmes dynamiques (ou « presque tous » les systèmes d'un certain type : gradient, hamiltonien, avec symétries, etc.) ? Et si les éléments de cette classe étaient structurellement stables, quel soulagement pour les physiciens, ingénieurs, et autres chercheurs de modèles ! Plus de problème métaphysique sur l'imprécision des prédictions due à l'imprécision des coefficients numériques s'il y a toutes les chances pour que l'équation écrite soit stable et si de plus la dynamique d'une telle équation admet une description géométrique simple.

Ce rêve, un moment caressé par Smale (les succès obtenus par Peixoto en dimension deux y incitaient), s'est avéré doublement naïf, mais sa poursuite est à l'origine de nombreuses découvertes passionnantes. Naïve en effet l'idée que la stabilité structurelle d'un système implique la possibilité de prédictions précises : pour les systèmes qui, tels les flots géodésiques ergodiques de la fin du chapitre 7, présentent une « dépendance sensible des conditions initiales », seule une prédiction de type statistique est possible

(chap. 8). Naïf également l'espoir que « presque tout » système dynamique soit structurellement stable, ou même descriptible géométriquement. Et puis, quel sens donner à « presque tout » ? Déjà dans sa belle adresse au congrès international des mathématiciens de 1954, Kolmogorov soulevait ce problème, opposant la notion topologique (catégorie de Baire) à la notion métrique (mesure), la première bien adaptée à la mise en avant des situations hyperboliques, la seconde tournée plutôt vers l'elliptique mais souffrant de la non-existence d'une mesure naturelle sur les espaces fonctionnels.

Plus précisément, soit $\chi^r(M)$ l'espace, muni de la topologie C^r , des champs de vecteurs r fois continûment différentiables sur la variété compacte M : deux champs sont considérés comme proches s'ils le sont en chaque point ainsi que leurs dérivées jusqu'à l'ordre r (dans une carte locale, un champ est simplement une application de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^n si n est la dimension de M).

La stabilité structurelle a été définie à la fin du chapitre 2 ; on a introduit une relation d'équivalence sur $\chi^r(M)$ (existence d'un homéomorphisme de M envoyant orbite orientée du premier champ sur orbite orientée du second) et appelé structurellement stable tout élément contenu dans l'intérieur de sa classe d'équivalence (c'est-à-dire dont la classe d'équivalence est ouverte) : autrement dit, un champ qu'aucune déformation suffisamment petite ne fasse sortir de sa classe d'équivalence. Des définitions analogues valent pour l'espace $\text{Diff}^r(M)$ des difféomorphismes r fois continûment différentiables de M , la relation d'équivalence étant cette fois l'existence d'un homéomorphisme conjuguant les deux difféomorphismes considérés (cf. chap. 7, la discussion de la stabilité des difféomorphismes d'Anosov).

Un sous-ensemble D de $\chi^r(M)$ (resp. $\text{Diff}^r(M)$) est dit résiduel (au sens de Baire) s'il est intersection d'une famille au plus dénombrable d'ouverts denses : rappelons qu'un sous-ensemble D d'un espace topologique X est dit dense si tout point de X peut être approché arbitrairement près par un point de D . L'intersection de deux sous-ensembles denses peut très bien être vide en général (par exemple Q et $\mathbb{R} - Q$ dans \mathbb{R}) mais pas celle de deux ouverts denses ; de plus, dans les espaces $\chi^r(M)$ et $\text{Diff}^r(M)$, un sous-ensemble résiduel est dense (propriété de Baire). Une propriété (P) concernant les champs de vecteurs (resp. les difféomorphismes) est dite générique (au sens topologique) si l'ensemble des éléments de $\chi^r(M)$ (resp. $\text{Diff}^r(M)$) qui la possèdent est résiduel. Remarquons que la réunion d'une famille dénombrable de propriétés génériques est encore générique.

Le théorème de Peixoto (qui fait suite en 1962 aux travaux de Andronov et Pontriaguine, de Baggis, Pliss) affirme que, pour tout $r > 1$, les champs de vecteurs structurellement stables sur une variété orientable M de dimension deux (surface) forment un ouvert dense S de $\chi^r(M)$.

La stabilité structurelle est donc une propriété générique dans ce cas. De plus, les champs appartenant à S sont caractérisés par une structure géométrique très simple (champs de Morse-Smale) : nombre fini de points singuliers, tous hyperboliques, nombre fini d'orbites périodiques, toutes hyperboliques (c'est-à-dire telles que l'application de Poincaré correspondante ait un point fixe hyperbolique), aucune connexion homocline entre cols, ensemble ω -limite et α -limite d'une orbite périodique toujours égal à un point singulier ou une orbite périodique (voir les définitions données à la fin du chap. 3, première excursion topologique). Le cas particulier des champs de vecteurs sans singularité sur le tore qui possèdent une courbe fermée rencontrant transversalement chaque orbite correspond (via l'application de premier retour) à un théorème analogue pour les difféomorphismes du cercle et l'étude

du nombre de rotation esquissée au chapitre 5 montre que, même dans ce cas qui semble favorable, il existe au moins deux notions de genericité antagonistes : si $(X_\mu)_{\mu \in [0,1]}$ est une famille à un paramètre de tels champs de vecteurs sur le tore, l'ensemble J des valeurs du paramètre pour lesquelles X_μ n'est pas structurellement stable a une mesure de Lebesgue positive (et pouvant même être très proche de 1) dès que les nombres de rotation des applications de premier retour de X_0 et X_1 diffèrent ; cela n'empêche pas que, si la famille (X_μ) est générique au sens topologique dans l'espace des familles de ce type, le complémentaire de J soit un ouvert dense. Ce genre d'opposition entre « presque tout topologique » et « presque tout métrique » est familier aux arithméticiens et aux analystes et je ne saurais mieux faire que recommander au lecteur le merveilleux petit livre d'Oxtoby : *Measure and Category*.

En dimension supérieure à deux (un pour les difféomorphismes), un certain nombre de propriétés génériques (au sens topologique) ont été dégagées, mais elles sont bien loin de contraindre la géométrie du système au point de la rendre descriptible. Citons en particulier la propriété de Kupka-Smale (1963) (points singuliers et orbites périodiques tous hyperboliques et transversalité des variétés stables et instables des points singuliers et orbites périodiques dans le cas d'un flot, même définition avec les points fixes et les points périodiques pour les difféomorphismes), tout en rappelant les résultats de Newhouse, cités au chapitre 7 (fig. 71), qui montrent la non-généricité de la transversalité des variétés stables et instables d'ensembles invariants hyperboliques et empêchent donc de considérer comme marginale la complexité associée à la présence de contacts homoclines ou hétéroclines. Citons également, pour les difféomorphismes, la densité des points périodiques dans l'ensemble non errant malheureusement démontrée dans le seul cas où $r = 1$ (closing lemma de Pugh, 1967).

Une classe particulière de difféomorphismes ayant la propriété de Kupka-Smale est formée par les difféomorphismes axiome A n'ayant pas de cycle ; nous avons déjà dit au chapitre 7 qu'ils étaient Ω -stables ; en particulierisant un peu plus, on arrive aux difféomorphismes axiome A ayant la propriété de transversalité forte (cf. chap. 7) qui sont, eux, structurellement stables et dont la dynamique est raisonnablement descriptible.

Ni la Ω -stabilité ni, a fortiori, la stabilité structurelle ne sont des propriétés génériques des difféomorphismes (resp. des flots) d'une variété de dimension supérieure ou égale à deux (resp. trois). Les premiers exemples de systèmes dynamiques non approximables par un système dynamique structurellement stable (resp. Ω -stable) ont été donnés par Smale en 1966 (resp. Abraham et Smale en 1970). On en connaît beaucoup aujourd'hui, par exemple les flots possédant des « attracteurs de Lorenz géométriques » (cf. chap. 6), dont la topologie peut même varier continûment en fonction de paramètres.

Des affirmations (beaucoup !) plus faibles que la genericité ont pu être démontrées à propos des difféomorphismes structurellement stables, par exemple leur densité pour la topologie C^0 (Shub) et leur existence dans toute classe d'isotopie (c'est-à-dire composante connexe par arcs) de $\text{Diff}^r(M)$ (Smale). En particulierisant de plus en plus, on obtient les difféomorphismes de Morse-Smale ($\Omega(f)$ union finie de points périodiques hyperboliques dont les variétés stables et instables se coupent transversalement), génériques en dimension un, mais qui en plus grande dimension n'existent même pas dans toutes les classes d'isotopie (travaux de Shub, Sullivan, Franks).

Notons que, comme les champs de gradients qu'ils généralisent, les systèmes dynamiques de Morse-Smale vérifient des

inégalités de Morse reliant leurs points singuliers et leurs orbites périodiques (resp. leurs points fixes et leurs points périodiques) à la topologie de la variété ambiante et sont donc un bon outil d'investigation de cette topologie. Quant à la recherche de « jolis » représentants d'une classe d'isotopie de $\text{Diff}^r(M)$, elle a fait en particulier l'objet de beaux travaux de Thurston (difféomorphismes pseudo-Anosov sur les surfaces).

Des résultats de genericité existent également à l'intérieur de classes particulières de systèmes dynamiques, en particulier les champs de gradients (travaux de Palis et Smale) et les champs hamiltoniens (travaux de Takens et de Robinson). Rappelons cependant que le théorème de K.A.M. montre que l'ergodicité dans les surfaces d'énergie constante n'est pas une propriété générique des systèmes hamiltoniens dès que la classe de différentiabilité r est assez grande, et ce bien que l'ergodicité soit générique pour les homeomorphismes d'une variété compacte de dimension supérieure ou égale à deux qui préservent le volume (théorème d'Oxtoby-Ulam) ; le problème est ouvert pour les difféomorphismes une fois continûment différentiables).

Beaucoup moins de choses sont connues si l'on remplace la considération d'un système dynamique individuel par celle de familles paramétrées (comparer à la théorie du déploiement versel décrite dans l'article SINGULARITÉS DES APPLICATIONS DIFFÉRENTIABLES). Sotomayor a pu caractériser une classe de familles à un paramètre génériques de champs de vecteurs sur les surfaces, mais l'exemple des champs sans singularité sur le tore montre que l'ensemble de bifurcation de la famille (ensemble des valeurs du paramètre pour lesquelles le champ n'est pas structurellement stable) est « génériquement » compliqué ; cela est vrai même pour des familles « stables » (en un sens qu'on laisse au lecteur le soin de deviner), ainsi que l'on montré récemment Guttierrez, Lins et de Melo en étudiant sur le tore certains champs de vecteurs avec singularité dont la construction remonte à Cherry.

Des phénomènes analogues ont été mis en évidence par Newhouse, Palis et Takens dans les familles à un paramètre de difféomorphismes qui « sortent » du sous-espace des difféomorphismes de Morse-Smale.

La description de familles à un paramètre génériques d'équations différentielles, de difféomorphismes, ou même d'endomorphismes, dans lesquelles la structure des attracteurs devient de plus en plus complexe, est actuellement l'objet d'une grande activité sous le nom *recherche de routes possibles vers la turbulence* : Il semble en effet que l'établissement de la turbulence hydrodynamique puisse être modélé par de telles familles en petite dimension. Les premiers modèles ont été ceux de Lorenz, puis de Ruelle-Takens (suite de bifurcations de Hopf menant à un attracteur torique de petite dimension et apparition d'un attracteur étrange, cf. chap. 6 et la discussion dans le chap. 5 du problème de la disparition des courbes invariantes des difféomorphismes du plan). Le phénomène de l'accumulation de dédoublements d'orbites périodiques, auquel on a fait allusion au chap. 6 à propos des endomorphismes de l'intervalle, semble également très pertinent (expériences de l'équipe de Libchaber). Une façon simple de le produire est de modifier la position du point de suspension d'un pendule avec une période moitié de la période propre du pendule, le paramètre étant l'amplitude de la modification.

Pour des familles à deux (ou plus de deux) paramètres, les choses se compliquent encore. Takens vient par exemple de montrer (1983) que la stabilité structurelle n'est pas une propriété générique des familles à plus de huit paramètres de champs de gradients sur une

variété de dimension supérieure ou égale à trois, alors qu'elle l'est pour les familles à un paramètre (Palis et Takens) et que l'absence de récurrence dans de tels champs aurait pu faire croire qu'elle l'était quel que soit le nombre de paramètres. Dans le cas des difféomorphismes des surfaces, il faut noter le rôle de *centre organisateur* des difféomorphismes conservant les aires (hamiltoniens) : les déformations d'un difféomorphisme qui possède un point fixe elliptique font apparaître des ensembles de bifurcation dont la structure est à deux niveaux : un niveau robuste du type « théorie des catastrophes » auquel se superpose un niveau fin très instable dont la complexité est analogue à la complexité hamiltonienne décrite au chap. 4.

Autrement dit, c'est toute la structuration des espaces $\chi^r(M)$ ou $\text{Diff}^r(M)$ qui doit être décrite à plusieurs niveaux, au fur et à mesure que l'on prend en compte des phénomènes plus fins, et une théorie générale du déploiement versel semble aujourd'hui très utopique.

La signification de tout cela, et en particulier de la non-généricité de la stabilité structurelle, pour la physique n'est pas très claire : il semblerait naturel que d'une équation (ou d'une famille d'équations) décrivant un « phénomène » on exige une certaine stabilité, au moins dans la classe des équations à laquelle elle appartient naturellement ; les coefficients numériques qui interviennent ne sont en effet connus qu'avec une certaine approximation et il serait raisonnable que le comportement qualitatif de la dynamique ne soit pas trop sensible aux approximations. Cependant, ce point de vue « évident » doit être tempéré pour plusieurs raisons. Tout d'abord, notre notion de stabilité fondée sur l'équivalence topologique des dynamiques est sans doute trop fine et non pertinente : les expérimentateurs « voient » tous les jours des phénomènes quasi périodiques qui, au moins dans les systèmes dissipatifs, sont très instables, bien que fréquents au sens de la mesure, mais comment distinguer une orbite dense sur un tore d'une longue orbite périodique (ou encore comment distinguer un rationnel d'un irrationnel) ? Il serait important également d'introduire dans la théorie diverses échelles comme cela se fait depuis toujours en physique (Harthong a avancé que l'analyse non standard était un bon outil pour cela).

En effet, comme le remarque Thom, la plupart des bifurcations d'un système complexe n'ont sans doute aucun effet visible sur la phénoménologie qu'il sous-tend, du moins à une échelle donnée.

Enfin, une expérience fournit en général des suites de mesures et c'est sur de telles suites qu'il faut juger de la dynamique sous-jacente éventuelle. D'intéressants résultats de Takens ont paru récemment, qui valident et prolongent un certain nombre de pratiques utilisées en physique et permettent, dans les cas favorables, de prouver le caractère « déterministe » d'un processus et même de calculer approximativement la dimension de Hausdorff et l'entropie topologique d'un attracteur. À la base, se trouve une jolie démonstration du classique *théorème de Whitney* sur le plongement des variétés dans l'espace euclidien : si M est une variété compacte de dimension n , $f: M \rightarrow \mathbb{R}^k$ une fonction différentiable, X un champ de vecteurs sur M de flot $(\varphi_t)_{t \in \mathbb{R}}$, α un nombre réel non nul, k un entier supérieur ou égal à $2n + 1$, et si les données (X, f, α) sont « génériques », l'application F de M dans \mathbb{R}^{2n+1} définie par $F(x) = (f(x), f(\varphi_\alpha(x)), \dots, f(\varphi_{(k-1)\alpha}(x)))$ est un *plongement* (application injective dont la dérivée est en tout point de rang maximal). Pour représenter un attracteur dont on pense qu'il habite un espace de petite dimension, on peut donc essayer l'opération suivante : on mesure à des intervalles de temps α l'observable représentée par f , ce qui fournit une suite $a_1, a_2, a_3,$

..., a_p, \dots de nombres, et on construit dans \mathbb{R}^k (en général $k = 2$ ou 3) l'ensemble des points de la forme $(a_{i+1}, \dots, a_{i+k})$, $i = 0, 1, 2, \dots$. Les résultats sont propres à étonner.

Que retenir des divers exemples évoqués, sinon un mélange d'admiration devant la beauté de certaines percées théoriques et de modestie devant le foisonnement des situations non maîtrisées.

Seule la classe des systèmes « hyperboliques » se prête pour le moment à une théorie unifiée conduisant à une bonne connaissance de la dynamique, et ce grâce à la propriété d'approximation des quasi-morphismes par des morphismes, indissolublement liée aux propriétés de stabilité ; mais quelles difficultés pour montrer qu'une partie au moins d'un système réel se trouve dans cette classe !

Les problèmes « elliptiques » nécessitent en général des méthodes plus fines au niveau analytique ; on comparera par exemple les théorèmes affirmant l'apparition par bifurcation de Hopf d'une courbe invariante d'un difféomorphisme et les théorèmes du type Kolmogorov-Arnold-Moser montrant, dans le cas d'un difféomorphisme du plan conservant les aires, l'existence de courbes invariantes de bon nombre de rotation au voisinage d'un point fixe elliptique : les premiers n'utilisent que l'existence d'un point fixe pour une contraction d'un espace de Banach, les seconds nécessitent dans leur généralité un théorème de fonctions implicites « raffiné » dans un espace de Fréchet.

Quant aux systèmes hamiltoniens « complètement intégrables » (cf. MÉCANIQUE ANALYTIQUE), qui jouent dans l'univers hamiltonien le rôle tenu par les systèmes linéaires dans la théorie dissipative, leur classification n'est que très partielle et la construction sporadique de nouveaux exemples, par des méthodes en général algébriques, reste bien mystérieuse.

Bien entendu, dans les problèmes « réels », l'hyperbolique et l'elliptique se mélangent inextricablement et des méthodes adaptées doivent être péniblement élaborées : lorsqu'il s'agit d'équations différentielles en dimension trois, on arrive quelquefois à réduire la dimension en se ramenant (essentiellement) à un difféomorphisme en dimension deux par le choix d'une section de Poincaré (ou quelque chose d'approchant) puis à un endomorphisme, éventuellement discontinu, en dimension un si par bonheur ledit difféomorphisme laisse invariant un feuilletage, enfin à la dimension zéro par le biais de la dynamique symbolique d'un tel endomorphisme.

Ce schéma est à peu près suivi dans l'étude des attracteurs de Lorenz géométriques, mais la situation n'est pas toujours aussi idyllique : l'exemple de l'attracteur de Henon, dont on ne sait toujours pas si c'est un attracteur étrange ou l'adhérence d'une réunion d'orbites périodiques de périodes arbitrairement grandes, est significatif de la difficulté qu'il y a à appréhender géométriquement une situation donnée analytiquement.

Et pourtant, sans nier l'indéniable apport conceptuel de la théorie générale à des questions telles que stabilité, généricité, déterminisme, relation local-global, catastrophes..., ce sont aussi les équations « naturelles » qui nous intéressent, et pas seulement celles qui habitent un espace de dimension finie. Nous avons commencé en citant, avec Lefschetz, deux grands modèles d'équations différentielles : les équations de Van der Pol du côté dissipatif, celles du problème des trois corps du côté conservatif ; nous finirons en rappelant les problèmes posés par des équations aux dérivées partielles telles que celles de Navier-Stokes (cas dissipatif) et Kortweg-de Vries (cas conservatif) (cf. ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES - Équations aux dérivées partielles non linéaires). Ces équations

peuvent raisonnablement être considérées comme des « équations différentielles » en dimension infinie, ce qui permet de poser à leur propos des problèmes de nature plus géométrique, tels que la dimension des attracteurs pour Navier-Stokes ou l'existence de solitons pour des perturbations conservatives de Kortweg-de Vries. Une littérature importante est consacrée à ces thèmes ; pour s'en convaincre, il n'est que de remarquer le caractère familier des deux mots « turbulence » et « solitons » dans le vocabulaire scientifique d'aujourd'hui.

Certes, on ne peut toujours pas décider si, comme le demandait Feynman, l'odeur des violettes se trouve ou non dans l'équation de Schrödinger et la « turbulence développée » dans les équations de Navier-Stokes, mais certains aspects des équations sont venus à la lumière qui ont bouleversé nos intuitions ; en particulier, la richesse des comportements possibles d'une équation différentielle en dimension supérieure à deux incite à croire que les équations aux dérivées partielles de la physique contiennent « beaucoup » de phénomènes.

En ce qui concerne les méthodes, on est loin de la belle unité que présentent certaines théories plus formalisées.

Certains s'en désolent, d'autres penseront, et c'est l'opinion de l'auteur, que c'est dans ce foisonnement un peu hétéroclite que se manifeste le mieux la richesse et le « naturel » de ce domaine, et donc aussi son charme.

ALAIN CHENCINER

Très brèves indications bibliographiques

Au lecteur non mathématicien, s'il existe, le *Picture Book* de R. ABRAHAM & C. SHAW apprendra à se familiariser avec les diverses façons de « voir » un système dynamique. À un niveau plus scolaire, on peut tenter sa chance avec le livre de M. W. HIRSH & S. SMALE ou *Équations différentielles ordinaires* de V. I. ARNOLD ; plus généralement, *Méthodes mathématiques de la mécanique classique* et *Chapitres supplémentaires de la théorie des équations différentielles ordinaires* de V. I. ARNOLD donnent une vue géométrique remarquablement maîtrisée au niveau conceptuel des sujets qu'ils abordent, tout en restant (relativement) peu techniques. De même, le livre de S. LEFSCHETZ a gardé toute sa séduction.

C'est l'article de S. SMALE qui, conjugué à l'influence de Thom, a donné une vie nouvelle – au moins en Occident – à l'étude qualitative des systèmes dynamiques et surtout à la théorie hyperbolique ; sa lecture reste passionnante aujourd'hui et sa bibliographie, mise à jour, est un bon outil de travail. On la prolongera en consultant les cours d'écoles d'été récentes, par exemple le C.I.M.E. et Les Houches, et l'article de R. BOWEN, le livre de W. DE MELO & J. PALIS et l'article de M. SHUB. Dans un esprit plus physicien, les articles de M. V. BERRY et de R. G. HELLMAN décrivent de nombreux exemples et donnent une bibliographie extensive.

Du côté conservatif, en plus de l'ouvrage de V. I. ARNOLD, *Méthodes mathématiques de la mécanique classique*, déjà cité, on consultera avec plaisir les livres de R. ABRAHAM & J. MARSDEN, de R. STERNBERG, de J. K. MOSER, de C. L. SIEGEL & J. K. MOSER, et le cours de M. R. HERMAN ; en théorie ergodique, les livres de V. I. ARNOLD & A. AVEZ et de Y. G. SINAI et l'article de D. RUELLE.

Enfin, on ne saurait trop recommander au lecteur mathématicien de revenir aux œuvres originales, en particulier de H. POINCARÉ et de G. D. BIRKHOFF, dont la lecture reste un régal et réserve sans doute encore bien des surprises.

R. ABRAHAM & J. MARSDEN, *Foundations of Mechanics*, 2^e éd., Benjamin-Cummings, 1978 / R. ABRAHAM & C. SHAW, *Dynamics: The Geometry of Behavior*, The Visual Math. Libr., Aerial Press, 1981 / V. I. ARNOLD, *Équations différentielles ordinaires*, Mir, Moscou, 1974 ; *Méthodes mathématiques de la mécanique classique*, *ibid.*, 1976 ; *Chapitres supplémentaires de la théorie des équations différentielles ordinaires*, *ibid.*, 1980 / V. I. ARNOLD & A. AVEZ, *Problèmes ergodiques de la mécanique classique*, Gauthier-Villars, Paris, 1967 / M. V. BERRY, « Regular and Irregular Motion ; topics in non-linear dynamics », in S. Jorna dir., *Am. Inst. Phys. Conf. Proc.*, vol. XLVI, 1978 / G. D. BIRKHOFF, *Collected Mathematical Papers* (en particulier vol. II), Dover, 1968 / R. BOWEN, « On axiom A diffeomorphisms », in *Am. Math. Soc. C.B.M.S.*, n° 35, 1978 / W. DE MELO & J. PALIS, *Geometric Theory of Dynamical Systems, an Introduction*, Springer, 1982 / R. G. HELLEMAN, « Self-Generated Behavior in non-linear mechanics », in E. G. D. Cohen dir., *Fundamental Problems in Statistical Mechanics*, vol. V, North-Holland, Amsterdam, 1980 / M. R. HERMAN, Cours à l'École normale supérieure, 1980, à paraître dans *Astérisque* / M. W. HIRSCH & S. SMALE, *Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra*, Academic Press, 1974 / S. LEFSCHETZ, *Differential Equations, Geometric Theory*, Dover, 1977 / J. K. MOSER, « Stable and Random Motion in dynamical systems », in *Annals of Math.*, Study 77, Princeton, 1973 / H. POINCARÉ, *Œuvres complètes*, Gauthier-Villars, 1951 / D. RUELLLE, « Formalisme thermodynamique », in *Encyclopaedia of Mathematics* / M. SHUB, « Stabilité globale des systèmes dynamiques », in *Astérisque*, n° 56, 1978 / C. L. SIEGEL & J. K. MOSER, *Lectures on Celestial Mechanics*, Springer, 1971 / Y. G. SINAI, *Introduction to Ergodic Theory*, Princeton Univ. Press, 1977 / S. SMALE, « Differentiable Dynamical Systems », in *Bull. A.M.S.*, 1967 ; repris dans *The Dynamics of Time*, Springer, 1980 / S. STERNBERG, *Celestial Mechanics*, part. 1 et 2, Benjamin, 1969. C.I.M.E., juin 1978, *Dynamical Systems*, Liguori, 1980 / Les Houches, juillet 1981, G. Iooss, R. G. Helleman et R. Stora dir., North-Holland, 1983.

Corrélatés

DÉRIVÉES PARTIELLES (ÉQUATIONS AUX), DIFFÉRENTIELLES (ÉQUATIONS), ERGODIQUE (THÉORIE), MÉCANIQUE ANALYTIQUE, PENDULES ET MOUVEMENTS PENDULAIRES, POINCARÉ (H.), SINGULARITÉ DES FONCTIONS DIFFÉRENTIABLES, TURBULENCE, VARIATIONS (CALCUL DES), VARIÉTÉS DIFFÉRENTIABLES.

SZYMANOWSKI (Karol)
(1882-1937)

Profondément enracinée dans son époque, par excellence littéraire, l'œuvre de ce compositeur polonais s'appuie sur une synthèse très personnelle entre divers domaines de la culture, poésie, histoire, mythes, littérature, qui forment un tout parfaitement uni et cohérent. Les étapes de son évolution stylistique sont directement liées non seulement à ses lectures

(Goethe, D'Annunzio, Platon, Burckhardt, Wyspianski, Nietzsche...), mais aussi à ses voyages, surtout vers l'Italie, la Sicile et le Proche-Orient. Enfin, sa nature, très susceptible, d'une excitabilité presque malade, se lit dans sa musique, intensément extatique, voire érotique.

C'est dans le monde clos et protégé du grand domaine familial de Tymosowka (non loin d'Elisavetgrad, aujourd'hui Kirovgrad en U.R.S.S.) que Szymanowski vécut sa jeunesse ; il fut un enfant fragile, entouré de l'affection de sa mère et de ses sœurs. Ses penchants homosexuels s'affirmèrent assez tôt, et la récente découverte d'un chapitre d'*Epechos* (titre du roman écrit par Szymanowski en 1918, détruit lors de l'incendie de Varsovie en 1939) jette une lumière plus complète sur l'énigme que l'homosexualité, qu'il a assumée sa vie durant, posait au jeune Szymanowski.

En 1901, Szymanowski quitte l'école d'Elisavetgrad, où il avait eu pour professeur Gustav Neuhaus, et s'inscrit aux cours du Conservatoire à Varsovie. C'est là qu'il rencontre ses futurs interprètes et amis, le pianiste Artur Rubinstejn et le violoniste Paul Kochanski, ainsi que le chef d'orchestre Grzegorz Fitelberg. Avec trois jeunes compositeurs polonais, impatients de se faire connaître (G. Fitelberg, Rozycki, J. Szeluta), Szymanowski crée en 1905, sous le patronage financier du prince Lubomirski, la Société d'édition de jeunes compositeurs polonais. Ce groupement, dit « Jeune Pologne en musique », reste actif pendant près de six ans en menant ses activités à Lwow (Lemberg), Cracovie, Varsovie, Berlin, Leipzig et Dresde. Le jeune compositeur publie, par ce canal, ses premières œuvres, sept opus au total ; ses compositions d'alors pour piano présentent des affinités stylistiques avec Chopin, Schumann et Scriabine. En 1906, Szymanowski présente publiquement ses œuvres lors d'un concert donné par sa société à Varsovie (*Ouverture de concert* op. 12, *Variations* op. 10, *Troisième Étude* en si bémol mineur). Le succès est tel que le concert est donné deux fois. Quelques jours plus tard, Szymanowski présente le même programme à Berlin, où il rencontre un accueil plutôt réservé (pour des raisons plus politiques que musicales) ; ce premier contact avec le monde musical allemand marque la fin d'une époque dans l'œuvre de Szymanowski, déjà auteur de 14 opus, et notamment des *Chants* d'expression romantique, fondés sur les textes des poètes polonais Kasproiwicz, Tetmajer, Micinski et Berent.

Le mûrissement

Les années qui suivent sont celles des recherches et des échecs. Séjournant souvent à Berlin et à Leipzig, Szymanowski découvre l'univers polyphonique et contrapuntique de Max Reger. Fasciné également par les poètes symbolistes allemands comme Dehmel, Bodenstedt, Bierbaum et Mombert, il commence une série de lieder, s'aventurant ainsi sur un terrain où sa sensibilité et son talent ne sauront pas vraiment épouser l'esprit des textes. A partir de 1909, de retour à Tymosowka, il s'impose un rythme sévère de travail et son vrai profil de compositeur se précise avec une étonnante rapidité. Les œuvres qui naissent lui redonnent la foi et l'espoir : la *Deuxième Symphonie* op. 19, la *Deuxième Sonate pour piano* op. 21. Les deux œuvres, jouées à Vienne et à Berlin (avec Rubinstejn au piano) sont accueillies avec le plus grand intérêt.

En 1912, Szymanowski décide de s'installer à Vienne où, grâce à l'aide très généreuse

du prince Lubomirski, il passera avec son ami G. Fitelberg plusieurs mois, en 1912 et 1913. Mais le tourbillon de la vie mondaine l'ennuie et, malgré toutes les possibilités que lui offre maintenant le premier contrat signé avec Universal Edition pour dix ans, le compositeur retourne dans son domaine familial de Tymosowka. C'est là un moment important dans sa vie ; il étudie avec passion *La Civilisation en Italie au temps de la Renaissance* de Burckhardt, qui réveille en lui le souvenir de ses premiers séjours en Italie (Florence et Rome). La culture germanique, dont les limites l'oppressent déjà, cède la place à une nouvelle patrie spirituelle, l'Italie. Un recueil de poésies perses de Mohamed Hafiz donne vie à un premier cycle de *Chants d'amour de Hafiz*, dont l'érotisme brûlant enflamme les sens du compositeur et attire son attention sur la culture orientale. A l'automne 1913, Szymanowski achève sans grande conviction la partition de l'opéra *Hagith*, fondé sur un livret de Dörmann et fortement influencé par *Salomé* et *Elektra* de Richard Strauss.

Avant son départ définitif de Vienne, Szymanowski découvre l'existence de Stravinski, à l'occasion des représentations de *Petrouchka* par les ballets Diaghilev. Dans une lettre à son ami Spiess, il écrit : « Il est génial, Stravinski (celui des ballets russes), je suis troublé et, par conséquent, je commence à détester les Allemands. »

Changements de climats

Au cours des derniers mois précédant la guerre, le compositeur se déplace beaucoup : la Sicile et Palerme, l'Algérie, Biskra, Constantine, Tunis. Ensuite, via Paris, il atteint Londres où il rencontre Diaghilev et Stravinski. Une amitié esquissée avec ce dernier, mais les événements de 1914 se précipitent et Szymanowski retourne en Pologne par les tout derniers trains encore en service. En 1915, il rencontre à Kiev son ami Paul Kochanski, qui sera l'inspirateur d'une série de très populaires compositions pour violon : *Mythes* op. 30, triptyque pour violon et piano inspiré par la mythologie grecque, *Nocturne* et *Tarantelle* et, en 1916, *Premier Concerto pour violon* op. 35, influencé par le poème *La Nuit de mai* du poète polonais Micinski. La même année, Szyma-

Un style multiforme mais un constant attachement aux sources d'inspiration nationales (Institut polonais, Paris).

