Le vrai, le faux, l'insignifiant

matériaux pour une discussion de deux phrases de René Thom*

Alain Chenciner

Observatoire de Paris, IMCCE (UMR 8028), ASD

alain.chenciner@obspm.fr

https://perso.imcce.fr/alain-chenciner/

Pour Jean

L'essentiel est sans cesse menacé par l'insignifiant
À une sérénité crispée, René Char

Abstract

Quelques pistes de discussion à propos de deux phrases de René Thom (la première dans [T8] et [T6], la deuxième, pour le moins provocante, dans [T1]) :

> Ce qui limite le vrai, ce n'est pas le faux, c'est l'insignifiant.
>
> Tout ce qui est rigoureux est insignifiant.

1 Limites, bords, frontières, ...

Et tout d'abord une précision : Thom dit "ce qui limite le vrai", et non "le contraire du vrai". Son usage du prédicat "signifiant" me fait penser au prédicat "standard" qui fonde l'*Internal set theory* (IST) d'Edward Nelson, alternative à l'analyse non standard de Robinson où les infinitésimaux, au lieu d'être ajoutés aux nombres réels par une construction d'ultraproduit, sont des nombres réels "non standard". Il s'agit d'une frontière floue et non d'un sous-ensemble.

> Avant Frege, il y a eu Boole et c'est le commencement de la catastrophe. Nous pensons, en réalité, toujours selon la compréhension des concepts et pratiquement jamais selon leur extension. Penser cela, et c'est là l'hypothèse des logiciens, c'est rendre la logique solide mais ruiner son efficacité psychologique. On pense toujours intentionnellement. Personne ne peut définir l'extension du concept rouge. Cela n'a pas de sens. On ne peut pas capturer ce pseudo-ensemble. ([T9])

*Version légèrement remaniée d'un texte écrit à l'occasion d'une conférence donnée au séminaire Phenomath le 22 mai 2015

> En vérité, il existe une réelle unité dans ma réflexion. Je ne la perçois qu'aujourd'hui, après y avoir beaucoup réfléchi, sur le plan philosophique. Et cette unité, je la trouve dans cette notion de bord. Celle de cobordisme lui était liée. ([T8])

Bien entendu, les deux phrases en discussion ne s'adressent pas proprement à la mathématique mais aux sciences, physique et biologie en particulier. Distinguant deux *vérités*, scientifique et empirique, correspondant à deux *réalités*, Thom écrit dans [T6] :

> (...) la marche de la science se traduit par un conflit permanent portant sur la frontière entre le réel scientifique, par nature conventionnel, et le réel empirique, qui lui peut contenir des expériences vécues incommunicables

2 La rigueur formelle contre le sens ?

A la provocation de Bertrand Russell :

> Thus mathematics may be defined as the subject in which we never know what we are talking about, nor whether what we are saying is true. [Ru] chapitre V,

Thom semble répondre :

> C'est-à-dire que pour nous, la question de l'acceptabilité sémantique d'une assertion est un problème ontologiquement antérieur à celui de sa vérité. La vérité présuppose une signification. L'idéal des logiciens (et de certains mathématiciens) d'éliminer la signification au bénéfice de la seule vérité est un contre-sens philosophique. [T7]

Après Boole et Frege, exeunt donc comme hors sujet : Tarski, Popper, la théorie des modèles et les propositions indécidables.

2.1 Rigueur et logique

> Il faut en prendre son parti. Il n'y a pas de définition rigoureuse de la rigueur. Nous affirmerons donc : est rigoureuse toute démonstration, qui, chez tout lecteur suffisamment instruit et préparé, suscite un état d'évidence qui entraîne l'adésion. Et cette évidence provient de la possibilité d'avoir de chacun des symboles utilisés une conception assez claire pour que leur combinatoire force la conviction. De ce point de vue, la rigueur (ou son contraire, l'imprécision) est fondamentalement une propriété *locale* du raisonnement mathématique. [T2]

L'impossibilité d'écrire une démonstration compréhensible en langage formalisé (dans sa "carte du sens" qui accompagne la première des deux phrases en jeu, Thom a placé au bord de la mer de l'insignifiance la forteresse de la Tautologie) montre bien les limites de cette "rigueur" dont on ne peut nier cependant qu'elle fonde les mathématiques, ..., tout au moins dans la limite où le sens reste perceptible. Il y a quelques années, j'ai entendu Tim Gowers prédire que, dans l'avenir, la plupart des démonstrations ne seraient pas directement compréhensibles par un cerveau humain. Heureusement, prédire l'avenir est rarement rigoureux.

Les travaux récents de Vladimir Voevodsky sur l'interprétation en théorie de l'homotopie de la théorie des types, à la base de sa *fondation univalente* des mathématiques, sont à cet égard encourageants : imitant la construction par Grothendieck des infini-semi-groupes, la notion (de preuve) d'égalité y est assimilée à une équivalence d'homotopie faible et par ce biais, la géométrie fait un retour inattendu dans ce monde de symboles abstraits. Mais ne rêvons pas, le développement des assistants de preuve, basé en partie sur ces mêmes travaux, n'ira-t-il pas plutôt dans le sens de la prédiction de Gowers ?[1]

Ne court-on pas alors le danger que Thom nommait *décollement sémantique*, qui consiste en l'exploitation déraisonnable et de moins en moins pertinente de la générativité d'une théorie, un peu comme lorsqu'on essaie de décrire une variété avec une unique carte, ou qu'on cherche les théorèmes sous le réverbère pour la seule raison que c'est là qu'est la lumière ?

> On a fait la part trop belle aux mathématiciens, à croire que la seule vertu générative d'une structure formelle, issue de sa forme propre, doit être admise a priori, et ne requiert aucune explication. D'où vient la structure ? Si, par une véritable hypostase, on admet que la structure s'implante sur un substrat en raison de sa forme propre, d'où vient que parfois, à vouloir extrapoler son domaine, l'efficacité du modèle décroît, et sa validité disparaît ? Et comment aborder le problème de la diachronie, de ces "catastrophes subites" qui voient une structure s'effacer pour faire place à une autre complètement différente. Rappelons enfin le fait bien connu qu'il n'y a pas dans la langue usuelle de frontière stricte entre les expressions grammaticales et celles qui ne le sont pas, non plus qu'entre l'agrammaticalité et l'inacceptabilité sémantique. Pour toutes ces raisons, il apparaît nécessaire de réintroduire le continu que le formalisme avait chassé. ([T3])

2.2 La variété infinie et joyeuse des formes

> (...) il y a une certaine opposition entre géométrie et algèbre. Le matériau fondamental de la géométrie, de la topologie, c'est le continu géométrique ; étendue pure, instructurée, c'est une notion mystique par excellence. L'algèbre, au contraire, témoigne d'une attitude opératoire fondamentalement "diaïrétique". Les topologues sont les enfants de la nuit ; les algébristes, eux, manient le couteau de la rigueur dans une parfaite clarté. ([T5])

[1] Pas forcément si ces assistants ne sont utilisés que pour vérifier l'absence de faute dans une preuve. Voir à ce propos l'article [RS] de la journaliste scientifique Siobhan Roberts qui explique l'origine de la reconversion de Voevodsky tout en donnant du rôle de la faute en mathématique une vision très (trop ?) négative. Voir également la discussion rapportée dans [H] et disponible in extenso sur youtube `https://www.youtube.com/watch?v=eNgUQlpc1m0`.

Pour Thom, qui a souvent affirmé que c'est dans les parties floues et mal formalisées – mais génératrices de formes – des mathématiques qu'il se passe quelque chose qui l'intéresse, le sens est "clairement" du côté de la nuit et c'est bien ce que confirme le contexte de la seconde phrase citée :

> Ainsi donc on voit dans quelle direction va s'infléchir - selon nous - la recherche scientifique. Elle va perdre de son aspect technique pour reprendre contact avec la réflexion individuelle, peut-être même, comme c'est le cas en mathématique, avec l'esthétique, l'art[2]. Elle y perdra sans doute en certitude, en rigueur. Mais elle y gagnera en importance "humaine". Qu'on me permette ici une interprétation – toute personnelle – du fameux principe de complémentarité en mécanique quantique, selon lequel on ne peut connaître simultanément position et vitesse d'une particule. Pour moi, le vrai principe de complémentarité, qui domine toute notre activité intellectuelle, s'énonce : Tout ce qui est rigoureux est insignifiant. Hilbert avait bien vu, dans son axiomatique de la géométrie, qu'on ne pouvait accéder à la pure rigueur qu'en éliminant l'intuition, en privant les symboles de tout sens. En refusant le formalisme pur, en exigeant l'intelligible, le futur esprit scientifique va courir, de gaieté de coeur, le risque de l'erreur. Après tout, mieux vaut un univers transparent à l'esprit, translucide, où le contour des choses est un peu flou, qu'un univers aux certitudes précises, écrasantes et incompréhensibles, comme l'est celui de la physique classique. Depuis la rupture galiléenne, le savant a toujours recherché le point faible de la nature ; il a toujours essayé d'exploiter les automatismes, la "stupidité" de la nature: la physique est tout entière fondée sur ce manque d'imagination têtu des forces naturelles. Mais de la répétition indéfinie du même acte, l'addition de un, naissent les entiers naturels, l'arithmétique, d'où émerge, en grande partie, la grandiose construction des mathématiques. Ceci nous montre comment, d'un fond d'événements indistinguables, peut sortir la variété infinie et joyeuse des formes. [T1]

Mais point n'est besoin, Jean, de te convaincre du lien entre forme et sens, toi dont une partie de l'œuvre est consacrée à ce thème cher à Thom.

2.3 Quel langage ?

Par-delà son côté provoquant, la précédente citation me semble poser en particulier la question du langage : trop vague il n'est "que" poétique, trop formel il perd le sens. Dans la théorie des systèmes dynamiques, le mot "générique" est un bel exemple recouvrant des définitions qui peuvent être contradictoires (catégorie de Baire ou mesure) mais aussi la notion même d'espèce en biologie qui, comme Darwin l'avait remarqué, est mal définie

[2] Lire à ce propos le chapitre *L'univers de Roger Penrose, un royaume dont le prince est un enfant* de [Cha] ; dans ces quelques pages Gilles Châtelet exprime son admiration pour la façon dont Penrose célèbre le rôle des critères esthétiques dans l'activité mathématique.

par l'interfécondité et n'est donc pas une *relation d'équivalence* (car non transitive dans certains cas) mais dont l'utilité ne fait pas question.

2.4 La rigueur ... a posteriori

La phrase "Tout ce qui n'est *que* rigoureux est insignifiant" serait bien sûr plus facilement acceptée par les mathématiciens.

L'article [La] illustre, s'il en est besoin, l'importance du *que* dans cette affirmation en décrivant un bel exemple d'une vision géométrique qui s'est révélée rigoureuse alors même que l'auteur, Thom en l'occurence, avait exprimé des doutes sur la validité de son esquisse de preuve. Tout en avouant qu'il n'a pas réussi à rendre celle-ci rigoureuse, François Laudenbach en montre la richesse qui anticipe sur le, aujourd'hui classique, $h - principe$.

3 Oublier les cas trop particuliers ...

Comme Poincaré, Thom est sans doute plus un scientifique qu'un mathématicien au sens étroit du terme. Ce qui l'intéresse est certes de démontrer des théorèmes, mais à condition que ceux-ci soient "signifiants". Cela peut en particulier impliquer de ne s'intéresser qu'à des cas suffisamment généraux, en accord avec la notion de *stabilité structurelle*, à qui Thom attribue un statut privilégié :

> Déjà Aristote avait bien vu que la science ne devait s'occuper que de phénomènes "naturels", c'est-à-dire de phénomènes qui se présentent "le plus souvent" ($\omega\sigma\ \epsilon\pi\iota\ \tau o\ \pi o\lambda\upsilon$) ; les autres phénomènes, relevant de l'accident, en seront en principe exclus ... [T6]

3.1 Le général et le particulier : Poincaré

Dans sa thèse [R], Anne Robadey étudie l'usage des notions de "cas général" et "cas particulier", voire "exceptionnel", dans la formulation et la démonstration de certains "théorèmes" de Poincaré. Un exemple, vivement critiqué par Morse, est l'affirmation que sur une surface convexe, le nombre de géodésiques fermées plongées est impair. Cette affirmation, évidemment fausse pour la sphère ronde, est cependant vraie "en général". Aujourd'hui, la notion de situation générale, ou "générique" a pris une grande importance et une variété de significations techniques, du point générique des géomètres algébristes aux stratifications des espaces fonctionnels et aux développements parallèles des notions de généricité topologique ou probabiliste. Sur ce dernier point, on retrouve Poincaré dont le "théorème de récurrence"[3] et les profondes considérations sur le calcul des probabilités ont donné naissance à la théorie ergodique : dès qu'un système dynamique atteint un certain niveau de complexité, chercher à décrire précisément toutes les solutions n'a plus de sens et l'on ne peut qu'essayer de donner des propriétés de la plupart d'entre elles.

[3] Voir également la section 5.1

3.2 Transversalité, stratifications : Thom

Chez Thom, cette exclusion des cas trop particuliers prend une forme très aboutie dans l'étude des espaces de fonctions indéfiniment dérivables (C^∞) sur une variété. La seule propriété de l'ensemble des zéros d'une telle fonction qui vaille pour toutes les fonctions C^∞ est que cet ensemble est fermé. Autrement dit, à ce niveau de généralité, rien ne distingue l'ensemble des fonctions C^∞ de l'ensemble des fonctions continues. Mais si l'on accepte d'ignorer un sous-ensemble de codimension infinie (i.e. un sous ensemble que n'importe quelle famille de fonctions à un nombre fini de paramètres pourra éviter au prix d'une éventuelle petite perturbation), on peut affirmer que l'ensemble des zéros possède une structure donnant prise à une étude géométrique[4]. C'est la *théorie des singularités* (voir [C1]) qu'à la suite de Morse et Whitney, Thom développe à l'aide des deux outils techniques majeurs que sont le *lemme de transversalité dans les espaces de jets* et la notion de *stratification.* La classification des singularités de germes de fonctions C^∞ de petite codimension est à l'origine de la *Théorie des catastrophes* (voir [Pe]) mais l'échec d'une telle classification dans le cas des systèmes dynamiques, où aucune relation d'équivalence n'est satisfaisante, fait qu'une description probabiliste qui oublie les trajectoires exceptionnelles s'impose dans la plupart des cas.

3.3 Orbites ou pseudo-orbites ? : Laskar

Dans le cas du système solaire, on est tenté par la description précise de "la solution" qui nous concerne mais le modèle étant imparfait et de plus "sensible aux conditions initiales", un tel projet est illusoire. C'est peut-être là une illustration de la deuxième phrase de Thom : Jacques Laskar a montré les limites absolues de prédiction qui résultent de la nature même des équations, et ce quel que soit le raffinement du modèle ; cette tension entre rigueur et sens est à l'origine du rejet par la revue *Nature* (puis par la revue *Science*) de l'article [L] où il indiquait à l'aide d'une construction de pseudo-orbites du système séculaire la possibilité que l'orbite de Mercure croise celle de Venus au bout d'un temps de l'ordre de 3,5 milliards d'années .

> at some times, the orbit of Mercury crosses the orbit of Venus. This lasts a few thousand years, and during that time, the two planets can experience a close encounter which can lead to the escape of Mercury or to collision. [L]

Des calculs plus récents avec les équations complètes montrent que c'est la collision de Mercure avec Venus ou avec le Soleil qui serait alors la plus probable. L'éditeur lui opposait le fait qu'il ne calculait pas de "vraies" orbites, oubliant que sur des durées de cet ordre un tel calcul perdait toute signification. Paradoxalement, l'insignifiant eut été ici de ne calculer qu'une seule solution!

[4]. . . en fait une structure algébrique, ce qui tempère quelque peu la sévérité de la dichotomie posée dans la citation qui ouvre la section 2.2.

3.4 Information et probabilité : Shannon

Soit $A = \{A_1, \cdots, A_r\}$ un alphabet fini muni des probabilités $\{p_1, \cdots, p_r\}$. On considère l'espace de probabilité $(A^{\mathbb{N}^*}, P_{p_1,\cdots,p_r})$ (ou $(A^{\mathbb{Z}}, P_{p_1,\cdots,p_r})$) des suites de tirages *indépendants* de lettres de cet alphabet. La définition $h = \sum_{i=1}^{r} p_i \log \frac{1}{p_i}$ de l'entropie de Shannon est un raffinement de celle, $\tilde{h} = \log r$ (c'est-à-dire $\tilde{h} = \frac{1}{n} \log N_n$ où N_n est le nombre total de messages de longueur n), donnée auparavant par Hartley. Les deux ne coïncident que lorsque les lettres de A sont équiprobables mais le premier théorème de Shannon, simple conséquence de la loi des grands nombres, montre qu'elles ne diffèrent en fait que par la prise en compte, dans la définition de Shannon, des seuls messages "signifiants" (mieux vaut dire "typiques"), en nombre de l'ordre de e^{nh}, qui sont eux (approximativement) équiprobables et sont les seuls que l'on aura une probabilité non négligeable de rencontrer (voir par exemple [C4]). Misha Gromov a fait de cette remarque un outil de preuve, ramenant des démonstrations au cas "équiprobable", techniquement plus simple.

Bien entendu, et c'est ce qui rendait Thom injuste à l'égard de la "Théorie de l'information", celle-ci est en fait une "Théorie mathématique de la communication" (titre original de l'article fondateur de Shannon), aucun lien n'existant entre l'information, c'est-à-dire l'entropie et le contenu signifié du message.

4 ... ou les détails trop précis

La citation de [T6] ouvrant la section 3 se poursuit ainsi :

> ... Chez les Modernes, imbus de description mathématique, cette même distinction réapparaît avec la distinction classique : "Signal-Bruit". Il n'existe, c'est bien connu, aucun critère intrinsèque permettant, dans un ensemble de données expérimentales, de séparer ce qui va constituer le "Signal" (considéré comme objet scientifiquement recevable), du résidu numérique, qu'on rejettera dans un "Bruit" rebelle à l'analyse. Le signal provient toujours d'une nomologie préexistante, c'est-à-dire d'un ensemble de règles mathématiques censées être valables pour la description des faits considérés. [T6]

On en revient à la question du langage. C'est ce que disait déjà Poincaré en montrant le caractère conventionnel de la considération du groupe des déplacements dans la description des mouvement d'un "solide" : nommer demande qu'on oublie des détails mais rend signifiant.

> Quand l'expérience nous apprend qu'un certain phénomène ne correspond pas du tout aux lois indiquées, nous l'effaçons de la liste des déplacements. Quand elle nous apprend qu'un certain changement ne leur obéit qu'approximativement, nous considérons ce changement, par une convention artificielle, comme la résultante de deux autres changements composants. Le premier composant est regardé comme un déplacement satisfaisant rigoureusement aux lois dont je viens de parler, tandis que

> le second composant, qui est petit, est regardé comme une altération qualitative. Ainsi nous disons que les solides naturels ne subissent pas seulement de grands changements de position, mais aussi de petites flexions et de petites dilatations thermiques.

et en conclusion :

> Tout comme la catégorie de l'espace représentatif, le concept général de groupe est une forme de notre entendement et le groupe des déplacements relève d'une suite de décisions conventionnelles qui adaptent, dans un équilibre réfléchi, notre expérience à la catégorie : En résumé, les lois en question ne nous sont pas imposées par la nature, mais sont imposées par nous à la nature. Mais si nous les imposons à la nature, c'est parce qu'elle nous permet de le faire. Si elle offrait trop de résistance, nous chercherions dans notre arsenal une autre forme qui serait pour elle plus acceptable. [P1]

5 Du faux lorsqu'il se révèle fécond

> C'est seulement parce qu'on accepte le risque de l'erreur qu'on peut récolter de nouvelles découvertes. ([T4]).

Mettant entre parenthèses les problèmes de fondements, les mathématiciens s'accordent généralement sur le sens du prédicat "faux", qu'il qualifie une assertion (existence d'un contre-exemple) ou une démonstration (implication incorrecte ou non prouvée). Peut-on alors appliquer la phrase ci-dessus aux mathématiques ? Sans doute, mais avec prudence : une démonstration fausse peut être féconde dans la mesure où, bien que ne conduisant pas au résultat attendu (et en particulier si celui-ci est faux), sa structure peut fournir un échafaudage, un tremplin à partir duquel approfondir le problème posé.

5.1 Une erreur célèbre de Poincaré

Un exemple célèbre, typique de ce que Thom oppose à l'insignifiant, est la faute que fait Poincaré dans la version initiale de son mémoire de 1889 *Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique* (voir par exemple [BG, C2, C3, Y]). Poincaré pensait avoir montré que dans le problème restreint circulaire plan des trois corps les variétés stable et instable de certains couples d'orbites périodiques hyperboliques coincident, ce qui aurait impliqué la stabilité, alors qu'elles ne coincident en fait que formellement, i.e. à tous les ordres de la théorie des perturbattions. La découverte de leurs intersections (intersections hétéroclines), transverses mais avec un angle exponentiellement petit en fonction du petit paramètre de masse est dans une grande mesure à l'origine de la (bien mal nommée) théorie du chaos. La façon dont Poincaré a cherché à rétablir une forme de stabilité en donnant un rôle prépondérant à son théorème de récurrence, précurseur de la thérie ergodique, et à la *stabilité à la Poisson* qu'il implique, est finement analysée dans la thèse déjà citée d'Anne Robadey [R].

5.2 Questions d'échelle ou : quand l'insignifiant devient signifiant

N'oublions pas cependant que la diffusion due à ces intersections hétéroclines d'angle exponentiellement petit ne se manifeste sensiblement qu'au bout d'un temps très long (théorie de Nekhoroshev) et qu'en conséquence elle n'empêche nullement une stabilité pratique pendant un certain temps. Finalement, la preuve erronée de Poincaré joue un peu le rôle tenu en physique par une théorie devenue caduque mais qui reste fondamentale en ce qu'elle est une approximation dans les échelles qui nous sont familières de théories plus élaborées : l'attraction newtonienne à distance et la mécanique classique, bien que "fausses" en tant que théories physiques, sont toujours le soubassement de notre compréhension de la mécanique relativiste qui, à notre échelle, n'en est qu'une petite perturbation. C'est exactement ce que dit Poincaré dans [P2] :

> Pour conclure, il serait prématuré, je crois, malgré la grande valeur des arguments et des faits érigés contre elle, de regarder la Mécanique classique comme définitivement condamnée. Quoi qu'il en soit d'ailleurs, elle restera la mécanique des vitesses très petites par rapport à la vitesse de la lumière, la mécanique donc de notre vie pratique et de notre technique terrestre. Si cependant, dans quelques années, sa rivale triomphe, je me permettrai de vous signaler un écueil pédagogique que n'éviteront pas nombre de maîtres, en France tout au moins. Ces maîtres n'auront rien de plus pressé, en enseignant la mécanique élémentaire à leurs élèves, que de leur apprendre que cette mécanique-là a fait son temps, qu'une mécanique nouvelle, où les notions de masses et de temps ont une toute autre valeur, la remplace ; ils regarderont de haut cette mécanique périmée que les programmes les forcent à enseigner et feront sentir à leurs élèves le mépris qu'ils lui portent.
>
> Je crois bien cependant que cette Mécanique classique dédaignée sera aussi nécessaire que maintenant et que celui qui ne la connaîtra pas à fond ne poura comprendre la Mécanique nouvelle.

Renversons le point de vue : je viens de dire que la preuve erronnée de Poincaré a été extrêmement féconde mais qu'un temps très long est nécessaire pour que les effets qu'elle excluait se manifestent. Asymptotiquement, ces effets deviennent cependant prépondérants et l'on peut s'étonner qu'un phénomène qui ne se voit à aucun ordre de la théorie des perturbations ait une telle importance. Petit n'est donc pas synonyme d'insignifiant : tout est question d'échelle : de temps dans le cas de Poincaré, de vitesse pour la relativité, de taille pour la mécanique quantique. Plus récemment, les travaux de Jacques Laskar évoqués dans la section 3.3 ont montré que les petites perturbations dues à l'interaction des planètes (mais aussi aux effets de marée, à la relativité, etc ...), pourraient conduire dans quelques milliards d'années à des collisions planétaires. Bien entendu, ces travaux n'auraient pas pu exister sans les ellipses de Kepler, la mécanique newtonienne ... et les ordinateurs.

L'analyse des intersections hétéroclines, commencée par Poincaré à la suite de son erreur, poursuivie en particulier par Birkhoff (dynamique symbolique) et Smale (le célèbre modèle du "fer à cheval") est remarquable en ce qu'elle pénètre, via la géométrie, dans le mécanisme de mouvements "transitoires", plus difficiles à traquer que les comportements asymptotiques (i.e. en temps infini). Il reste que le mathématicien, contrairement au physicien ou au biologiste, reste en général assez peu sensible à la notion d'échelle (une exception : les spécialistes d'analyse non-standard et, aujourd'hui, les informaticiens).

5.3 Une erreur de Thom

Au début des années 1970, Thom soumet à la prestigieuse revue *Inventiones Mathematicæ* un article intitulé : *Sur la monodromie associée à un point critique isolé d'une fonction holomorphe.* L'assertion principale de l'article, à savoir la finitude de la monodromie d'une singularité isolée d'hypersurface analytique complexe est fausse[5] et l'article, accepté dans un premier temps, est finalement rejeté ; il circule cependant et l'utilisation topologique originale qui y est faite de la notion classique de *courbe polaire* (Poncelet, Plücker pour les courbes projectives planes) dans le cadre des singularités d'hypersurfaces complexes a joué un rôle important dans les travaux sur les singularités (Lê Dũng Tráng, Bernard Teissier).

5.4 D'autres erreurs fécondes

En 1895, Poincaré publie *Analysis Situs*, texte dans lequel sont introduits les concepts fondamentaux de ce qu'on nomme aujourd'hui la "Topologie algébrique" : homologie, nombres de Betti, groupe fondamental, caractéristique d'Euler-Poincaré, etc ... Dans sa démonstration de la "dualité de Poincaré", basée sur la notion d'intersection, il suppose qu'une sous-variété de codimension p est toujours l'intersection de p hypersurfaces, erreur qui sera relevée par Heegard et conduira Poincaré à donner dans les deux premiers suppléments à son mémoire une nouvelle démonstration de son théorème de dualité basée sur la notion de triangulations duales (voir [PPP]), tout en posant des questions fondamentales qui ne seront résolues que bien plus tard. La version moderne du théorème, qui fait intervenir la notion de cohomologie et donne un fondement rigoureux à la théorie de l'intersection dont était parti Poincaré, ne sera formulée que dans les années 1930. Analysant ce texte dans [D], Dieudonné conclut :

[5] L'erreur de Thom provenait de l'affirmation que chaque composante irréductible de la courbe polaire donne les mêmes invariants ; un article de Norbert A'Campo, envoyé indépendamment à la même revue et d'abord refusé, puis accepté, donnait un contre-exemple à la finitude de la monodromie dans le cas non irréductible.

> Thus ends this fascinating and exasperating paper, which in spite of its shortcomings, contains the germ of most of the developments of homology during the next 30 years.

Ajoutons que le deuxième supplément contient une autre erreur remarquablement féconde (la caractérisation de la sphère de dimension 3 par sa seule homologie) qui, une fois corrigée par un magnifique contre-exemple donné par Poincaré lui-même dans le cinquième supplément, deviendra la "conjecture de Poincaré". Résolue en 2002 par Grigori Perelman, celle-ci a suscité un développement remarquable de la topologie ....

Le "théorème" de Dulac sur la finitude du nombre de cycles limites d'un champ de vecteurs polynomial dans le plan est également un exemple intéressant pour lequel le lecteur se reportera à la jolie conférence [G].

5.5 Des dogmes utiles

> Ainsi, de même que le savant ne peut se désintéresser complètement d'un fait "a priori" rejeté comme "accidentel", il ne doit pas non plus abandonner certaines affirmations à caractère général, en raison du fait qu'elles sont empiriquement fausses parce qu'elles admettent de nombreuses exceptions. Considérons à titre d'exemple, deux principes scientifiques reconnus inexacts, mais que la Science ne peut se payer le luxe d'ignorer : le *principe de Curie* en Physique ; la *loi de récapitulation* en Biologie. [T6]

Le premier dit que *Toute symétrie des causes se retrouve dans les effets*, le deuxième que *Tout embryon, au cours de son développement passe par tous les stades adultes de ses ancêtres.*

Un autre exemple important est le *dogme central de la biologie moléculaire* (Francis Crick 1958) : affirmer que l'information va toujours de l'ADN à l'ARN était faux (existence chez les retrovirus d'une transcriptase inverse, pouvant rétrotranscrire l'ARN viral en ADN) mais cette simplification conceptuelle a permis des avancées fondamentales de la biologie moléculaire.

> J'ai écrit un jour : Ce qui limite le Vrai, ce n'est pas le Faux, mais l'insignifiant. Mais il y a aussi le Faux limité, entouré par le Vrai, le principe erroné qui est au centre d'une auréole de vérités. Je ne serais pas éloigné de voir en ce Faux Générateur du Vrai l'essence même de la scientificité. [T6]

Eh bien, ne peut-on ranger dans cette catégorie le principe cher à Thom de *généricité de la stabilité structurelle*, principe qui, s'il est vrai (dans un sens topologique) pour les applications différentiables, devient erroné lorsqu'on cherche à lui donner un sens précis dans le monde des systèmes dynamiques, mais cependant principe oh combien porteur de sens.

6 Même pas faux !

Ce jugement, attribué à Pauli, comme quoi la rigueur n'exclut pas l'insignifiance, Thom l'étend à la science tout entière :

> (...) si la science progresse, c'est en quelque sorte par définition. Alors que l'art et la philosophie ne progressent pas nécessairement, une discipline qui ne peut que progresser est dite scientifique. De là on conclura que le progrès scientifique, s'il est inévitable, ne peut être le plus souvent qu'illusoire. [T1]

Belle invitation à faire un pas de côté ... fût-ce au prix de l'erreur ?

Remerciements

Merci à Jacques Féjoz, Nathan Hara et Leo Bernus pour des discussions animées à la cantine de l'Observatoire ; à Luc Blanchet pour la citation de Pauli ; à Daniel Bennequin pour m'avoir fait part de certaines réserves, en particulier en ce qui concerne mes craintes quant à l'évolution formaliste des mathématiques ; à Shanzhong Sun de m'avoir indiqué l'article [RS] et à Jean-Michel Kantor de m'avoir signalé [H] ; à Jean Schneider pour de nombreux commentaires et une chaleureuse défense de l'algèbre ; à Norbert A'Campo, Lê Dũng Tráng et Bernard Teissier pour des précisions historiques sur l'article de Thom sur la monodromie cité en 5.3 ; à Jacques Laskar pour des précisions sur son article de 1994 cité en 3.3. Enfin, merci à Thierry Paul dont l'invitation à parler dans son séminaire *Phenomath* est à l'origine de la première version de ces quelques pages ...

... et merci à toi, Jean, pour toutes ces années d'amitié et de discussions sous l'ombre tutélaire de René Thom.

References

[BG] J. Barrow-Green *Poincaré and the three-body problem. History of mathematics*, vol. 11. American Mathematical Society, Providence (1997)

[Cha] G. Châtelet *L'enchantement du virtuel, mathématique, physique, philosophie*, édition de Charles Alunni et Catherine Paoletti, Éditions Rue d'Ulm, 2010

[C1] A. Chenciner *Singularités des fonctions différentiables : la théorie mathématique et ses applications*, Encyclopædia Universalis

[C2] A. Chenciner *Une promenade dans les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste*, Gazette des Mathématiciens, 134, Octobre 2012 `http://smf4.emath.fr/Publications/Gazette/2012/134/`

[C3] A. Chenciner *Poincaré and the Three-Body Problem*, Séminaire Poincaré (Bourbaphy) XVI (2012) in *Poincaré 1912–2012*, pp. 1-102, Birkhauser 2013 `http://www.bourbaphy.fr/novembre2012.html`

[C4] A. Chenciner *La force d'une idée simle : hommage à Claude SHANNON à l'occasion du centenaire de sa naissance*, Gazette des Mathématiciens $n^0$152, (avril 2017) 16-22

[D] A. Dieudonné *A History of Algebraic and Differential Topology, 1900 - 1960*, Birkhäuser 1989

[G] E. Ghys *Le rôle des erreurs dans le développement des mathématiques (l'exemple de l'histoire mouvementée des cycles limites)*, conférence à l'ENS Lyon le jeudi 03 mai 2001. http://www.ens-lyon.fr/asso/groupe-seminaires/seminaires/voirsem.php?id=eghys

[H] M. Harris *Mathematics without Apologies : Univalent Foundations: ÒNo Comment.Ó*, https://mathematicswithoutapologies.wordpress.com/2015/05/13/univalent-foundations-no-comment/

[La] F. Laudenbach *René Thom and an anticipated h-principle.* in *Geometry in history* 469– 491, Springer (2019).

[L] J. Laskar *Large-scale chaos in the solar system*, Letter to the Editor, Astronomy and Astrophysics, 287, L9–L12 (1994) http://adsabs.harvard.edu/full/1994A%26A...287L...9L

[P1] H. Poincaré *On the foundations of geometry*, The Monist, 1898 http://www.jstor.org/stable/27899007?seq=1#page_scan_tab_contents On trouve le texte original de Poincaré sur le site http://www.mathkang.org/cite/confA01.html

[P2] H. Poincaré *La mécanique nouvelle*, conférence à l'Association française pour l'avancement des sciences, congrès de Lille, 1909

[Pe] J. Petitot *La théorie des catastrophes*, Encyclopædia Universalis

[PPP] P. Popescu Pampu *La dualité de Poincaré*, http://images.math.cnrs.fr/La-dualite-de-Poincare.html

[R] A. Robadey *Différentes modalités du travail sur le général dans les recherches de Poincaré sur les systèmes dynamiques*, thèse Paris 7 et Observatoire de Paris, Janvier 2006 https://halshs.archives-ouvertes.fr/tel-00011380/

[RS] S. Roberts *In Mathematics, Mistakes Aren't What They Used To Be*, in Nautilus 024 "Error', May 07 2015 http://nautil.us/issue/24/error/in-mathematics-mistakes-arent-what-they-used-to-be

[Ru] B. Russell *Mysticism and Logic and Other Essays*, Longmans, Green and Co, London, 1918

[T1] R. Thom *La science malgré tout*, Encyclopædia Universalis, Organum, 1973 (copyright 1968)

[T2] R. Thom *Les mathématiques "modernes": une erreur pégagogique et philosophique ?*, L'âge de la science, vol. III n^0 3, pp. 225-242, 1970

[T3] R. Thom *Le rôle de la topologie dans l'analyse sémantique*, Symposium international de Sémantique, Urbino, juillet 1971, réédité dans Modèles athématiques de la morphogénèse1, 10-18(1974), pp. 314-319

[T4] R. Thom, Les deux voies de la théorie des catastrophes, conférence faite à Chicago le 19 juin 1976

[T5] R. Thom *Les racines biologiques du symbolique* 1976, édité dans Circé (1978), pp. 40-51

[T6] R. Thom, *Entre la fécondité du Faux et l'insignifiance du Vrai : la voie étroite de la Science...*, Colloque de l'Academia dei Lincei, Roma, octobre 1989

[T7] R. Thom *Relativité du Vrai, Relativisme de l'Intelligible*, Epistemologia, 15 (1), 1991 pp. 3-20

[T8] R. Thom *Prédire n'est pas expliquer*, Eshel 1991

[T9] R. Thom *Liberté et déterminisme : une conciliation ?*, conférence prononcée à Spolete en juillet 1993

[Y] J.C. Yoccoz *Une erreur féconde du mathématicien Henri Poincaré. Le prix en l'honneur des 60 ans du roi Oscar et la découverte des orbites homoclines*, Conférence à la BNF (13 avril 2005), SMF, Gazette des mathématiciens 107, 2006, p. 19–26 `http://lettre-cdf.revues.org/1103?lang=en` et `https://vimeo.com/100212125`