Le problème des N corps et le système solaire

Si la matière de deux globes qui gravitent l'un vers l'autre est homogène à égales distances de leurs centres : le poids de l'un de ces globes vers l'autre sera réciproquement comme le quarré de la distance qui est entre leurs centres (Isaac Newton, Philosophiæ naturalis Principia Mathematica Liber tertius Propositio VIII Theorema VIII, traduction de la Marquise du Chastelet).
Ce théorème, qui permet de remplacer une boule massive à symétrie sphérique par sa masse totale concentrée en son centre, donne une légitimité physique ou du moins astronomique au "Problème des N corps". Etudié par les mathématiciens, à commencer par Newton lui-même, depuis plus de trois siècles et à l'origine de grands pans des mathématiques, le problème s'énonce ainsi : déterminer les mouvements dans l'espace de N masses ponctuelles exerçant l'une sur l'autre une force attractive proportionnelle au produit de leurs deux masses et inversement proportionnelle au carré de leur distance. Le problème des deux corps a pour solutions les mouvements qu'avaient décrits Kepler. Celui des trois corps présente déjà la plupart des difficultés, considérables, du problème général. A la fois motivation première et test impitoyable, l'observation du système solaire a accompagné et provoqué les progrès de l'analyse mathématique, des premiers doutes liés au mouvement de la Lune à la découverte par le calcul de Neptune, jusqu'à la confirmation expérimentale de la relativité générale par l'avance "anormale" du périhélie de Mercure. Les corrections apportées par la relativité générale étant cependant très faibles, c'est aujourd'hui encore essentiellement la théorie newtonienne qui sert de cadre à l'étude des exoplanètes et à celle du comportement à très long terme du système solaire. Les travaux de Jacques Laskar ont ainsi montré l'existence d'instabilité dans l'évolution future du système sur des centaines de millions d'années, tout en fournissant aux géologues les données sur l'évolution passée avec lesquelles ils ont établi, par corrélation stratigraphique, une nouvelle échelle de temps du néogène (de -23 millions d'années à aujourd'hui).

1. Des ellipses qui s'ignorent. Le système formé du Soleil, de Jupiter et de Saturne contient la plus grande partie de la masse du système solaire et il n'est pas déraisonnable de le considérer comme isolé. Si l'on oublie également l'influence de Jupiter sur Saturne ou de Saturne sur Jupiter, chacune de ces planètes décrira une ellipse keplerienne de foyer le Soleil. Dans la théorie newtonienne, cela revient à faire comme si les masses des planètes étaient toutes égales à zéro. En effet, l'accélération $\vec{\gamma}$ d'un corps de masse m soumis à la force $\vec{f}$ est donnée par la fameuse équation $\vec{f} = m\vec{\gamma}$ et la force due à l'attraction newtonienne par un corps de masse m' est proportionnelle au produit mm' (identité des masses inerte et gravifique). L'accélération, proportionnelle à $mm'/m = m'$ est donc indépendante de m et reste en particulier définie lorsque $m = 0$.

Pour connaître les mouvements de Jupiter et Saturne dans ce cadre, il suffit donc d'une part de déterminer la forme et la position dans l'espace de deux ellipses, d'autre part de déterminer le mouvement de chacun des corps sur son ellipse et en particulier sa période de révolution. Si les deux périodes T_J et T_S étaient commensurables (ou“résonnantes”), i.e. s'il existait des nombres entiers a et b tels que $aT_S = bT_J = T$, les positions des planètes seraient les mêmes aux instants t et $t + T$, Jupiter et Saturne ayant accompli respectivement a et b révolutions complètes. Le mouvement du système serait alors qualifié de “périodique”. Si tel n'est pas le cas, on parlera d'un mouvement “quasi-périodique” à deux périodes. En fait, Jupiter et Saturne sont presque en résonance (avec $a = 2$ et $b = 5$) mais pas tout-à-fait.

2. Faire varier les ellipses : le problème séculaire.

Les masses des planètes ne sont pas nulles mais elles sont petites. Jupiter elle-même ne représente qu'environ le millième de la masse du Soleil. Ne sachant pas trouver de formules exactes pour décrire les mouvements d'un système de trois corps, les astronomes et les mathématiciens ont développé des méthodes qui fournissent des formules approchées et permettent de calculer des éphémérides sur d'assez longues périodes. Ces méthodes sont basées sur l'idée suivante : les modifications des trajectoires kepleriennes ne commencent à se faire sentir significativement que sur des durées beaucoup plus grandes que les périodes de révolution kepleriennes. Il est donc naturel d'introduire à chaque instant l'ellipse “osculatrice” à l'orbite planétaire : c'est celle que suivrait la planète si, les actions gravitationnelles des autres planètes cessant à cet instant de se faire sentir, elle n'était plus soumise qu'à l'attraction du soleil. On peut alors, en seconde approximation, considérer que la planète effectue son mouvement sur cette ellipse osculatrice dont le demi-grand axe et les “éléments” (excentricité, inclinaison sur l'écliptique, position du périhélie, c'est-à-dire du point sur l'ellipse le plus proche du soleil, position du nœud, c'est-à-dire du point où l'ellipse rencontre le plan de de l'écliptique) varient lentement au cours des siècles. Ces variations à très long terme ou “séculaires” sont calculées en ne tenant compte que de la moyenne des forces exercées par les planètes au cours d'une révolution sur leur ellipse osculatrice, c'est-à-dire de l'attraction qu'exercerait une ellipse massive dans laquelle la masse serait répartie au prorata de la vitesse de parcours. Enfin, cette description se complique encore si, comme c'est le cas pour le couple Jupiter-Saturne, les périodes propres de révolution de plusieurs planètes sur leurs ellipses osculatrices sont proches d'une résonance (c'est le fameux problème des “petits dénominateurs”). Cette “théorie des perturbations”, est développée depuis la fin du dix-huitième siècle par Euler, Lagrange (méthode de variation des constantes) et Laplace (première “démonstration” de la “stabilité” du Système solaire), puis notamment dans le cas planétaire par LeVerrier, Gylden, Lindstedt et, d'un point de vue théorique, Poincaré, qui en montre les limites (i.e. la divergence des séries qu'utilisent les astronomes) dans ses célèbres *Méthodes nouvelles de la mécanique céleste*. Dans l'approximation de Lagrange et Laplace, on néglige dans les développements en série tous les termes dans lesquelles les masses planétaires interviennent à une puissance supérieure à 1. On obtient un système d'équations différentielles dont les inconnues sont les éléments (définis ci-dessus) de n ellipses de foyer le soleil et de demi-grand axes fixés. Au voisinage d'un mouvement circulaire et coplanaire des n planètes, les excentricités et les inclinaisons ont en première approximation de petites variations quasi-périodiques, alors que les positions angulaires des périhélies et de nœuds ont des variations proportionnelles au temps. Il s'introduit donc de nouvelles périodes (50 000 à quelques millions d'années) dans la description approchée des solutions. Malheureusement, il s'introduit aussi des termes "séculaires", polynomiaux en temps qui, sur une trop longue période, rendent caduque une telle description.

3. La difficile théorie de la Lune.

C'est Newton qui a donné les premiers résultats sur le problème des trois corps, en étudiant les perturbations extraordinairement complexes du mouvement de la Lune par l'attraction du lointain Soleil. C'est maintenant le rapport de la distance Terre-Lune à la distance Terre-Soleil qui, étant d'environ de 1 sur 400, fait que l'influence du Soleil sur la Lune peut être, malgré sa masse, négligée en première approximation par rapport à celle de la Terre; le rapport de la masse de la Lune à celle de la Terre étant d'environ 1 sur 80 , on peut aussi négliger l'influence de la Lune sur le mouvement de la Terre. Cette dernière décrira alors une ellipse de foyer le Soleil et la Lune une ellipse de foyer la Terre. Mais il s'agit là d'une très mauvaise approximation. Citons Laplace : *Ainsi le Soleil agit inégalement et suivant des directions différentes sur la Terre et sur la Lune, et de cette diversité d'actions il doit résulter dans le mouvement lunaire des inégalités dépendantes des positions respectives du Soleil et de la Lune. C'est dans leur recherche que consiste le fameux problème des trois corps, dont la solution rigoureuse surpasse les forces de l'Analyse, mais que la proximité de la Lune, eu égard à sa distance au Soleil, et la petitesse de sa masse par rapport à celle de la Terre permettent de résoudre par approximation. Cependant l'Analyse la plus délicate est nécessaire pour démêler tous les termes dont l'influence est sensible (Exposition du Système du Monde, Livre IV, Chapitre V).* Fondamentale à l'époque pour la détermination de la longitude en mer, la théorie de la Lune a mobilisé les meilleurs mathématiciens, en particulier Clairaut, d'Alembert, Euler, Laplace, Lagrange, Jacobi, Delaunay, Hill, Poincaré, Birkhoff. L'ENCADRE 1 évoque le problème du mouvement de l'apogée, qui engendra l'une des plus sérieuses remises en cause de la loi de Newton.

ENCADRE 1 (la crise de l'apogée)

L'apogée de l'orbite lunaire est le point le plus éloigné de la Terre atteint par la Lune au cours d'une révolution. Elle avance d'environ $3^0 3'$ par révolution lunaire, ou encore environ 44^0 par an, c'est-à-dire un tour complet en moins de 9 ans. Ce n'est donc pas un "petit" effet ! Or, dans les années 1747-1748, Euler, Clairaut et d'Alembert s'accordent pour trouver que la théorie newtonienne de l'attraction ne fournit que la moitié de cette quantité. Le 15 novembre 1747, Clairaut ira même jusqu'à soutenir devant l'Académie des Sciences qu'un terme en l'inverse du cube de la distance doit être ajouté à l'attraction newtonienne pour rendre compte de ce fait, ce qui déplaira fortement à Buffon pour qui une loi de la nature doit être simple. Ce n'est que le 17 mai 1749 que, s'apercevant que le calcul des perturbations "au deuxième ordre" fournit un terme de taille comparable et explique donc pleinement le mouvement de l'apogée, il rétractera ses thèses. Notons que Newton avait donné le résultat du calcul au premier ordre mais sans l'expliciter. Il semble même que dans ses manuscrits se trouve un calcul au deuxième ordre qui donne une valeur plus proche de la réalité. Je ne peux que renvoyer au passionnant volume 6, série I (le premier paru) des œuvres de d'Alembert (éditions du CNRS, 2002).

---

4. L'équilibre relatif de Lagrange et les astéroïdes troyens de Jupiter

Ce qui distingue avant tout le problème des trois corps du problème des deux corps, c'est que, contrairement à un segment, un triangle possède une forme. Il peut être équilatéral, rectangle, isocèle, ou même scalène, comme on dit dans les lycées. Ce n'est donc pas un hasard si les premières solutions du problème des trois corps avec masses arbitraires – et en fait les seules qui soient explicites – sont les solutions "homographiques", découvertes par Euler et Lagrange, dans lesquelles *... les trois Corps pourraient se mouvoir en sorte que leurs distances fussent toujours constantes,ou gardassent au moins entre elles des rapports constants (Lagrange, Avertissement de l'Essai sur le Problème des trois Corps, 1772).* Ce n'est pas plus un hasard si, dans un tel mouvement, le mouvement de chaque corps est keplerien. Intimement liées aux symétries du problème (translation, rotation) et à l'homogénéïté de la force newtonienne, ces solutions ne peuvent exister que pour des configurations très spéciales, appelées aujourd'hui "configurations centrales". Leur détermination lorqu'il y a plus de trois corps est un problème majeur.

Un superbe exemple de la pertinence de la théorie est donné par les astéroïdes troyens de Jupiter (figure), qui se répartissent au voisinage de l'orbite de Jupiter et plus précisément au voisinage des deux points qui forment avec le Soleil et Jupiter un triangle équilatéral. Les masses de Jupiter et de ces satellites sont suffisamment petites pour que s'applique un résultat de stabilité des solutions de Lagrange, stabilité qui peut être considérée comme une explication satisfaisante de la présence d'un grand nombre de ces satellistes dans cette région (environ 1800 connus aujourd'hui).

5. Neptune, la confirmation, Mercure le trublion.

Le meilleur témoin du raffinement atteint par les méthodes de perturbation est la prédiction en 1845 par Adams et 1846 par LeVerrier de l'existence de la planète Neptune à l'aide du seul calcul pour expliquer le mouvement "troublé" d'Uranus. Mais cet éclatant succès clôt une époque. LeVerrier, qui s'est lancé peu après dans une grande entreprise de rénovation des tables du mouvement des planètes, essaiera de rééditer son exploit en faisant l'hypothèse d'une planète intra-Mercurielle, qu'il nomme Vulcain, pour expliquer un supplément de $38''$ par siècle dans l'avance du périhélie de Mercure. Un tel angle peut sembler négligeable : il représente environ 1mm à 8 mètres et n'est pas distinguable à l'œil nu ; de plus, il est beaucoup plus petit que l'effet total, environ $500''$ par siècle, des perturbations dues aux autres planètes, mais il résiste à l'analyse. On sait que c'est la relativité générale qui l'expliquera en fournissant la valeur 42"9, très proche de l'estimation améliorée que Newcomb avait donnée en 1898. (voir l'ENCADRE 2)

ENCADRE 2 (La relativité générale explique l'avance anormale du périhélie)

On peut, avec une très bonne approximation, considérer que la précession relativiste s'ajoute simplement à celle due à l'influence des autres planètes et donc oublier celles-ci. Le modèle est alors celui d'une particule test (Mercure) dans un champ de gravitation à symétrie sphérique (celui du Soleil) : dans l'espace-temps très faiblement "courbé" par la masse du soleil, Mercure suit une géodésique (analogue des lignes de plus court chemin sur une surface). Einstein avait utilisé la méthode des approximations successives pour résoudre les équations du mouvement ; on dispose aujourd'hui de la solution exacte de Schwarzschild qui, décrivant un trou noir, est cependant pertinente à l'extérieur du soleil. Au niveau de l'espace, qu'on supposera avoir 2 dimensions au lieu de 3, on peut heuristiquement se représenter le mouvement de Mercure comme celui d'une petite bille sur une surface plane légèrement déformée par une boule pesante (figure...).

Mais Mercure a plus d'un tour dans son sac et pourrait bien, comme l'a suggéré Jacques Laskar, s'échapper hors du système solaire au bout d'un temps de l'ordre de cinq milliards d'années. La démarche de Laskar, pour montrer qu'un tel scénario est compatible avec les équations de la gravitation, est directement inspirée par la théorie qualitative des systèmes dynamiques et plus précisément par une technique de construction d'orbites à partir de "pseudo-orbites". Il intègre numériquement le système séculaire pendant cinq cents millions d'années à partir de cinq données initiales très rapprochées (la position de la Terre différant de dix mètres entre deux d'entre elles). De ces cinq évolutions, il ne conserve que celle pour laquelle l'excentricité de Mercure est la plus grande. Puis il recommence en prenant cinq données initiales très proches de l'état final de la solution choisie. En répétant cette opération une dizaine de fois, il réussit à faire "s'échapper" Mercure du système solaire à la suite d'une trop proche rencontre avec Vénus (une autre possibilité est la collision avec Vénus). Il montre enfin que, si un tel événement se produisait, le système solaire y gagnerait une plus grande stabilité.

6. Passé et futur du système solaire ?

La description qui émerge depuis les travaux de Poincaré est d'une grande complexité. Sur des temps très longs, en fait immensément longs dans le cas de Jupiter et Saturne, mais de l'ordre de cent millions d'années pour les "petites planètes" telle la Terre, Laskar a montré (pas au sens mathématique, mais d'une façon cependant très convaincante) que le mouvement n'est pas ausi régulier qu'il y paraît ; il "diffuse" très lentement, le "chaos" se manifestant par l'"oubli des conditions initiales" : il est impossible par exemple de faire une quelconque prédiction sur la position qu'aura le périhélie de l'une de ces "petites planètes" dans cent millions d'années. Qui plus est, les responsables de cet état de fait peuvent être identifiées, ce sont certaines "résonances séculaires", par exemple $2(g_4 - g_3) - (s_4 - s_3) \approx 0$, où g_3, g_4 désignent les fréquences (inverses des périodes) de précession des périhélies des ellipses décrites par la Terre et par Mars, et s_3, s_4 celles de leurs nœuds. Interprétés dans le cadre classique comme des dénominateurs anormalement petits qui font diverger les calculs, ces termes reçoivent ici une interprétation géométrique : ils causent des transitions imprévisibles entre rotation (i.e. variation monotone) et libration (i.e. petites oscillations autour d'une valeur fixe) pour les combinaisons d'angles correspondant à ces combinaisons de fréquences.
Un des plus beaux résultats en théorie des Systèmes dynamiques, la théorie KAM (Kolmogorov-Arnold-Moser), qui résout en partie le problème des petits dénominateurs, assure cependant l'existence d'une grande proportion de mouvements réguliers (i.e. quasi-périodiques) si les excentricités et les inclinaisons sont initialement extrêmement petites mais le résultat ne vaut que pour des masses planétaires extrêmement petites et ne contredit donc pas les affirmations qui précèdent.
Cette complexité intrinsèque des solutions du problème des N corps limite la prédiction à la fois dans l'avenir et dans le passé. Dans le futur, c'est le problème de la stabilité qui est posé ; dans le passé c'est celui de la datation géologique, évoqué dans l'introduction.

7. On a de la chance. *…Or, les êtres doués de raison et habitant une planète dans un système d'étoile double seraient franchement déshérités par la nature en comparaison avec l'Humanité de la planète Terre…; d' éventuels chercheurs auront mis un temps fou à expliquer son mouvement et n'arriveront probablement jamais à comprendre qu'il est régi par une loi toute simple qui tient compte de l'attraction de la planète par chacune des étoiles* (V. Béletski, opus cité, premier essai, paragraphe 1).

Et alors, peut être que la méthode des moindres carrés de Gauss, la théorie de Cauchy des fonctions de variables complexes, la Topologie algébrique de

Poincaré, la théorie ergodique, les invariants intégraux et bien d'autres n'auraient jamais été inventées (découvertes ?). Peut être le lecteur comprend-t-il maintenant pourquoi Birkhoff pouvait écrire en 1927 : *The problem of three or more bodies is one of the most celebrated in mathematics, and justly so... (Dynamical Systems, Chapter IX, paragraph 1).* Mais peut-être préférera-t-il s'en remettre à la prophétique description que, par la voix de Robert Desnos, Rrose Selavy fait de l'attraction : *Les lois de nos désirs sont des dés sans loisirs.*

Pour en savoir plus :

V. Béletski, *Essais sur le mouvement des corps cosmiques*, Ed. Mir 1986

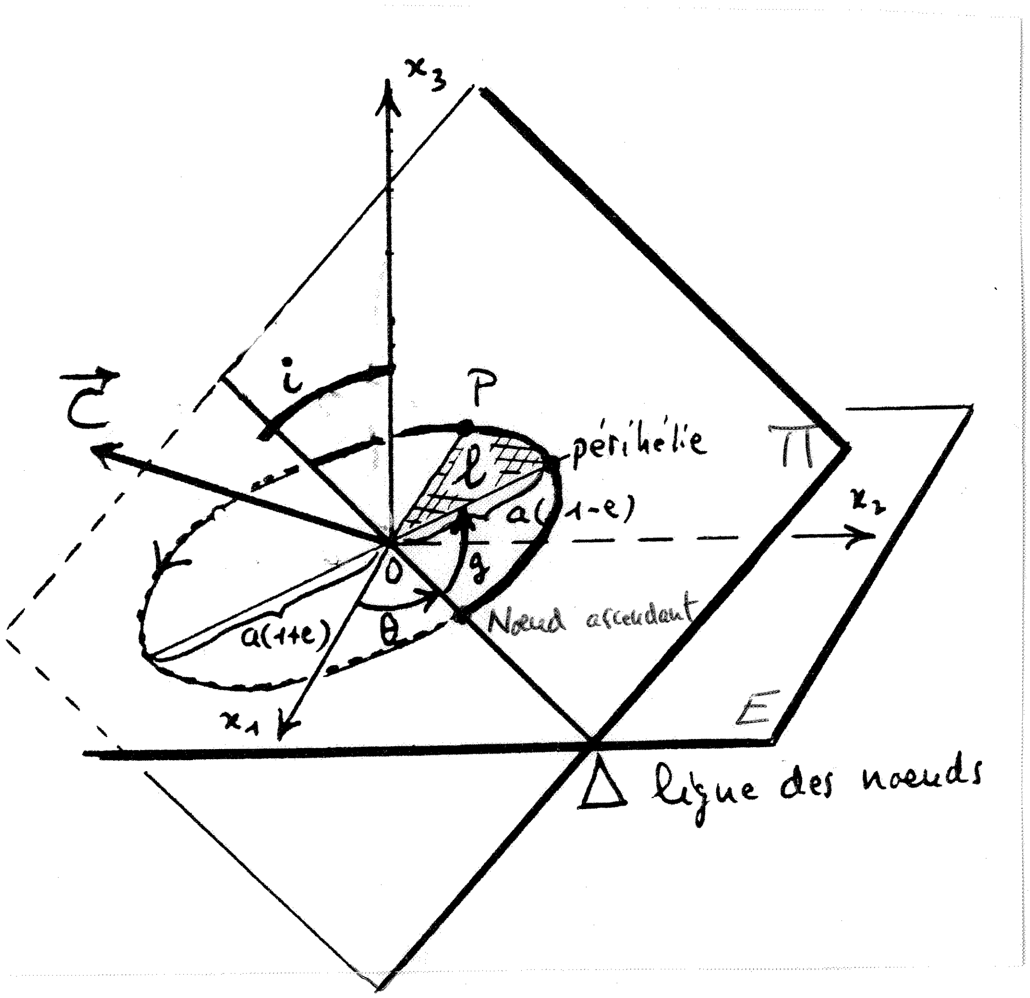
M. Berry, *Principles of cosmology and gravitation*, Cambridge University press 1976

Desnos, *Œuvres*, sous la direction de M.C. Dumas, Quarto, Gallimard 1999

J. Laskar, *La stabilité du système solaire*, dans le livre *Chaos et déterminisme*, sous la direction de A. Dahan Dalmenico, J.L. Chabert & K. Chemla, Seuil 1992

B. Morando, articles *Le Verrier* & *Mécanique céleste* dans l'*Encyclopédie Universalis.*

J.P. Verdet *Une histoire de l'Astronomie*, Seuil 1990

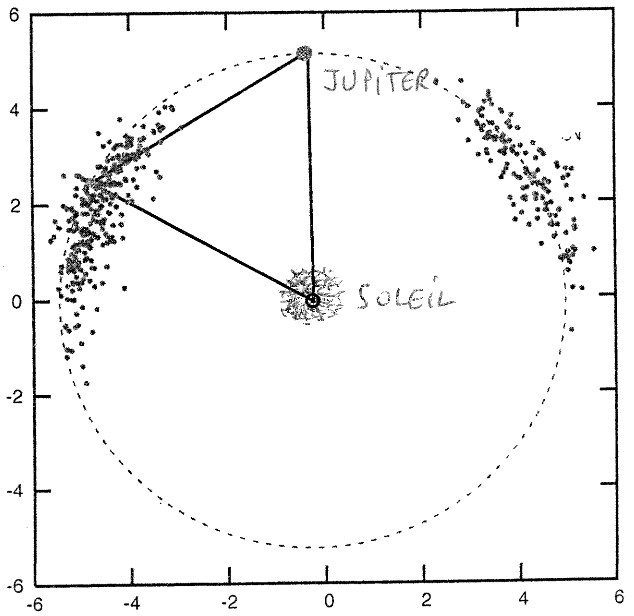


e excentricité
i inclinaison
a ½ grand axe

P position de la planète
E plan de l'écliptique (horizontal)
Π plan de l'orbite de la planète
($\vec{C}$ est perpendiculaire à ce plan)

Les satellites troyens de Jupiter (2)

Pour le copyright de la figure, demander à son auteur Philippe ROBUTEL
robutel@imcce.fr

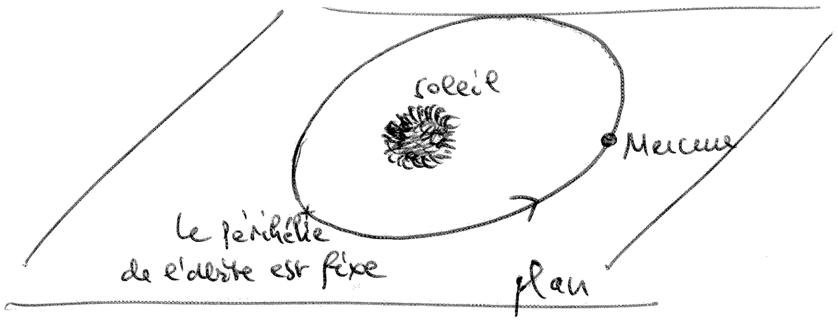


Les satellites troyens de Jupiter se répartissent au voisinage des 2 points qui forment avec S et J un triangle équilatéral.

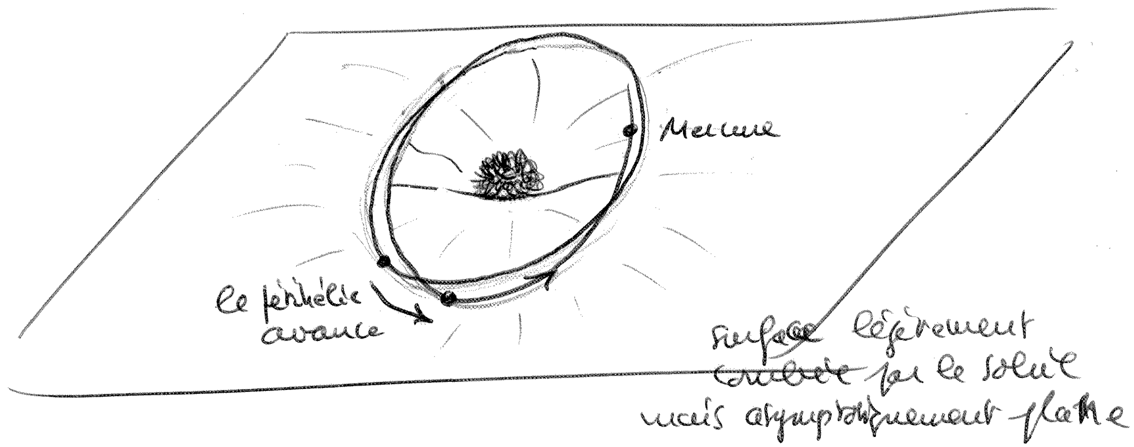
La figure en représente 420
On en connait aujourd'hui ~ 1800
le premier a été découvert en 1906 par Max Wolf

Attraction de Mercure par le Soleil
(on oublie l'influence des autres planètes)

Gravitation newtonienne



Gravitation einsteinienne



(la figure n'est bien entendu pas réaliste :
excentricité et avance du périhélie
sont très exagérés.)