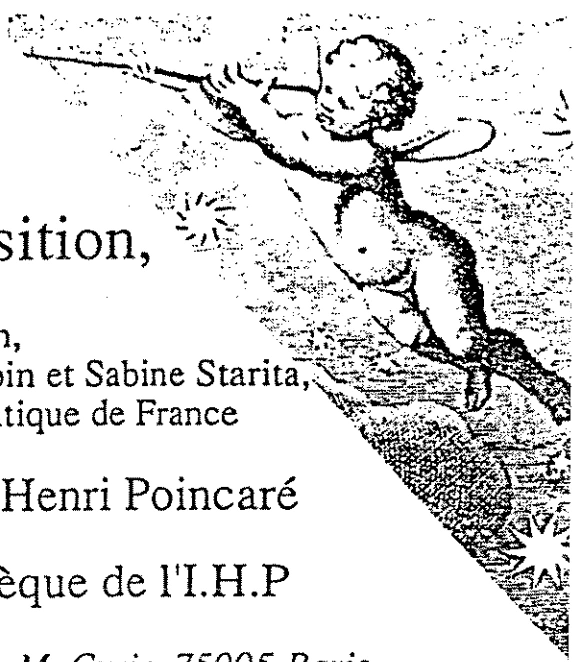
CETTE EXPOSITION EST PRÉSENTÉE À NOUVEAU à la BIBLIOTHÈQUE de l'I.H.P. à partir du 16 octobre 2003



la mécanique céleste.... une exposition,

conçue par Alain Chenciner, et réalisée par Hélène Nocton,
avec la collaboration de Dominique Dartron, Antoine Gobin et Sabine Starita,
à l'occasion de la Journée Annuelle de la Société Mathématique de France

du 8 au 18 juin 1996 dans le hall de l'Institut Henri Poincaré

du 20 juin au 31 décembre 1996 à la bibliothèque de l'I.H.P

11, rue P. & M. Curie, 75005 Paris

L'exposition comprend douze panneaux. Les huit premiers, de format 70cm × 145cm et numérotés de 1 à 8, sont consacrés à l'évolution globale du Problème des n corps; les quatre autres, de format 90cm × 110cm et numérotés de I à IV, sont plus spécifiquement dédiés à la stabilité du Système Solaire. Le texte ci-dessous fournit les références de l'essentiel du contenu des panneaux, ainsi que les textes d'accompagnement. Cette exposition a été réalisée à l'occasion de l'Assemblée annuelle de la Société Mathématique de France du 8 juin 1996, dont le thème était la Mécanique Céleste. Les huit premiers panneaux concernent la conférence d'Alain Chenciner (publication de la S.M.F.), les quatre autres celle de Michel Herman.

Panneau 1. De l'attraction des globes homogènes ··· aux équations de Lagrange.

Portraits de Newton et Lagrange

Isaac Newton *Philosophiæ naturalis Principia Mathematica* Liber tertius Propositio VIII Theorema VIII : *"Si la matière de deux globes qui gravitent l'un vers l'autre est homogène à égales distences de leurs centres : le poids de l'un de ces globes vers l'autre sera réciproquement comme le quarré de la distance qui est entre leurs centres"* (traduction de la Marquise du Chastellet).

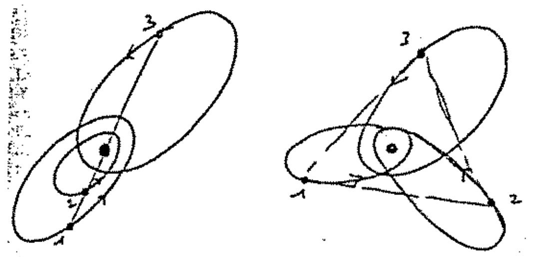
Joseph-Louis Lagrange *Remarques Générales sur le Mouvement de Plusieurs Corps qui s'attirent mutuellement en raison inverse des carrés des distances.* Nouveaux Mémoires de l'Académie royale des Sciences et Belles-Lettres de Berlin, année 1777 *in* volume 4 des œuvres (page 403).

Panneau 2. Mouvements homographiques (les seules solutions explicites du Problème des trois corps). Les solutions alignées d'Euler et la solution équilatérale de Lagrange.

Portraits d'Euler et Lagrange

Leonard Euler *De motu rectilineo trium corporum se mutuo attrahentium* Novi commentarii academiæ scientarum Petropolitanæ 11 (1765), 1767, p. 144-151 *in* œuvres, Seria Secunda tome XXV Commentationes Astronomicæ (page 286).

Joseph-Louis Lagrange *Essai sur le Problème des Trois Corps.* Prix de l'Académie Royale des Sciences de Paris, tome IX, 1772 *in* volume 6 des œuvres (page 292)



Panneau 3. Identité de Lagrange-Jacobi $\ddot{I} = 2U + 4H$ et théorème du viriel.

Portraits de Jacobi, Clausius et Poincaré

Carl Gustav Jacobi *Vorlesungen über Dynamik*, 1843, *in* volume VIII des Gesammelte Werke, deuxième édition Chelsea 1969 (pages 26,27).

Viriel : du latin *vis, viris* force. Viriel d'une force : nom donné par Clausius à l'expression $-\frac{1}{2}(Xx+Yy+Zz)$ pour une force de coordonnées (X, Y, Z) appliquée au point de coordonnées (x, y, z) (d'après Larousse).

Henri Poincaré *Leçons sur les Hypothèses Cosmogoniques*, 1911 (pages 90,91).

Harry Pollard *A Sharp Form of the Virial Theorem*, 1964

Panneau 4. Intégrales premières et symétries.

Portraits de Laplace, Lagrange, Cartan, Bruns et Poincaré

Premières intégrations directes du Problème des forces centrales ou Problème de Kepler, qui équivaut au Problème des deux corps lorsqu'on a fixé le centre de gravité. Jakob Herman découvre l'intégrale de Laplace $\vec{L} = -U\vec{r} + \vec{v} \wedge \vec{C}$, appelée vecteur de Runge-Lenz par les physiciens car redécouverte par Hamilton. C'est un vecteur dirigé vers le périhélie de l'orbite, de longueur proportionnelle à l'excentricité de celle-ci. Dans sa réponse caustique, Johann I. Bernouilli introduit la conservation de l'énergie.

Extrait d'une lettre de M. Herman à Monsieur Bernouilli, datée de Padoüe le 12. juillet 1710, Mémoires de l'Académie Royale des Sciences, 1710 (pages 682 à 685).

Extrait de la réponse de M. Bernouilli à M. Herman, datée de Basle le 7. Octobre 1710, Mémoires de l'Académie Royale des Sciences, 1710 (page 702).

L'existence de l'intégrale de Laplace rend manifeste la dégénérescence du Problème des deux corps. Elle correspond à une symétrie $O(4)$ (et non $O(3)$) après régularisation des collisions. Cette symétrie fut introduite par Fock au niveau quantique en 1935 (*Zeitschrift für Physik* 98, p. 145) et par Moser au niveau classique en 1970.

Jurgen Moser *Regularization of Kepler's Problem and the Averaging Method on a Manifold* Communications on Pure and Applied Mathematics, vol. XXIII, 1970 (page 609).

Jean-Marie Souriau *Géométrie globale du problème à deux corps*, Proceedings of the IUTAM-ISIMM Symposium on Modern Developments in Analytical Mechanics, Turin juin 1982, Atti della Academia delle Scienze di Torino, Supplemento al Vol. 117, 1983 (p.369).

Pierre-Simon Laplace *Traité de Mécanique Céleste*, an VII, *in* volume 1 des œuvres. Première partie, livre deuxième, p. 187 (intégrales des aires, intégrale de Laplace, intégrale de l'énergie, dans le cas de deux corps).

Joseph-Louis Lagrange *Mécanique Analytique*, 1788, *in* volume 11 des œuvres, page 281 (intégrales des aires dans le cas de n corps).

Elie Cartan *Leçons sur les invariants intégraux* (page 173) (transformations infinitésimales admises par les équations du problème des n corps. Cartan inclut la symétrie d'homothétie liée à l'homogénéité du potentiel).

Mais le problème des n corps n'est pas intégrable !

Non intégrabilité algébrique :

H. Bruns *Uber die Integrale des Vielkörper-problems* Acta Mathematica, volume 11, 1887 (page 1).

Correction de l'erreur de Bruns :

Henri Poincaré *Sur la Méthode de Bruns* Comptes-rendus de l'Académie des Sciences, tome 123, 28 décembre 1896 (page 1224).

Non-intégrabilité uniforme en un petit paramètre :

Henri Poincaré *Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste*, tome I, 1892 (page 253 et haut de la page 254).

Panneau 5. Les singularités existent-elles ? Mystère !

Portrait de Painlevé

Paul Painlevé *Leçons de Stockhom*, 1895, *in* volume 1 des œuvres (pages 787-788).

Hugo Von Zeipel *Sur les singularités du problème des n corps*, Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik, Band 4 (32), 13 mai 1908 (pages 2,3).

Richard McGehee *Von Zeipel's theorem on singularities in celestial mechanics*, Expositiones Mathematicæ 4, 1986 (page 335).

Panneau 6. Moment cinétique et collisions.

Portrait de Weierstrass

Weierstrass connaissait déjà en 1889 le résultat de Sundman : une collision de trois corps n'est possible que si le moment cinétique est nul.

Karl Weierstrass *Lettre à Mittag-Leffler* Acta Mathematica 35, 1912 (pages 55 à 58).

Karl F. Sundman *Mémoire sur le Problème des Trois Corps*, Acta Mathematica 36, 1913 (pages 1 et 151).

Panneau 7. L'allure finale...

Portraits de Chazy et Birkhoff

Jean Chazy *Sur l'allure du mouvement dans le Problème des trois corps quand le temps croit indéfiniment*, Annales de l'Ecole Normale Supérieure 39, 1922 (page 1).

George D. Birkhoff *Dynamical Systems*, American Mathematical Society Colloquium Publications, volume IX, 1927 (chapitre IX, pages 290-291).

V. M. Alexeev *Sur l'allure finale du mouvement dans le problème des trois corps*, Congrès Intern. des Math. vol. 2, 1970 (page 893).

K. Sitnikov *Existence of oscillatory motion for the three body problem*, Doklady 133(2), 1960 (page 303).

Christian Marchal, Don Saari *On the final evolution of the n body problem*, Journal of Differential Equations 20, 1976 (page 150).

Panneau 8. La solution d'un vieux problème.

Portrait de la variété de collision du problème collinéaire des trois corps

La variété de collision :

Richard McGehee *Triple collision in the collinear three body Problem*, Inventiones Mathematicæ 27, 1974 (page 217).

A l'infini en temps fini (4 corps sur R) :

John Mather, Richard McGehee Solutions of the collinear four body Problem which become unbounded in finite time, Springer Lecture Notes in Physics 38 (J. Moser editor), 1975 (page 573).

A l'infini en temps fini (N (grand) corps dans R^2) :

J.L. Gerver The existence of Pseudocollisions in the Plane, Journal of Differential Equations 89, 1991 (page 1–68).

A l'infini en temps fini (5 corps dans R^3) :

Zihong Xia *The existence of non collision singularities in newtonian systems*, Annals of Mathematics 135, 1992 (page 411).

Panneau I. STABILITE

⋯ De plus, on voit que celui qui a arrangé cet Univers, a mis les étoiles fixes à une distance immense les unes des autres, de peur que ces globes ne tombassent les uns sur les autres par la force de leur gravité (Isaac Newton *Scholie général* à la fin du troisième livre des *Principia*, page 175 de la traduction de la Marquise du Chastellet).

⋯ Car tandis que les Cometes se meuvent en tous sens dans des Orbes extrêmement excentriques, un Destin aveugle ne pouvoit jamais faire mouvoir toutes les Planetes en un même sens dans des Orbes concentriques, à quelques irrégularités près, de nulle importance, lesquelles peuvent provenir de l'action mutuelle que les Cometes et les Planetes exercent les unes sur les autres, et qui seront sujettes à augmenter jusqu'à ce que ce Système ait besoin d'être réformé (Isaac Newton *Traité d'Optique, sur la Lumière et les Couleurs*, Livre III, page 489 de la traduction de 1722).

1747 : premiers traités sur le Problème des trois corps, par Clairaut, d'Alembert, Euler (*portraits*).

Le Système Séculaire dans l'approximation du premier ordre en les masses planétaires, les excentricités et les inclinaisons :

Joseph-Louis Lagrange *Théorie des Variations Séculaires des Elements des Planètes*, Nouveaux Mémoires de l'Académie royale des Sciences et Belles-Lettres de Berlin, année 1781 *in* volume 5 des œuvres (page 126).

Pierre-Simon Laplace *Mémoire sur les inégalités Séculaires des Planètes et des Satellites*, *in* volume 11 des œuvres (pages 61 et 62).

Le Verrier découvrit qu'en poussant plus loin les développements en excentricité et inclinaison il trouvait une augmentation de $0''3231$ par an d'une certaine fréquence séculaire g_6 liée au couple Jupiter-Saturne, égale à $22''427$ par an $\cdots$

Urbain J. Le Verrier *Recherches Astronomiques*, Annales de l'Observatoire de Paris, tome II, 1856 (Chapitre IX, Inegalités Séculaires, p. 168).

$\cdots$ Mais Hill montrera que lorsqu'on tient compte des termes du deuxième ordre en les masses planétaires, cette même fréquence change de $5''$ par an à cause de la presque résonance $2-5$ entre les moyens mouvements de Jupiter et Saturne.

G.W. Hill *On the values of the eccentricities and longitudes of the perihelia of Jupiter and Saturn for distant epochs*, The Astronomical Journal Nr 395, Vol. XVII Nr 11 (page 81).

$\cdots$ Les personnes qui s'intéressent aux progrès de la Mécanique Céleste mais qui ne peuvent les suivre que de loin, doivent éprouver quelque étonnement en voyant combien de fois on a démontré la stabilité du Système Solaire (Henri Poincaré, *Sur la Stabilité du Système Solaire*, Revue Scientifique tome 9, 14 mai 1898, *in* volume 8 des œuvres, p.538).

Panneau II. INSTABILITE ?

Portraits de Poincaré à diverses époques

$\cdots$ Ainsi on peut satisfaire formellement aux équations qui définissent les variations séculaires par des séries trigonométriques $\cdots$ Ce résultat aurait été considéré par Laplace ou Lagrange comme établissant complètement la stabilité du Système Solaire. Nous sommes plus difficiles aujourd'hui parce que la convergence n'est pas démontrée. Le résultat n'en est pas moins important (Henri Poincaré *Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste*, tome II 1893, page 46).

Ce qui suit n'est pas K.A.M. mais la porte reste (timidement) ouverte :

Henri Poincaré *Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste*, tome II 1893 (Chapitre XIII Divergence des séries de M. Lindstedt, par. 149, pages 102-105).

Le théorème du retour, ancêtre de la Théorie Ergodique :

Henri Poincaré *Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste*, tome III 1899 (Chapitre XXVI Stabilité à la Poisson, pages 140-141).

S.D. Poisson *Mémoire sur les Inégalités séculaires des Moyens mouvemens des Planètes*, Lu à l'Institut, le 20 juin 1808, Journal de l'Ecole Polytechnique.

Spiru Haretu *Sur l'Invariabilité des Grands Axes des Orbites Planétaires*, Thèse soutenue le 20 (?) janvier 1878 à la Faculté des Sciences de Paris.

Panneau III. INSTABILITE

Portraits de Hadamard et de Duhem

··· Ce n'est pas tout : si le postulat (de Maxwell) était vrai, le Système Solaire serait instable; ··· Or si la stabilité du Système Solaire n'est pas démontrée, l'instabilité l'est moins encore et est même peu probable (Henri Poincaré *Sur la théorie cinétique des gaz, 1894, voir infra*)

Henri Poincaré *Sur la théorie cinétique des gaz*, Revue générale des Sciences pures et appliquées, t. 5, 1894 *in* œuvres volume X (page 256).

George D. Birkhoff *Proof of the ergodic theorem*, Proceedings of the National Academy of Sciences, December 1931, Vol. 17, pp. 656-660, *in* œuvres, tome 2 (pages 404-405).

Jacques Hadamard *Les surfaces à courbures opposées et leurs lignes géodésiques*, *in* œuvres, volume 2 (page 729).

Henri Poincaré *Sur les Lignes Géodésiques des Surfaces Convexes*, Transactions of the American Mathematical Society, t. 6, p. 237-274, juillet 1905, *in* œuvres, volume VI (pages 38-39).

Henri Poincaré *Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste*, tome III, 1899 (Solutions doublement asymptotiques, page 389).

George D. Birkhoff *Sur l'existence de régions d'instabilité en Dynamique*, Annales de l'Institut Henri Poincaré, 1932, Vol. 2, pp. 369-386, *in* œuvres, tome 2 (page 444).

··· Imaginons le front d'un taureau, avec les éminences d'où partent les cornes et les oreilles, et les cols qui se creusent entre ces éminences; mais allongeons sans limite ces cornes et ces oreilles, de telle façon qu'elles s'étendent à l'infini; nous aurons une des surfaces que nous voulons étudier. Sur une telle surface, les géodésiques peuvent présenter bien des aspects différents. Il est, d'abord, des géodésiques qui se ferment sur elles-mêmes. Il en est aussi qui, sans jamais repasser exactement par leur point de départ, ne s'en éloignent jamais infiniment; les unes tournent sans cesse autour de la corne droite, les autres autour de la corne gauche, ou de l'oreille droite, ou de l'oreille gauche; d'autres, plus compliquées, font alterner suivant certaines règles les tours qu'elles décrivent autour d'une corne avec les tours qu'elles décrivent autour de l'autre corne, ou de l'une des oreilles. Enfin, sur le front de notre taureau aux cornes et aux oreilles illimitées, il y aura des géodésiques qui s'en iront à l'infini, les unes en gravissant la corne droite, les autres en gravissant la corne gauche, d'autres encore en suivant l'oreille droite ou l'oreille gauche. Malgré cette complication, si l'on connaît avec une entière exactitude la position d'un point matériel sur ce front de taureau et la direction de la vitesse initiale, la ligne géodésique que ce point suivra dans son mouvement sera déterminée sans aucune ambiguïté. On saura très certainement, en particulier, si le mobile doit demeurer toujours à distance finie ou s'il s'éloignera indéfiniment pour ne plus jamais revenir. Il en sera tout autrement si les données initiales ne sont pas données mathématiquement, mais pratiquement; la position initiale de notre point matériel ne sera plus un point déterminé de la surface, mais un point quelconque pris à l'intérieur d'une petite tache; la direction initiale de la vitesse ne sera plus une droite définie sans ambiguïté, mais une quelconque des droites que comprend un étroit faisceau dont le contour de la petite tache forme le lien; à nos données initiales pratiquement déterminées correspondra, pour le géomètre, une infinie multiplicité de données initiales différentes ··· On aura beau augmenter la précision avec laquelle sont déterminées les données pratiques, rendre plus petite la tache où se trouve la position initiale du point matériel, resserrer le faisceau qui comprend la direction initiale de la vitesse, jamais la géodésique qui demeure à distance finie en tournant sans cesse autour de la corne droite ne pourra être débarassée de ces compagnes infidèles qui, après avoir tourné comme elle autour de la même corne, s'écarteront indéfiniment ··· (Pierre Duhem *La théorie physique, son objet, sa structure*, 1906).

Panneau IV. STABILITE ?

$\cdots$ Beaucoup de mes lecteurs auront vraisemblablement deviné qu'il s'agit essentiellement de rendre effective une idée déjà largement discutée dans la littérature de Mécanique Céleste, à savoir, la possibilité d'éviter les "dénominateurs anormalement petits" dans les calculs de perturbation des orbites. Cependant, contrairement à la théorie classique des perturbations, j'obtiens des résultats précis au lieu d'une conclusion sur la convergence de séries de telle ou telle approximation d'ordre fini (par rapport à θ). Ceci est dû au fait que, au lieu de calculer le mouvement perturbé sous des conditions initiales fixées, je modifie les conditions initiales elles-mêmes de façon à obtenir des mouvements avec des fréquences normales (au sens de la condition 2.8) λ_α à chaque instant lorsque θ varie $\cdots$ (Andrei N. Kolmogorov *Adresse au Congrès International des Mathématiciens d'Amsterdam*, 1954).

Carl Ludwig Siegel *On the iteration of analytic functions*, Annals of Mathematics, 1942 (première victoire sur les "petits dénominateurs").

Andrei N. Kolmogorov *O Sokhranienii ouslovno perioditcheskikh dvigenii pri malom izmienienii founksii gamiltona = Sur la conservation des mouvements conditionnellement périodiques lors d'un petit changement de la fonction de Hamilton*, Doklady Akademii Naouk CCCP, 1954, tome XCVIII, Nr 4 (pages 528,529).

Vladimir Arnol'd *Malie znamienatieli i probliemi oustoïtchivosti dvigenia v klassitcheskoï i niebiesnoï mekhanikie = Petits dénominateurs et problèmes de la stabilité du mouvement en Mécanique classique et céleste*, Ouspiekhi Matiematitcheskikh naouk XVIII, 6 (114), 1963 (p. 92, 150 et 151).

Jurgen Moser *On Invariant Curves of Area-Preserving Mappings of an Annulus*, Nach. Ak. Wiss. Gott. Math. Phys. Kl. 1962 (page 1).

INSTABILITE...

Vladimir I. Arnold *O nieoustoïtchivosti dynamitcheskikh sysiem so mnogimi stiepieniamu svobodi = Sur l'instabilité des Systèmes Dynamiques ayant beaucoup de degrés de liberté*, Doklady Akademii Naouk CCCP, 1964, Tom 156, Nr 1 (page 9).

Michel Hénon, Carl Heiles *The Applicability of the Third Integral Of Motion : Some Numerical Experiments*, The Astronomical Journal Vol. 69, Nr 1, february 1964 (page 75).

Gerald Jay Sussman, Jack Wisdom *Numerical Evidence That the Motion of Pluto Is Chaotic*, Science 241, 1988 (page 433).

Jacques Laskar *A numerical experiment on the chaotic behaviour of the Solar System*, Nature 338, 1989 (page 237).

Quelques panneaux manquants ...

Topologie des variétés intégrales du Problème des n corps

Configurations centrales de plus de trois corps

Solutions périodiques

Le Problème Restreint

etc..etc...etc...

P.S. Le livre *Chaos et déterminisme*, édité au Seuil en 1992 sous la direction de Amy Dahan Dalmedico, Jean-Luc Chabert et Karine Chemla, m'a été très utile dans la préparation de cette exposition : j'y ai trouvé en particulier les références à Leverrier et Hill du panneau I et le commentaire correspondant (article de Jacques Laskar), la réference à l'article de Poincaré sur la théorie cinétique des gaz dans le panneau III (article de Jean-Luc Chabert et Amy Dahan Dalmedico), et l'extrait de Duhem à la fin du même panneau (article de Jean-Luc Chabert). La référence à Jakob Herman qui ouvre le panneau 4 est donnée par Herbert Goldstein dans son article *More on the prehistory of the Laplace or Runge-Lenz vector*, Am. J. Phys. Vol. 44, Nr 11, November 1976, pp. 1123-1124.

Alain Chenciner