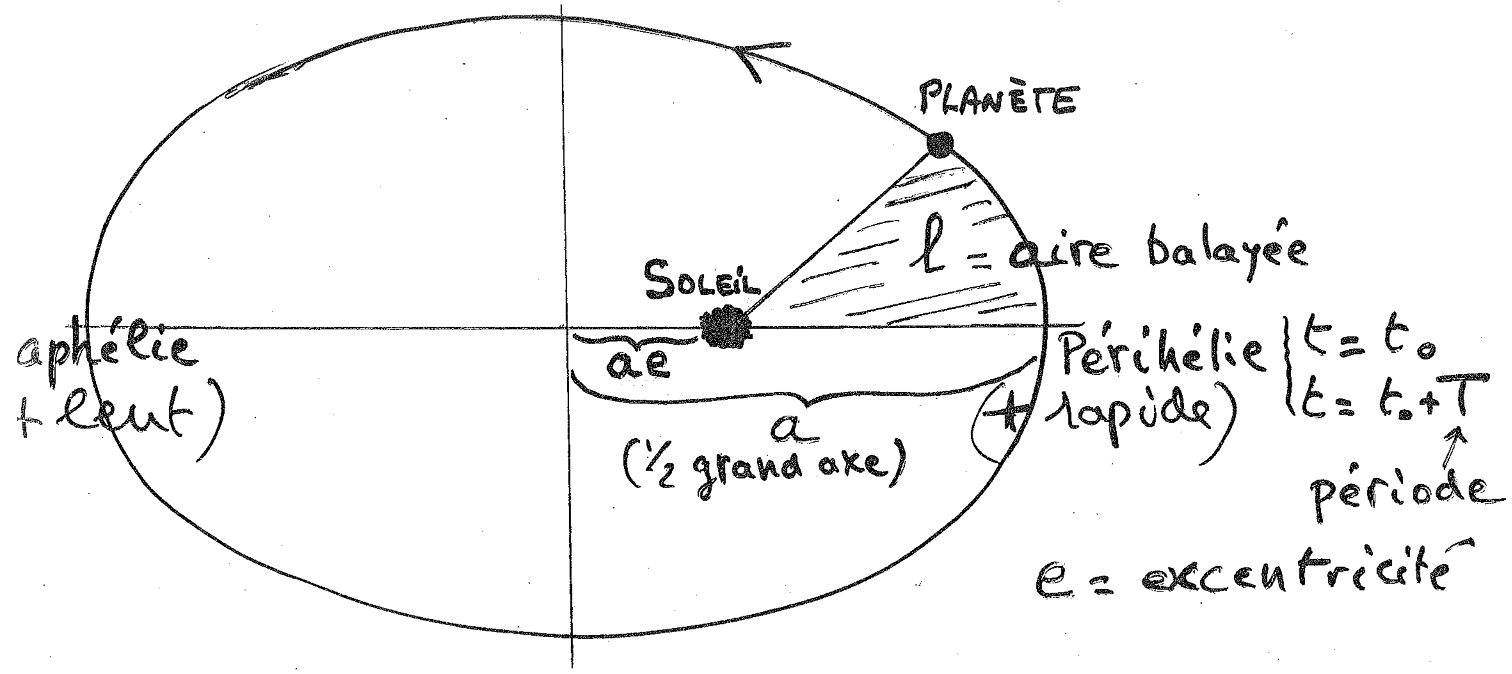
LE PROBLÈME DES TROIS CORPS

KEPLER



LOI 1 : ELLIPSES

LOI 2 : ℓ proportionnelle au temps t

ASTRONOMIA NOVA 1609

LOI 3 : T^2 proportionnelle à a^3

HARMONICE MUNDI 1619

ASTRONOMIA NOVA
ΑΙΤΙΟΛΟΓΗΤΟΣ,
SEV
PHYSICA COELESTIS,
tradita commentariis
DE MOTIBVS STELLÆ
MARTIS,
Ex obſervationibus G. V.
TYCHONIS BRAHE:

Juſſu & ſumptibus
RVDOLPHI II.
ROMANORVM
IMPERATORIS &c:

Plurium annorum pertinaci ſtudio
elaborata Pragæ,

A S^e. C^e. M.^tis S^e. Mathematico
JOANNE KEPLERO,

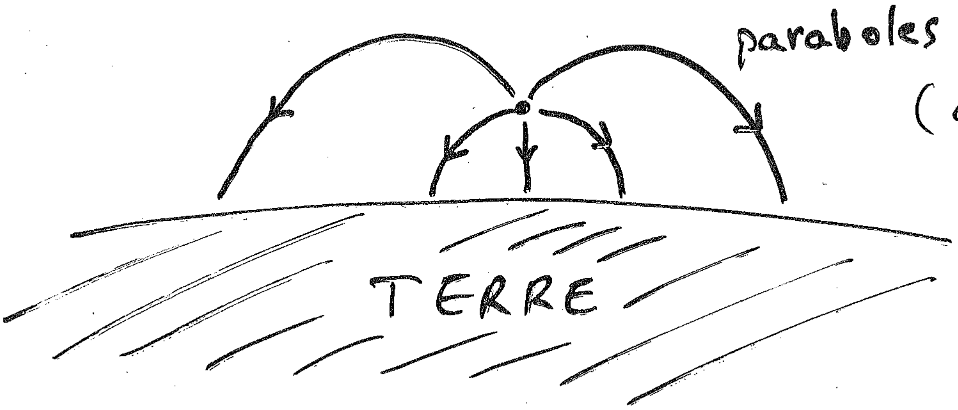
Cum ejusdem C^e. M.^tis privilegio ſpeciali
ANNO æræ Dionyſianæ clↃ IↃ c ix.


Tycho Brahe

GALILÉE

LAGRANGE : "La dynamique est la science des forces accélératrices ou retardatrices et des mouvemens variés qu'elles doivent produire. Cette science est due entièrement aux modernes, et Galilée est celui qui en a jeté les premiers fondemens" (in Mec. Anal. I, 221).

Chute des corps sur la terre



paraboles

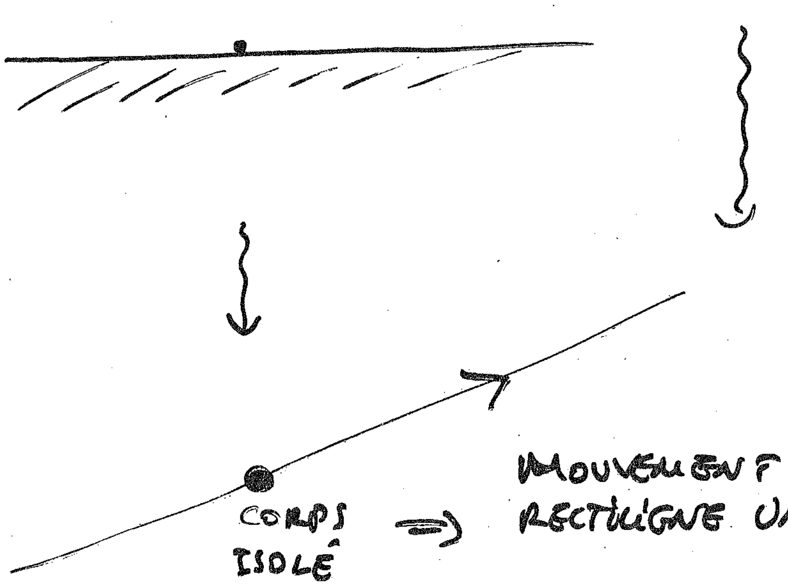
(accélération constante)

1638

DISCORSI E DIMOSTRAZIONI MATEMATICHE INTORNO A DUE NUOVE SCIENZE

Principe d'inertie

GALILÉE 1638
GASSENDI 1640
TORRICELLI 1644
DESCARTES 1644



⇒ MOUVEMENT RECTILIGNE UNIFORME

Portrait de Galilée peint par Justus Sustermans en 1636.

DISCORSI
E
DIMOSTRAZIONI
MATEMATICHE,

intorno à due nuoue ſcienze

Attenenti alla

MECANICA & I MOVIMENTI LOCALI,

del Signor

GALILEO GALILEI LINCEO,

Filoſofo e Matematico primario del Sereniſſimo
Grand Duca di Toſcana.

Con vna Appendice del centro di grauità d'alcuni Solidi.

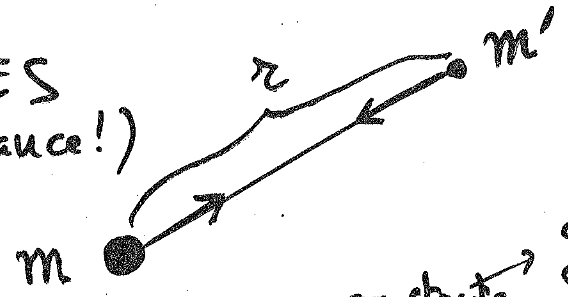
IN LEIDA,
Appreſſo gli Elſevirii. M. D. C. XXXVIII.

NEWTON

Attraction universelle

PRINCIPIA 1687

FORCES
(à distance!)

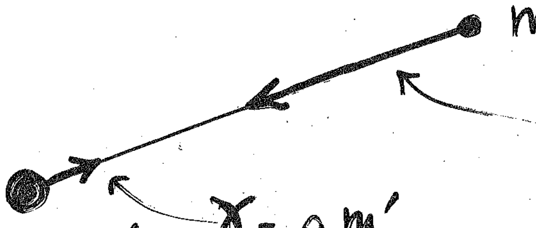


égales en grandeur
opposées en direction

constante → $g \frac{mm'}{r^2}$

ACCÉLÉRATIONS

$\vec{F} = m\vec{\gamma}$ (dans 1 repère <u>Galiléen</u>)



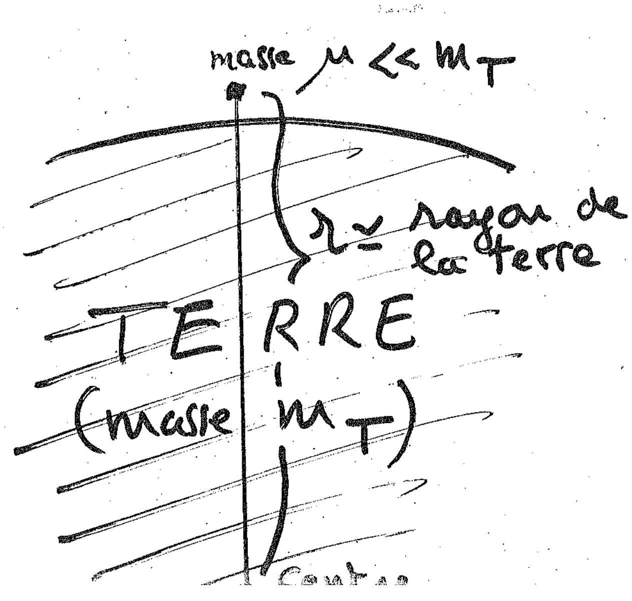
$\gamma = g\frac{m}{r^2}$

$m \gg m'$ $\gamma = g\frac{m'}{r^2}$

Isaac Newton <u>*Philosophiæ naturalis Principia Mathematica*</u> Liber tertius Propositio VIII Theorema VIII : *"Si la matière de deux globes qui gravitent l'un vers l'autre est homogène à égales distences de leurs centres : le poids de l'un de ces globes vers l'autre sera réciproquement comme le quarré de la distance qui est entre leurs centres"* (traduction de la Marquise du Chastellet).

$\Downarrow$

Loi de la chute des corps sur la terre



accélération
$\frac{g m_T}{r^2} \simeq$ cste

PHILOSOPHIÆ
NATURALIS
PRINCIPIA
MATHEMATICA.

Autore *J S. NEWTON*, *Trin. Coll. Cantab. Soc.* Matheseos Professore *Lucasiano*, & Societatis Regalis Sodali.

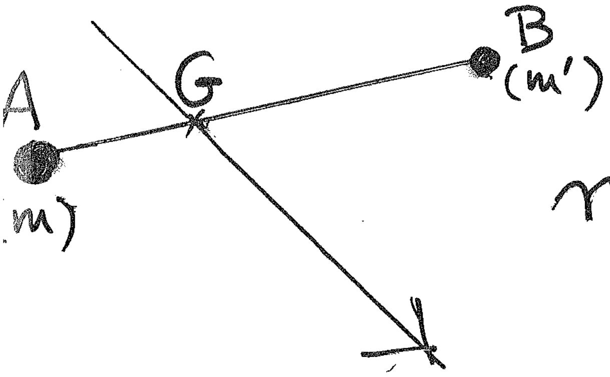
IMPRIMATUR.
S. PEPYS, *Reg. Soc.* PRÆSES.
Julii 5. 1686.

LONDINI,

Jussu *Societatis Regiæ* ac Typis *Josephi Streater*. Prostat apud plures Bibliopolas. *Anno* MDCLXXXVII.

LE PROBLÈME DES DEUX CORPS

Mouvement du centre de gravité :



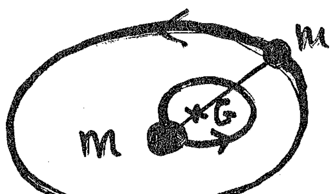
$$m\vec{GA} + m'\vec{GB} = \vec{0}$$

Aucune force ne s'exerce sur G

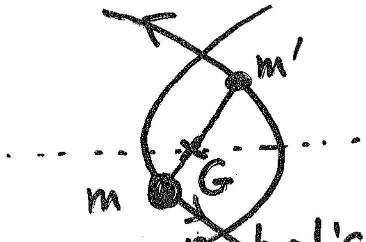
$\Downarrow$

G a un mouvement rectiligne uniforme

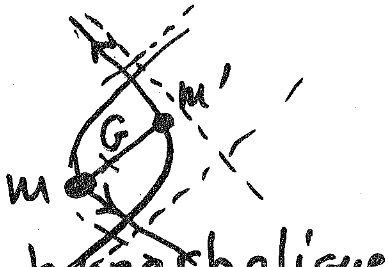
- Mouvement des corps dans un repère (galiléen) fixant G



elliptique

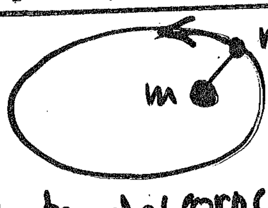


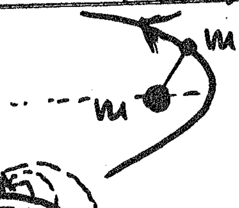
parabolique

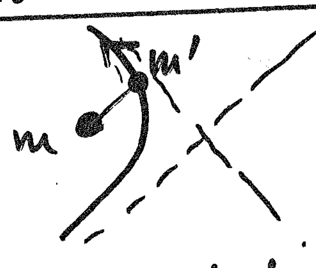


hyperbolique

- Mouvement d'un corps par rapport à l'autre

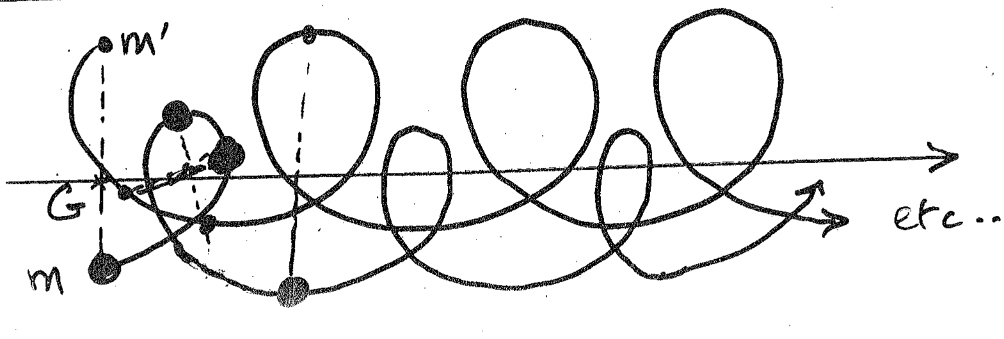






⇒ chute des corps sur la terre

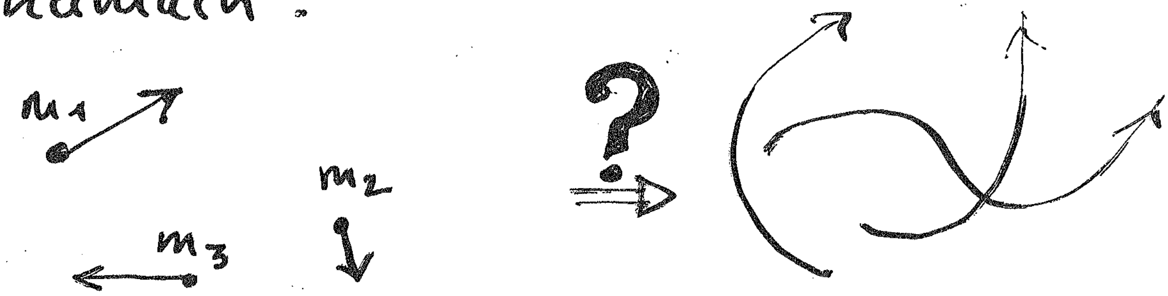
- Mouvement des corps dans 1 repère galiléen quelconque



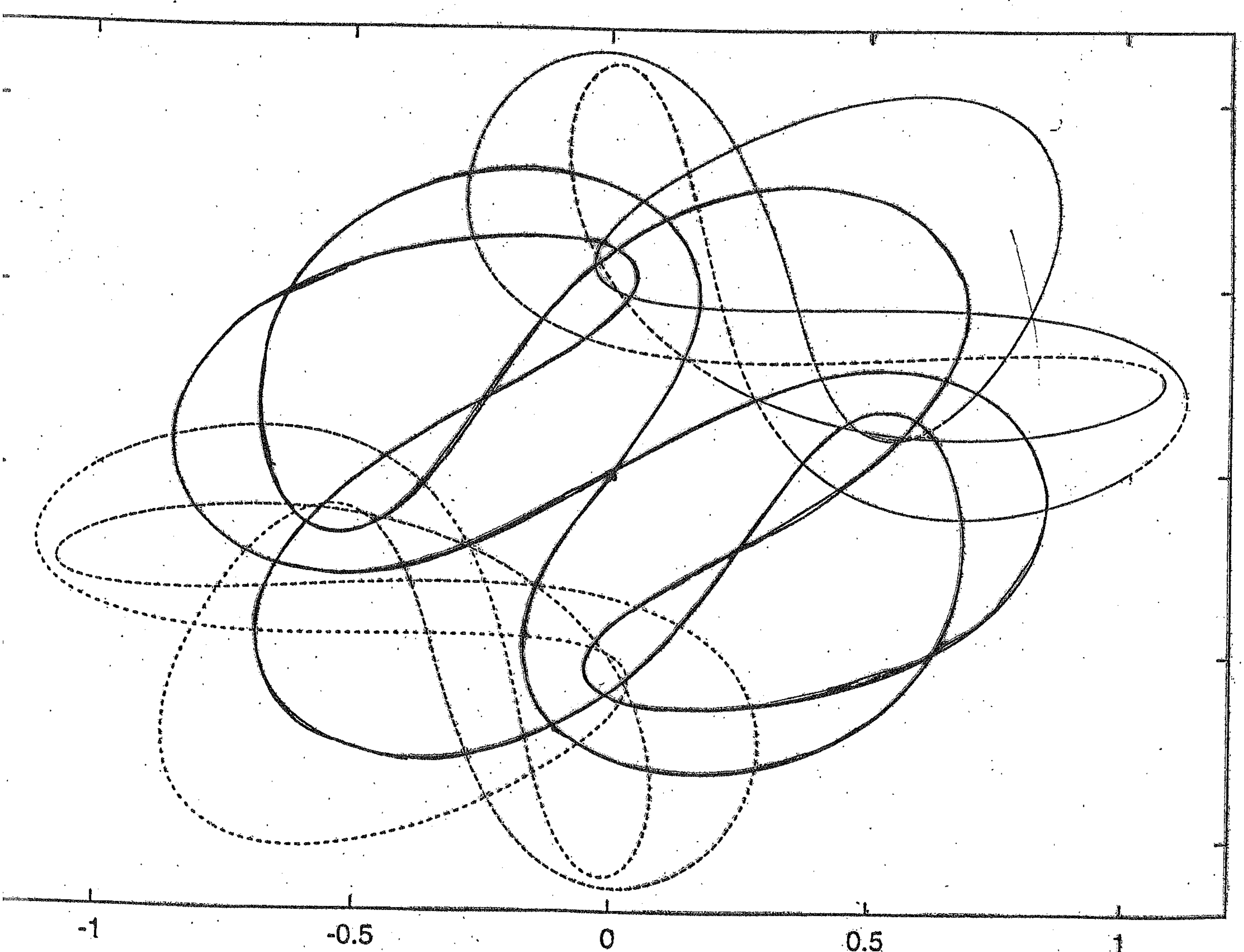
etc...

LE PROBLÈME DES TROIS CORPS

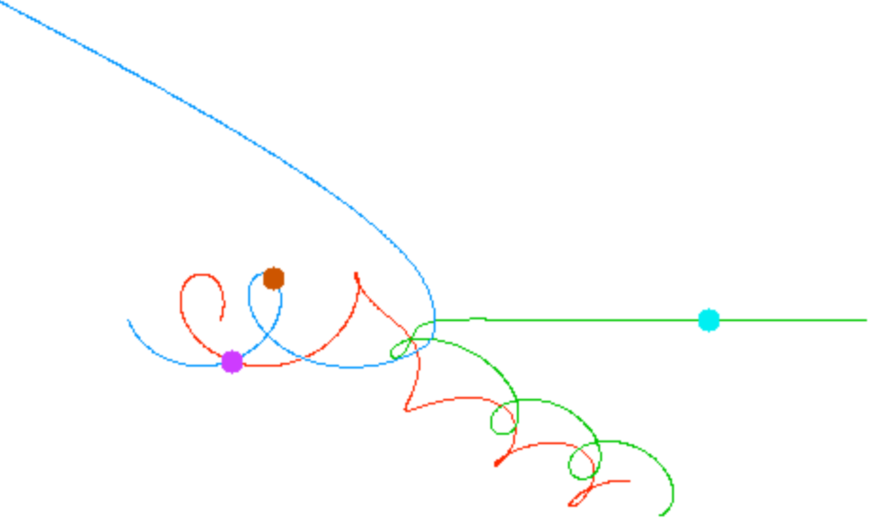
NEWTON : (une solution exacte du problème des 3 corps) "dépasse, si je ne me trompe, les forces de l'esprit humain".



UN EXEMPLE : Une solution "assez simple" du problème des 3 corps (3 masses égales)



Calculée numériquement par C. Simó

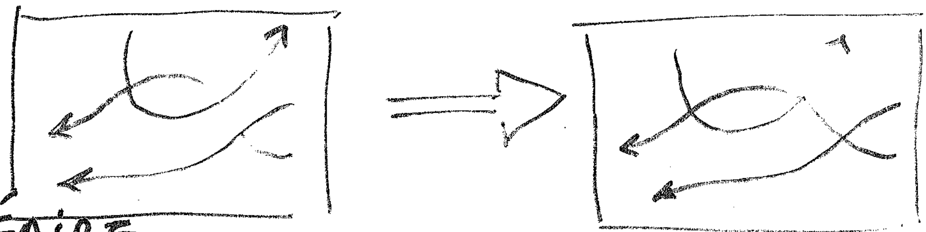


SYMÉTRIES

INTÉGRALES PREMIÈRES

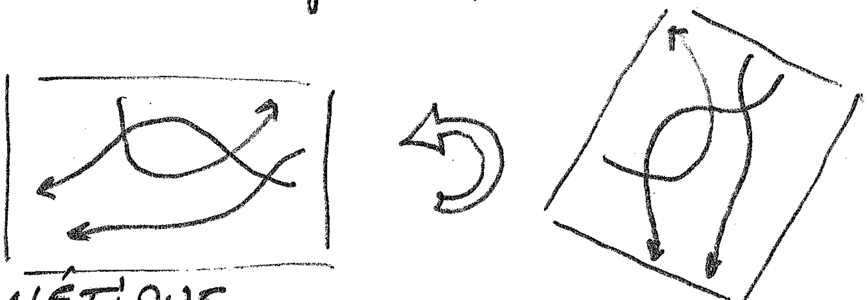
(= quantités conservées au cours du mouvement)

TRANSLATION



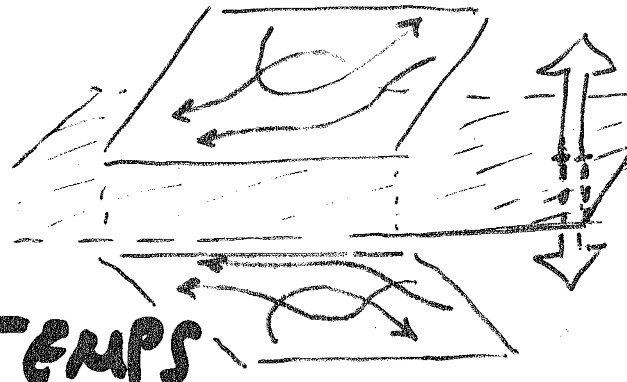
MOMENT LINÉAIRE
(mouvement du centre de gravité)

ROTATION



MOMENT CINÉTIQUE
(loi des aires, e)

SYMÉTRIE PLANE

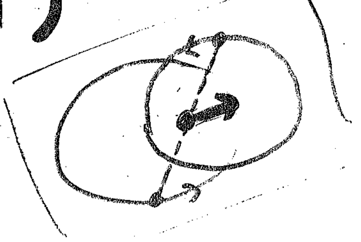


MOUVEMENT DANS UN PLAN POUR 2 CORPS

TRANSLATION DE TEMPS

ÉNERGIE (a)

SO(4) (2 corps seulement)



VECTEUR DE LAPLACE
(direction du périhélie)

COMBIEN DE PARAMÈTRES ?

2 CORPS DANS L'ESPACE

12	positions et vitesses
− 6	centre de gravité
− 3	moment cinétique
− 1	énergie
− 1	Ce qui reste de Laplace
= 1	L'orbite est déterminée

3 CORPS DANS L'ESPACE

18	positions et vitesses
− 6	centre de gravité
− 3	moment cinétique
− 1	énergie
− 1	rotations
= 7	!!!

Problème "non-intégrable" BRUNS 1887
POINCARÉ 1892

DIVERSES APPROCHES DU PROBLÈME

- THÉORIE DES PERTURBATIONS :
  Existence et stabilité des systèmes planétaires ou lunaires

- SOLUTIONS EXACTES

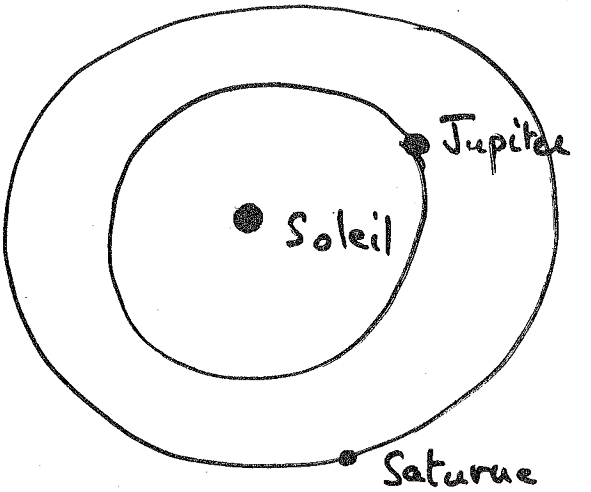
- SOLUTIONS NON PERTURBATIVES
  ex1 : Dynamique symbolique
  ex2 : Calcul des variations

- PHÉNOMÈNES LIÉS AUX COLLISIONS TRIPLES

PERTURBATIONS

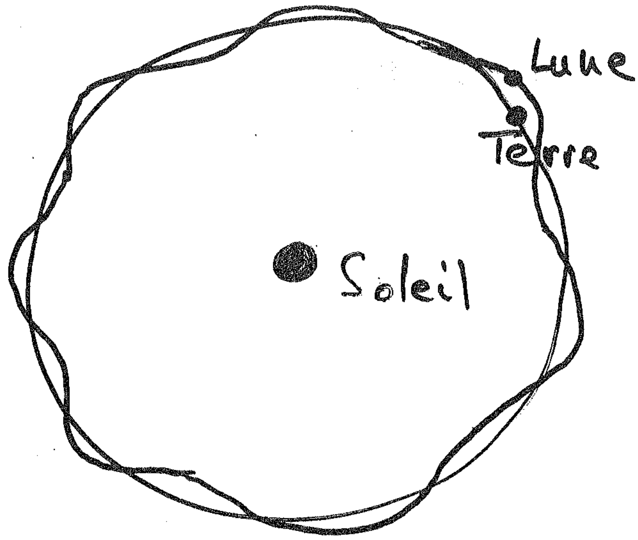
(Mécanique céleste classique)

PROBLÈME PLANÉTAIRE



$m_J, m_{Sat} \ll m_S$

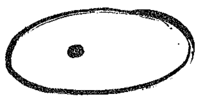
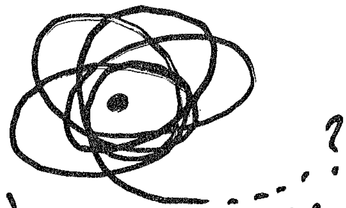
PROBLÈME LUNAIRE



$m_L \ll m_T \ll m_S$

<u>Résultat</u> : Précession (<u>mouvements</u> séculaires)

D'ALEMBERT CLAIRAUT EULER LAPLACE LAGRANGE
DELAUNAY HILL POINCARÉ BIRKHOFF ...
------- ARNOLD (KAM) ...

 remplacé par 

A priori, plusieurs explications possibles !

Perturbations dues à l'attraction en $\frac{1}{r^2}$	Loi en $\frac{1}{r^{2+\varepsilon}}$ ou en $\frac{1}{r^2} + \frac{\varepsilon}{r^4}$ (Clairaut)	correction relativiste (ex : Mercure)

1747-1748 CRISE DU MOUVEMENT DE L'APOGÉE DE LA LUNE

exact! effectué au niveau du nœud dès le calcul au 1er ordre (obtenu d'emblée)

Euler, Clairaut, d'Alembert : 18 ans au lieu de 9 ans pour la période de l'apogée de la lune (erreur de la non considération des termes du 2nd ordre).

QUATORZIÉME MÉMOIRE.

Réfléxions sur le Problême des trois Corps, avec de nouvelles Tables de la Lune, d'un usage très-simple & très-facile.

I.

J'AI publié dans mes *Recherches sur le Systême du Monde*, imprimées en 1754, des Tables de la Lune, telles que la théorie me les avoit données. J'avois cru devoir conserver dans ces Tables la forme de celles des *Institutions Astronomiques*, parce que les Astronomes me paroissoient accoutumés à cette forme, & parce que d'ailleurs cette forme me sembloit avoir quelques autres avantages, dont j'ai fait mention p. 249 & 250 de la premiere Partie des *Recherches* déja citées.

II.

Ayant fait réfléxion depuis, qu'il seroit très-commode & très-utile aux Astronomes d'avoir des Tables particulieres qui marquassent seulement la différence des miennes d'avec celles des *Institutions*, j'ai publié ces Tables

ENCYCLOPÉDIE,

OU

DICTIONNAIRE RAISONNÉ DES SCIENCES, DES ARTS ET DES MÉTIERS,

PAR UNE SOCIÉTÉ DE GENS DE LETTRES.

Mis en ordre & publié par M. *DIDEROT*, de l'Académie Royale des Sciences & des Belles-Lettres de Prusse; & quant à la PARTIE MATHÉMATIQUE, par M. *D'ALEMBERT*, de l'Académie Royale des Sciences de Paris, de celle de Prusse, & de la Société Royale de Londres.

Tantùm series juncturaque pollet,
Tantùm de medio sumptis accedit honoris! HORAT.

TOME PREMIER.

A PARIS,

Chez
- BRIASSON, *rue Saint Jacques, à la Science.*
- DAVID *l'aîné, rue Saint Jacques, à la Plume d'or.*
- LE BRETON, *Imprimeur ordinaire du Roy, rue de la Harpe.*
- DURAND, *rue Saint Jacques, à Saint Landry, & au Griffon.*

M. DCC. LI.

AVEC APPROBATION ET PRIVILEGE DU ROY.

le tome 9 de l'*Encyclopédie* (le volume paraît en 1765 mais l'article est rédigé en 1759) : *"Je ne dois pas oublier d'ajouter* 1°. *que ma méthode pour déterminer le mouvement de l'apogée, est très-élégante & très-simple, n'ayant besoin d'aucune intégration, & ne demandant que la simple inspection des coefficients du second terme de l'équation différentielle ;* 2°. *que j'ai démontré le premier par une méthode rigoureuse, ce que personne n'avoit encore fait, & n'a même fait jusqu'ici, que l'équation de l'orbite lunaire ne devoit point contenir d'arcs de cercle ; si on ajoute à cela la maniere simple & facile dont je parviens à l'équation différentielle de l'orbite lunaire, sans avoir besoin pour cela, comme d'autres géometres, de transformations & d'intégrations multipliées ; & le détail que j'ai donné ci-dessus de mes travaux & de ceux des autres géometres, on conviendra, ce me semble, que j'ai eu plus de part à la théorie de la lune que certains mathématiciens n'avoient voulu le faire croire.*

TRAITÉ
DE
MÉCANIQUE CÉLESTE,

PAR P. S. LAPLACE,
Membre de l'Institut national de France, et du Bureau des Longitudes.

TOME PREMIER.

DE L'IMPRIMERIE DE CRAPELET.

A PARIS,

Chez J. B. M. DUPRAT, Libraire pour les Mathématiques, quai des Augustins.

AN VII.

MÉCHANIQUE

ANALITIQUE;

Par M. DE LA GRANGE, *de l'Académie des Sciences de Paris, de celles de Berlin, de Pétersbourg, de Turin, &c.*

A PARIS,

Chez LA VEUVE DESAINT, Libraire, rue du Foin S. Jacques.

M. DCC. LXXXVIII.

AVEC APPROBATION ET PRIVILEGE DU ROI.

STABILITÉ ou INSTABILITÉ ?

Ex : étude du "problème séculaire" planétaire au voisinage du "point singulier" représenté par les mouvements circulaires coplanaires de 2 planètes autour du soleil.

VARIABLES SÉCULAIRES (ou lentes)

positions / formes) des ellipses planétaires osculatrices

VARIABLES DE POSITION (ou rapides)

½ grands axes a_1, a_2
aires balayées ℓ_1, ℓ_2

NEWTON
Instable

LAPLACE / LAGRANGE
Stable au 1er ordre

POINCARÉ
Stable formellement mais peut être instable ?

ARNOLD (KAM) HERMAN/FEJOZ
stable si masses planétaires microscopiques

LASKAR
(numérique, tout le système solaire)
Instable

Il est incapable de prédire comment sera orienté le périhélie de la Terre dans 100 000 000 d'années.

ORIGINE DE L'INSTABILITÉ : Résonances

TRADUCTION ANALYTIQUE : Divergence des séries de perturbation

LES MÉTHODES NOUVELLES

DE LA

MÉCANIQUE CÉLESTE

PAR

H. POINCARÉ,

MEMBRE DE L'INSTITUT,
PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES.

TOME I.

**Solutions périodiques. — Non-existence des intégrales uniformes.
Solutions asymptotiques.**

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1892

1963 г. ноябрь—декабрь *т. XVIII, вып. 6 (114)*

УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

МАЛЫЕ ЗНАМЕНАТЕЛИ И ПРОБЛЕМЫ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ В КЛАССИЧЕСКОЙ И НЕБЕСНОЙ МЕХАНИКЕ

В. И. Арнольд

СОДЕРЖАНИЕ

Введение 92
§ 1. Результаты 92
§ 2. Предварительные сведения из механики 93
§ 3. Предварительные сведения из математики 94
§ 4. Простейшая проблема устойчивости 97
§ 5. Содержание работы 100
Глава I. Теория возмущений 100
§ 1. Интегрируемые и неинтегрируемые проблемы динамики 101
§ 2. Классическая теория возмущений 102
§ 3. Малые знаменатели 103
§ 4. Метод Ньютона 104
§ 5. Собственное вырождение 106
§ 6. Замечание 1 108
§ 7. Замечание 2 110
§ 8. Применение к задаче о собственном вырождении 112
§ 9. Предельное вырождение. Преобразование Биркгофа 113
§ 10. Устойчивость положений равновесия гамильтоновых систем . . . 115
Глава II. Адиабатические инварианты 117
§ 1. Понятие адиабатического инварианта 117
§ 2. Вечная адиабатическая инвариантность действия при медленном периодическом изменении функции Гамильтона 119
§ 3. Адиабатические инварианты консервативных систем 123
§ 4. Магнитные ловушки 126
§ 5. Многомерный случай 129
Глава III. Об устойчивости планетных движений 130
§ 1. Картина движения 130
§ 2. Переменные Якоби, Делоне и Пуанкаре 134
§ 3. Преобразование Биркгофа 136
§ 4. Вычисление асимптотики коэффициентов разложения $\overline{\overline{F}}_1$ 138
§ 5. Задача многих тел 143
Глава IV. Основная теорема 146
§ 1. Основная теорема 147
§ 2. Индуктивная теорема 148
§ 3. Индуктивная лемма 149

COMMUNICATIONS ON PURE AND APPLIED MATHEMATICS, VOL. XI, 81–114 (1958)

New Aspects in the Theory of Stability of Hamiltonian Systems*

JÜRGEN MOSER

1. Introduction

The recent development of accelerators has led to many new questions concerning the stability of orbits governed by ordinary differential equations; a mathematical theory had to be developed to account for, and to predict, the observed behavior of particle beams in the magnetic fields of these various synchrotrons. Without discussing the physical motivation we shall attempt in this paper the mathematical analysis of the pertinent questions in such a theory and point out some open problems.

The important feature of this theory is the fact that the differential equations considered are derived from a variational principle and therefore can be written in the Hamiltonian form. In physical terms this means that the influence of friction is being neglected. Thus an algebraic situation arises which makes the conventional stability theory—as developed mainly by Liapounoff—inapplicable and necessitates a new approach.

In the following introduction we shall state the problems and discuss the results whose proofs will be furnished in the later sections.

A) Linear Systems

a) Linear Problem in General. Consider a system of differential equations of the form

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x, \qquad A(t+2\pi) = A(t) \tag{1.1}$$

where x denotes a real m-vector and $A(t)$ a real m by m matrix. The elements of $A(t)$ are assumed to be continuous functions of t and periodic with the same period which we normalize to 2π. The well-known Floquet theory describes the general nature of the solutions of such a system.

The definition of stability of a linear system should be adapted to the kind of application considered. Here we will call the linear system (1.1)

*This paper represents results obtained at the Institute of Mathematical Sciences, New York University, under the sponsorship of the Office of Naval Research, Contract N6Ori-201, T.O. 1.

2.6 Possibilité de collisions entre Mercure, Mars, Vénus et la Terre

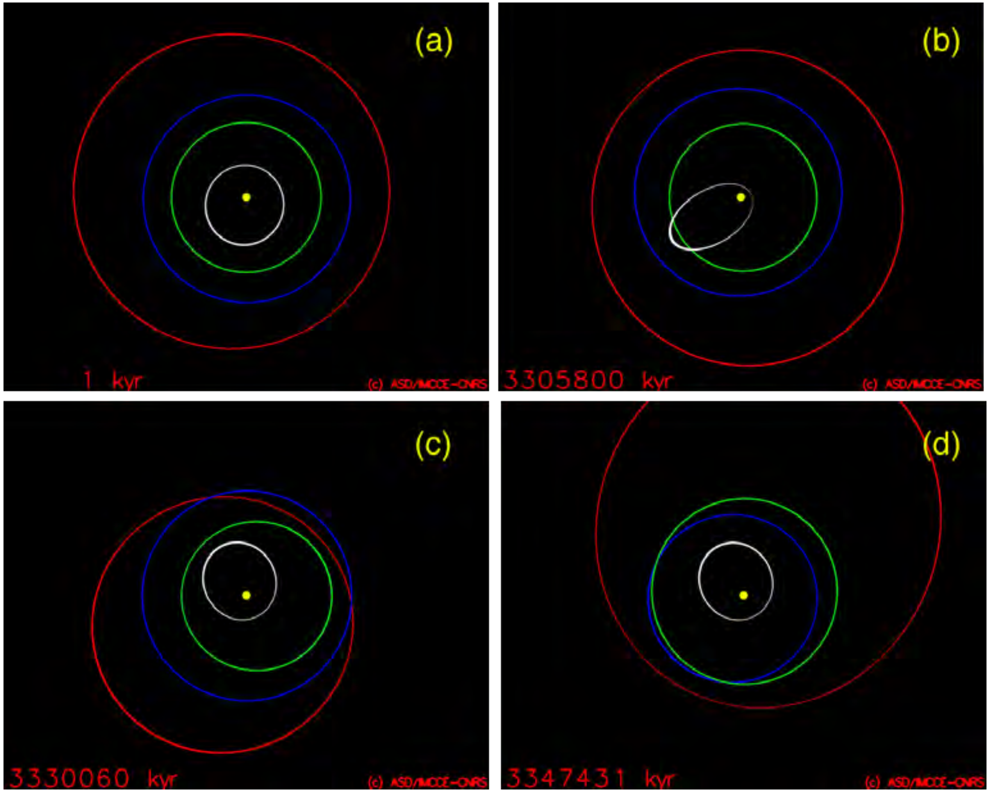
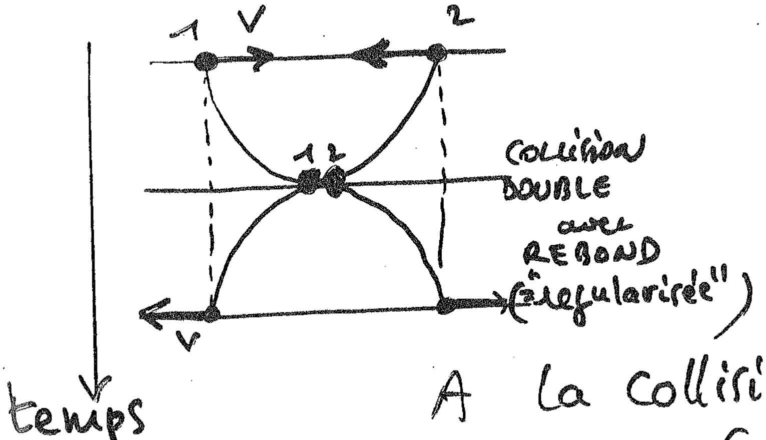
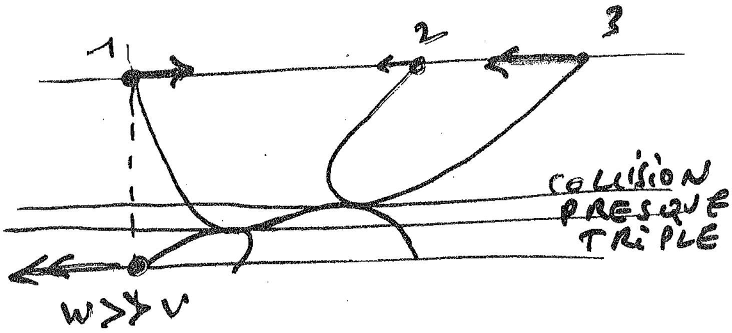


FIG. 6 – Exemple d'évolution à long terme des orbites des planètes telluriques : Mercure (blanc), Vénus (vert), Terre (bleu), Mars (rouge). Le temps est indiqué en milliers d'années (kyr). (a) Au voisinage de l'état actuel, les orbites se déforment sous l'influence des perturbations planétaires, mais sans permettre de rencontres proches ou de collisions. (b) Dans près de 1% des cas, l'orbite de Mercure peut se déformer suffisamment pour permettre une collision avec Vénus ou le Soleil en moins de 5 Ga. (c) Pour l'une des trajectoires, l'excentricité de Mars augmente suffisamment pour permettre une rencontre proche ou une collision avec la Terre. (d) Ceci entraîne une déstabilisation des planètes telluriques qui permet aussi une collision entre Vénus et la Terre (Figure issue des résultats des simulations numériques de Laskar et Gastineau, 2009).

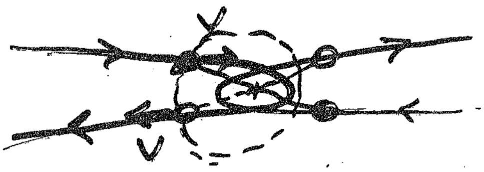
COLLISIONS TRIPLES





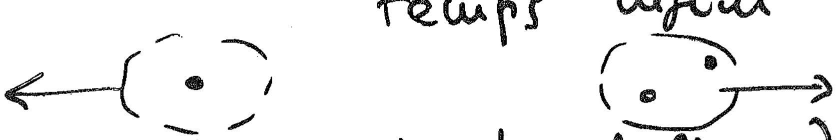
A la collision, vitesses infinies
(conservation de l'énergie)

Même chose sans collision dans le plan ou l'espace



Conclusion : si le système passe trop près d'une collision triple, au moins 1 corps s'échappe (Sundman, Birkhoff)

PAINLEVÉ (1895) Pour que l'un des 3 corps "aille à l'infini", il faut un temps infini

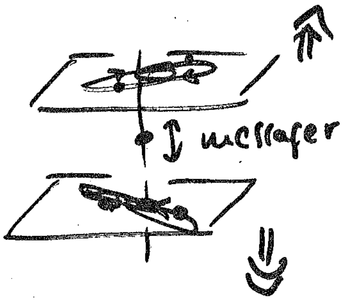


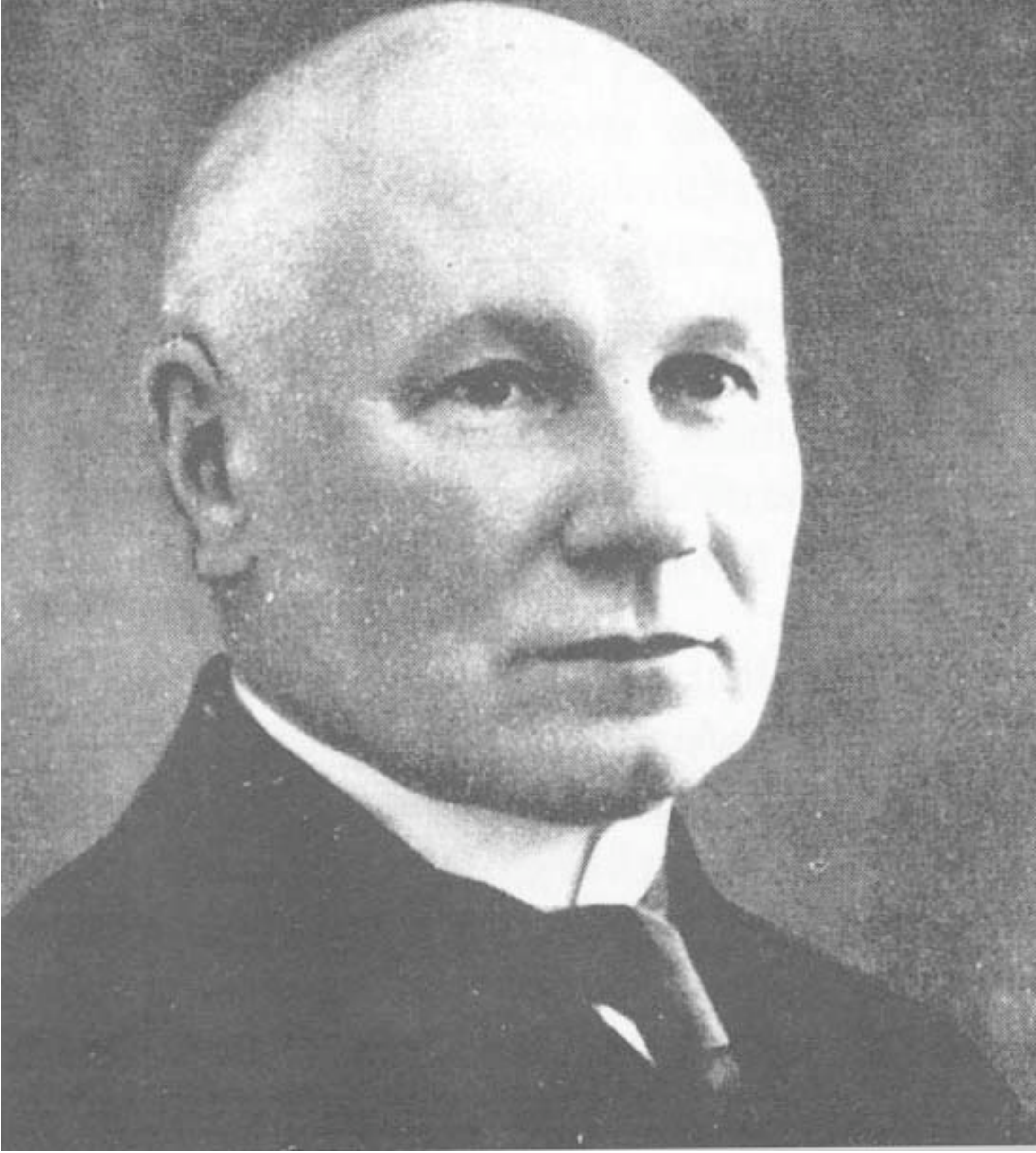
(vitesse au plus hyperbolique)

mais, si n>3 corps! :

A l'∞ en temps fini!

- MATHER-McGEHEE 1975 (sur la droite, n=4)
- J. XIA 1992 (dans l'espace, n=5) sans collision
- J. GERVER 1991 (dans le plan, n grand) sans collision





SOLUTIONS EXACTES

ORIGINE : SYMÉTRIES | translation
rotation

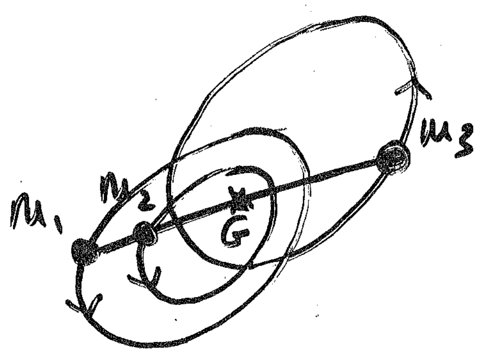
et HOMOGÉNÉITÉ du potentiel

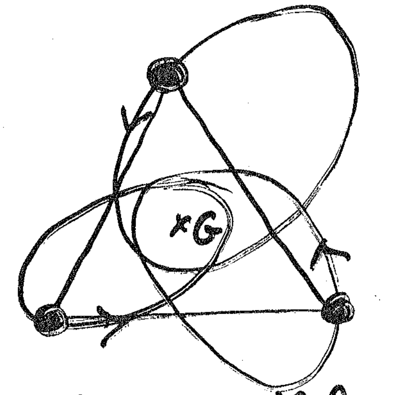
$\Downarrow$

SOLUTIONS HOMOGRAPHIQUES :

Le triangle des 3 corps reste
<u>semblable</u> à lui-même
au cours du mouvement
et chaque corps décrit une
conique Keplerienne semblable.
(même e)

EULER 1767 sur la droite
LAGRANGE 1772 (<u>ESSAI SUR LE PB DES 3 CORPS</u>)





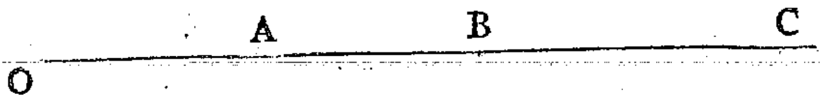
2 "formes" seulement sont possibles :
alignés
équilatéral } <u>configurations centrales</u>

DE MOTV RECTILINEO

TRIVM CORPORVM SE MVTVO ATTRAHENTIVM.

Auctore

L. EVLERO.



I.

Sint A, B, C massae trium corporum eorumque distantiae a puncto fixo O ad datum tempus t ponantur

$$OA = x, \quad OB = y \quad \text{et} \quad OC = z$$

vbiquidem sumitur $y > x$ et $z > y$. Hinc motus principia praebent has tres aequationes:

$$\text{I.} \quad \frac{ddx}{dt^2} = \frac{B}{(y-x)^2} + \frac{C}{(z-x)^2};$$

$$\text{II.} \quad \frac{ddy}{dt^2} = \frac{-A}{(y-x)^2} + \frac{C}{(z-y)^2}$$

$$\text{III.} \quad \frac{ddz}{dt^2} = \frac{-A}{(z-x)^2} - \frac{B}{(z-y)^2}$$

vnde facile deducuntur binae aequationes integrabiles:

prior $\quad A\,dx + B\,dy + C\,dz = E\,dt$ et $Ax + By + Cz = Et + F$

posterior $\frac{A\,dx^2 + B\,dy^2 + C\,dz^2}{dt^2} = G + \frac{2AB}{y-x} + \frac{2AC}{z-x} + \frac{2BC}{z-y}.$

Hinc autem ob defectum tertiae aequationis integralis parum ad motus cognitionem concludere licet.

2. Sta-

ESSAI

SUR

LE PROBLÈME DES TROIS CORPS.

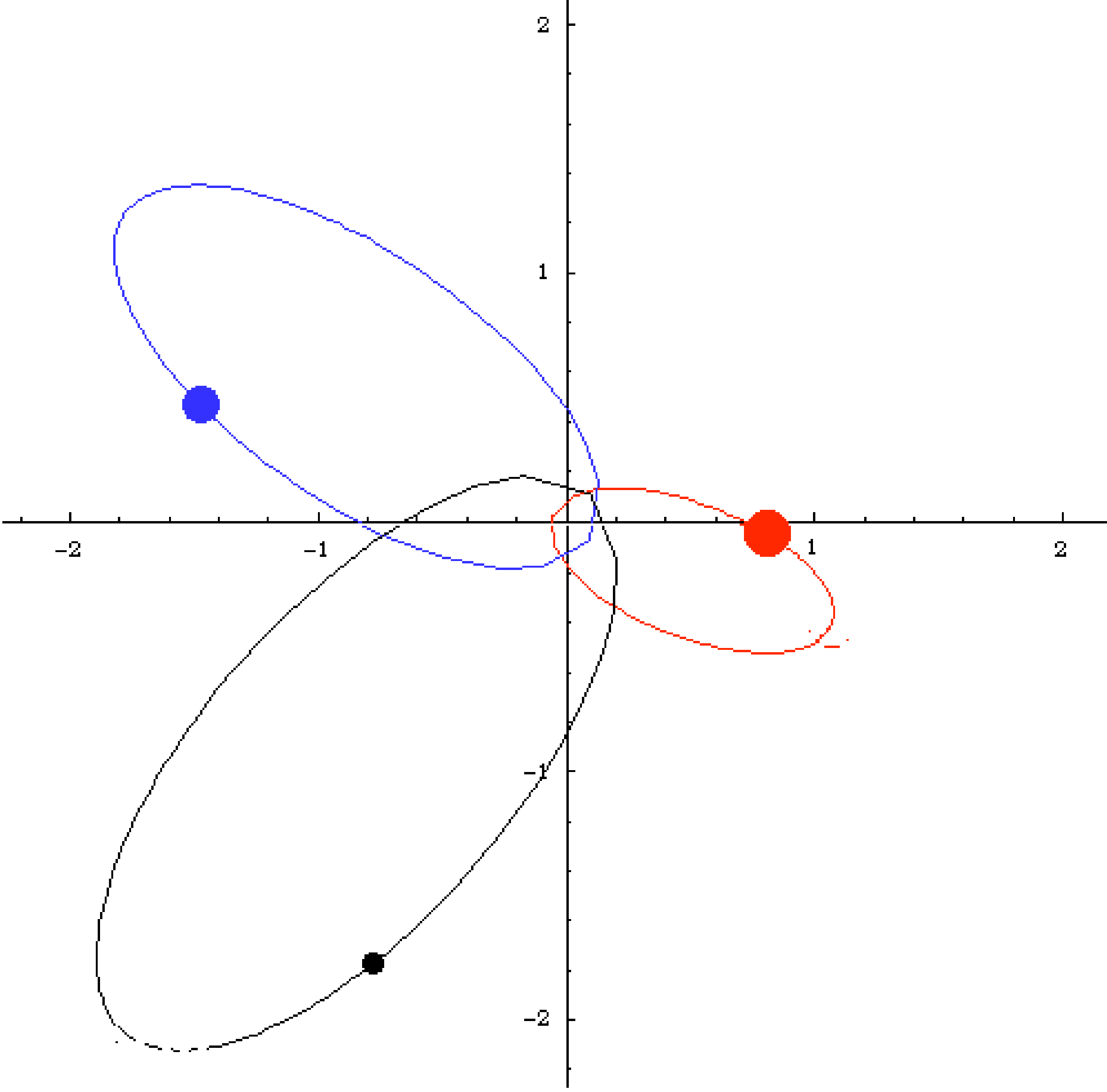
Juvat integros accedere fontes.

LUCR.

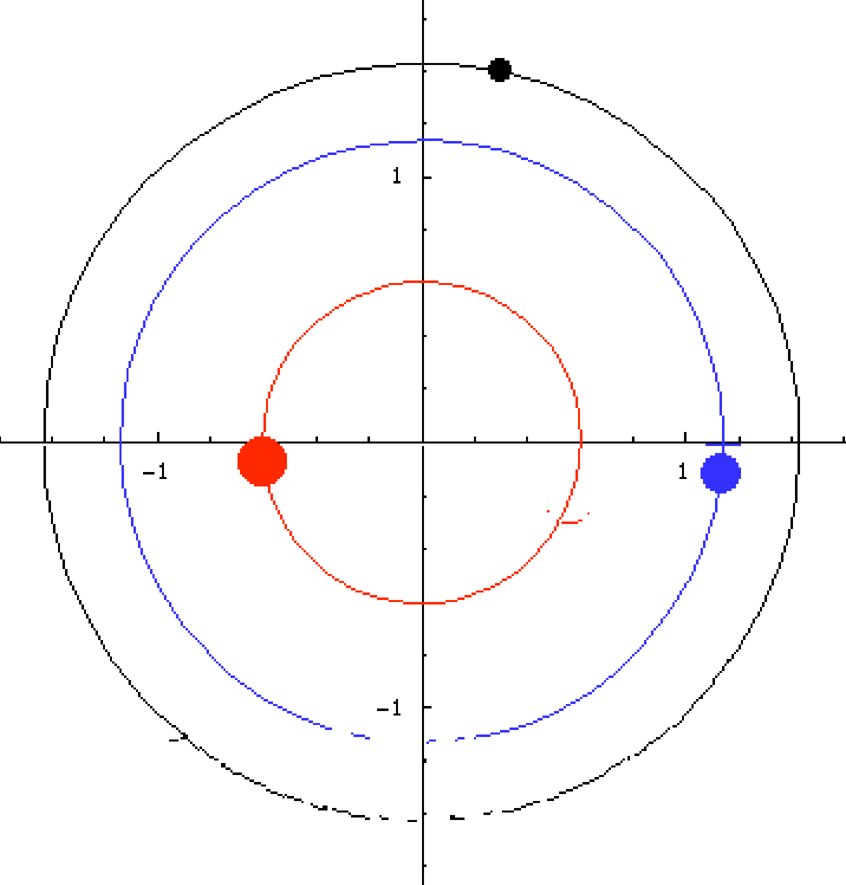
(Prix de l'Académie Royale des Sciences de Paris, tome IX, 1772.)

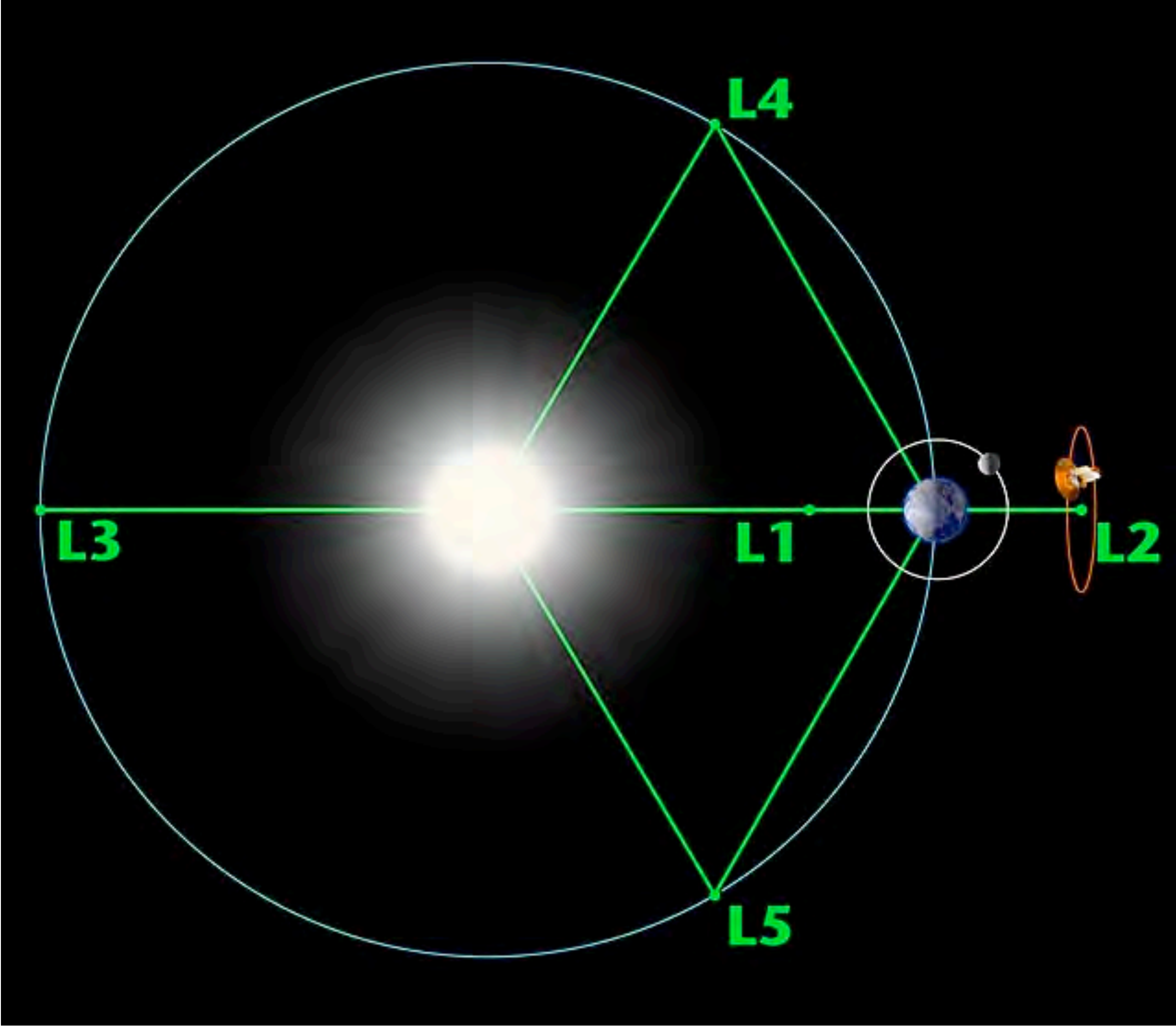
AVERTISSEMENT.

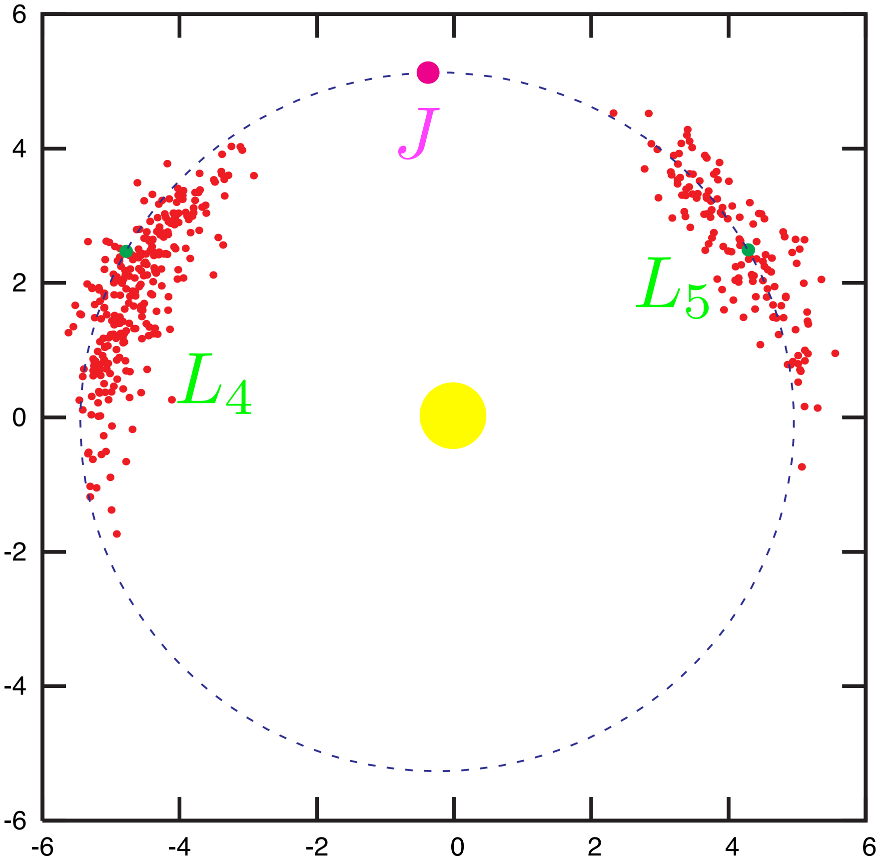
Ces Recherches renferment une Méthode pour résoudre le Problème des trois Corps, différente de toutes celles qui ont été données jusqu'à présent. Elle consiste à n'employer dans la détermination de l'orbite de chaque Corps d'autres éléments que les distances entre les trois Corps, c'est-à-dire, le triangle formé par ces Corps à chaque instant. Pour cela, il faut d'abord trouver les équations qui déterminent ces mêmes distances par le temps; ensuite, en supposant les distances connues, il faut en déduire le mouvement relatif des Corps par rapport à un plan fixe quelconque. On verra, dans le premier Chapitre, comment je m'y suis pris pour remplir ces deux objets, dont le second surtout demande une analyse délicate et assez compliquée. A la fin de ce Chapitre, je ras-



2
1
−1
−2
−2
−1
1
2


1
−1
1
−1


L4
L3
L1
L2
L5

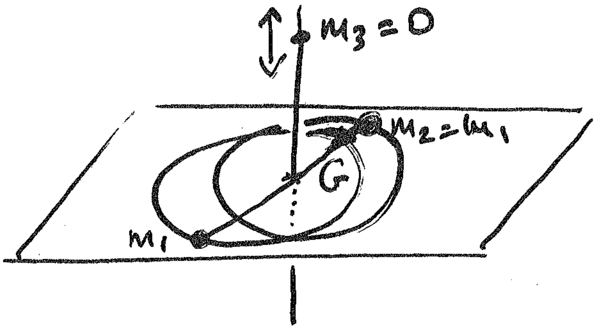


J
L4
L5
6
4
2
0
-2
-4
-6

SOLUTIONS NON PERTURBATIVES

ex 1 Dynamique symbolique (méthodes géométriques)

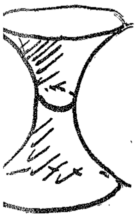
Les solutions de SITNIKOV (1960)



Les passages de m_3 d'un côté à l'autre du plan horizontal sont régis par un jeu de pile ou face.

ex 2 Calcul des variations (méthodes analytico-géométriques)

POINCARÉ 1896



minimiser l'action $S = \int_a^b (\text{cinétique} - \text{potentielle})\,dt$

le long d'1 courbe fermée $\Rightarrow$ solution

Z COLLISIONS

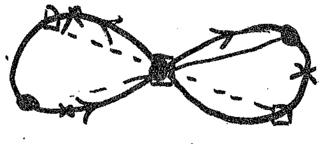
Pas de pb si $\frac{1}{r^2}$ remplacé par $\frac{1}{r^3}$

A. VENTURELLI 2000 Les solutions homographiques de Lagrange (△) peuvent être obtenues ainsi !

Cas des 3 masses égales $\Rightarrow$ symétrie de permutation

A. CHENCINER et R. MONTGOMERY 2000 :

LE "HUIT"



et plus généralt (numériqt Gerver, Simo) :

chorégraphies de n corps

Appendice 2. La note aux C.R.A.S. de Poincaré (30 novembre 1896).

SUR LES SOLUTIONS PÉRIODIQUES
ET LE PRINCIPE DE MOINDRE ACTION

Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. 123, p. 915-918 (30 novembre 1896).

La théorie des solutions périodiques peut, dans certains cas, se rattacher au principe de moindre action.

Supposons trois corps se mouvant dans un plan et s'attirant en raison inverse du cube des distances ou d'une puissance plus élevée de ces distances; j'appelle a, b, c ces trois corps.

L'énergie cinétique T est essentiellement positive et il en est de même de la fonction des forces U, qui est égale à une somme de termes de la forme $\frac{kmm'}{r^n}$, où k est une constante positive, m et m' les masses de deux des trois corps, r leur distance et n un exposant au moins égal à 2.

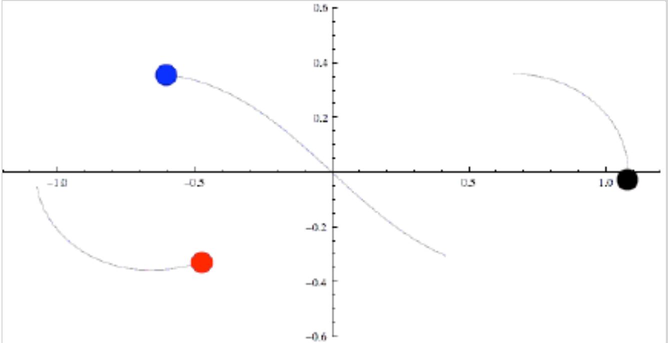
L'action hamiltonienne

$$J = \int_{t_0}^{t_1} (T + U)\,dt$$

sera donc essentiellement positive.

Considérons une classe de trajectoires de nos trois corps a, b, c; ce seront des trajectoires fictives, c'est-à-dire ne satisfaisant pas aux équations du mouvement; mais elles seront soumises aux conditions suivantes :

1° Au temps t_1 les distances des trois corps seront les mêmes qu'au temps t_0; les vitesses seront les mêmes en grandeur et feront les mêmes angles avec les côtés du triangle des trois corps; en d'autres termes, la figure formée par les trois corps et par les droites qui représentent leurs vitesses aura repris à l'époque t_1 la même forme qu'elle avait à l'époque t_0; ou bien encore les



0.6
0.4
0.2
-0.2
-0.4
-0.6
-1.0
-0.5
0.5
1.0

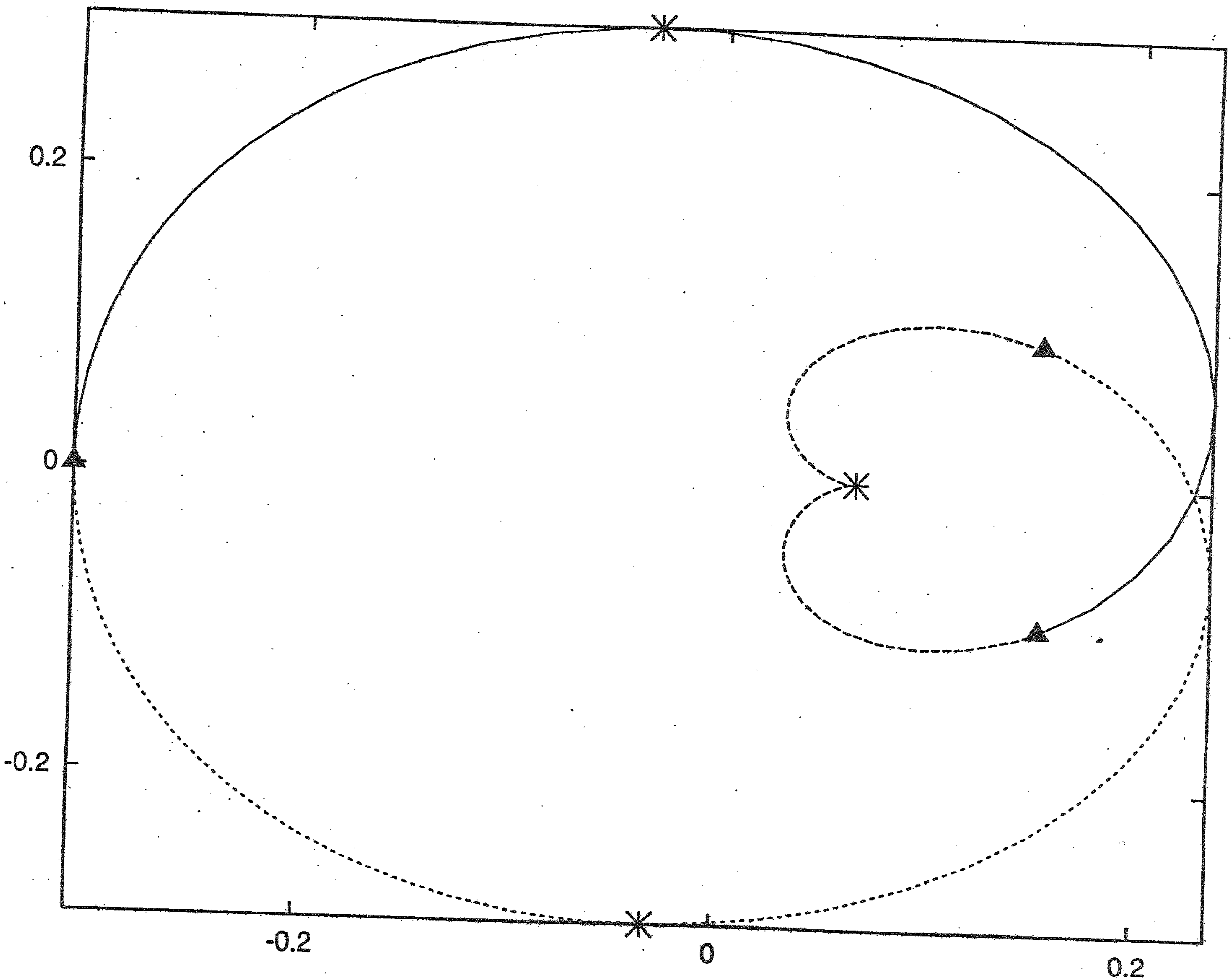
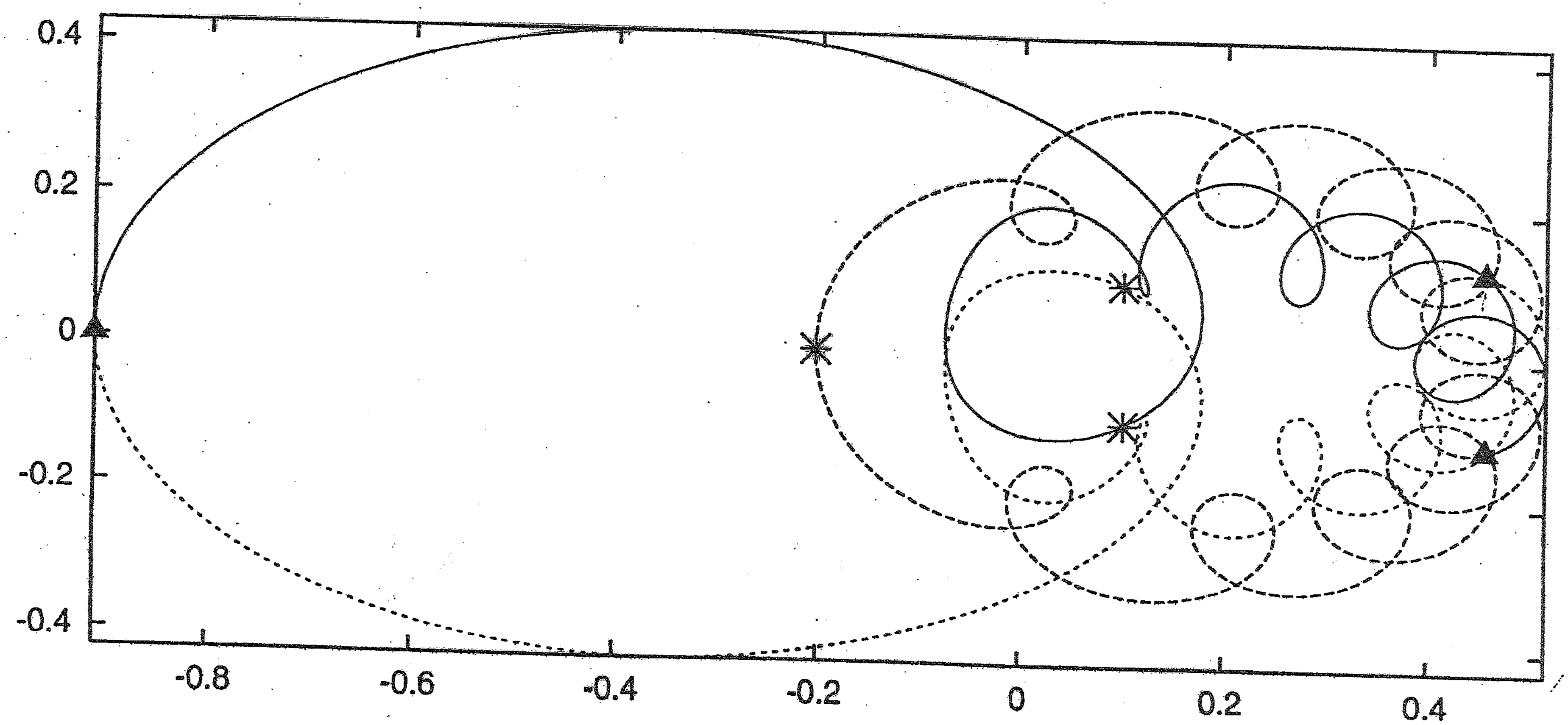
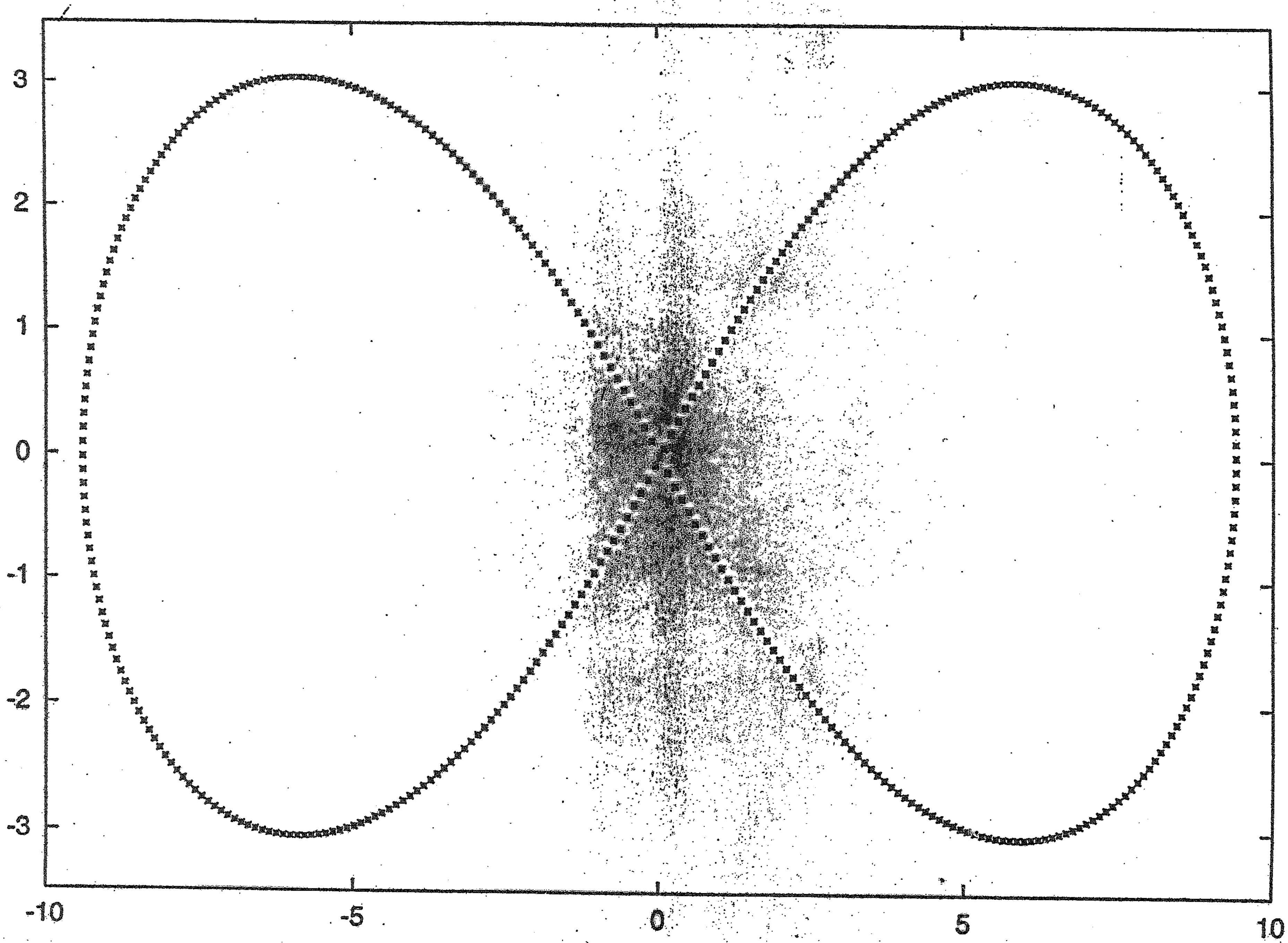


FIGURE BY C. SIMÓ


0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.8
-0.6
-0.4
-0.2
0
0.2
0.4

399 caps



Three body problem

From Scholarpedia

Alain Chenciner (2007), Scholarpedia, 2(10):2111. doi:10.4249/scholarpedia.2111 revision #79311 [link to/cite this article]

Curator: Dr. Alain Chenciner, Math Dept Paris 7 University and IMCCE (Paris Observatory), France

The problem is to determine the possible motions of three point masses m_1, m_2, and m_3, which attract each other according to Newton's (http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Newton.html) law of inverse squares. It started with the perturbative studies of Newton himself on the *inequalities* of the lunar motion[1] (http://en.wikisource.org/wiki/Philosophiae_Naturalis_Principia_Mathematica/Preface) . In the 1740s it was constituted as the search for solutions (or at least approximate solutions) of a system of ordinary differential equations by the works of Euler (http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Euler.html) , Clairaut (http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Clairaut.html) and d'Alembert (http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/D'Alembert.html) (with in particular the explanation by Clairaut of the motion of the lunar apogee). Much developed by Lagrange (http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Lagrange.html) , Laplace (http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Laplace.html) and their followers, the mathematical theory entered a new era at the end of the 19th century with the works of Poincaré (http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Poincare.html) and since the 1950's with the development of computers. While the two-body problem is integrable and its solutions completely understood (see [2] (http://en.wikipedia.org/wiki/Two-body_problem) ,[AKN],[Al],[BP]), solutions of the **three-body problem** may be of an arbitrary complexity and are very far from being completely understood.

Contents

- 1 Equations
- 2 Symmetries, first integrals
- 3 Homographic solutions
- 4 The astronomer's three-body problem: i) the planetary problem
  - 4.1 Reduction to the general problem of dynamics
  - 4.2 The secular system
  - 4.3 From Lindstedt series to K.A.M.
- 5 The astronomer's three-body problem: ii) a caricature of the lunar problem
  - 5.1 The planar circular restricted problem:
  - 5.2 The simplest case:
  - 5.3 Poincaré's first return map
  - 5.4 Higher values of the Jacobi constant
- 6 Periodic solutions
  - 6.1 Poincaré's classification
  - 6.2 Numerical exploration
  - 6.3 Stability, exponents, invariant manifolds
  - 6.4 Minimizing the action
- 7 Global evolution
  - 7.1 Lagrange-Jacobi and Sundman
  - 7.2 The shape sphere
  - 7.3 Collisions
  - 7.4 Final motions
  - 7.5 The oldest open question in dynamical systems
- 8 Non-integrability
  - 8.1 Bruns, Painlevé
  - 8.2 Poincaré
  - 8.3 Ziglin, Morales-Ramis
  - 8.4 Two cases of integrability
- 9 Still simpler than the 4- (and more)-body problem !


迎客廳
fashion