



SUR LE
PROBLÈME DES TROIS CORPS

ET LES
ÉQUATIONS DE LA DYNAMIQUE

PAR

H. POINCARÉ
À PARIS.

MÉMOIRE COURONNÉ
DU PRIX DE S. M. LE ROI OSCAR II

LE 21 JANVIER 1889.

AVEC DES NOTES

PAR L'AUTEUR.

L'INTRODUCTION DU MÉMOIRE DE 1889 (VERSION NON CORRIGÉE)

En ce qui concerne le problème des trois corps, je ne suis pas sorti du cas suivant:

Je considère trois masses, la première très grande, la seconde petite mais finie, la troisième infiniment petite; je suppose que les deux premières décrivent un cercle autour de leur centre de gravité commun et que la troisième se meut dans le plan de ces cercles. Tel serait le cas d'une petite planète troublée par Jupiter, si l'on négligeait l'excentricité de Jupiter et l'inclinaison des orbites.

Dans ce cas particulier, j'ai démontré rigoureusement la stabilité, non seulement en montrant que le rayon vecteur de la petite planète ne peut croître indéfiniment, mais en lui fixant sinon ses limites précises, au moins des limites aussi rapprochées qu'on le veut de ces limites précises.

LA TABLE DES MATIÈRES DU MÉMOIRE DE 1889 (VERSION NON CORRIGÉE)

TABLE DES MATIÈRES.

	Pages.
Introduction.....	5
Première partie.	
Généralités.	
Chapitre I. Notations et définitions.....	0
Chapitre II. Théorie des invariants intégraux.	
§ 1. Propriétés diverses des équations de la dynamique.....	14
§ 2. Définition des invariants intégraux.....	21
§ 3. Transformations des invariants intégraux.....	25
§ 4. Usage des invariants intégraux.....	31
Chapitre III. Théorie des solutions périodiques.	
§ 1. Existence des solutions périodiques.....	48
§ 2. Exposants caractéristiques.....	58
§ 3. Solutions périodiques des équations de la dynamique.....	65
§ 4. Calcul des exposants caractéristiques.....	80
§ 5. Solutions asymptotiques.....	88
Deuxième partie.	
Equations de la dynamique et problème des " corps.	
Chapitre I. Etude du cas où il n'y a que deux degrés de liberté.	
§ 1. Représentations géométriques diverses.....	97
§ 2. Equation des surfaces asymptotiques.....	112
§ 3. Construction des surfaces asymptotiques (première approximation).....	123
§ 4. Construction exacte des surfaces asymptotiques.....	135
§ 5. Solutions périodiques du 2 ^m genre.....	144

	Pages.
Chapitre II. Résumé général des résultats.	
§ 1. Résultats positifs.....	153
§ 2. Résultats négatifs.....	155
Chapitre III. Tentatives de généralisation.....	158

Notes.

A. Sur la divergence des séries de M. Lindstedt.....	168
B. Nouvel exposé des résultats.....	174
C. Sur les invariants intégraux.....	183
D. Sur les équations linéaires à coefficients périodiques.....	188
E. Sur le calcul des limites.....	193
F. Sur les surfaces asymptotiques.....	219
G. Sur la non-existence des intégrales uniformes.....	243
H. Sur les exposants caractéristiques.....	240
I. Sur les solutions asymptotiques.....	251

LE CHAPITRE AJOUTÉ DANS LA
VERSION CORRIGÉE DE 1890

Deuxième partie.

	Pages.
Chapitre II. Etudes des surfaces asymptotiques.	
§ 16. Exposé du problème.....	181
§ 17. Première approximation.....	184
§ 18. Deuxième approximation.....	197
§ 19. Troisième approximation.....	219

1892

LES MÉTHODES NOUVELLES

DE LA

MÉCANIQUE CÉLESTE

PAR

H. POINCARÉ, MEMBRE DE L'INSTITUT, PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES.

TOME I.

Solutions périodiques. — Non-existence des intégrales uniformes. Solutions asymptotiques.



PARIS,

GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, Quai des Grands-Augustins, 55.

1892

(Tous droits réservés.)

TABLE DES MATIÈRES

DU TOME PREMIER.

Table with 2 columns: Title and Pages. Includes sections for INTRODUCTION, CHAPITRE I (GÉNÉRALITÉS ET MÉTHODE DE JACOBI), and CHAPITRE II (INTÉGRATION PAR LES SÉRIES).

CHAPITRE III.

SOLUTIONS PÉRIODIQUES.

	Pages.
Solutions périodiques.....	79
Cas où le temps n'entre pas explicitement.....	89
Application au Problème des trois Corps.....	95
Solutions de la première sorte.....	97
Recherches de M. Hill sur la Lune.....	104
Application au problème général de la Dynamique.....	109
Cas où le hessien est nul.....	117
Calcul direct des séries.....	120
Démonstration directe de la convergence.....	128
Examen d'un important cas d'exception.....	133
Solution de la deuxième sorte.....	139
Solution de la troisième sorte.....	144
Applications des solutions périodiques.....	152
Satellites de Jupiter.....	154
Solutions périodiques dans le voisinage d'une position d'équilibre.....	156

CHAPITRE IV.

EXPOSANTS CARACTÉRISTIQUES.

Équations aux variations.....	162
Application à la théorie de la Lune.....	164
Équations aux variations de la Dynamique.....	166
Application de la théorie des substitutions linéaires.....	172
Définition des exposants caractéristiques.....	174
Équation qui définit ces exposants.....	178
Cas où le temps n'entre pas explicitement.....	179
Nouvel énoncé du théorème des n ^{os} 37 et 38.....	180
Cas où les équations admettent des intégrales uniformes.....	184
Cas des équations de la Dynamique.....	192
Changements de variables.....	198
Développement des exposants. — Calcul des premiers termes.....	201
Application au Problème des trois Corps.....	217
Calcul complet des exposants caractéristiques.....	218
Solutions dégénérantes.....	228

CHAPITRE V.

NON-EXISTENCE DES INTÉGRALES UNIFORMES.

Non-existence des intégrales uniformes.....	233
Cas où les B s'annulent.....	240
Cas où le hessien est nul.....	245

	Pages.
Application au Problème des trois Corps.....	250
Problèmes de Dynamique où il existe une intégrale uniforme.....	254
Intégrales non holomorphes en μ	259
Discussion des expressions (14).....	261

CHAPITRE VI.

DÉVELOPPEMENT APPROCHÉ DE LA FONCTION PERTURBATRICE.

Énoncé du problème.....	269
Digression sur une propriété de la fonction perturbatrice.....	272
Principes de la méthode de M. Darboux.....	278
Extension aux fonctions de plusieurs variables.....	280
Recherche des points singuliers.....	285
Discussion.....	293
Discussion dans le cas général.....	305
Application de la méthode de M. Darboux.....	314
Application à l'Astronomie.....	325
Application à la démonstration de la non-existence des intégrales uniformes.....	325

CHAPITRE VII.

SOLUTIONS ASYMPTOTIQUES.

Solutions asymptotiques.....	335
Convergence des séries.....	338
Solutions asymptotiques des équations de la Dynamique.....	344
Développement de ces solutions selon les puissances de $\sqrt{\mu}$	345
Divergence des séries du n ^o 108.....	350
Démonstration nouvelle de la proposition du n ^o 108.....	353
Transformation des équations.....	362
Réduction à la forme canonique.....	368
Forme des fonctions V_i	370
Lemme fondamental.....	373
Analogie des séries du n ^o 108 avec celle de Stirling.....	378

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES DU TOME PREMIER.

1893

LES MÉTHODES NOUVELLES

DE LA

MÉCANIQUE CÉLESTE

PAR

H. POINCARÉ,
MEMBRE DE L'INSTITUT,
PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES.

TOME II.

Méthodes de MM. Newcomb, Gylden, Lindstedt et Bohlin.



PARIS,

GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55

1893

(Tous droits réservés.)

TABLE DES MATIÈRES

DU TOME DEUXIÈME.

CHAPITRE VIII.

CALCUL FORMEL.

	Pages.
Divers sens du mot <i>convergence</i>	1
Séries analogues à celles de Stirling.....	2
Calcul de ces séries.....	4

CHAPITRE IX.

MÉTHODES DE MM. NEWCOMB ET LINDSTEDT.

Historique.....	15
Exposé de la méthode.....	17
Diverses formes des séries.....	24
Calcul direct des séries.....	28
Comparaison avec la méthode de M. Newcomb.....	34

CHAPITRE X.

APPLICATION A L'ÉTUDE DES VARIATIONS SÉCULAIRES.

Exposé de la question.....	38
Nouveau changement de variables.....	40
Application de la méthode du Chapitre IX.....	44

CHAPITRE XI.

APPLICATION AU PROBLÈME DES TROIS CORPS.

Difficulté du problème.....	47
Extension de la méthode du Chapitre IX à certains cas singuliers.....	48
Application au Problème des trois Corps.....	56
Changement de variables.....	57
Cas des orbites planes.....	59
Étude d'une intégrale particulière.....	65
Forme des développements.....	67
Cas général du Problème des trois Corps.....	69

CHAPITRE XII.

APPLICATION AUX ORBITES PEU EXCENTRIQUES.

	Pages.
Exposé de la difficulté.....	74
Solution de la difficulté.....	82

CHAPITRE XIII.

DIVERGENCE DES SÉRIES DE M. LINDSTEDT.

Discussion des séries (3).....	95
Discussion des séries (2).....	99
Comparaison avec les méthodes anciennes.....	105

CHAPITRE XIV.

CALCUL DIRECT DES SÉRIES.

Application au Problème des trois Corps.....	126
Propriétés diverses.....	136
Cas particuliers remarquables.....	150
Conclusions.....	156

CHAPITRE XV.

AUTRES PROCÉDÉS DE CALCUL DIRECT.

Problème du n° 125.....	157
Autre exemple.....	160
Problème du n° 134.....	169
Problème des trois Corps.....	177

CHAPITRE XVI.

MÉTHODES DE M. GYLDÉN.

Réduction des équations.....	202
Orbite intermédiaire.....	223
Orbite absolue.....	225

CHAPITRE XVII.

CAS DES ÉQUATIONS LINÉAIRES.

Étude de l'équation de M. Gylden.....	229
Méthode de Jacobi.....	247
Méthode de M. Gylden.....	251
Méthode de M. Bruns.....	253

	Pages.
Méthode de M. Lindstedt.....	255
Méthode de M. Hill.....	260
Application du théorème de M. Hadamard.....	266
Remarques diverses.....	275
Extension des résultats précédents.....	277

CHAPITRE XVIII.

CAS DES ÉQUATIONS NON LINÉAIRES.

Équations à second membre.....	281
Équation de l'évection.....	285
Équation de la variation.....	304
Résumé.....	310
Généralisation des solutions périodiques.....	311

CHAPITRE XIX.

MÉTHODES DE M. BOHLIN.

Méthode de Delaunay.....	315
Méthode de M. Bohlin.....	343
Cas de la libration.....	352
Cas limite.....	366
Relation avec les séries du n° 125.....	383
Divergence des séries.....	388

CHAPITRE XX.

SÉRIES DE M. BOHLIN.

Cas de la libration.....	399
Cas limite.....	404
Comparaison avec les séries du n° 127.....	418

CHAPITRE XXI.

EXTENSION DE LA MÉTHODE DE M. BOHLIN.

Extension au Problème du n° 134.....	422
Extension au Problème des trois Corps.....	436
Seconde méthode.....	444
Cas de la libration.....	448
Divergence des séries.....	452

1899

LES MÉTHODES NOUVELLES

DE LA

MÉCANIQUE CÉLESTE

PAR

H. POINCARÉ,
MEMBRE DE L'INSTITUT,
PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES

TOME III.

Invariants intégraux. — Solutions périodiques du deuxième genre.
Solutions doublement asymptotiques.



PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1899

(Tous droits réservés.)

TABLE DES MATIÈRES

DU TOME TROISIÈME.

CHAPITRE XXII.

INVARIANTS INTÉGRAUX.

	Pages.
Mouvement d'un fluide permanent.....	1
Définition des invariants intégraux.....	4
Relations entre les invariants et les intégrales.....	7
Invariants relatifs.....	9
Relation entre les invariants et l'équation aux variations.....	15
Transformation des invariants.....	19
Autres relations entre les invariants et les intégrales.....	26
Changements de variables.....	30
Remarques diverses.....	32

CHAPITRE XXIII.

FORMATION DES INVARIANTS.

Emploi du dernier multiplicateur.....	40
Équations de la Dynamique.....	43
Les invariants intégraux et les exposants caractéristiques.....	48
Emploi des variations képlériennes.....	63
Remarque sur l'invariant du n° 256.....	66
Cas du problème réduit.....	69

CHAPITRE XXIV.

USAGE DES INVARIANTS INTÉGRAUX.

	PageA.
Procédés de vérification.....	71
Rapport avec un théorème de Jacobi.....	79
Application au Problème des deux corps.....	81
Application aux solutions asymptotiques.....	85

CHAPITRE XXV.

INVARIANTS INTÉGRAUX ET SOLUTIONS ASYMPTOTIQUES.

Retour sur la méthode de Bohlén.....	88
Relation avec les invariants intégraux.....	111
Autre mode de discussion.....	116
Invariants quadratiques.....	127
Cas du problème restreint.....	131

CHAPITRE XXVI.

STABILITÉ A LA POISSON.

Diverses définitions de la stabilité.....	140
Mouvement d'un liquide.....	142
Probabilités.....	151
Extension des résultats précédents.....	155
Application au problème restreint.....	157
Application au Problème des trois corps.....	165

CHAPITRE XXVII.

THÉORIE DES CONSÉQUENTS.

Théorie des conséquents.....	175
Courbes invariantes.....	178
Extension des résultats précédents.....	187
Application aux équations de la Dynamique.....	190
Application au problème restreint.....	196

CHAPITRE XXVIII.

SOLUTIONS PÉRIODIQUES DU DEUXIÈME GENRE.

	Pages.
Solutions périodiques du deuxième genre.....	201
Cas où le temps n'entre pas explicitement.....	207
Application aux équations de la Dynamique.....	214
Solutions du deuxième genre des équations de la Dynamique.....	226
Théorèmes sur les maxima.....	230
Existence des solutions du deuxième genre.....	240
Remarque.....	244
Cas particuliers.....	245

CHAPITRE XXIX.

DIVERSES FORMES DU PRINCIPE DE MOINDRE ACTION.

Diverses formes du principe de moindre action.....	249
Foyers cinétiques.....	261
Foyers maupertuisiens.....	266
Application aux solutions périodiques.....	269
Cas des solutions stables.....	270
Solutions instables.....	272

CHAPITRE XXX.

FORMATION DES SOLUTIONS DU DEUXIÈME GENRE.

Formation des solutions du deuxième genre.....	294
Formation effective des solutions.....	296
Discussion.....	311
Discussion des cas particuliers.....	322
Application aux équations du n° 13.....	323

CHAPITRE XXXI.

PROPRIÉTÉS DES SOLUTIONS DU DEUXIÈME GENRE.

Les solutions du deuxième genre et le principe de moindre action.....	331
Stabilité et instabilité.....	343
Application aux orbites de Darwin.....	352

CHAPITRE XXXII.

SOLUTIONS PÉRIODIQUES DE DEUXIÈME ESPÈCE.

	Pages.
Solutions périodiques de deuxième espèce.....	362

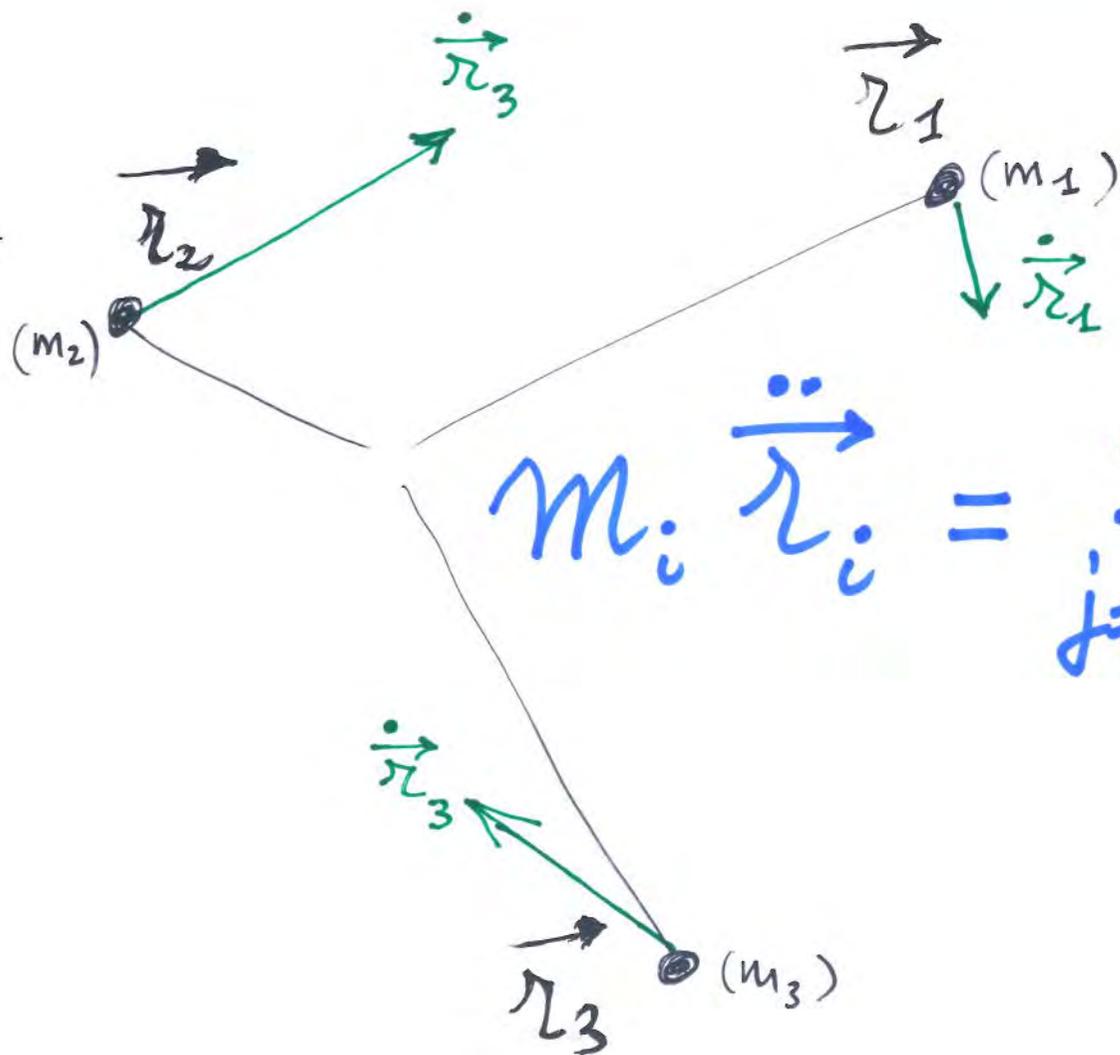
CHAPITRE XXXIII.

SOLUTIONS DOUBLEMENT ASYMPTOTIQUES.

Modes divers de représentation géométrique.....	372
Solutions homoclines.....	384
Solutions hétéroclines.....	391
Comparaison avec le n° 225.....	395
Exemples de solutions hétéroclines ...	397

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES DU TOME TROISIÈME ET DERNIER.

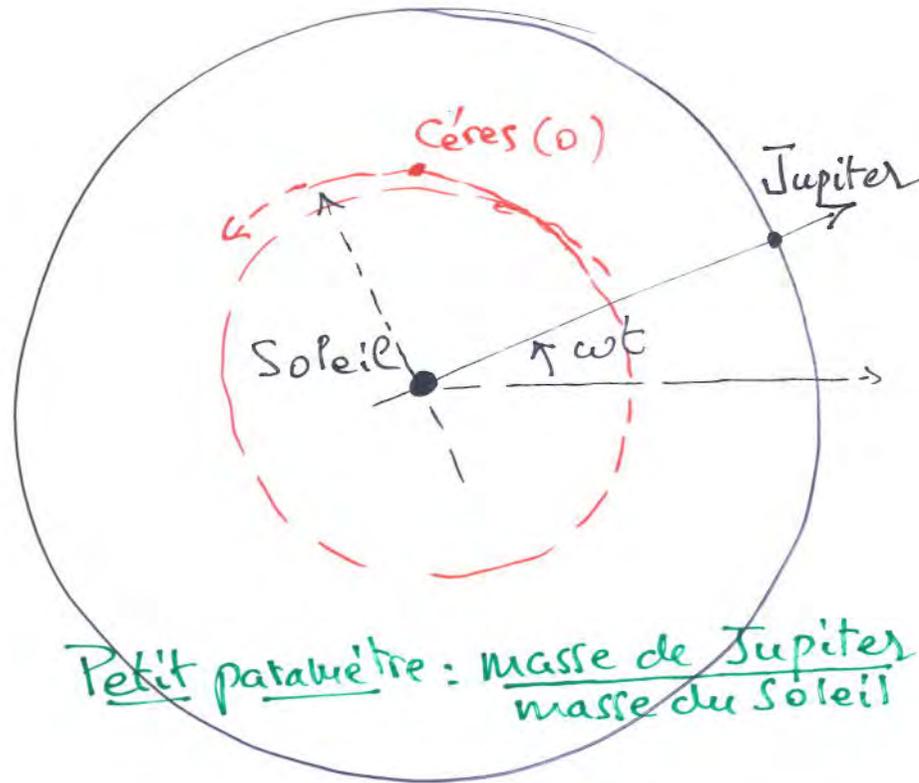
LE PROBLÈME DES TROIS CORPS



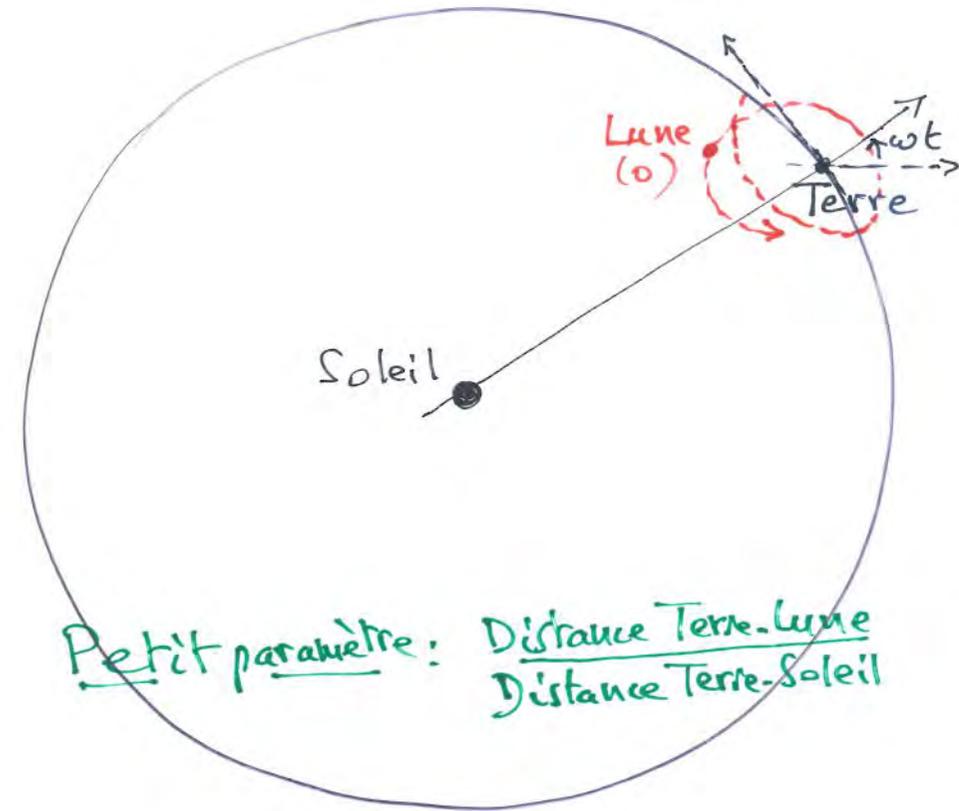
$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \sum_{j \neq i}$$

$$\frac{m_i m_j (\vec{r}_j - \vec{r}_i)}{\|\vec{r}_j - \vec{r}_i\|^3}$$

LE PROBLÈME RESTREINT CIRCULAIRE PLAN



CAS PLANÉTAIRE



CAS LUNAIRE

DIMENSIONS

	3 corps dans \mathbb{R}^3	3 corps dans \mathbb{R}^2	Problème restreint (circulaire plan)
Coordonnées de position	$3 \times 3 = 9$	$3 \times 2 = 6$	2
Coordonnées de vitesse	$3 \times 3 = 9$	$3 \times 2 = 6$	2
Réduction des translations	- 6	- 4	/
Réduction des rotations	- 3 - 1	- 1 - 1	+ 1 - 1
Fixation de l'énergie	- 1	- 1	- 1
	7	5	3

↓ Surface de section
2

Problème général de la Dynamique.

13. Nous sommes donc conduit à nous proposer le problème suivant :

Étudier les équations canoniques

$$(1) \quad \frac{dx_i}{dt} = \frac{dF}{dy_i}, \quad \frac{dy_i}{dt} = - \frac{dF}{dx_i},$$

en supposant que la fonction F peut se développer suivant les puissances d'un paramètre très petit μ de la manière suivante :

$$F = F_0 + \mu F_1 + \mu^2 F_2 + \dots,$$

en supposant de plus que F_0 ne dépend que des x et est indépendant des y ; et que F_1, F_2, \dots sont des fonctions périodiques de période 2π par rapport aux y .

2 PROBLÈMES

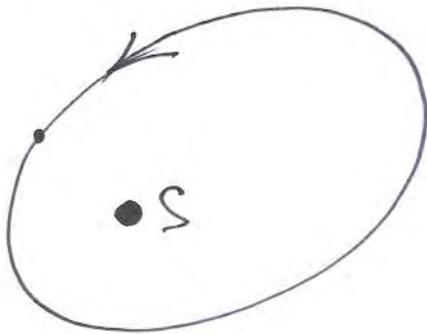
(NON)-INTÉGRABILITÉ

(IN)-STABILITÉ

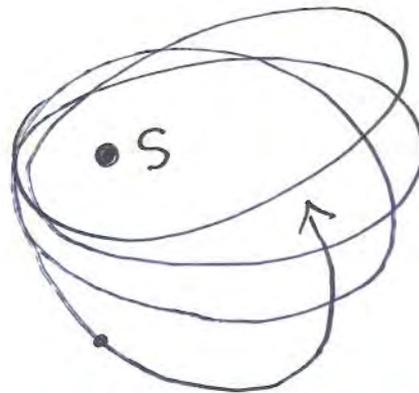
PROBLÈME RESTREINT

(Poucaud étudie le cas planétaire)

Problème "non trouble"
(ellipses de Kepler)



Problème "non trouble"
en repère tournant
(ellipses avec précession)



Problème restreint
en repère tournant



PÉRIODIQUE

QUASI-PÉRIODIQUE

$M=0$, INTÉGRABLE, STABLE

?

$M \neq 0$

LA CLÉ : LES SOLUTIONS PÉRIODIQUES

MNMC Tome I § 36

82

CHAPITRE III.

Il y a même plus : voici un fait que je n'ai pu démontrer rigoureusement, mais qui me paraît pourtant très vraisemblable.

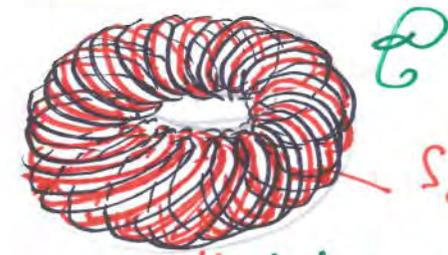
Étant données des équations de la forme définie dans le n° 13 et une solution particulière quelconque de ces équations, on peut toujours trouver une solution périodique (dont la période peut, il est vrai, être très longue), telle que la différence entre les deux solutions soit aussi petite qu'on le veut, pendant un temps aussi long qu'on le veut. D'ailleurs, ce qui nous rend ces solutions périodiques si précieuses, c'est qu'elles sont, pour ainsi dire, la seule brèche par où nous puissions essayer de pénétrer dans une place jusqu'ici réputée inabordable.

EXPLICATION : LES RÉSONANCES

La planète troublante J brise la symétrie de rotation



Dans l'espace des phases de dimension 4



S_0 quasi-périodique

S_0 (solution non troublée) et ses images par rotation \Rightarrow tore \mathcal{T}

\mathcal{T} non dynamiquement défini \Rightarrow se brise

\mathcal{T} dynamiquement défini
 \Rightarrow pourrait fermer? (KAM)
 (tome II, § 149)

Solutions périodiques "génériques"
 { exposants $\neq 0$ } tome I ch. $\frac{IV}{VII}$
 { sol. asymptotiques }

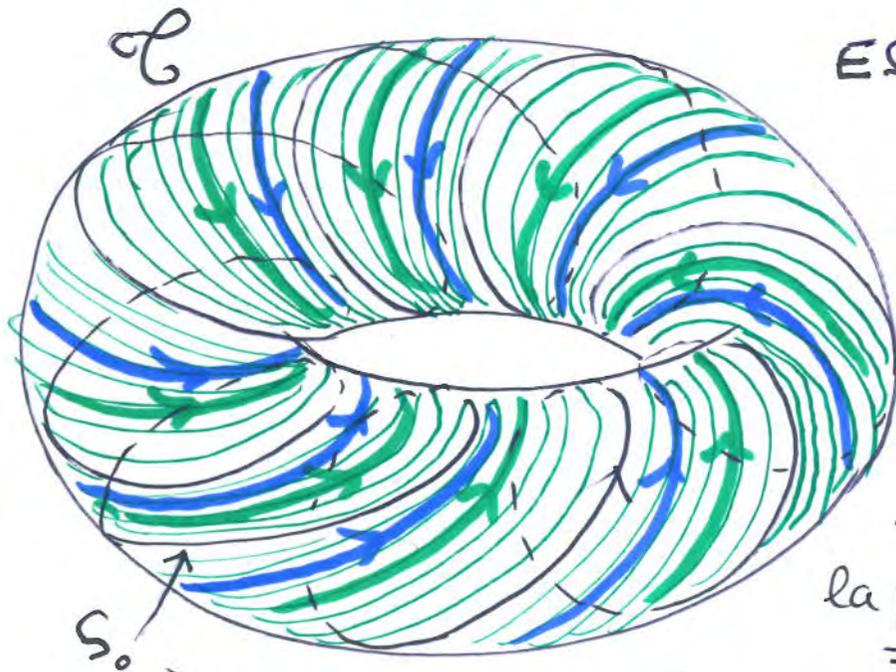
NON. INTÉGRABILITÉ
 tome I, ch. $\frac{V}{VI}$
 (coeff. de Fourier de la fonction perturbatrice)

NON-EXISTENCE DES INTÉGRALES UNIFORMES.

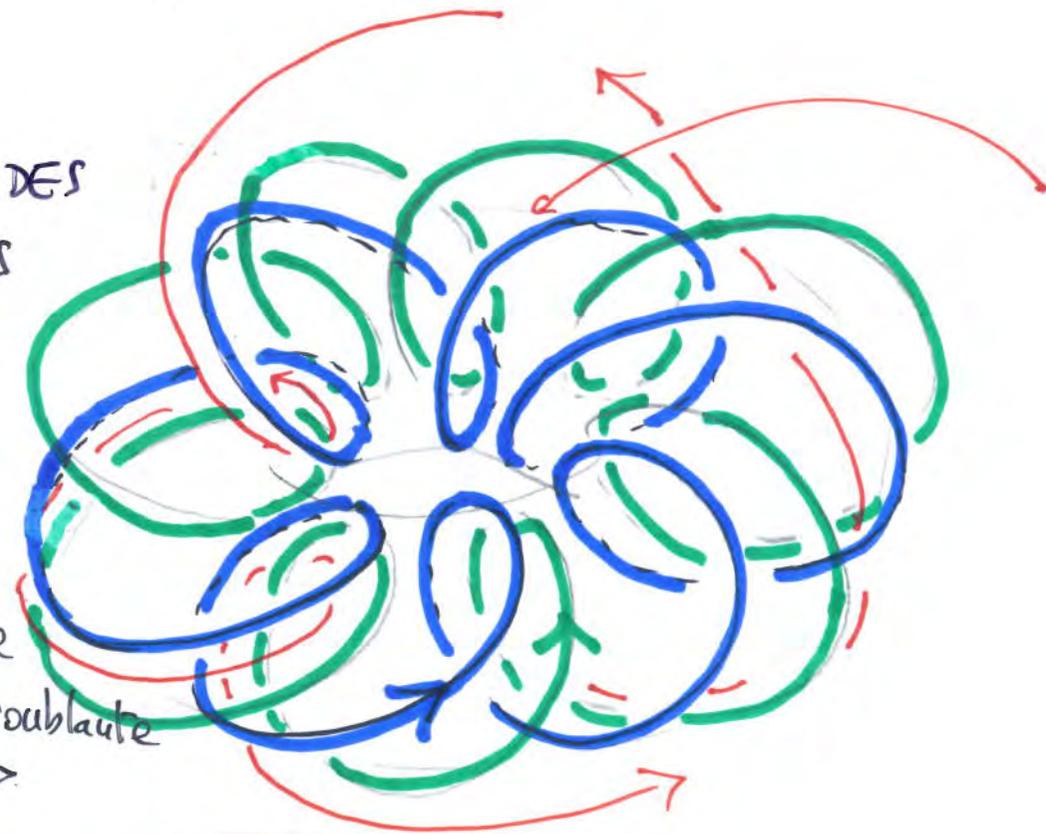
251

Nous devons donc conclure que, dans ce cas particulier du problème des trois Corps, il n'y a pas d'intégrale uniforme distincte de F.

Dans mon Mémoire des *Acta mathematica* (t. XIII), je me suis servi pour établir le même point de l'existence des solutions périodiques et du fait que les exposants caractéristiques ne sont pas nuls. La démonstration que je donne ici ne diffère de celle des *Acta* que par la forme, mais elle se prête mieux à la généralisation qui va suivre.



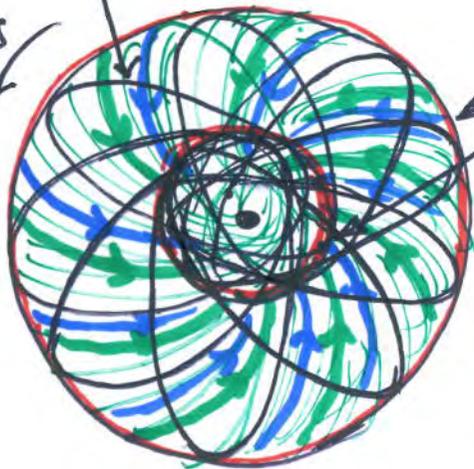
ESPACE DES PHASES



effet de la planète troublante
 \implies

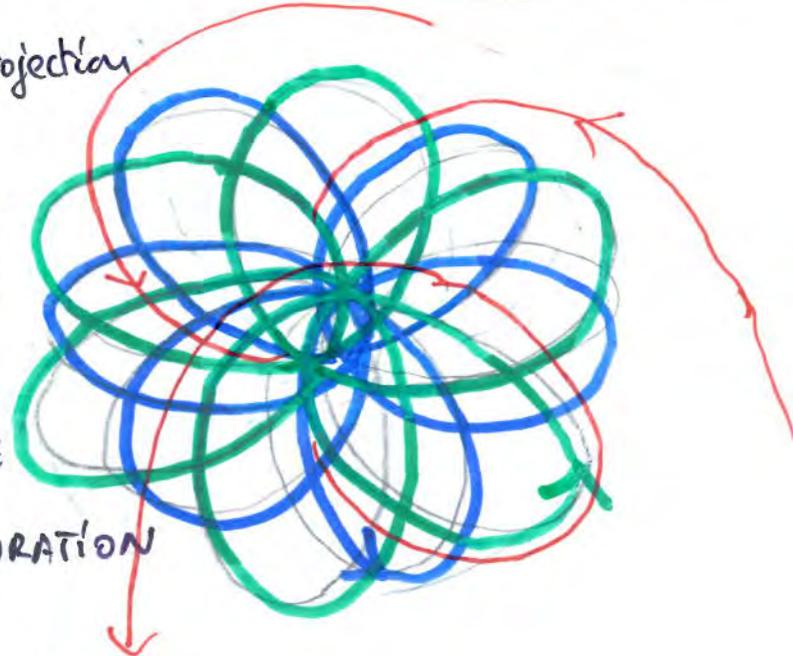
\Downarrow projection

Rotations



caustiques
 (= cercles)

ESPACE DE CONFIGURATION



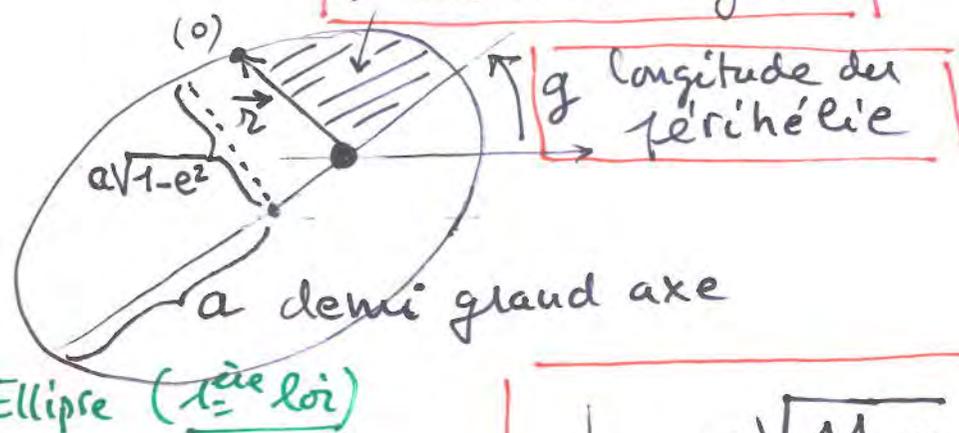
VARIABLES DE DELAUNAY (L, G, l, g)

II

Variables action-angle pour le mouvement "non troublé" du corps de masse nulle autour

- du soleil (cas planétaire)
- de la Terre (cas lunaire)

l anomalie moyenne



Ellipse (1^{ère} loi)

$$\ddot{\vec{x}} = - \frac{M \vec{x}}{\|\vec{x}\|^3}$$

$$F_k = \frac{\|\dot{\vec{x}}\|^2}{2} - \frac{M}{\|\vec{x}\|} = - \frac{M^2}{2L^2} < 0$$

$$L = \sqrt{Ma}, \quad G = \pm \sqrt{Ma(1-e^2)}$$

(moment cinétique normalisé)

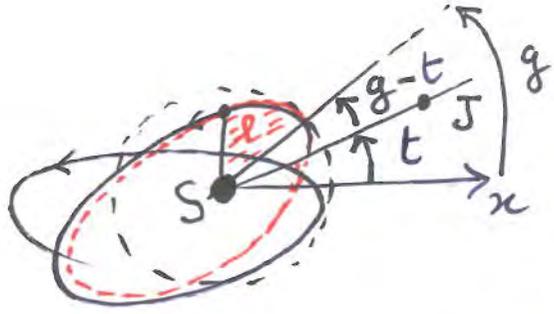
$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dL}{dt} = - \frac{\partial F_k}{\partial l} = 0, \quad \frac{dl}{dt} = \frac{\partial F_k}{\partial L} = \frac{M^2}{L^3} \quad (= n) \\ \frac{dG}{dt} = - \frac{\partial F_k}{\partial g} = 0, \quad \frac{dg}{dt} = \frac{\partial F_k}{\partial G} = 0 \end{array} \right.$$

2^{ème} loi

$$n^2 a^3 = M$$

3^{ème} loi

PROBLÈME DE KEPLER EN REPERE TOURNANT



$$F_0 = -\frac{1}{2L^2} - G$$

L, l variables rapides

G, g variables lentes (séculaires)

Z inadapté aux solutions circulaires de collision

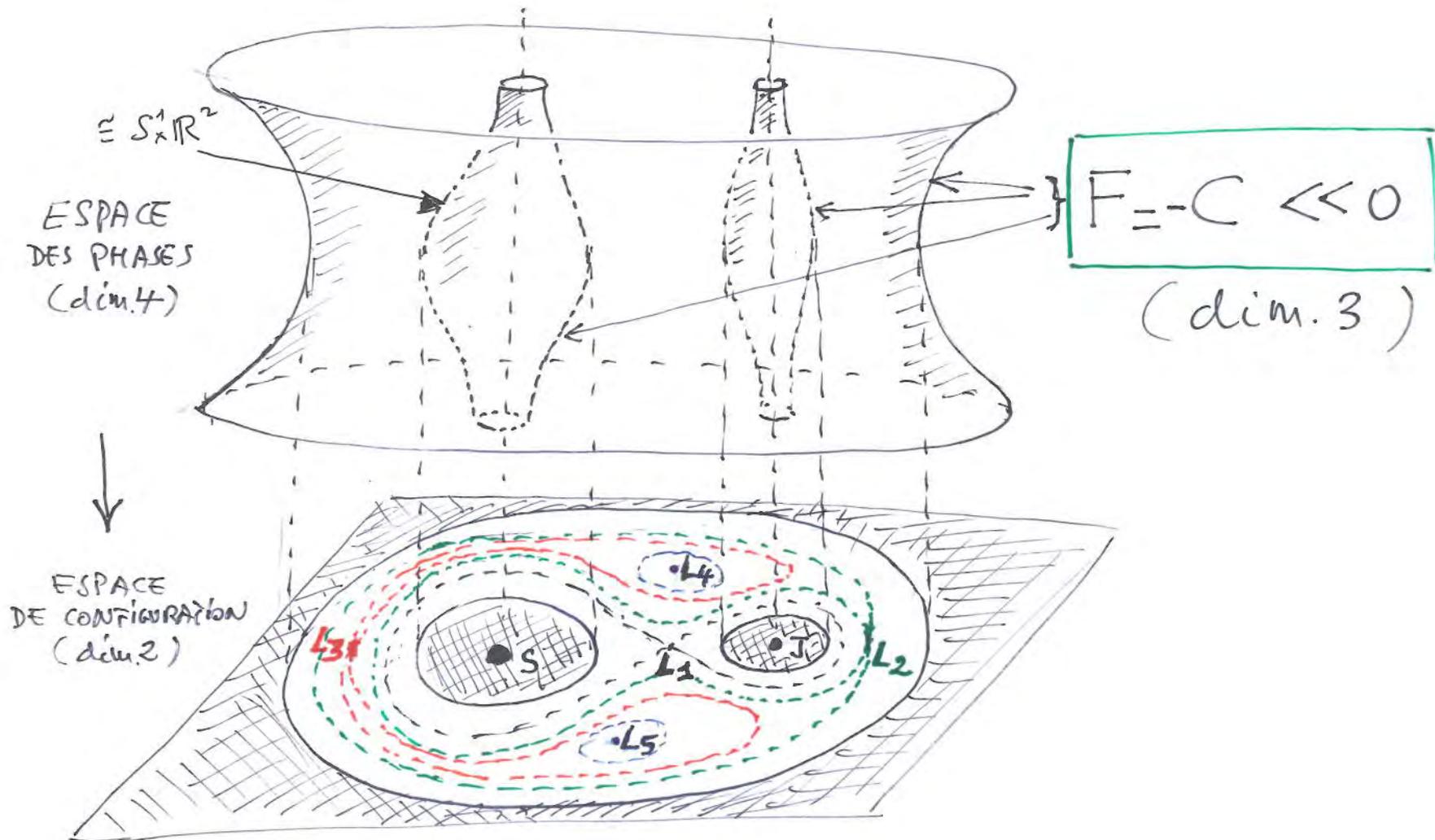
PROBLÈME RESTREINT CIRCULAIRE PLAN

Constante de Jacobi

$$F = \underbrace{-\frac{1}{2L^2} - G}_{F_0(L, G)} + \mu \underbrace{F_1(L, G, l, g-t)}_{\text{fonction perturbatrice}}$$

sous la forme du Problème général de la Dynamique

RÉGIONS DE HILL



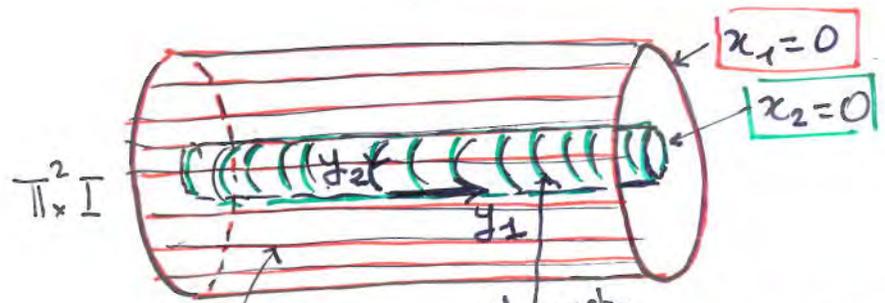
COORDONNÉES DE POINCARÉ

(définies et analytiques aux sol. circulaires)

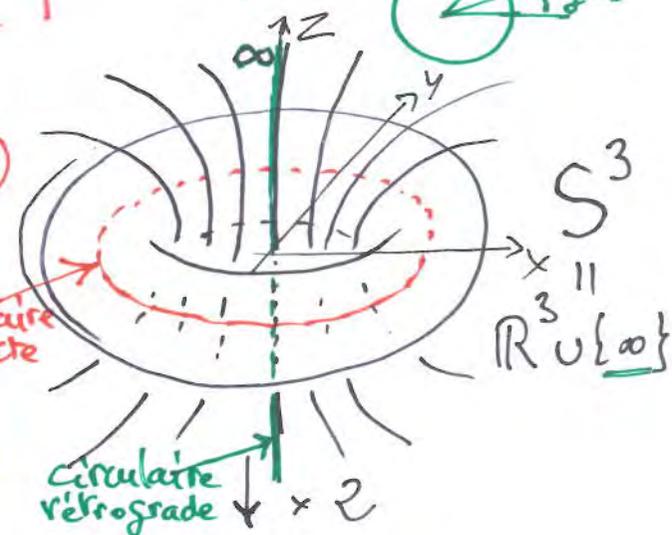
Tom III
§392

$$\begin{aligned} x_1 &= L - G & , & & x_2 &= L + G \\ 2y_1 &= l - g + t & , & & 2y_2 &= l + g - t \end{aligned}$$

garde un sens à la limite

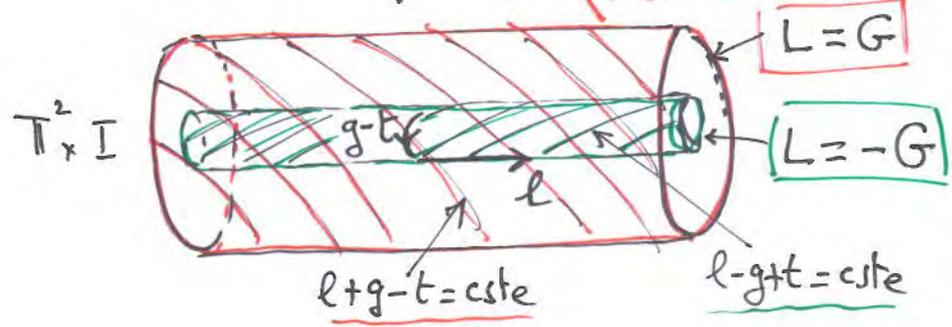


(Coordonnées polaires x, y, z)
quotient sur les bords



(dit dans le Mémoire, ou oublié dans les MNMC)

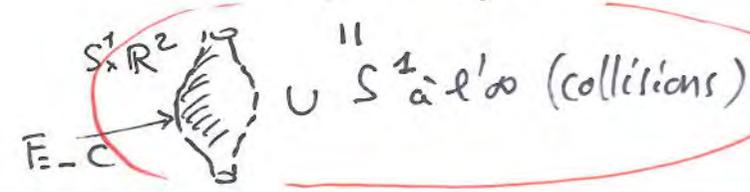
$$-C \ll 0$$



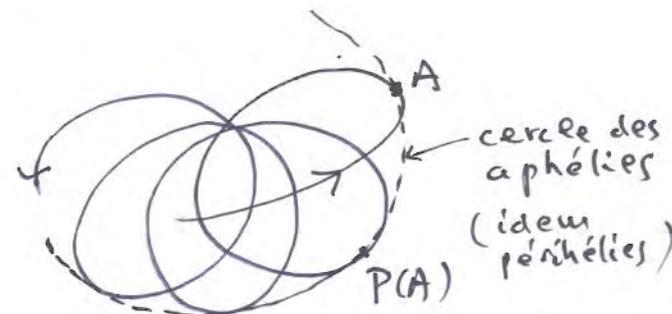
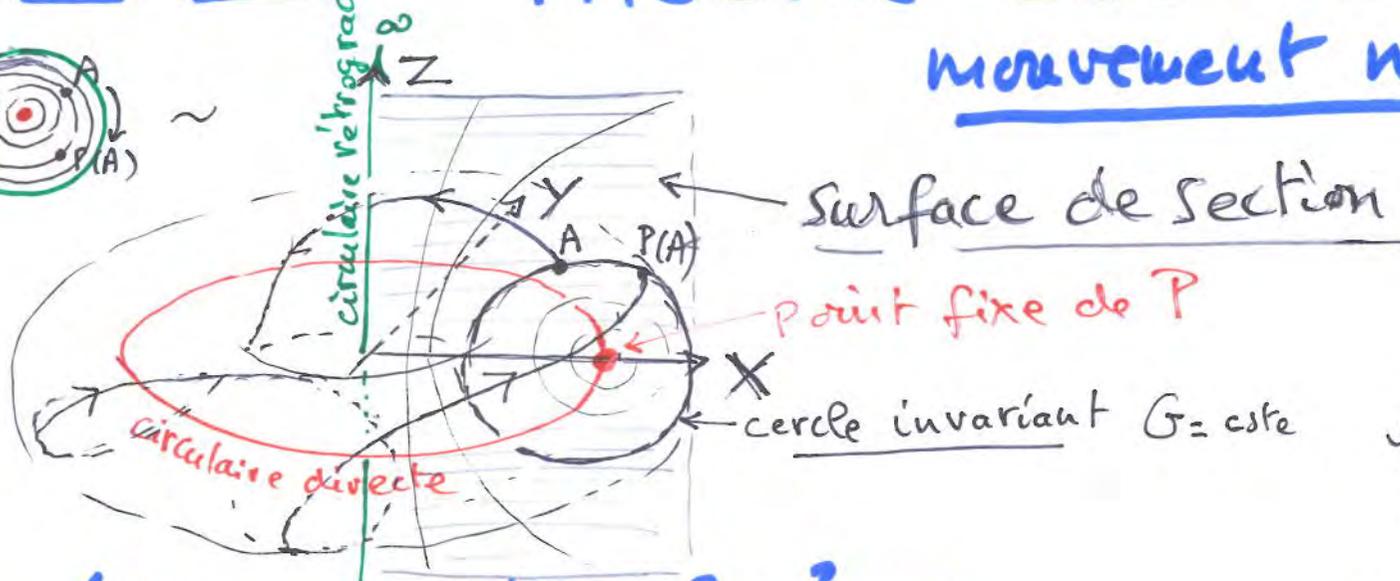
quotient sur les bords

$$SO(3) \cong \mathbb{R}P^3$$

S^3 / antipodie

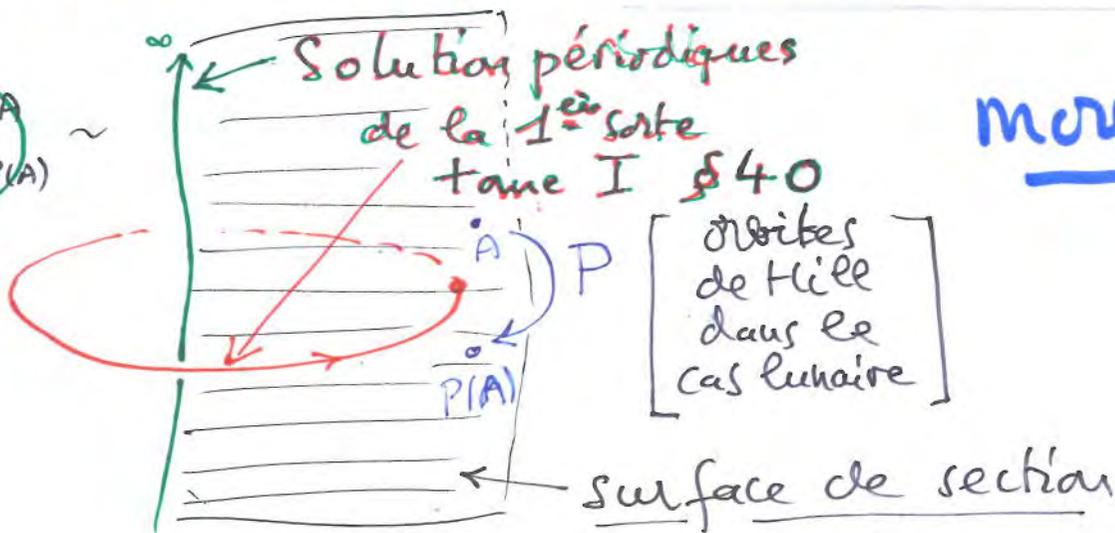


THÉORIE DES CONSÉQUENTS mouvement non troué

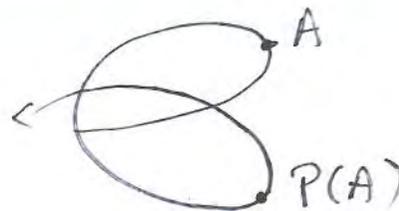


1^{er} retour \Leftrightarrow stroboscope

$$(F_0 = -C \ll 0) \Rightarrow \mathbb{R}^3 = S^3 \setminus \{0\}$$



mouvement troué

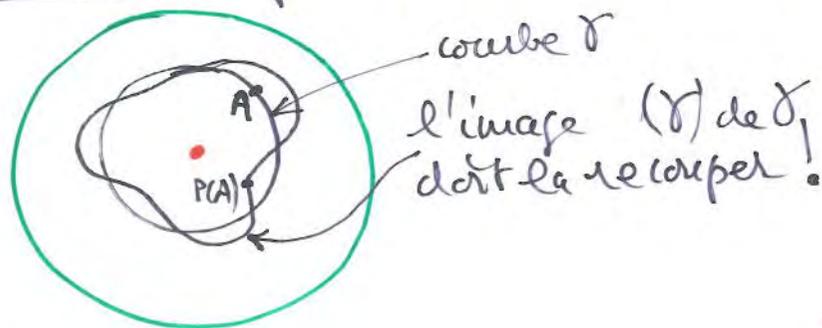


L'INVARIANT INTÉGRAL

L'application de $\mathbb{1}^{\text{er}}$ retour P préserve une mesure de masse totale finie

Idee : Bien que de nouvelles intégrales premières n'existent pas, il en existe d'infinitésimales i.e. des intégrales premières de l'équation aux variations le long d'une orbite.

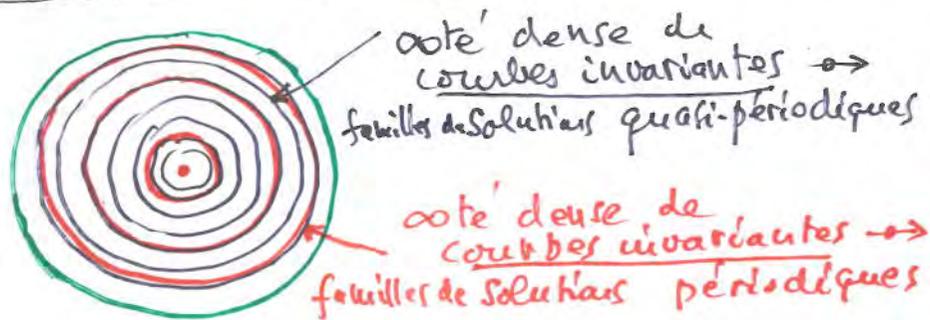
Corollaire : propriété d'intersection



Aujourd'hui, on dit que les équations canoniques préserve la structure symplectique de l'espace des phases.

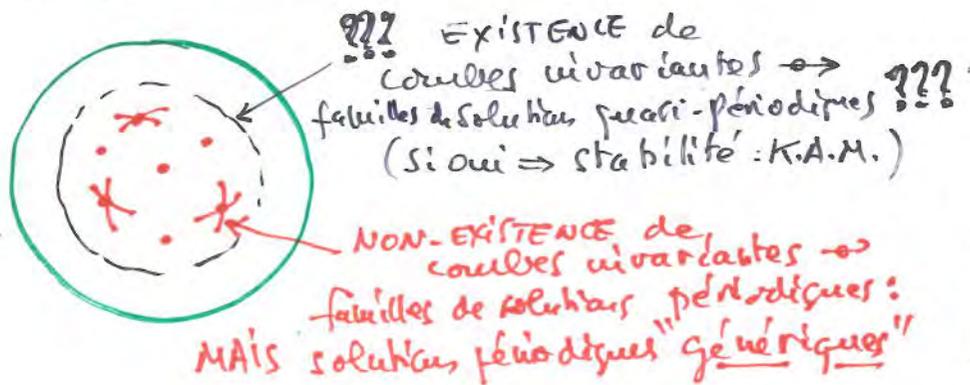
A LA RECHERCHE DE LA STABILITÉ

MOUVEMENT NON TROUBLE



CONVERGENCE DES SÉRIES DE LINDSTEDT A FREQUENCES VARIABLES

MOUVEMENT TROUBLE



Possibilité de la convergence des séries de Lindstedt à fréquences fixes bien choisies ??? §149

DIVERGENCE DES SÉRIES DE LINDSTEDT A FREQUENCES VARIABLES

tome II Ch. XIII

TOME II § 149

DIVERGENCE DES SÉRIES DE M. LINDSTEDT. p. 104/105

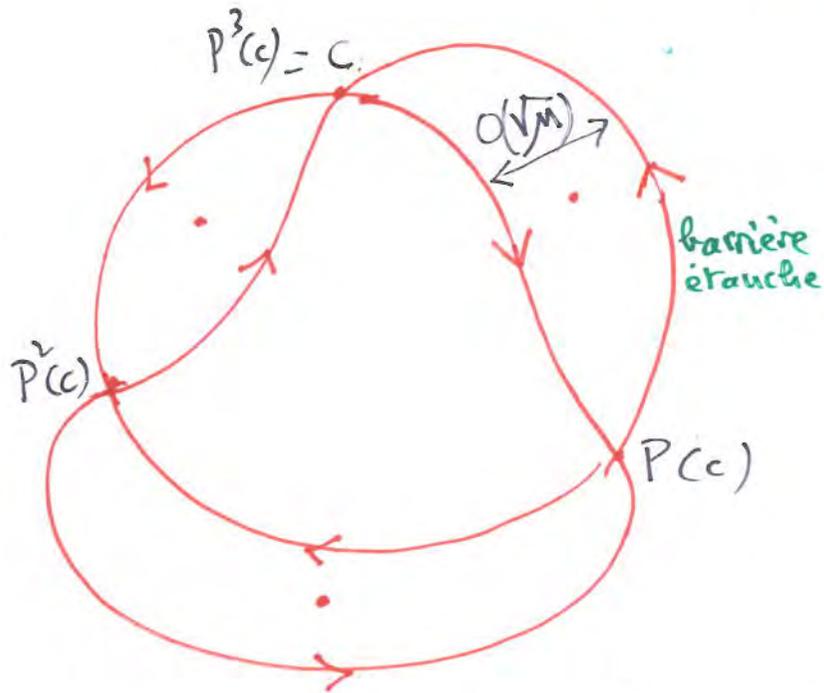
Ne peut-il pas arriver que les séries (2) convergent quand on donne aux x_i^0 certaines valeurs convenablement choisies ?

Supposons, pour simplifier, qu'il y ait deux degrés de liberté; les séries ne pourraient-elles pas, par exemple, converger quand x_1^0 et x_2^0 ont été choisis de telle sorte que le rapport $\frac{n_1}{n_2}$ soit incommensurable, et que son carré soit au contraire commensurable (ou quand le rapport $\frac{n_1}{n_2}$ est assujéti à une autre condition analogue à celle que je viens d'énoncer un peu au hasard) ?

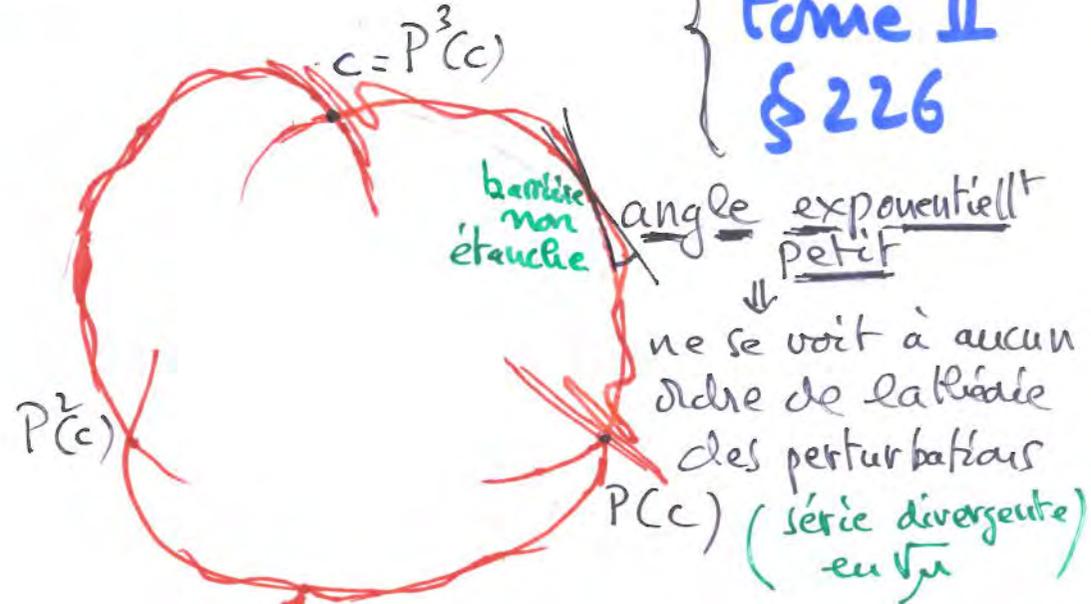
Les raisonnements de ce Chapitre ne me permettent pas d'affirmer que ce fait ne se présentera pas. Tout ce qu'il m'est permis de dire, c'est qu'il est fort invraisemblable.

L'ERREUR DU MÉMOIRE

chapitre ajouté
dans le Mémoire corrigé
tom II
§ 226



FORMELLEMENT INTÉGRABLE
(coïncidence fautive de
 $W^u(c)$ et $W^s(P(c))$)



..... MAIS NON INTÉGRABLE !
[Solutions homoclines
transverses $W^u(c) \nabla W^s(P(c))$]

DIVERGENCE DES SÉRIES
DE BOHLIN !

397. Que l'on cherche à se représenter la figure formée par ces deux courbes et leurs intersections en nombre infini dont chacune correspond à une solution doublement asymptotique, ces intersections forment une sorte de treillis, de tissu, de réseau à mailles infiniment serrées; chacune des deux courbes ne doit jamais se recouper elle-même, mais elle doit se replier sur elle-même d'une manière très complexe pour venir recouper une infinité de fois toutes les mailles du réseau.

On sera frappé de la complexité de cette figure, que je ne cherche même pas à tracer. Rien n'est plus propre à nous donner une idée de la complication du problème des trois corps et en général de tous les problèmes de Dynamique où il n'y a pas d'intégrale uniforme et où les séries de Bohlin sont divergentes.

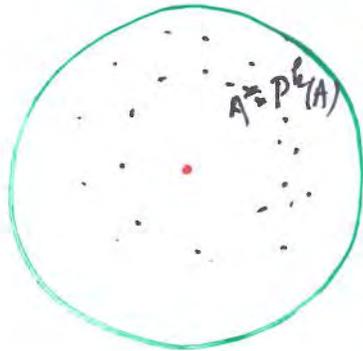
L'ERSATZ DE LA STABILITÉ PERDUE: Le théorème de récurrence

Tome III
Ch. XXVI
Stabilité à la
Poisson

↑
allusion au retour
des valeurs des demi-
grands axes de planètes
(absence de termes séculaires
puisque quand on néglige
les cubes des masses)

Tome II § 150

"Comparaison avec des
méthodes anciennes"



Pour presque toute donnée initiale
 A , l'orbite $\{P^k(A)\}_{k \in \mathbb{N}}$ reviendra
arbitrairement près de A .

Compréhension des "ensembles de
mesure nulle" avant Borel et
Lebesgue.

Ancêtre de la théorie ergodique

Mémoire corrigé 1890

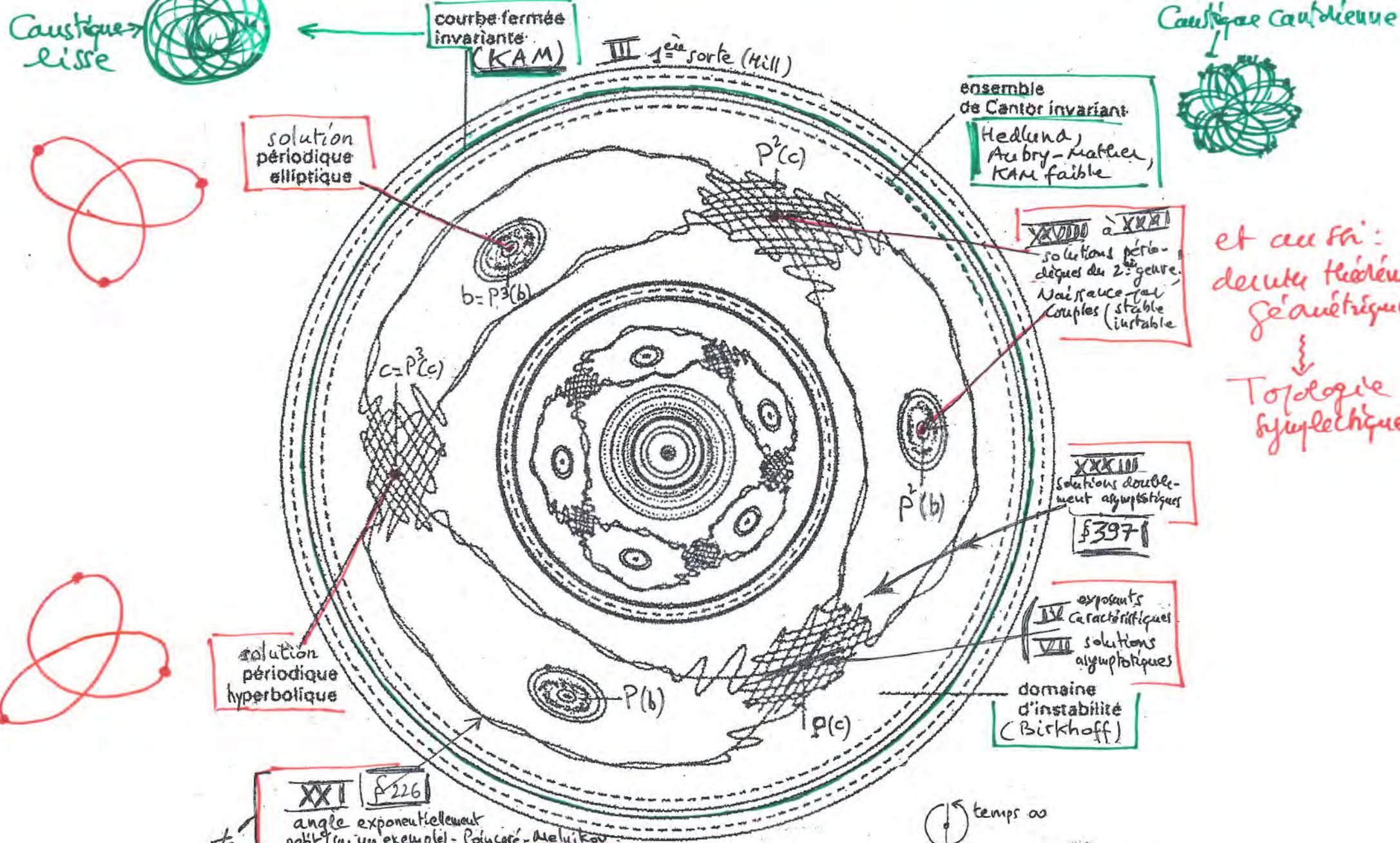
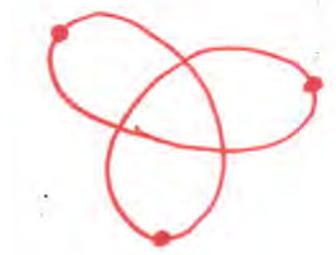
Introduction

Je suis bien loin d'avoir résolu complètement le problème que j'ai abordé. Je me suis borné à démontrer l'existence de certaines solutions particulières remarquables que j'appelle solutions périodiques, solutions asymptotiques, et solutions doublement asymptotiques. J'ai étudié plus spécialement un cas particulier du problème des trois corps, celui où l'une des masses est nulle et où le mouvement des deux autres est circulaire; j'ai reconnu que dans ce cas les trois corps repasseront une infinité de fois aussi près que l'on veut de leur position initiale, à moins que les conditions initiales du mouvement ne soient exceptionnelles.

MNMC Tome III Ch. XXVI

Si donc Poisson a cru pouvoir répondre affirmativement à la question de la stabilité telle qu'il l'avait posée, bien qu'il eût exclu les cas où le rapport des moyens mouvements est commensurable, nous aurons de même le droit de regarder comme démontrée la stabilité telle que nous la définissons, bien que nous soyons forcés d'exclure les molécules exceptionnelles dont nous venons de parler.

STRUCTURE DE L'APPLICATION DE PREMIER RETOUR



XXVII à XXVI
solutions périodiques du 2^e genre.
Naissance par couples (stable instable)

XXXIII
solutions doublement asymptotiques
§397

IV exposants caractéristiques
VII solutions asymptotiques

XXI §226

angle exponentiellement petit (ou un exemple): Poincaré-Melnikov

ERREUR DU MÉMOIRE: coïncidence formelle ⇒ stabilité (p. 143, du Mémoire de 1889)

et au fait:
deuxième théorie
géométrique

↓
Topologie
symplectique

Le contraire du vrai ,
ce n'est pas le faux ,
c'est l'insignifiant

René THOM