Cliché Manuel

Imp. Ch. Wittmann

Une promenade dans les Méthodes nouvelles de la mécanique céleste.

A. Chenciner

I.M.C.C.E & Université Paris 7

Observatoire de Paris, le 9 juillet 2012

SUR LE

PROBLÈME DES TROIS CORPS

ET LES

ÉQUATIONS DE LA DYNAMIQUE

PAR

H. POINCARÉ

À PARIS.

MÉMOIRE COURONNÉ

DU PRIX DE S. M. LE ROI OSCAR II

LE 21 JANVIER 1889.

AVEC DES NOTES

PAR L'AUTEUR.

L'INTRODUCTION DU MÉMOIRE DE 1889
(VERSION NON CORRIGÉE)

En ce qui concerne le problème des trois corps, je ne suis pas sorti du cas suivant:

Je considère trois masses, la première très grande, la seconde petite mais finie, la troisième infiniment petite; je suppose que les deux premières décrivent un cercle autour de leur centre de gravité commun et que la troisième se meut dans le plan de ces cercles. Tel serait le cas d'une petite planète troublée par Jupiter, si l'on négligeait l'excentricité de Jupiter et l'inclinaison des orbites.

Dans ce cas particulier, j'ai démontré rigoureusement la stabilité, non seulement en montrant que le rayon vecteur de la petite planète ne peut croitre indéfiniment, mais en lui fixant sinon ses limites précises, au moins des limites aussi rapprochées qu'on le veut de ces limites précises.

LA TABLE DES MATIÈRES DU MÉMOIRE DE 1889 (VERSION NON CORRIGÉE)

TABLE DES MATIÈRES.

LE CHAPITRE AJOUTÉ DANS LA VERSION CORRIGÉE DE 1890

Deuxième partie.

1892

LES MÉTHODES NOUVELLES

DE LA

MÉCANIQUE CÉLESTE

PAR

H. POINCARÉ,
MEMBRE DE L'INSTITUT,
PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES.

TOME I.

**Solutions périodiques. — Non-existence des intégrales uniformes.
Solutions asymptotiques.**

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1892

TABLE DES MATIÈRES

DU TOME PREMIER.

CHAPITRE III.

SOLUTIONS PÉRIODIQUES.

CHAPITRE IV.

EXPOSANTS CARACTÉRISTIQUES.

CHAPITRE V.

NON-EXISTENCE DES INTÉGRALES UNIFORMES.

CHAPITRE VI.

DÉVELOPPEMENT APPROCHÉ DE LA FONCTION PERTURBATRICE.

CHAPITRE VII.

SOLUTIONS ASYMPTOTIQUES.

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES DU TOME PREMIER.

16293 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS ET FILS, quai des Grands-Augustins, 55.

1893

LES MÉTHODES NOUVELLES

DE LA

MÉCANIQUE CÉLESTE

PAR

H. POINCARÉ,

MEMBRE DE L'INSTITUT,
PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES.

TOME II.

Méthodes de MM. Newcomb, Gyldén, Lindstedt et Bohlin.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55

1893

TABLE DES MATIÈRES

DU TOME DEUXIÈME.

CHAPITRE VIII.

CALCUL FORMEL.

CHAPITRE IX.

MÉTHODES DE MM. NEWCOMB ET LINDSTEDT.

CHAPITRE X.

APPLICATION A L'ÉTUDE DES VARIATIONS SÉCULAIRES.

CHAPITRE XI.

APPLICATION AU PROBLÈME DES TROIS CORPS.

CHAPITRE XII.

APPLICATION AUX ORBITES PEU EXCENTRIQUES.

CHAPITRE XIII.

DIVERGENCE DES SÉRIES DE M. LINDSTEDT.

CHAPITRE XIV.

CALCUL DIRECT DES SÉRIES.

CHAPITRE XV.

AUTRES PROCÉDÉS DE CALCUL DIRECT.

CHAPITRE XVI.

MÉTHODES DE M. GYLDÉN.

CHAPITRE XVII.

CAS DES ÉQUATIONS LINÉAIRES.

CHAPITRE XVIII.

CAS DES ÉQUATIONS NON LINÉAIRES.

CHAPITRE XIX.

MÉTHODES DE M. BOHLIN.

CHAPITRE XX.

SÉRIES DE M. BOHLIN.

CHAPITRE XXI.

EXTENSION DE LA MÉTHODE DE M. BOHLIN

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES DU TOME DEUXIÈME.

1899

LES MÉTHODES NOUVELLES

DE LA

MÉCANIQUE CÉLESTE

PAR

H. POINCARÉ,

MEMBRE DE L'INSTITUT,
PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES

TOME III.

**Invariants intégraux. — Solutions périodiques du deuxième genre.
Solutions doublement asymptotiques.**

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1899

TABLE DES MATIÈRES

DU TOME TROISIÈME.

CHAPITRE XXII.

INVARIANTS INTÉGRAUX.

CHAPITRE XXIII.

FORMATION DES INVARIANTS.

CHAPITRE XXIV.

USAGE DES INVARIANTS INTÉGRAUX.

CHAPITRE XXV.

INVARIANTS INTÉGRAUX ET SOLUTIONS ASYMPTOTIQUES.

CHAPITRE XXVI.

STABILITÉ A LA POISSON.

CHAPITRE XXVII.

THÉORIE DES CONSÉQUENTS.

CHAPITRE XXVIII.

SOLUTIONS PÉRIODIQUES DU DEUXIÈME GENRE.

CHAPITRE XXIX.

DIVERSES FORMES DU PRINCIPE DE MOINDRE ACTION.

CHAPITRE XXX.

FORMATION DES SOLUTIONS DU DEUXIÈME GENRE.

CHAPITRE XXXI.

PROPRIÉTÉS DES SOLUTIONS DU DEUXIÈME GENRE.

CHAPITRE XXXII.

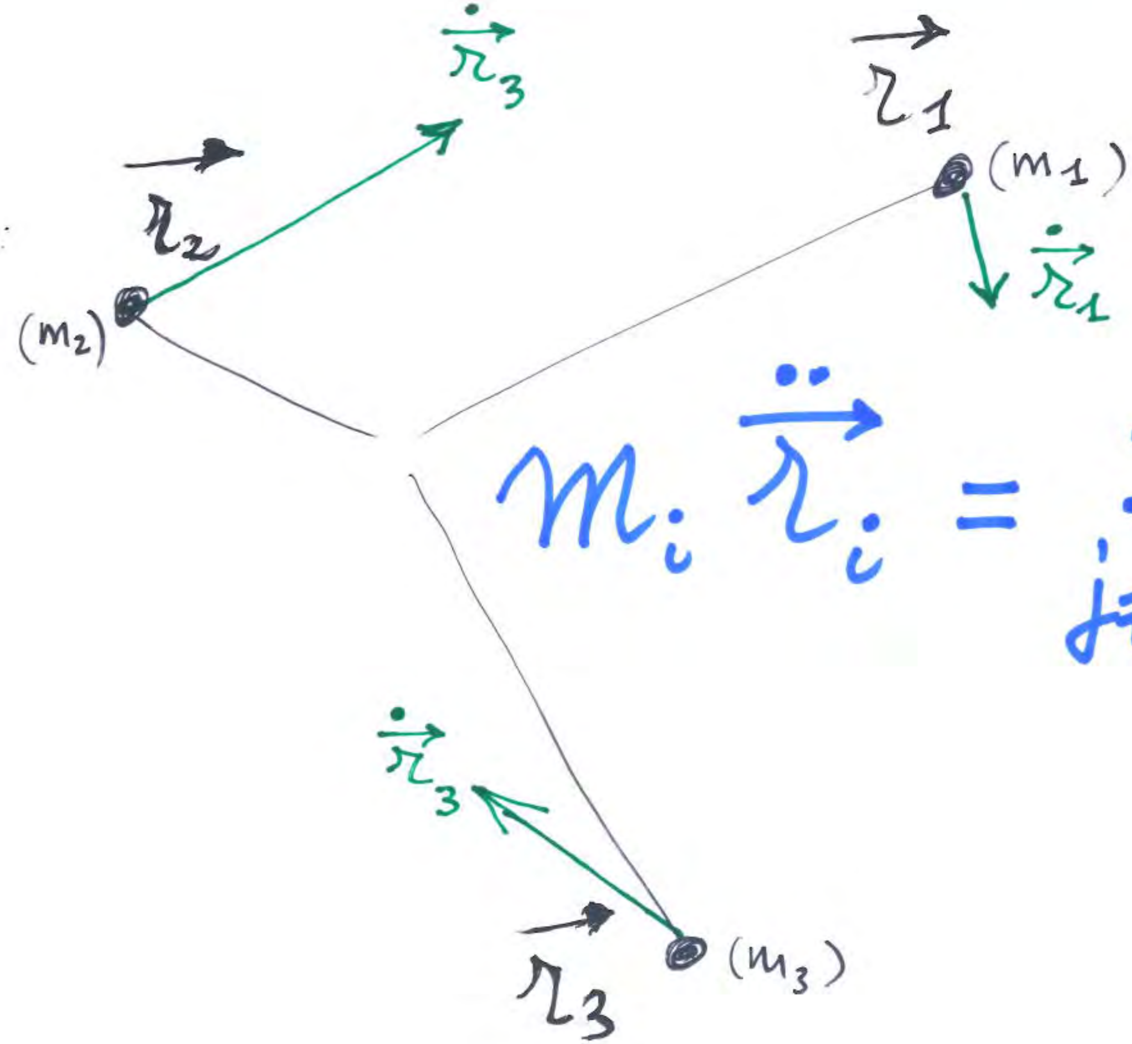
SOLUTIONS PÉRIODIQUES DE DEUXIÈME ESPÈCE.

CHAPITRE XXXIII.

SOLUTIONS DOUBLEMENT ASYMPTOTIQUES.

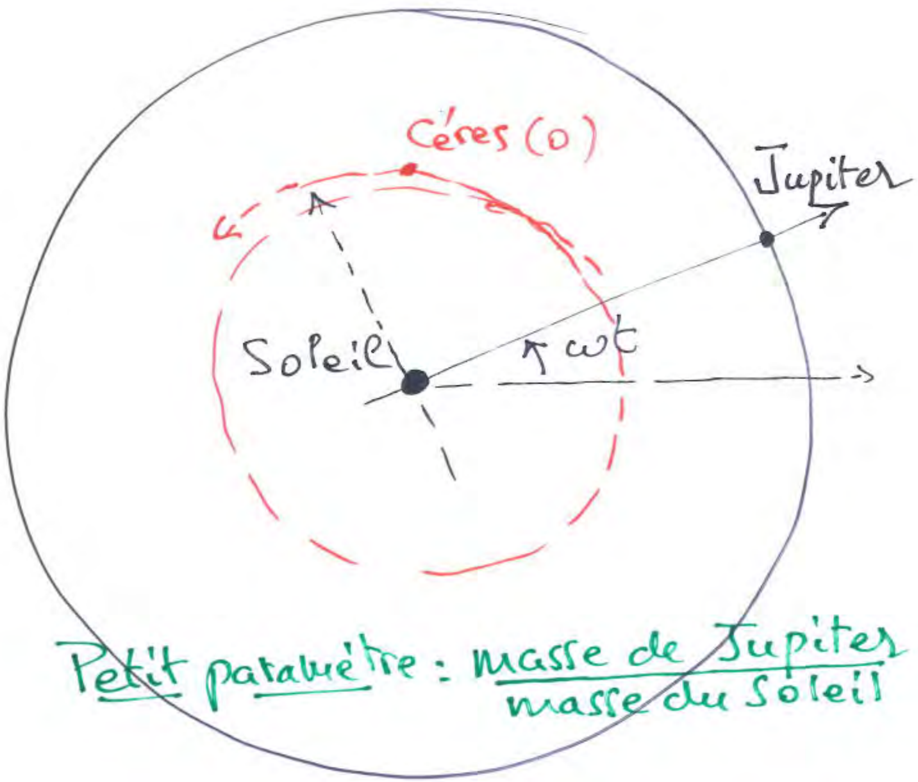
FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES DU TOME TROISIÈME ET DERNIER.

LE PROBLÈME DES TROIS CORPS

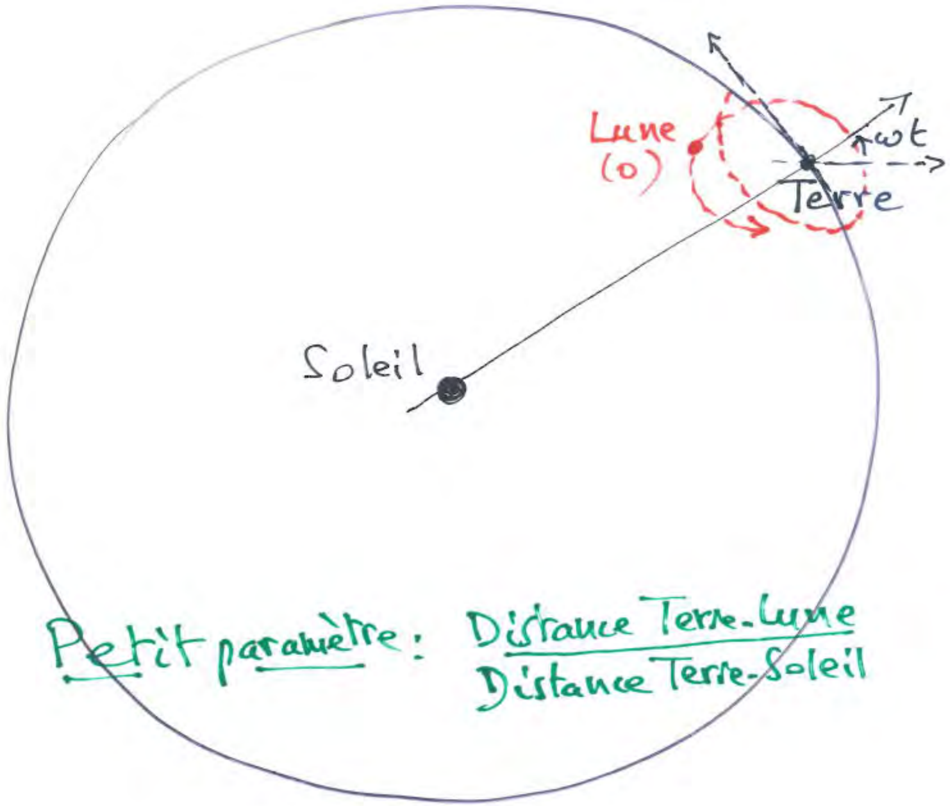


$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \sum_{j \neq i} \frac{m_i m_j (\vec{r}_j - \vec{r}_i)}{\| \vec{r}_j - \vec{r}_i \|^3}$$

LE PROBLÈME RESTREINT CIRCULAIRE PLAN



CAS PLANÉTAIRE



CAS LUNAIRE

DIMENSIONS

	3 corps dans $\mathbb{R}^3$	3 corps dans $\mathbb{R}^2$	Problème restreint (circulaire plan)	
Coordonnées de position	$3 \times 3 = 9$	$3 \times 2 = 6$	2	repère
Coordonnées de vitesse	$3 \times 3 = 9$	$3 \times 2 = 6$	2	tournant
Réduction des translations	-6	-4		
Réduction des rotations	$-3-1$	$-1-1$	$+1-1$	
Fixation de l'énergie	-1	-1	-1	
	7	5	3	

$\downarrow$ surface de section

2

MNMC Tome I §13

Problème général de la Dynamique.

13. Nous sommes donc conduit à nous proposer le problème suivant :

Étudier les équations canoniques

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{dF}{dy_i}, \qquad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{dF}{dx_i}, \tag{1}$$

en supposant que la fonction F peut se développer suivant les puissances d'un paramètre très petit μ de la manière suivante :

$$F = F_0 + \mu F_1 + \mu^2 F_2 + \ldots,$$

en supposant de plus que F_0 ne dépend que des x et est indépendant des y ; et que F_1, F_2, ... sont des fonctions périodiques de période 2π par rapport aux y.

2 PROBLÈMES

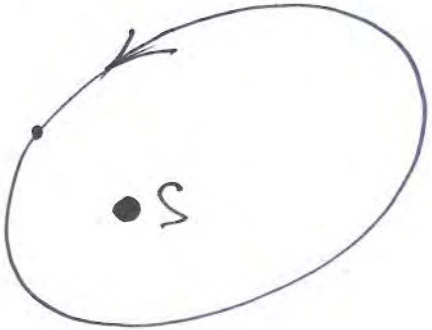
(NON)- INTÉGRABILITÉ

(IN)- STABILITÉ

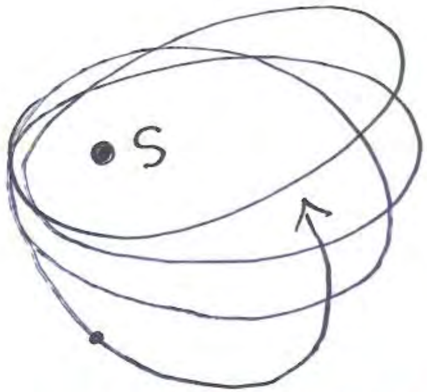
PROBLÈME RESTREINT

(Poincaré étudie le cas planétaire)

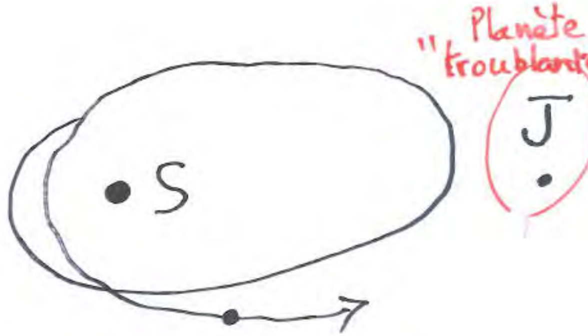
Problème "non troublé"
(ellipses de Kepler)



Problème "non troublé"
en repère tournant
(ellipses avec précession)



Problème restreint
en repère tournant



PÉRIODIQUE QUASI-PÉRIODIQUE

$\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}$

$\mu=0$, INTÉGRABLE, STABLE

?

$\mu \neq 0$

LA CLÉ : LES SOLUTIONS PÉRIODIQUES

MNMC Tome I § 36

Il y a même plus : voici un fait que je n'ai pu démontrer rigoureusement, mais qui me paraît pourtant très vraisemblable.

Étant données des équations de la forme définie dans le n° 13 et une solution particulière quelconque de ces équations, on peut toujours trouver une solution périodique (dont la période peut, il est vrai, être très longue), telle que la différence entre les deux solutions soit aussi petite qu'on le veut, pendant un temps aussi long qu'on le veut. D'ailleurs, ce qui nous rend ces solutions périodiques si précieuses, c'est qu'elles sont, pour ainsi dire, la seule brèche par où nous puissions essayer de pénétrer dans une place jusqu'ici réputée inabordable.

EXPLICATION : LES RÉSONANCES

La planète troublante J brise la symétrie de rotation

$\mathcal{T}$

Dans l'espace des phases de dimension 4

$\mathcal{T}$

S_0 périodique

S_0 quasi-périodique

S_0 (solution non troublée) et ses images par rotation $\Rightarrow$ $\boxed{\text{tore } \mathcal{T}}$

$\Downarrow$

$\mathcal{T}$ non dynamiquement défini $\Rightarrow$ se brise

$\Downarrow$

Solutions périodiques "génériques"

{ exposants $\neq 0$
{ sol. asymptotiques

tome I ch. IV / VII

$\Downarrow$

NON-INTÉGRABILITÉ

tome I, Ch. V & VI

(coeff. de Fourier de la fonction perturbatrice)

$\Downarrow$

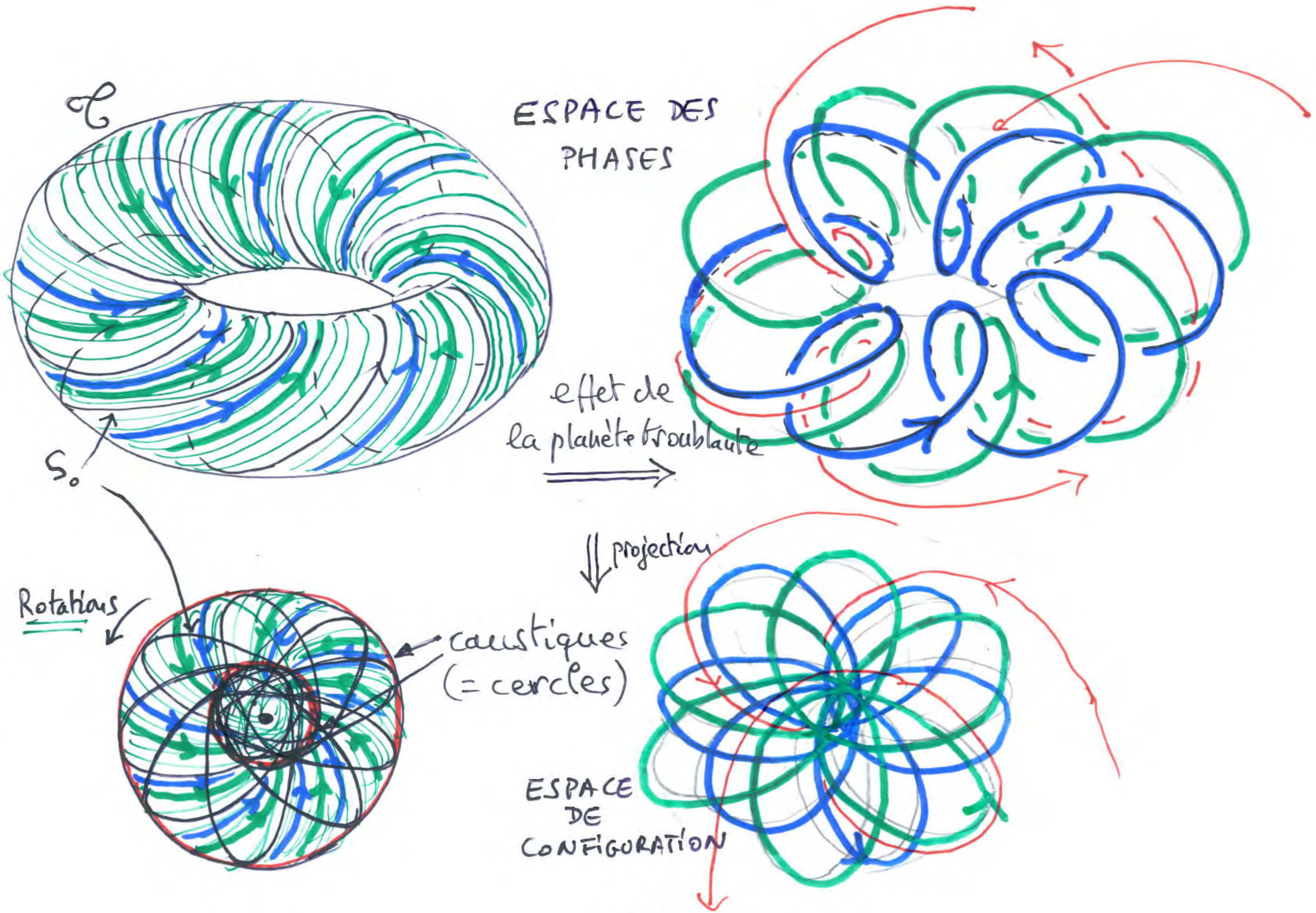
$\mathcal{T}$ dynamiquement défini

$\Rightarrow$ pourrait persister ? (KAM)

(tome II, § 149)

Nous devons donc conclure que, dans ce cas particulier du problème des trois Corps, il n'y a pas d'intégrale uniforme distincte de F.

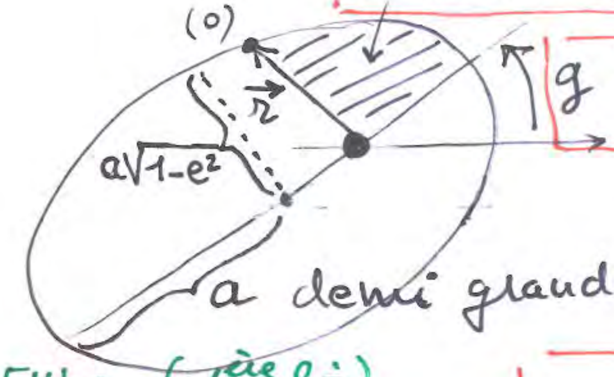
Dans mon Mémoire des *Acta mathematica* (t. XIII), je me suis servi pour établir le même point de l'existence des solutions périodiques et du fait que les exposants caractéristiques ne sont pas nuls. La démonstration que je donne ici ne diffère de celle des *Acta* que par la forme, mais elle se prête mieux à la généralisation qui va suivre.


𝒞
ESPACE DES PHASES
effet de la planète troublante
S₀
projection
Rotations
caustiques (= cercles)
ESPACE DE CONFIGURATION

VARIABLES DE DELAUNAY (L, G, ℓ, g)

||

Variables action-angle pour le mouvement "non troublé" du corps de masse nulle autour
- du Soleil (cas planétaire)
- de la Terre (cas lunaire)



Ellipse (1ère loi)

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{M\vec{r}}{\|\vec{r}\|^3}$$

$$F_K = \frac{\|\dot{\vec{r}}\|^2}{2} - \frac{M}{\|\vec{r}\|} = -\frac{M^2}{2L^2} < 0$$

$$\boxed{L = \sqrt{Ma}\ , \quad G = \pm\sqrt{Ma(1-e^2)}}$$

(moment cinétique normalisé)

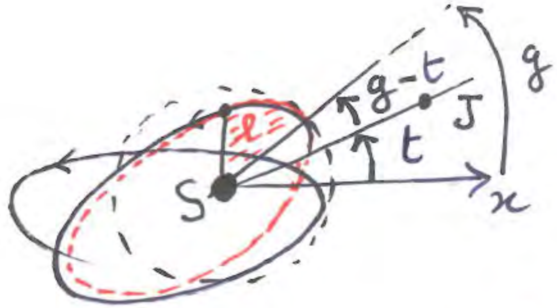
$$\begin{cases} \dfrac{dL}{dt} = -\dfrac{\partial F_K}{\partial \ell} = 0\ , & \dfrac{d\ell}{dt} = \dfrac{\partial F_K}{\partial L} = \dfrac{M^2}{L^3} \ (= n) \\[2ex] \dfrac{dG}{dt} = -\dfrac{\partial F_K}{\partial g} = 0\ , & \dfrac{dg}{dt} = \dfrac{\partial F_K}{\partial G} = 0 \end{cases}$$

2ème loi

$$\boxed{n^2 a^3 = M}$$

3ème loi

PROBLÈME DE KEPLER EN REPÈRE TOURNANT



$$F_0 = -\frac{1}{2L^2} - G$$

L, ℓ variables rapides

G, g variables lentes (<u>séculaires</u>)

Z inadapté aux solutions — circulaires / de collision

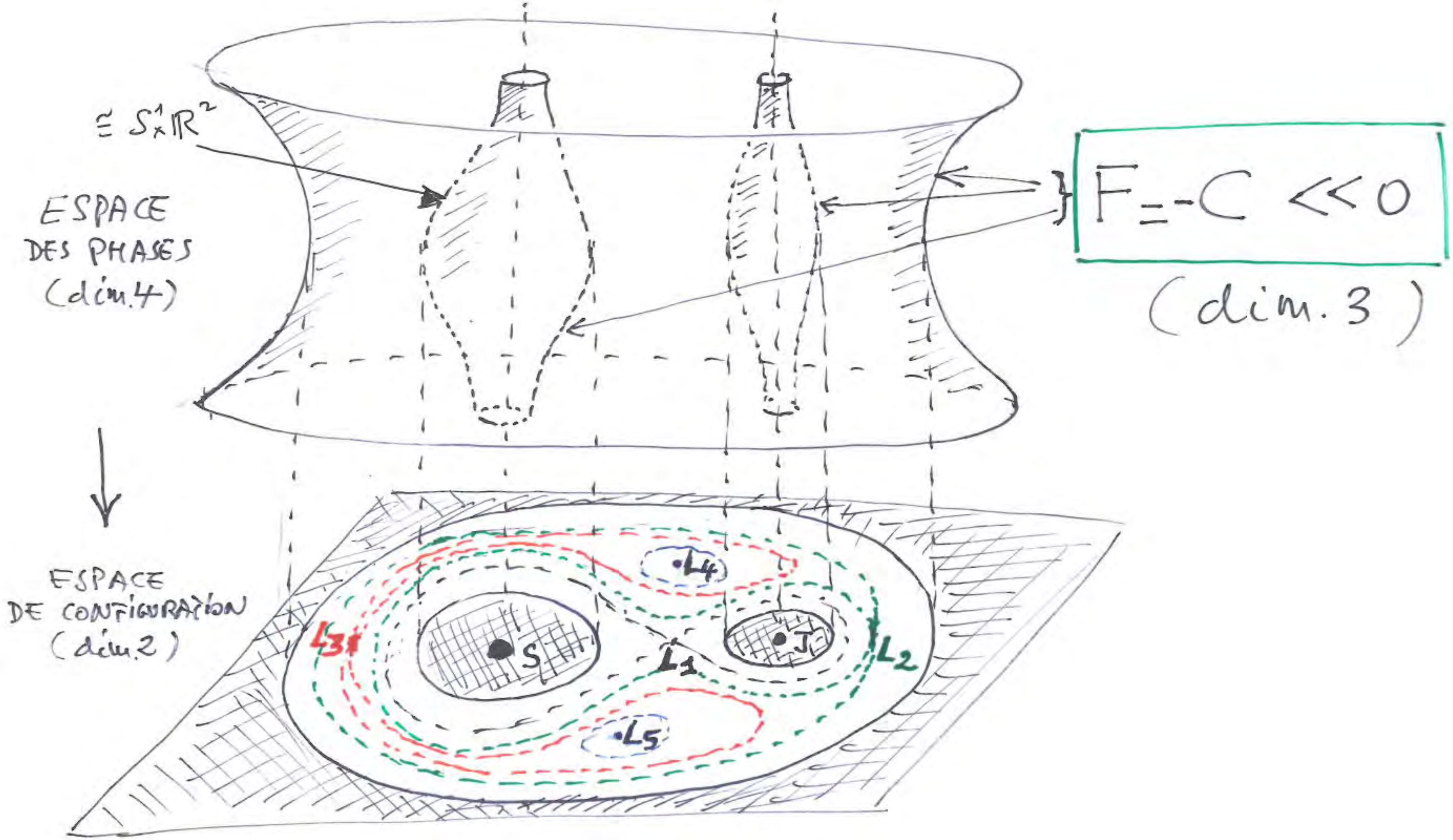
PROBLÈME RESTREINT CIRCULAIRE PLAN

$\boxed{\text{Constante de Jacobi}}$

$$F = \underbrace{-\frac{1}{2L^2} - G}_{F_0(L,G)} + \underbrace{\mu F_1(L, G, \ell, g-t)}_{\text{fonction perturbatrice}}$$

sous la forme du <u>Problème général de la Dynamique</u>

RÉGIONS DE HILL



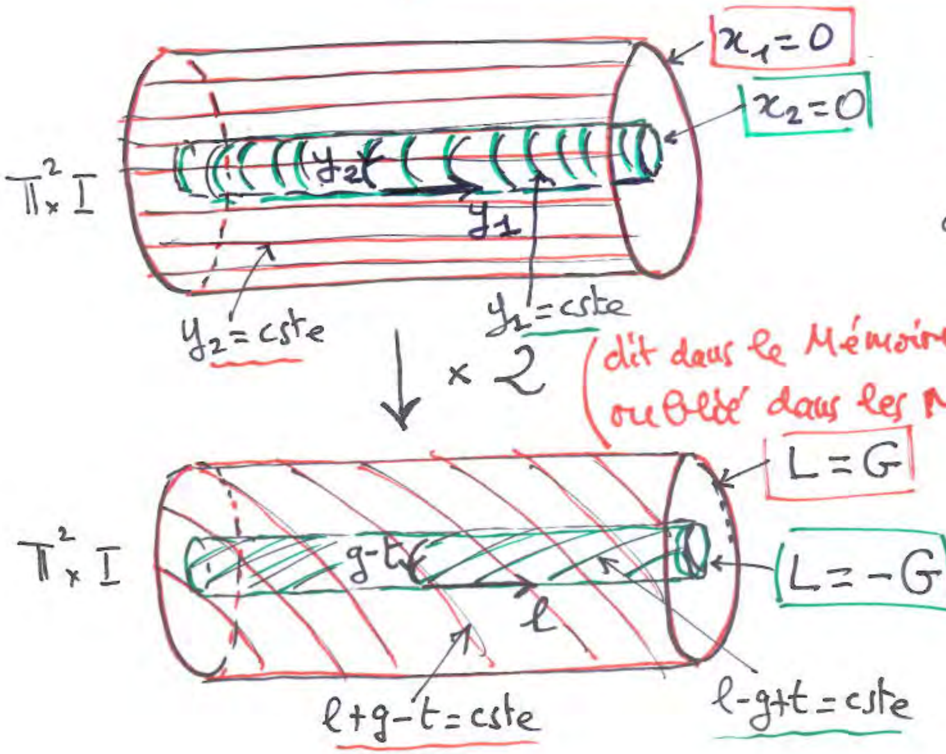
COORDONNÉES DE POINCARÉ

(définies et analytiques aux sol. circulaires)

tome III
§392

$$\boxed{\begin{array}{ll} x_1 = L - G , & x_2 = L + G \\ 2y_1 = \ell - g + t , & 2y_2 = \ell + g - t \end{array}}$$

garde un sens à la limite

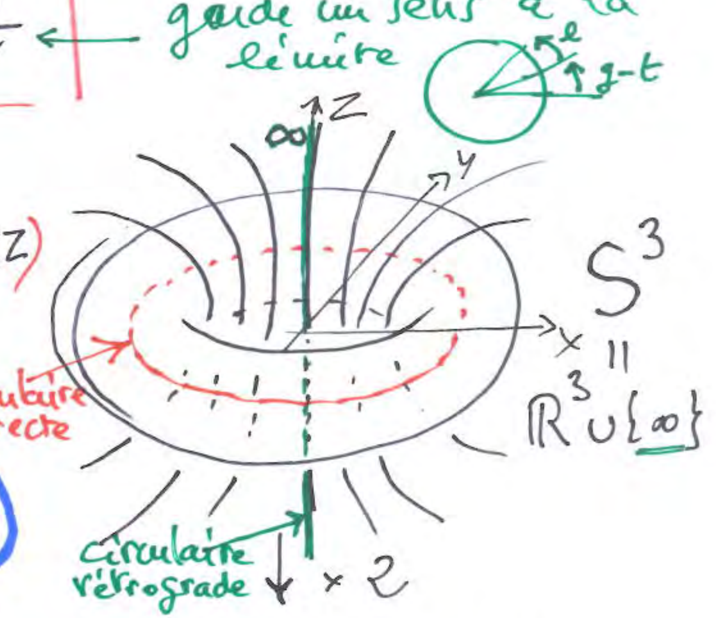


(Coordonnées polaires X, Y, Z)
quotient sur les bords

(dit dans le Mémoire, oublié dans les MNMC)

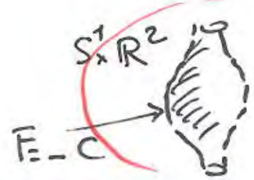
$-C \ll 0$

quotient sur les bords



$S^3 = \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$

$SO(3) \simeq \mathbb{R}P_3 = S^3/\text{antipodie}$



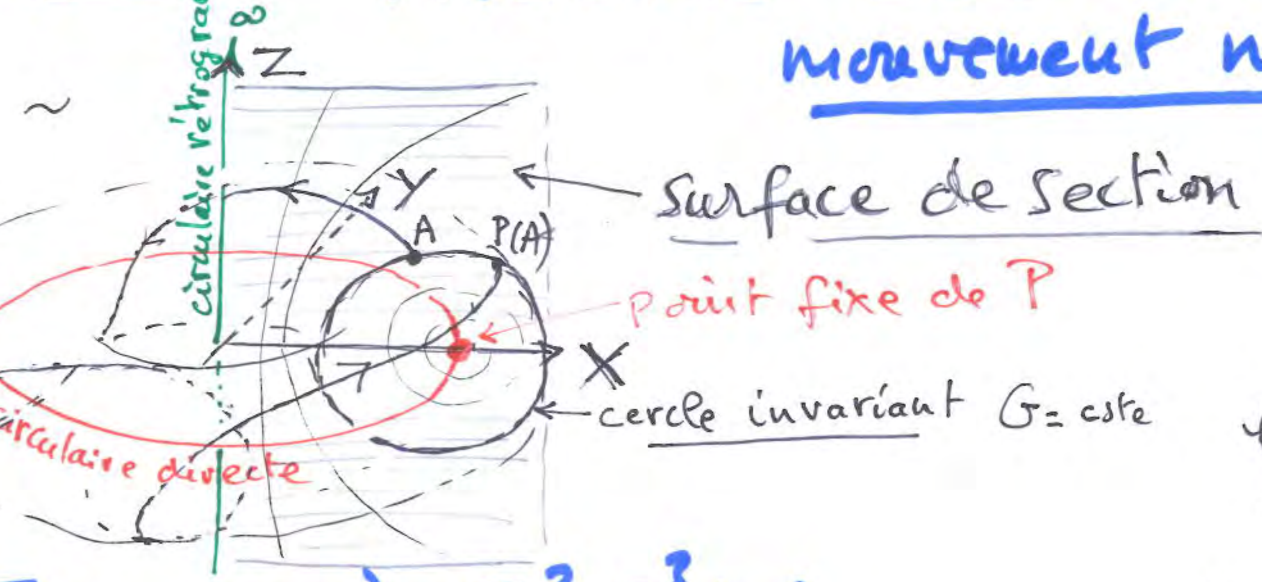
$\cup\ S^1$ à l'∞ (collisions)

tome III
Ch. XXVII & XXXIII

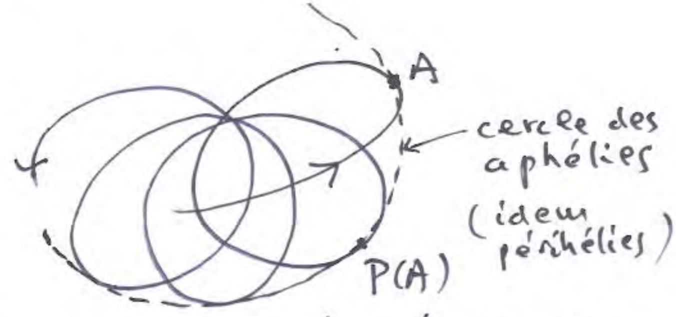
THÉORIE DES CONSÉQUENTS

mouvement non troublé

~

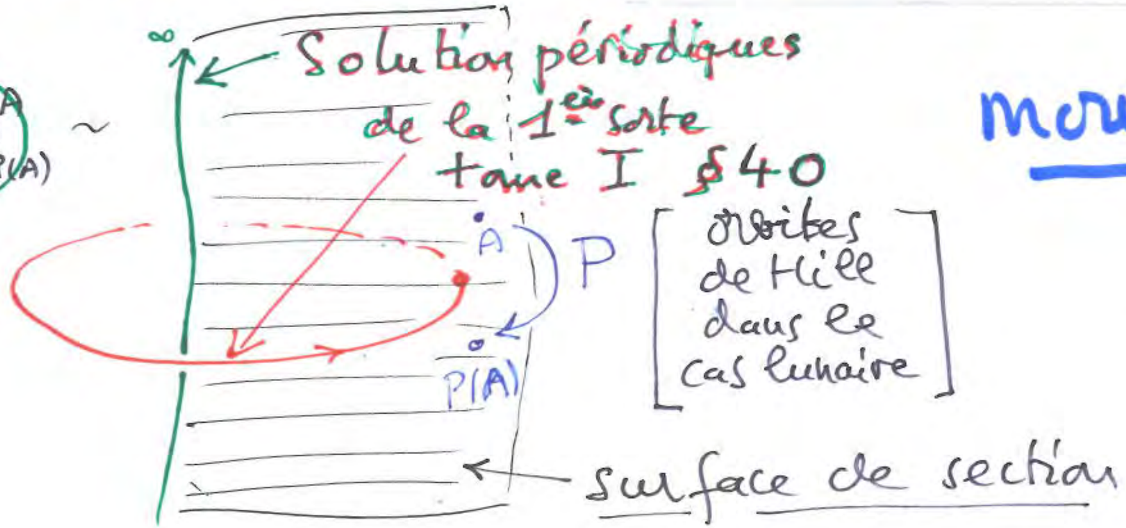


$$(F_0 = -C \ll 0) \supset \mathbb{R}^3 = S^3 \setminus \{\infty\}$$

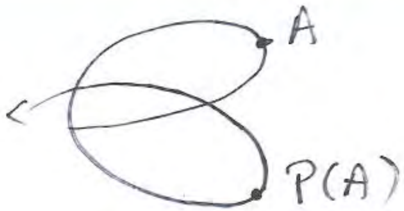


1er retour ⟺ stroboscope

~



mouvement troublé



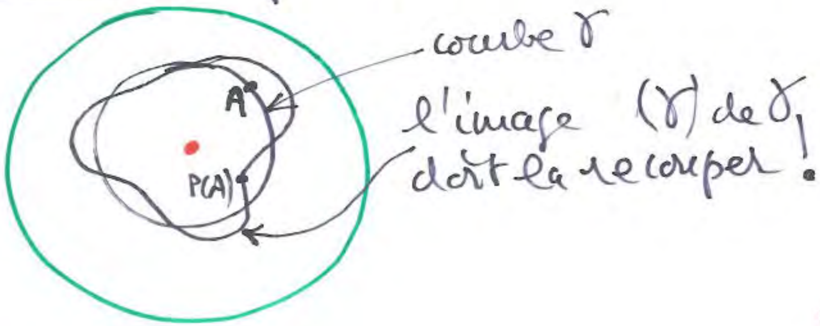
Tome III
Ch. XXII

L'INVARIANT INTÉGRAL

L'application de 1er retour P préserve une mesure de masse totale finie

Idée : Bien que de nouvelles intégrales premières n'existent pas, il en existe d'infinitésimales i.e. des intégrales premières de l'équation aux variations le long d'une orbite.

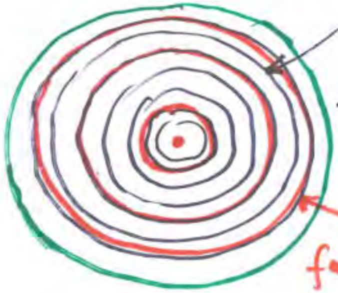
Corollaire : propriété d'intersection



Aujourd'hui, on dit que les équations canoniques préservent la structure symplectique de l'espace des phases.

A LA RECHERCHE DE LA STABILITÉ

MOUVEMENT NON TROUBLÉ

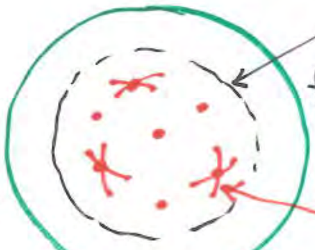


coté dense de courbes invariantes → familles de solutions quasi-périodiques

coté dense de courbes invariantes → familles de solutions périodiques

} CONVERGENCE DES SÉRIES DE LINDSTEDT A FREQUENCES VARIABLES

MOUVEMENT TROUBLÉ



??? EXISTENCE de courbes invariantes → familles de solutions quasi-périodiques ???
(si oui ⇒ stabilité : K.A.M.)

} Possibilité de la convergence des séries de Lindstedt à fréquences fixes bien choisies ??? §149

NON-EXISTENCE de courbes invariantes → familles de solutions périodiques :
MAIS solutions périodiques "génériques"

} DIVERGENCE DES SÉRIES DE LINDSTEDT A FREQUENCES VARIABLES

tome II Ch. XIII

TOME II § 149

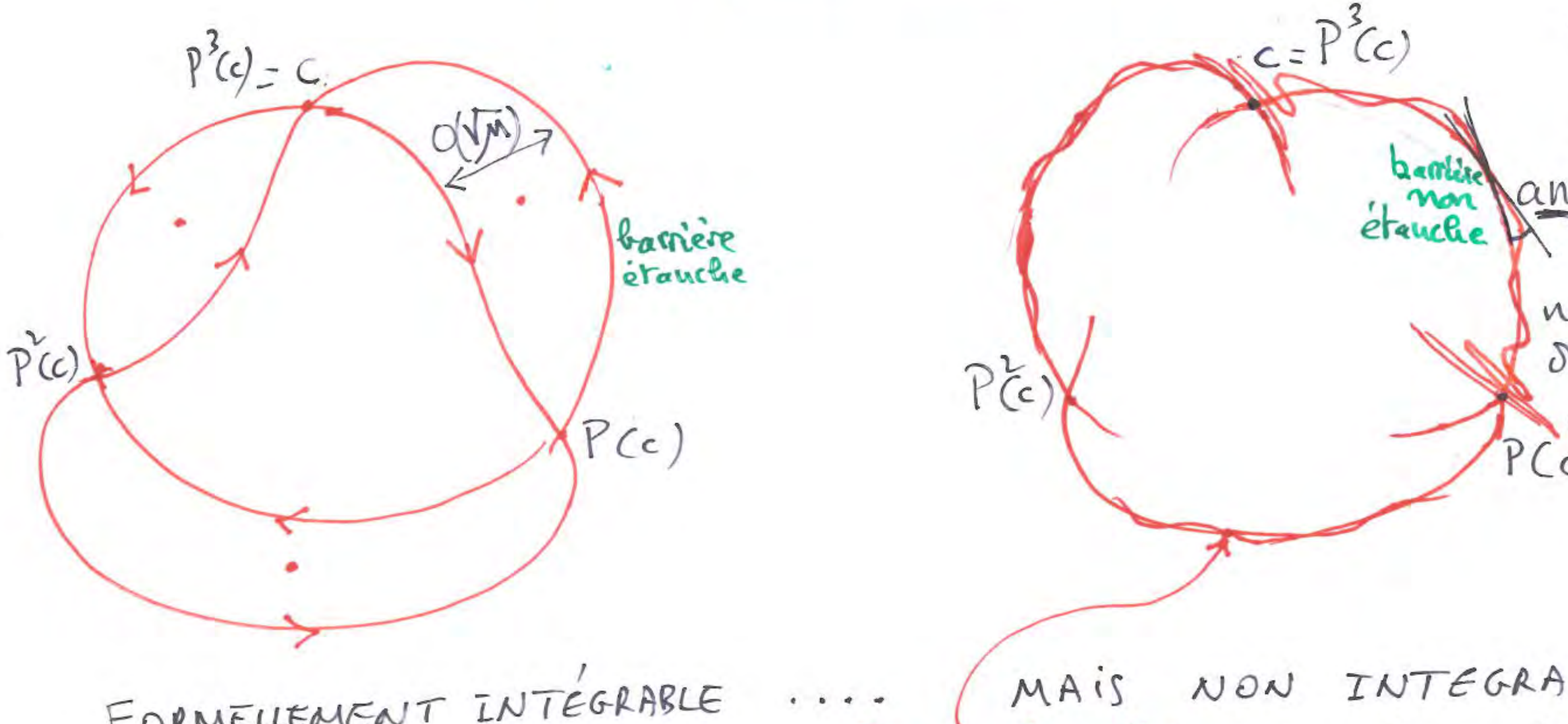
Ne peut-il pas arriver que les séries (2) convergènt quand on donne aux x_i^0 certaines valeurs convenablement choisies?

Supposons, pour simplifier, qu'il y ait deux degrés de liberté; les séries ne pourraient-elles pas, par exemple, converger quand x_1^0 et x_2^0 ont été choisis de telle sorte que le rapport $\frac{n_1}{n_2}$ soit incommensurable, et que son carré soit au contraire commensurable (ou quand le rapport $\frac{n_1}{n_2}$ est assujetti à une autre condition analogue à celle que je viens d'énoncer un peu au hasard)?

Les raisonnements de ce Chapitre ne me permettent pas d'affirmer que ce fait ne se présentera pas. Tout ce qu'il m'est permis de dire, c'est qu'il est fort invraisemblable.

L'ERREUR DU MÉMOIRE

chapitre ajouté dans le Mémoire corrigé
tome II
§ 226



angle exponentiellt petit
⇓
ne se voit à aucun ordre de la théorie des perturbations
(série divergente en $\sqrt{\mu}$)

FORMELLEMENT INTÉGRABLE ....
(coïncidence formelle de $W^u(c)$ et $W^s(P(c))$)

MAIS NON INTEGRABLE !!

[Solutions homoclines transverses $W^u(c) \pitchfork W^s(P(c))$

DIVERGENCE DES SÉRIES DE BOHLIN !

TOME III § 397

397. Que l'on cherche à se représenter la figure formée par ces deux courbes et leurs intersections en nombre infini dont chacune correspond à une solution doublement asymptotique, ces intersections forment une sorte de treillis, de tissu, de réseau à mailles infiniment serrées; chacune des deux courbes ne doit jamais se recouper elle-même, mais elle doit se replier sur elle-même d'une manière très complexe pour venir recouper une infinité de fois toutes les mailles du réseau.

On sera frappé de la complexité de cette figure, que je ne cherche même pas à tracer. Rien n'est plus propre à nous donner une idée de la complication du problème des trois corps et en général de tous les problèmes de Dynamique où il n'y a pas d'intégrale uniforme et où les séries de Bohlin sont divergentes.

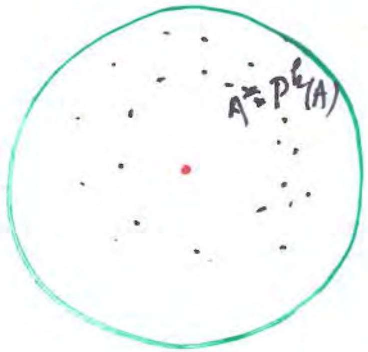
L'ERSATZ DE LA STABILITÉ PERDUE :

Le théorème de récurrence

Tome III
Ch. XXVI
Stabilité à la Poisson

allusion au retour des valeurs des demis grands axes des planètes (absence de termes séculaires purs quand on néglige les cubes des masses)

tome II § 150
"Comparaison avec des méthodes anciennes"



Pour presque toute donnée initiale A, l'orbite $\{P^k(A)\}_{k \in \mathbb{N}}$ reviendra arbitrairement près de A.

Compréhension des "ensembles de mesure nulle" avant Borel et Lebesgue.

Ancêtre de la théorie ergodique

Mémoire corrigé 1890

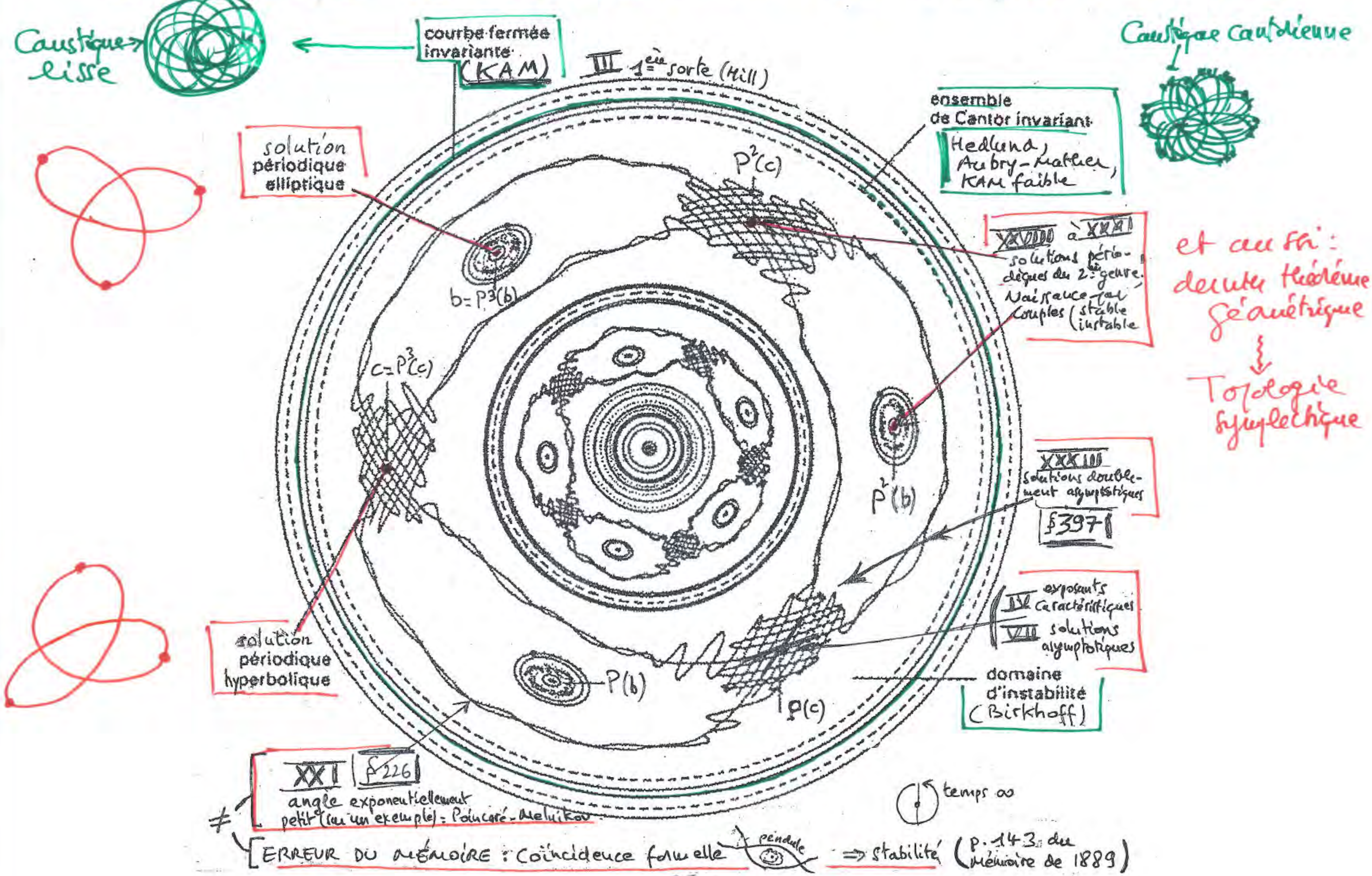
Introduction

Je suis bien loin d'avoir résolu complètement le problème que j'ai abordé. Je me suis borné à démontrer l'existence de certaines solutions particulières remarquables que j'appelle solutions périodiques, solutions asymptotiques, et solutions doublement asymptotiques. J'ai étudié plus spécialement un cas particulier du problème des trois corps, celui où l'une des masses est nulle et où le mouvement des deux autres est circulaire; j'ai reconnu que dans ce cas les trois corps repasseront une infinité de fois aussi près que l'on veut de leur position initiale, à moins que les conditions initiales du mouvement ne soient exceptionnelles.

MNMC Tome III Ch. XXVI

Si donc Poisson a cru pouvoir répondre affirmativement à la question de la stabilité telle qu'il l'avait posée, bien qu'il eût exclu les cas où le rapport des moyens mouvements est commensurable, nous aurons de même le droit de regarder comme démontrée la stabilité telle que nous la définissons, bien que nous soyons forcés d'exclure les molécules exceptionnelles dont nous venons de parler.

STRUCTURE DE L'APPLICATION DE PREMIER RETOUR



Le contraire du vrai,
ce n'est pas le faux,
c'est l'insignifiant

René THOM