

Andrew Ranichli
C

LE FIBRE TANGENT

FINE LIBRARY
PRINCETON UNIV.

L. SIEBENMANN

Cours donné à la Faculté des Sciences d'Orsay

Premier Semestre 1966 - 1967

Fascicule I

Chapitre I : La classification stable des variétés

Notes de : A. CHENCINER
M. HERMAN
F. LAUDENBACH

FINE LIBRARY
PRINCETON UNIV.

MI 7v

I.1

CHAPITRE I

LA CLASSIFICATION STABLE DES VARIETES

AVERTISSEMENT

=====

En raison des difficultés techniques, il a été décidé de faire paraître ce cours sous la forme d'un fascicule par chapitre. De ce fait les références aux chapitres non publiés ne peuvent pas être précisées. Il s'agit ici de références à un chapitre 0 d'introduction, comportant la définition des catégories DIFF, PL et TOP, quelques résultats élémentaires sur les fibrés, les énoncés des théorèmes de plongement de Whitney, de voisinages tubulaires et de voisinages colliers, ainsi que la démonstration d'un lemme de position générale en PL. Au dernier paragraphe de ce chapitre I, on trouvera aussi des références au chapitre V, intitulé "fibré de Hurewicz".

Pour les questions concernant les variétés différentiables, le lecteur peut se reporter au livre de J. Munkres [17]. Sur la topologie PL, on peut lire E. Zeeman [23] ou Hudson (Piecewise linear topology, Benjamin 1969). Enfin sur les fibrés localement triviaux et sur les fibrés de Hurewicz on peut lire D. Husemoller (Fibre bundles, Mc Graw-Hill 1966).

TABLE DES MATIERES

=====

§1	Enoncé du principe d'isomorphisme stable ; exemples.	p. I.2
§2	Isomorphisme stable des variétés hilbertiennes.	p. I.8
§3	Démonstration générale du principe d'isomorphisme stable.	p. I.11
§4	Le problème de l'existence et de l'unicité d'une structure PL sur une variété topologique.	p. I.28
§5	Problème de rendre propre une équivalence d'homotopie.	p. I.32
	Bibliographie	p. I.34

§1. ENONCE DU PRINCIPE D'ISOMORPHISME STABLE ; EXEMPLES

Rappelons que si M est une variété de la catégorie DIFF, PL ou TOP, $\tau(M)$ désigne son fibré (ou microfibré) tangent dans la catégorie. Le but de ce chapitre est de discuter de plusieurs points de vue le

1.1 Théorème : Principe d'isomorphisme stable (Mazur).

Soient M_1 et M_2 deux variétés métrisables sans bord de dimension n ($n < +\infty$), dans la catégorie \mathcal{C} ($=$ DIFF, PL, TOP), et soit $f : M_1 \rightarrow M_2$ une équivalence d'homotopie dans \mathcal{C} . Pourqu'il existe un entier N et un isomorphisme $F : M_1 \times \mathbb{R}^N \rightarrow M_2 \times \mathbb{R}^N$ homotope à $f \times 1|_{\mathbb{R}^N}$, il faut et il suffit que les fibrés $f^*\tau(M_2)$ et $\tau(M_1)$ soient stablement isomorphes, c'est-à-dire isomorphes après addition à chacun d'eux d'un fibré trivial de dimension convenable.

La nécessité de la condition est facile à voir.

L'isomorphisme F donne un isomorphisme de $F^*\tau(M_2 \times \mathbb{R}^N)$ avec $\tau(M_1 \times \mathbb{R}^N)$. De la commutativité à homotopie près du diagramme

$$\begin{array}{ccc} M_1 \times \mathbb{R}^N & \xrightarrow{F} & M_2 \times \mathbb{R}^N \\ \uparrow x0 & & \uparrow x0 \\ M_1 & \xrightarrow{f} & M_2 \end{array}$$

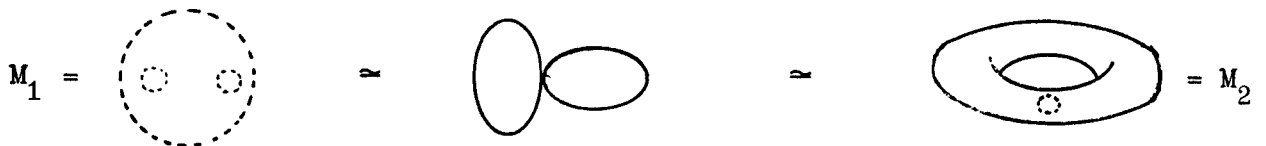
on déduit que $f^*\tau(M_2) \oplus \varepsilon^N$ est isomorphe à $\tau(M_1) \oplus \varepsilon^N$, où ε^N est trivial de dimension N .

1.2 Remarques et exemples : Pour l'uniformité de l'énoncé, on a supposé que f est une équivalence d'homotopie dans la catégorie \mathcal{C} de M_1 et M_2 . Si $\mathcal{C} =$ DIFF ou PL, la notion d'équivalence d'homotopie dans \mathcal{C} est a priori plus restrictive que la notion ordinaire d'équivalence d'homotopie. Rappelons qu'en fait si $\mathcal{C} =$ DIFF ou PL il y a des théorèmes

d'approximation des applications continues par des applications dans \mathcal{C} qui permettent de remplacer une application continue par une application dans \mathcal{C} tout en restant dans la même classe d'homotopie ; ces théorèmes permettent aussi de remplacer une homotopie continue entre deux applications, qui sont dans \mathcal{C} , par une homotopie dans \mathcal{C} entre ces deux mêmes applications. (voir Munkres [17] pour $\mathcal{C} = \text{DIFF}$; pour $\mathcal{C} = \text{PL}$ voir le théorème d'approximation simpliciale : Spanier [19 ; p.126]).

Montrons par des exemples que l'on ne peut pas espérer un isomorphisme entre M_1 et M_2 , même si l'on suppose que $f^*\tau(M_2)$ est isomorphe à $\tau(M_1)$.

Exemple 1 : Soit $M_1 = \text{int } D^2 - \{\text{deux points}\}$ et soit $M_2 = S^1 \times S^1 - \{\text{un point}\}$. $\tau(M_1)$ et $\tau(M_2)$ sont deux fibrés triviaux. D'autre part, M_1 et M_2 ont le même type d'homotopie qu'un bouquet de deux cercles :



Alors le principe d'isomorphisme stable dit que M_1 et M_2 sont stablement isomorphes : en effet, il est facile de voir un isomorphisme entre $M_1 \times \mathbb{R}$ et $M_2 \times \mathbb{R}$. (Elles sont toutes les deux isomorphes à l'intérieur du tore plein à deux trous).

Mais M_1 n'est pas homéomorphe à M_2 : les compactifiés d'Alexandrov \hat{M}_1 et \hat{M}_2 sont respectivement S^2 où trois points sont identifiés, et un tore, c'est-à-dire deux espaces n'ayant pas le même type d'homotopie. En effet $\pi_2(\hat{M}_2) = \pi_2(S^1 \times S^1) = 0$. Mais $\pi_2(\hat{M}_1)$ est différent de 0 pour la raison suivante : il existe une suite d'applications $S^2 \xrightarrow{f} \hat{M}_1 \xrightarrow{g} S^2$, où f identifie à un point trois points de la sphère et où gf identifie à un point un disque contenant ces trois points. Il est élémentaire de voir que $(gf)_* : H_2(S^2) \rightarrow H_2(S^2) = \mathbb{Z}$ est un isomorphisme. Donc f n'est pas homotope à zéro.

Ce que nous venons en fait de voir c'est que M_1 et M_2 n'ont pas le même type d'homotopie propre.

Exemple 2 : Un autre exemple traitant cette fois le cas des variétés différentiables fermées (compactes, sans bord) est fourni par les espaces lenticulaires de dimension 3 : $M_1 = L(7,1)$ et $M_2 = L(7,2)$. Ce sont deux variétés parallélisables ayant le même type d'homotopie, donc stablement isomorphes. Mais elles ne sont pas homéomorphes. D'ailleurs $M_1 \times D^N$ n'est, pour aucune valeur de N , difféomorphe à $M_2 \times D^N$, bien que $\text{int}(M_1 \times D^5) \cong \text{int}(M_2 \times D^5)$. (Voir Milnor [13]).

La classe des variétés DIFF fermées, ayant le type d'homotopie d'une n -sphère fournit d'autres exemples. Pour $n = 7$, Milnor [10] donne plusieurs telles variétés non difféomorphes. Elles sont toutes parallélisables car $\pi_6(SO(7)) = 0$. On déduit ce dernier fait de la nullité de $\pi_6(SO(n))$ pour $n \geq 8$ (périodicité de Bott, Cf. Milnor [11]) et de la trivialité bien connue de $\tau(S^7)$ (Cf. Steenrod [20; p.140] grâce à la suite exacte $\mathbb{Z} = \pi_7(S^7) \xrightarrow{\partial} \pi_6(SO(7)) \rightarrow \pi_6(SO(8)) = 0$ du fibré principal de $\tau(S^7) : SO(7) \rightarrow SO(8) \rightarrow S^7$; en effet $\partial(1)$ classeifie $\tau(S^7)$ (Cf. Steenrod [20; p.98]) Ces exemples sont tous homéomorphes (Cf. [15 ; p.109]). Il est beaucoup plus difficile de trouver des exemples traitant le cas de variétés simplement connexes et fermées dans les catégories TOP ou PL. Mais ils existent : Lashof -Rothenberg [7].

La classification des variétés à isomorphisme stable près est donc beaucoup moins fine que leur classification à isomorphisme près.

Nous devons le principe d'isomorphisme stable à B. Mazur. Il l'a démontré d'abord pour les variétés DIFF fermées. (Cf. [8]). M. Hirsch [4] a démontré le cas de notre énoncé où f est une équivalence d'homotopie propre, c'est-à-dire une application propre qui est une équivalence d'homotopie dans la sous-catégorie des applications propres. Remarquons que le premier exemple ci-dessus n'est pas couvert par le théorème de Hirsch : il n'y a pas d'homotopie équivalence propre $M_1 \rightarrow M_2$. Mazur a proposé une démonstration générale dans [9]. A cause d'une lacune* dans sa démonstration nous ne l'exposerons pas.

*Dans [9] la démonstration de la proposition 3, p.391 commence avec une affirmation fautive : le deuxième diagramme p.392 n'est pas commutatif.

La démonstration complète que nous donnerons sera fondée sur la méthode d'engouffrement de Stallings et sur une astuce de Hirsch qui permet de démontrer seulement le cas DIFF pour en déduire les autres cas. La longueur de ce chapitre est due au fait que nous y démontrons le théorème d'engouffrement dont nous avons besoin. D'ailleurs nous commencerons par esquisser la démonstration de Hirsch, à cause des trois raisons suivantes :

- a) La démonstration de Hirsch englobe le cas central des variétés fermées, pour les trois catégories considérées. Elle est un prolongement simple de la démonstration de Mazur (modifiée par Milnor) pour les variétés DIFF fermées.
- b) Si le lecteur réussit à démontrer directement dans le cas général que, pour s assez grand, $f \times 1|_{\mathbb{R}^s} : M_1 \times \mathbb{R}^s \rightarrow M_2 \times \mathbb{R}^s$ est homotope à une équivalence d'homotopie propre, alors il aura évidemment une démonstration complète.
- c) En ajoutant aux idées de Hirsch une astuce que nous a communiquée N. Kuiper, on peut démontrer un principe d'isomorphisme stable pour les variétés hilbertiennes. (Voir §2).

1.3 Esquisse de la démonstration donnée par Hirsch pour le cas où $f : M_1 \rightarrow M_2$ est une équivalence d'homotopie propre.

Donnons d'abord la démonstration dans le cas DIFF, les détails étant laissés en exercice. L'astuce de Hirsch qui permet d'en déduire le même résultat pour TOP et PL est expliquée dans notre démonstration générale à partir de la p. I.26. Elle consiste à remplacer M_i ($i=1,2$) par l'espace total lisse d'un \mathbb{R}^k -fibré normal à un plongement de M_i dans \mathbb{R}^{n+k} , pour k assez grand.

Exercice : Si $g : X \rightarrow Y$ est une application propre de DIFF et si d est une métrique sur X , il existe une fonction continue $\varepsilon : X \rightarrow]0, +\infty[$ de telle sorte que toute application continue $g' : X \rightarrow Y$, qui satisfait à $d(g'(x), g(x)) < \varepsilon(x)$ pour tout $x \in X$, est elle-même propre et proprement

homotope à g . (Employer un tube normal à un plongement propre de Y dans un espace euclidien).

Soit $n = \dim M_1$ et soit un entier $s \geq n+3$. Il existe une application propre $f' : M_1 \rightarrow M_2 \times D^s$, qui est proprement homotope à f et qui plonge M_1 dans $M_2 \times (\text{int } D^s - 0)$. Pour trouver f' , il suffit d'employer le théorème de plongement de Whitney (Cf. ch. 0) en approximant

$$f \times \{x_0\} : M_1 \rightarrow M_2 \times (\text{int } D^s - \bar{0}), \quad 0 < \|x_0\| < 1.$$

Le fibré normal ν^s de f' satisfait à

$$\tau(M_1) \oplus \nu^s \cong f'^*(\tau(M_2) \oplus \varepsilon^s) \cong f^*\tau(M_2) \oplus \varepsilon^s.$$

Donc dans le groupe des classes d'isomorphisme stable on a :

$$\langle \nu \rangle = (\langle f^*\tau(M_2) \rangle - \langle \tau(M_1) \rangle) + \langle \varepsilon^s \rangle = 0 + 0$$

c'est-à-dire, ν^s est stablement trivial. Puisque $s > n$, il est en fait trivial (Cf. ch. 0). Donc il existe un plongement propre

$F : M_1 \times D^s \rightarrow M_2 \times D^s$ tel que $F(m, 0) = f'(m)$, pour tout $m \in M_1$, et que $F(M_1 \times D^s) \subset M_2 \times \text{int } D^s$. Notons $T = F(M_1 \times D^s)$. Si nous démontrons :

$$(*) \quad M_2 \times \mathbb{R}^s - \text{int } T \cong bT \times [0, 1[,$$

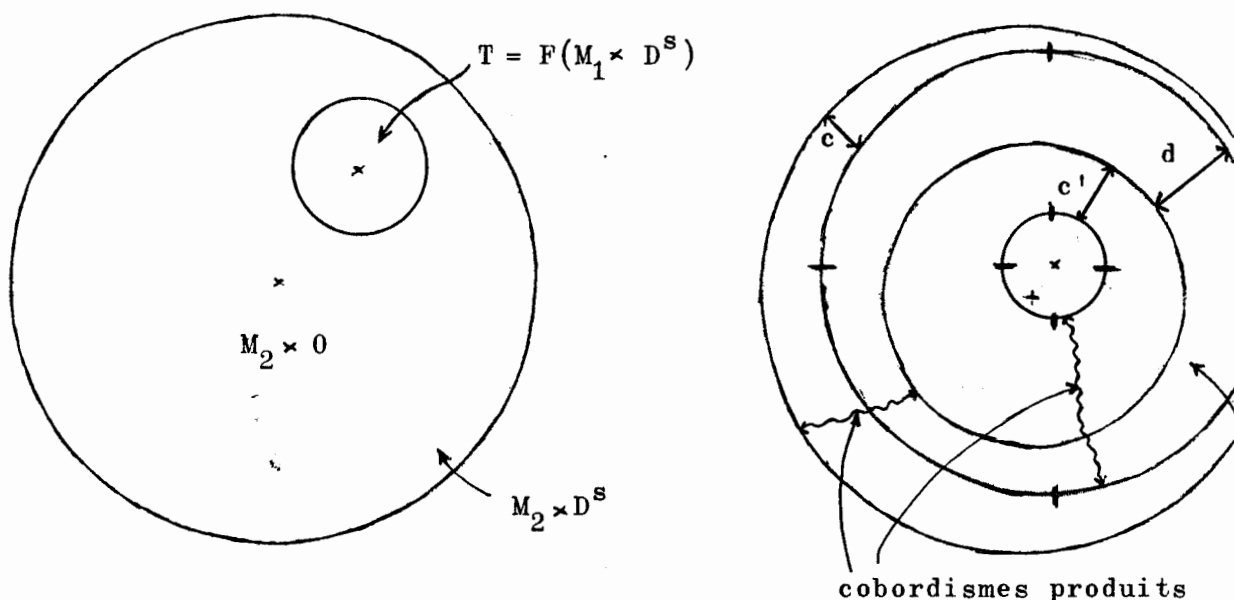
le théorème sera démontré : étant donné que $M_1 \times \mathbb{R}^s - \text{int}(M_1 \times D^s)$ est isomorphe à $M_1 \times bD^s \times [0, 1[$, il existe un difféomorphisme de $M_1 \times \mathbb{R}^s \rightarrow M_2 \times \mathbb{R}^s$, prolongeant F . (Cf. théorème des voisinages colliers (Cf. ch. 0)).

Il ne nous reste qu'à démontrer (*).

Affirmation : Il existe un difféomorphisme φ de $M_2 \times D^s$ sur lui-même, de telle sorte que $\varphi|_{M_2 \times S^{s-1}} = \text{identité}$, et que

$$\varphi(1/2T) \subset \subset M_2 \times 1/2D^s \subset \subset \varphi(T) \subset \subset M_2 \times D^s$$

($X \subset \subset Y$ veut dire $X \subset \text{int } Y$ et $1/2 T = F(M_1 \times 1/2D^s)$).



En démontrant (*) nous pouvons donc supposer

$$1/2 T \subset\subset M_2 \times (1/2 D^S) \subset\subset T \subset\subset M_2 \times D^S$$

Or le difféomorphisme

$$(\dagger) \quad M_2 \times D^S - \text{int}(M_2 \times 1/2 D^S) \cong M_2 \times S^{s-1} \times [0,1]$$

montre que le cobordisme de bT à $M_2 \times S^{s-1}$

$$c = (M_2 \times D^S - \text{int } T ; bT, M_2 \times S^{s-1})$$

admet un cobordisme inverse à gauche d donné par $T - \text{int}(M_2 \times 1/2 D^S)$ tel que le composé dc soit le cobordisme produit trivial donné par $(M_2 \times S^{s-1} \times [0,1] - \text{int}(M_2 \times S^{s-1} \times [0,1]))$ de $M_2 \times S^{s-1}$ à lui-même. (Voir [15, p.2] pour la notion de cobordisme). De même le difféomorphisme

$$(\S) \quad T - \text{int}(1/2 T) \cong bT \times [0,1]$$

garantit un inverse à gauche c' pour d .

Alors $c \cong (c'd)c \cong c'(dc) \cong c'$, donc cd et dc sont des cobordismes produits. Maintenant, l'identité de produits infinis

$$(cd)(cd)(cd) \dots = c(dc)(dc)(dc) \dots$$

s'interprète en disant que $bT \times [0, \infty)$ est difféomorphe à l'espace obtenu à partir de $(M_2 \times D^S - \text{int } T)$ en lui attachant sur $b(M_2 \times D^S)$ un collier $b(M_2 \times D^S) \times [0, \infty)$, espace qui est isomorphe à $M_2 \times \mathbb{R}^s - \text{int } T$. Donc (*) est démontré.

Pour justifier notre affirmation, construisons un automorphisme ϕ de $M_2 \times D^s$ de telle sorte $\phi|_{M_2 \times S^{s-1}} = \text{identité}$, et que $M_2 \times 1/2 D^s \subset \phi(\text{int } T)$. Pour ensuite obtenir ϕ le lecteur pourra modifier convenablement ϕ sur T par la même méthode. On forme un plongement propre $g : M_2 \times [-3, 3] \rightarrow \text{int}(M_2 \times D^s)$, tel que $g(m, 0) = (m, \vec{0})$ pour $m \in M_2$ et que $g(M_2 \times 1) \subset \text{int } T$. (Employer le fait que f' est une équivalence d'homotopie propre et le théorème de Whitney (Cf. ch. 0) sous sa forme relative). Ensuite il existe un plongement propre $G : M_2 \times [-2, 2] \times D^{s-1} \rightarrow M_2 \times D^s$ tel que $G(m, t, \vec{0}) = g(m, t)$ (Cf. théorème de stabilité au chapitre 0). Soit ϕ_0 le transporté par G d'un automorphisme de $M_2 \times [-2, 2] \times D^s$ qui fixe un voisinage de son bord et qui envoie $M_2 \times 1 \times \vec{0}$ sur $M_2 \times 0 \times \vec{0}$. Alors ϕ_0 est un automorphisme de $M_2 \times D^s$ de telle sorte $\phi_0|_{M_2 \times S^{s-1}} = \text{identité}$ et que $M_2 \times 0 \subset \phi_0(\text{int } T)$. Il existe une fonction $C^\infty, \lambda : M_2 \rightarrow (0, \infty)$ telle que $M_2 \times \lambda D^s = \{(m, \vec{x}) \in M_2 \times D^s, \|\vec{x}\| \leq \lambda(m)\}$ soit contenu dans $\phi_0(\text{int } T)$, et il existe un automorphisme ϕ_1 de $M_2 \times D^s$ tel que $\phi_1|_{M_2 \times S^{s-1}} = \text{identité}$ et que $\phi_1(M_2 \times \lambda D^s) = M_2 \times 1/2 D^s$. Enfin $\phi = \phi_1 \phi_0$ est l'automorphisme cherché.

L'esquisse de la démonstration de Hirsch est complète.

§2. ISOMORPHISME STABLE DES VARIÉTÉS HILBERTIENNES

Dans ce paragraphe, qui n'est pas du tout nécessaire à la compréhension de la suite, nous adaptons les idées de la démonstration de Hirsch au cas des variétés hilbertiennes.

Soit \mathcal{H} l'espace de Hilbert réel séparable,

$$\mathcal{H} = \{\vec{x} = (x_1, x_2, \dots) \mid x_i \in \mathbb{R}, \|\vec{x}\|^2 = \sum x_i^2 < \infty\}.$$

Soit D le disque $\{\vec{x} \in \mathcal{H} ; \|\vec{x}\| \leq 1\}$ et

S la sphère $\{\vec{x} \in \mathcal{H} ; \|\vec{x}\| = 1\}$.

Nous emploierons sans le démontrer le résultat fondamental (et élémentaire) suivant :

2.1 Théorème de Bessaga [2]

Il existe un difféomorphisme de \mathcal{K} sur $\mathcal{K} - \{\vec{0}\}$ qui fixe tout point hors de D .

Soit $\mathcal{C}(\mathcal{K})$ la catégorie dont les objets sont les variétés C^∞ (à b. qui sont localement difféomorphes à $\mathcal{K}_+ = \mathcal{K} \times [0, \infty[$, et dont les morphismes sont les applications C^∞ .

Sous forme d'une suite d'exercices nous allons indiquer la démonstration du théorème suivant dû à N. Kuiper.

2.2 Théorème : Si $f : M_1 \rightarrow M_2$ est une équivalence d'homotopie de variété sans bord dans la catégorie $\mathcal{C}(\mathcal{K})$, il existe un difféomorphisme $F : M_1 \times \mathcal{K} \rightarrow M_2 \times \mathcal{K}$ homotope à $f \times 1_{\mathcal{K}}$.

Exercices

1) Soit M_i , $i = 1, 2$, dans $\mathcal{C}(\mathcal{K})$ (ou DIFF), et soit N_i une composante de bord de M_i . Soit $F_i : N_i \times [0, 1[\rightarrow M_i$ un plongement sur un ouvert de M_i tel que $F_i(n, 0) = n$, pour tout $n \in N_i$. Enfin soit $f : N_1 \rightarrow N_2$ un isomorphisme. L'on forme $M = (M_1 \cup M_2) / \{f\}$ à partir de la réunion disjointe d'exemplaires de M_1 , M_2 en identifiant N_1 à N_2 par f . Alors M admet une structure de variété C^∞ unique de telle sorte que M_1 , M_2 soient des sous-variétés lisses, et F_1 , F_2 se recollent pour former un voisinage tubulaire C^∞ de $N_1 = N_2$ dans M .

2) (Mc Alpine [1]). Pour tout $X \in \mathcal{C}(\mathcal{K})$ il existe un plongement $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ sur une sous-variété fermée. (Selon Lang [6; p77] tout tel plongement admet un voisinage tubulaire). En effet, si $\partial X = \emptyset$, soit $\varphi_i : U_i \xrightarrow{\cong} \mathcal{K}$, $i = 1, 2, 3, \dots$, une suite de cartes C^∞ telles que $\{\varphi_i^{-1}(\text{int } D)\}$ tapisse X . Soit $g : \mathcal{K} \rightarrow [0, 1]$ une fonction C^∞ telle que $g^{-1}(0) = \{\vec{x} \in \mathcal{K}; |\vec{x}| \geq 1\}$. Alors l'application $\phi_i : U_i \rightarrow \mathcal{K} \oplus \mathbb{R} = \mathcal{K}_i$, $\phi_i(x) = (g(\varphi_i(x)) \cdot \varphi_i(x), g(\varphi_i(x)))$ plonge $\varphi_i^{-1}(\text{int } D)$ et se prolonge à X en une application C^∞ par la règle $\phi_i(x) = 0$ si $x \notin U_i$. Ensuite

$$\phi(x) = \phi_1(x) \oplus \frac{1}{2} \phi_2(x) \oplus \dots \oplus \frac{1}{2^i} \phi_i(x) \oplus \dots \in \mathcal{K}_1 \oplus \mathcal{K}_2 \oplus \dots \cong \mathcal{K}$$

constitue un plongement fermé de X dans $2D - 0 \subset \mathcal{K}$.

3) Dédurre du théorème de Bessaga :

$$a/ D \cong D - \{\vec{0}\} ; \quad b/ S \cong \mathcal{K} ; \quad c/ D \cong \mathcal{K}_X [0,1) ; \quad d/ D \times \mathcal{K} \cong D$$

4) Si $f : X \rightarrow \mathcal{K}$ est un plongement fermé, l'application $g : X \rightarrow D \times \mathcal{K} \cong D$, définie par $g(x) = (\vec{0}, f(x))$, est un plongement fermé dont la fibre du fibré normal est \mathcal{K} .

5) Soient $g : X \rightarrow D$ un plongement fermé et $h : X \rightarrow Y$, $h \in \mathcal{C}(\mathcal{K})$. Alors $(h, g) : X \rightarrow Y \times D$ est un plongement fermé homotope à $(h \times \vec{0})$. Si d'ailleurs h est un plongement au voisinage d'un fermé A de X et si $\alpha : X \rightarrow [0, \infty)$ est une fonction C^∞ telle que $\alpha^{-1}(0) = A$, alors $(h, \alpha g) : X \rightarrow Y \times D$ est un plongement fermé également homotope à $(h, 0)$.

6) L'énoncé (1.1) est valable pour $\mathcal{C}(\mathcal{K})$ dès qu'on remplace \mathbb{R} par \mathcal{K} , et qu'on parle de fibrés vectoriels à fibre \mathcal{K} . (Suivre la démonstration de Hirsch). L'exercice 1) sert à éviter le théorème d'unicité des colliers à automorphisme ambiant près.

L'exercice 5) remplace le théorème de Whitney. Pour appliquer 5) et pour que les plongements construits soient à fibrés normaux triviaux, il convient de passer plusieurs fois au produit avec \mathcal{K} - ou mieux, d'écrire $\mathcal{K} = \mathcal{K} \oplus \mathcal{K} \oplus \dots$ et utiliser chaque fois qu'il est nécessaire un des facteurs de cette décomposition.

7) Soit $X \in \mathcal{C}(\mathcal{K})$ et $R(X)$ la classe des fibrés vectoriels à fibre isomorphe à \mathcal{K} , muni chacun d'une métrique Riemannienne.

a/ $\tau(X)$ admet une métrique Riemannienne (Lang [6; p.104]).

b/ Pour $\xi \in R(X)$ il existe $\eta \in R(X)$ tel que $\xi \oplus \eta = \varepsilon$ (= fibré trivial $X \times \mathcal{K}$) - utiliser 2).

c/ Il existe une opération de somme infinie dans

$R(X) : (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots) \rightarrow \xi_1 \oplus \xi_2 \oplus \xi_3 \oplus \dots$ qui est associative et commutative.

d/ Pour tout $\xi, \eta \in R(X)$, $\xi \oplus \varepsilon \cong \eta \oplus \varepsilon \cong \varepsilon$

(Répéter le truc du produit infini p.I.7)

§3. DEMONSTRATION GENERALE DU PRINCIPE D'ISOMORPHISME STABLE

=====

Nous verrons que le problème se réduit au cas où M_2 est un ouvert d'un espace euclidien. On déforme alors $f \times 0 : M_1 \rightarrow M_2 \times \mathbb{R}^N$, N grand, en un plongement g de telle sorte que le voisinage tubulaire ouvert $T \approx M_1 \times \mathbb{R}^N$ de $g(M_1)$ puisse absorber tout l'espace $M_2 \times \mathbb{R}^N$ comme un vorace Pantagruel. La méthode s'appelle l'engouffrement. La démonstration sera complètement indépendante de ce qui précède.

La méthode marche aussi bien (ou mieux) pour le cas PL. Donc nous allons donner les raisonnements DIFF et PL parallèlement. D'ailleurs le lecteur pourra déduire le cas DIFF du cas PL ! En effet, d'après le cas PL, il existe stablement une équivalence d'homotopie propre (l'isomorphisme PL !) et ensuite la démonstration partielle de Hirsch exposée ci-dessus donne le difféomorphisme voulu.

3.1 Lemme d'engouffrement élémentaire

Soit K un complexe simplicial localement fini qui se réduit sur le sous-complexe L par un effondrement simplicial élémentaire à travers le simplexe $\sigma : K = L \cup \sigma$.

Soit $f : K \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application propre, linéaire sur chaque simplexe, qui soit un plongement de σ . On suppose que $f(K - \sigma) \cap f(\sigma) = \emptyset$.

Si U est un voisinage ouvert de $f(L)$ dans \mathbb{R}^n et N un voisinage de $f(\sigma)$, il existe, dans la catégorie \mathcal{C} ($\mathcal{C} = \text{DIFF}$ ou PL), un automorphisme $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, tel que $h(U)$ contienne $f(K)$ et que h soit l'identité sur $f(L) \cup (\mathbb{R}^n - N)$.

Remarque : Il est en outre possible de choisir h isotope à l'identité par une isotopie laissant fixe tout point hors de N .

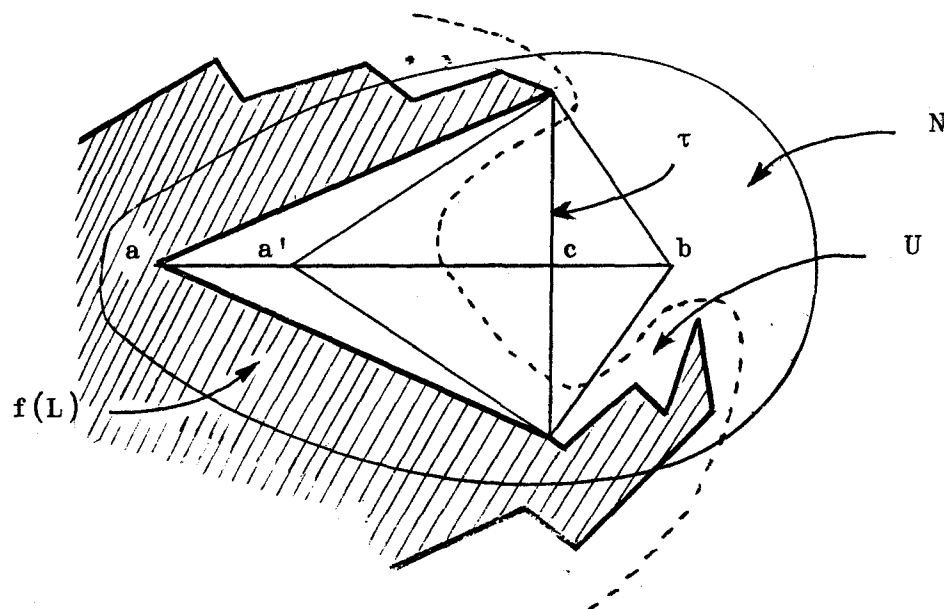
Démonstration :1. $\mathcal{C} = PL$

(i) Supposons d'abord que $f(\sigma)$ sous-tende \mathbb{R}^n . Soient a et τ le sommet et la face de $f(\sigma)$ associés à l'effondrement de K sur L : $f(\sigma) = a * \tau$. Soit c le barycentre de τ . Sur la droite définie par a et c choisissons les points suivants :

- a' , intérieur au segment $[a, c]$, tel que $a' * \delta\tau$ soit inclus dans U .
- b , sur la demi-droite issue de c ne contenant pas a , ($b \neq c$), tel que $(b * \tau) \cap f(L) = \delta\tau$. f étant propre l'existence d'un tel point est évidente. De plus il est possible de choisir b dans N .

Choisissons pour $(a * \tau) \cup (b * \tau)$ la triangulation T linéaire unique qui a pour sommets a , a' , b et les sommets de $\delta\tau$. Alors h est bien défini à partir des conditions suivantes :

- Sur $(a * \tau) \cup (b * \tau)$, h est l'application unique, linéaire sur les simplexes de T qui envoie a' en c et qui fixe les autres sommets.
- $h(x) = x$ pour $x \in \mathbb{R}^n - (a * \tau) \cup (b * \tau)$.



(ii) Cas général : Nous pouvons supposer que $f(\sigma)$ engendre $\mathbb{R}^m \subset \mathbb{R}^n$, $m < n$. Le procédé de (i) nous donne un PL-automorphisme h de \mathbb{R}^m de telle sorte qu'il suffira de le prolonger à \mathbb{R}^n en préservant la condition que h soit l'identité sur $f(L) \cup (\mathbb{R}^n - N)$.

Choisissons dans N un simplexe σ' , admettant c comme barycentre et engendrant un sous-espace supplémentaire à $f(\sigma)$ dans \mathbb{R}^n . f étant propre, il existe un nombre $\lambda > 0$ tel que le simplexe $\lambda\sigma'$, homothétique de σ' dans l'homothétie de centre c et de rapport λ , satisfasse la condition suivante :

$$(\delta(\lambda\sigma') * (a * \tau \cup b * \tau)) \cap f(L) = f(\sigma) \cap f(L).$$

Sur $\delta(\lambda\sigma') * (a * \tau \cup \tau * b)$, h est le joint de l'application $h|_{a * \tau \cup \tau * b}$ et de l'identité de $\delta(\lambda\sigma')$. Ailleurs h est l'identité. Cet h est solution du problème.

2. $\mathcal{C} = \text{DIFF}$

Nous réutiliserons ici les notations σ , τ , a , c et σ' du cas PL. Nous pouvons supposer que c coïncide avec l'origine de \mathbb{R}^n . Pour un sous-ensemble $X \subset \mathbb{R}^n$, soit $E(X)$ le sous-espace linéaire engendré par X .

Alors $\mathbb{R}^n = E(a) \oplus E(\tau) \oplus E(\sigma')$. Relativement à cette décomposition, nous écrirons pour $x \in \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, x_2, x_3)$. D'ailleurs $E(a)$ sera identifié à \mathbb{R} de façon que a corresponde à 1 ; alors $x_1 \in \mathbb{R}$.

Soit $\alpha : E(\tau) \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction C^∞ , à support compact A dans l'intérieur de τ , dont le "graphe" - ie : l'ensemble $\{(x_1, x_2, 0) \in \mathbb{R}^n \mid x_2 \in A, x_1 = \alpha(x_2)\}$ - est inclus dans U et ne rencontre pas $a * \delta\tau$.

Ensuite choisissons $\lambda < 1$ tel que le "graphe" de $\lambda\alpha$ ait la même propriété que celui de α . Or f étant propre, il existe $\mu > 0$ tel que l'ensemble $\{(x_1, x_2, 0) \in \mathbb{R}^n \mid x_2 \in A, -\mu\alpha(x_2) \leq x_1 \leq 0\}$ ne rencontre pas $f(L)$ et soit inclus dans N .

-

n

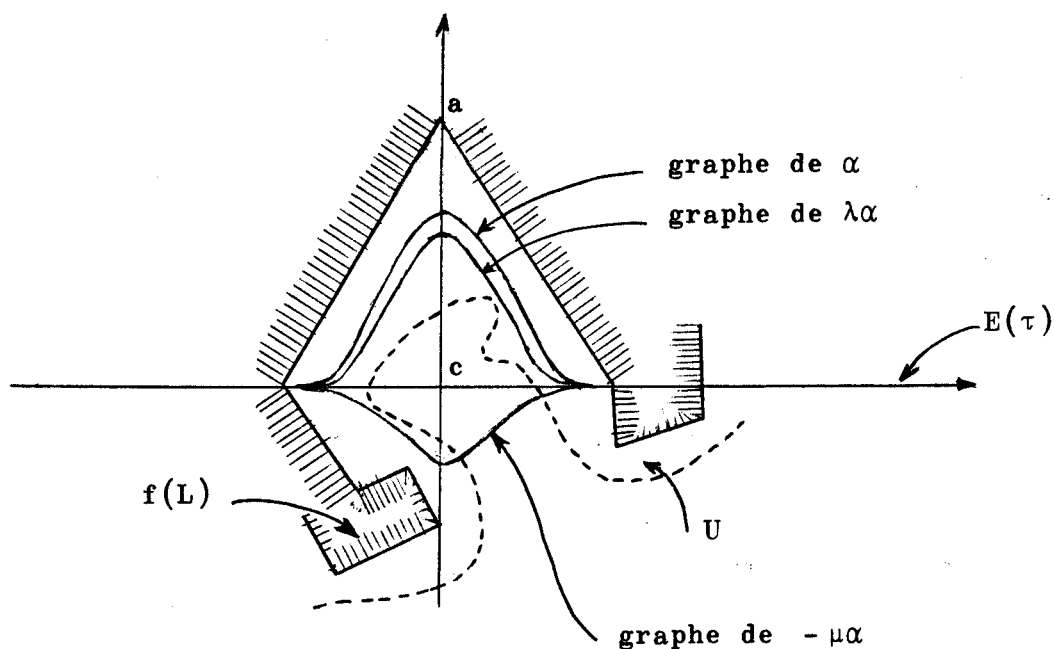
-

x

r

I

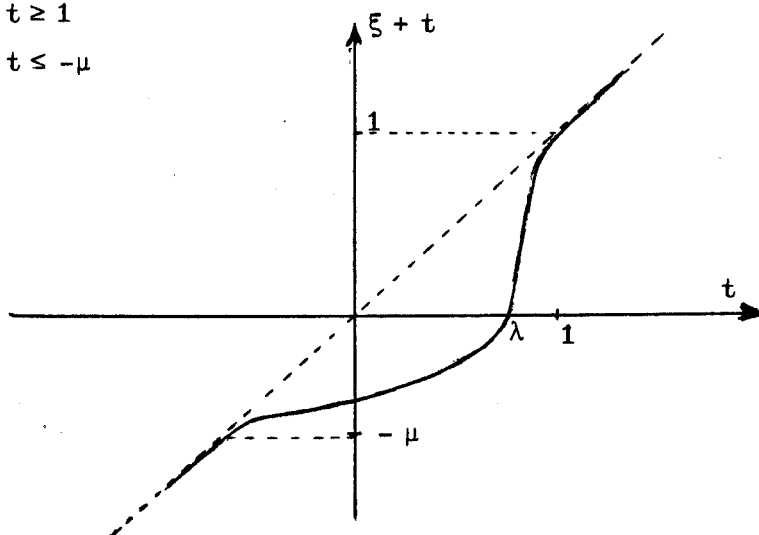
E



- Soit $\xi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction C^∞ telle que la fonction $t \rightarrow \xi(t) + t$ soit monotone et que $\xi(\lambda) + \lambda = 0$

$$\xi(t) = 0 \text{ pour } t \geq 1$$

$$\xi(t) = 0 \text{ pour } t \leq -\mu$$



- Soit $\beta : E(\tau) \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction C^∞ telle que $\beta(x_2) = 1$, s'il existe $x_1 \in \mathbb{R}$ tel que $(x_1, x_2, 0) \in f(\sigma) - U$, et telle que son support soit intérieur au support A de α .

Il est maintenant possible de définir un difféomorphisme h' de l'espace $E(f(\sigma))$ engendré par $f(\sigma)$ sur lui-même, tel que $h'(U \cap E(f(\sigma)))$ contienne

$f(\sigma)$ et que $f(L) \cap E(f(\sigma))$ soit ponctuellement invariant :

$$h'(x_1, x_2) = (x_1 + \beta(x_2) \xi(\frac{x_1}{\alpha(x_2)})) \alpha(x_2), x_2).$$

Il s'agit maintenant de prolonger le difféomorphisme à \mathbb{R}^n . Soit S l'adhérence de l'ensemble des points non fixes de h' . Il existe un disque D dans $E(\sigma')$, de centre c , tel que $S \times D$ ne rencontre pas $f(L)$ et soit inclus dans N . Prenons une fonction $C^\infty \varepsilon : E(\sigma') \rightarrow \mathbb{R}$, à support dans D et prenant la valeur 1 en c . Alors le difféomorphisme cherché est défini par : $h(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + \varepsilon(x_3) \beta(x_2) \xi(\frac{x_1}{\alpha(x_2)})) \alpha(x_2), x_2, x_3)$

c q f d

Considérons la situation plus générale où $f(K - \sigma) \cap f(\sigma) \neq \emptyset$. Désignons par Σ le sous-cône de $f(\sigma)$, de sommet a , s'appuyant sur $f(L) \cap f(\sigma)$; alors $\Sigma = a * P$ où P est un polyèdre dans τ , qui contient $\delta\tau$.

3.2 Corollaire : Le lemme d'engouffrement élémentaire est encore valable si nous remplaçons la condition $f(K - \sigma) \cap f(\sigma) = \emptyset$ par la condition $\Sigma \subset U$

Preuve : En effet, $a * P$ étant un sous-cône de $a * \tau$, il existe trivialement un effondrement simplicial, en général non élémentaire, de $a * \tau = f(\sigma)$ sur $a * P$ (Cf. Zeeman [23; pIII-7]). Décomposons-le en une suite d'effondrements élémentaires : $a * \tau = X_0 \searrow X_1 \searrow X_2 \dots \searrow X_k = a * P$.

Par application du lemme d'engouffrement élémentaire, nous trouvons une suite d'automorphismes

- h_k tel que : $h_k(U) \supset X_{k-1}$ et $h_k|_{X_k} = \text{Id}$.
- h_{k-1} " " : $h_{k-1} h_k(U) \supset X_{k-2}$ et $h_{k-1}|_{X_{k-1}} = \text{Id}$.

etc...

Finalement $h = h_1 h_2 \dots h_k$ est l'automorphisme cherché.

c q f d

Pour la démonstration du théorème d'engouffrement de Stallings, outre ce lemme d'engouffrement élémentaire nous aurons besoin du lemme technique suivant :

3.3 Lemme : Soit K un complexe simplicial fini ; il existe une triangulation t du complexe cellulaire $K \times I$, telle que pour tout simplexe σ de K :

1/ $\sigma \times I \xrightarrow{s} \sigma \times \{0\} \cup \delta\sigma \times I$ relativement à t .

2/ $\sigma \times \{0\}$ et $\sigma \times \{1\}$ sont des simplexes de t .

(\xrightarrow{s} indique une suite finie d'effondrements simpliciaux élémentaires).

Corollaire : Si L est un sous-complexe de K , alors $K \times I \xrightarrow{s} L \times I \cup K \times \{0\}$.

Démonstration du lemme : On fait une récurrence sur la dimension de K . Si $\dim K = 0$ c'est évident. Supposons que $\dim K = n$ et qu'il existe une triangulation de $K^{[n-1]} \times I$ vérifiant le lemme ; si σ est un simplexe de dimension n de K on prolonge la triangulation en rajoutant comme sommet le barycentre a de $\sigma \times I$. De toute évidence $\sigma \times I \xrightarrow{s} a * (\delta\sigma \times I) \cup a * (\sigma \times \{0\})$. $\delta\sigma$ est un complexe de dimension $n-1$. D'où :

$$(1) \quad \delta\sigma \times I \xrightarrow{s} \delta\sigma \times \{0\}$$

Sous-lemme : Si Q est un sous-complexe du complexe fini P , si $P \xrightarrow{s} Q$ et si a est un point abstrait, alors $a * P \xrightarrow{s} (a * Q) \cup P$.

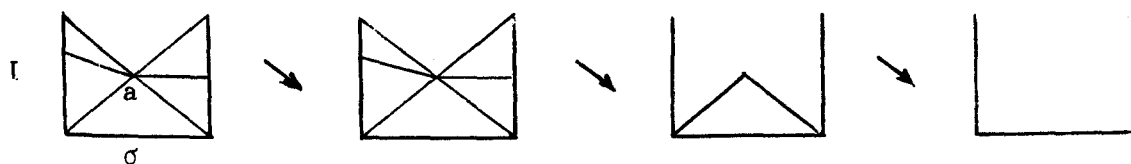
Démonstration évidente. D'où :

$$(2) \quad a * (\delta\sigma \times I) \xrightarrow{s} a * (\delta\sigma \times \{0\}) \cup \delta\sigma \times I.$$

Donc $\sigma \times I \xrightarrow{s} \delta\sigma \times I \cup a * (\sigma \times \{0\})$

Il est enfin évident que $a * (\sigma \times \{0\}) \xrightarrow{s} \sigma \times \{0\}$.

Schématiquement les démarches sont les suivantes :



c.q.f.d.

3.4 Théorème d'engouffrement de Stallings

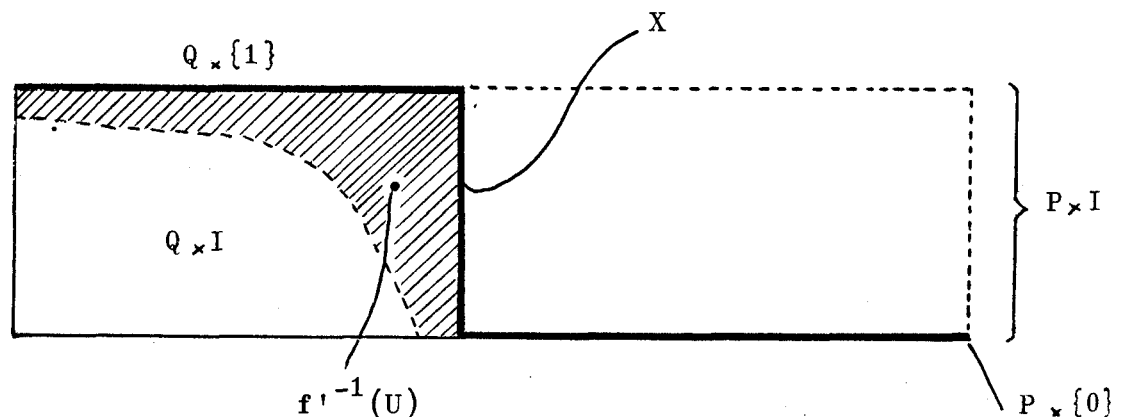
Soit M une variété sans bord de dimension n de la catégorie \mathcal{C} ($\mathcal{C} = \text{Diff}$ ou PL). Soient U un ouvert de M et P un polyèdre fermé dans M . (Si $\mathcal{C} = \text{Diff}$, P est un polyèdre relatif à une triangulation C^∞ de M). On suppose que $\dim P \leq n-3$ et que (M, U) est q -connexe. Si $P - U$ admet pour voisinage dans P un polyèdre compact Q avec $\dim Q \leq q$, alors il existe un automorphisme h de M , se réduisant à l'identité sur le complémentaire d'un compact et tel que $h(U)$ contienne P .

Remarque : h peut être choisi isotope à l'identité par une isotopie laissant fixe tout point de M hors d'un compact.

Nous ne donnerons la démonstration que dans le cas où M est un ouvert de \mathbb{R}^n . (Voir les remarques à la fin de la démonstration).

Démonstration : Soit ∂Q la frontière de Q dans P . Dans le produit $P \times I$ considérons le sous-polyèdre : $X = \overline{P - Q} \times \{0\} \cup \partial Q \times I \cup Q \times \{1\}$.

La q -connexité de (M, U) nous permet de construire $f' : P \times \{0\} \cup Q \times I \rightarrow M$ prolongeant l'injection de $P \times \{0\}$ dans M tel que $f'(X)$ soit inclus dans U .



D'après le corollaire du lemme (ch.I; 3.3) il existe une triangulation t' de $P \times \{0\} \cup Q \times I$ telle que $P \times \{0\} \cup Q \times I \xrightarrow{S} X$. D'après le lemme 12 de Zeeman [23;p.III-11], t' peut être choisie arbitrairement fine. Soit t une telle subdivision suffisamment fine pourqu'il existe $f : P \times \{0\} \cup Q \times I \rightarrow M$, homotope à f' relativement à $P \times \{0\}$ telle que f soit linéaire sur chaque simplexe et que $f(X) \subset U$. t étant choisie, d'après un lemme du chapitre 0 nous pouvons mettre f en position générale relativement à $f|_{P \times \{0\}}$.

Soit $P \times \{0\} \cup Q \times I = X_k \xrightarrow{S} X_{k-1} \xrightarrow{S} \dots X_i \xrightarrow{X} \dots X_0 = X$ une suite d'effondrements élémentaires simpliciaux.

Le cas $q \leq n-4$: Pour une récurrence sur les entiers q et i nous supposons le théorème démontré pour $q-1$ et avoir un automorphisme h_i de M tel que $h_i(U) \supset f(X_i)$. Supposons que l'effondrement de X_{i+1} sur X_i se fasse à travers le simplexe σ ; ($X_{i+1} = X_i \cup \sigma$; $f(\sigma) = a * \tau$). Soit Σ le sous-cône de $f(\sigma)$, de sommet a , s'appuyant sur l'adhérence S de $f(\sigma) \cap f(X_i - \sigma)$. Puisque f est en position générale, on a :

$$\dim \Sigma - 1 \leq \dim S \leq \max. ((n-3) + (q+1) - n ; 2(q+1) - n)$$

(Remarquer que $\dim P \leq n-3$; $\dim Q \times I \leq q+1$; $\dim \sigma \leq q+1$).

Donc $\dim \Sigma \leq q-1$ et l'hypothèse de récurrence nous donne un automorphisme θ de M se réduisant à l'identité hors d'un compact, tel que $\theta h_i(U) \supset f(X_i) \cup \Sigma$. Le lemme amélioré d'engouffrement (ch.I; 3.2) nous permet de construire h_{i+1} tel que : $h_{i+1}(U) \supset f(X_{i+1})$. Ceci achève la récurrence.

Le cas $q = n-3$: Soit \hat{X}_i le $(n-3)$ -squelette de X_i . Remarquons que $\hat{X}_i \supset P - Q \times \{0\}$ et que si $X_{i+1} = X_i \cup \sigma$, alors $\hat{X}_{i+1} \cup \sigma \searrow \hat{X}_i$ est un effondrement élémentaire. La démonstration précédente marche encore si nous construisons $\Sigma \subset f(\sigma)$, non plus à partir de $f(\sigma) \cap f(X_i - \sigma)$ mais à partir de $f(\sigma) \cap f(\hat{X}_i - \sigma)$.

L'hypothèse de récurrence suppose cette fois que $h_i(U) \supset f(\hat{X}_i)$. Puisque $\dim \Sigma \leq n-4$, le raisonnement du cas précédent permet de construire un automorphisme h tel que $h(U) \supset f(\hat{X}_k) \supset P \times \{0\}$.

Explication : Le lecteur constatera que, si $X_{i+1} = X_i \cup \sigma$, $h_{i+1}(U)$ contient $f(\sigma)$. Mais si $\dim \sigma = n-2$, il peut se passer que $h_{i+2}(U)$ ne contienne plus $f(\sigma)$; cela ne fait rien car la face τ de $f(\sigma) = a * \tau$ restera dans $h_j(U)$ pour $j > i$ et c'est bien la seule chose importante puisque $\dim \tau = n-3$ et que τ risque d'être dans $f(P \times \{0\}) = P \times \{0\}$.

c q f d

Remarque : La démonstration classique du théorème d'engouffrement de Stallings dans le cas où M n'est pas un ouvert de \mathbb{R}^n est assez longue. On doit démontrer un lemme convenable de position générale avec pour but une variété PL quelconque. Ensuite on est forcé de subdiviser plusieurs fois, plus que dans le cas ci-dessus. Pour trouver les détails le lecteur pourra lire Stallings [21], en s'appuyant sur les lemmes de Zeeman [23]. Enfin pour le cas DIFF, il serait probablement plus direct de généraliser convenablement (ch.I; 3.1) et (ch.I; 3.2).

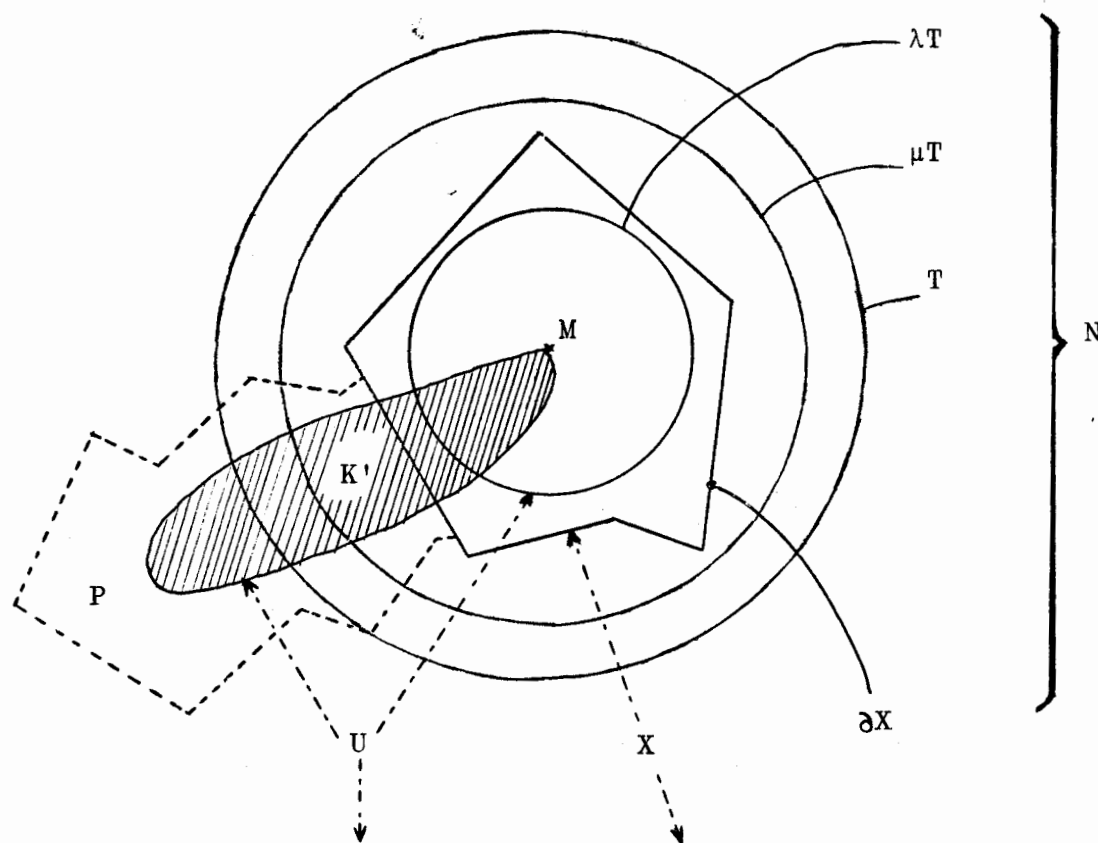
3.5 Proposition : Soit, dans la catégorie \mathcal{C} ($\mathcal{C} = \text{PL}$ ou DIFF), une variété N de dimension n , $n \geq 5$. Soit M une sous-variété admettant un voisinage tubulaire T . On suppose que pour des compacts C arbitrairement grands dans N , la paire $(N - T, N - (T \cup C))$ est 2-connexe, et que la paire $(N - M, T - M)$ est $(n-3)$ -connexe. Soit $0 < \lambda < 1$ et soit K un compact dans N . Alors il existe un automorphisme h de N , fixant le tube λT et tout point hors d'un compact, de telle sorte que $h(T) \supset K$.

N.B. Si $\mathcal{C} = \text{PL}$, T est un voisinage de M muni d'une structure de PL-fibré en disque. Si $0 < \lambda < 1$, λT désigne un autre tube strictement contenu dans T .

Démonstration dans le cas où N est un ouvert de \mathbb{R}^n . (*)

Choisissons un nombre μ tel que $\lambda < \mu < 1$. Soit X un polyèdre fermé tel que $X \cup \mu T = N$ et $X \cap \lambda T = \emptyset$. On fixe une triangulation t de N telle que X soit un sous-complexe. Soit K' un compact contenant K , tel que la paire $(N - \lambda T, N - (\lambda T \cup K'))$ soit 2-connexe.

Posons $U = N - (\lambda T \cup K')$.



(*) Cette hypothèse n'est, en fait, nécessaire que dans la mesure où nous n'avons pas donné une démonstration générale du théorème d'engouffrement de Stallings.

Le théorème de Stallings est applicable à la variété $N - \lambda T$, à l'ouvert U et au 2-squelette $X^{[2]}$ de X ; $X^{[2]} - U = K' \cap X^{[2]}$ est compact et $2 \leq n - 3$. Il existe donc un automorphisme de $N - \lambda T$, laissant fixe tout point hors d'un compact de $N - \lambda T$, et par la même prolongeable en un automorphisme h_1 de N , tel que $h_1(U) \supset X^{[2]}$.

Soit alors P un sous-complexe de X , choisi de façon que $\overline{X - P}$ soit inclus dans U et dans le domaine fixe de h_1 ; nous avons donc $h_1(U) \supset \overline{X - P} \cup P^{[2]}$. Désignons par $P_{(n-3)}$ la réunion de tous les simplexes de la première subdivision barycentrique de P ne rencontrant le 2-squelette $P^{[2]}$ relatif à la triangulation t . C'est un complexe de dimension inférieure à $n - 3$. Réappliquons le théorème de Stallings, cette fois, à la variété $N - \lambda T$, à l'ouvert $\overset{\circ}{T} - \lambda T$ et au polyèdre compact $P_{(n-3)}$. La condition de $(n - 3)$ -connexité est satisfaite parce que la paire $(N - \lambda T, \overset{\circ}{T} - \lambda T)$ a le même type d'homotopie que la paire $(N - M, T - M)$, qui est supposée $(n - 3)$ -connexe. Il existe donc un automorphisme h_2 de N , laissant fixe λT et tout point hors d'un compact de N , tel que $h_2(T) \supset P_{(n-3)}$.

Supposons maintenant que nous sachions construire deux automorphismes Θ_1 et Θ_2 de N , laissant encore fixe λT et tout point hors d'un compact de N , tels que :

$$(*) \quad \Theta_1 h_1(U) \cup \Theta_2 h_2(T) = N$$

L'automorphisme h cherché n'est autre que $(\Theta_1 h_1)^{-1} (\Theta_2 h_2)$.

En effet $U \cup h(T) = N$, donc $h(T) \supset K' \supset K$.

Pour démontrer la proposition il nous reste à construire Θ_1 et Θ_2 .

Remarquons d'abord que pour la première subdivision barycentrique t' de t , tout simplexe de P est, de façon unique, le joint d'un simplexe de $P^{[2]}$ et d'un simplexe de $P_{(n-3)}$. Passons alors à la seconde subdivision barycentrique t'' et posons :

$$Q_1 = \text{star}(P^{[2]}; P) ; \quad Q_2 = \text{star}(P_{(n-3)}; P) .$$

Nous avons : $P = Q_1 \cup Q_2$.

Posons encore :

$$\delta_1 P = \overline{X - P} \cap P ; \quad \delta_2 P = \overline{N - X} \cap P .$$

Nous allons démontrer les effondrements suivants relatifs à la subdivision t'' :

$$Q_1 \searrow^s P^{[2]} \cup (\delta_1 P \cap Q_1) \quad \text{et} \quad Q_2 \searrow^s P_{(n-3)} \cup (\delta_2 P \cap Q_2) .$$

Il s'ensuivra immédiatement que

$$(I) \quad Q_1 \cup \overline{X-P} \searrow^s P^{(2)} \cup \overline{X-P}$$

$$(II) \quad Q_2 \cup \overline{N-X} \searrow^s P_{(n-3)} \cup \overline{N-X}$$

L'effondrement simplicial de Q_1 sur $P^{(2)}$ (resp. de Q_2 sur $P_{(n-3)}$) est un exercice simple.

Supposons qu'une des étapes de cet effondrement se fasse à travers $\sigma = a * \tau$, simplexe de la subdivision t'' , a étant un sommet dans $P^{[2]}$ et τ un simplexe de Q_1 non inclus dans $P^{[2]}$.

Il est clair que, pour démontrer l'effondrement $Q_1 \searrow^s P^{[2]} \cup (\delta_1 P \cap Q_1)$, il suffit de démontrer que si $\tau \in \delta_1 P$, alors $a * \tau \in \delta_1 P$, car dans ce cas, pour obtenir l'effondrement cherché à partir de celui de Q_1 sur $P^{[2]}$, il suffira d'omettre l'effondrement à travers σ .

Or il existe un unique simplexe σ' de la triangulation t' , dont le barycentre soit un des sommets de σ . Si τ est dans $\delta_1 P$ et n'est pas dans $P^{[2]}$, le barycentre de σ' est nécessairement un des sommets de τ ; il est donc dans $\delta_1 P$, ce qui implique que σ' est entièrement dans $\delta_1 P$, et, a fortiori, σ . Le même raisonnement démontre l'autre effondrement.

La construction de Θ_1 et de Θ_2 vérifiant (*) se fait par une suite d'engouffrements élémentaires, en appliquant le lemme (ch.I; 3.1) aux effondrements (I) et (II). Nous savons déjà que $h_1(U) \supset P^{[2]} \cup \overline{X-P}$ et que $h_2(T) \supset P_{(n-3)} \cup \overline{N-X}$. Maintenant $\Theta_1 h_1(U) \supset Q_1 \cup \overline{X-P}$ et $\Theta_2 h_2(T) \supset Q_2 \cup \overline{N-X}$. Or $Q_1 \cup \overline{X-P} \cup Q_2 \cup \overline{N-X} = N$. L'égalité (*) est donc vérifiée.

c q f d

3.6 Corollaire : Dans les conditions de la proposition précédente, il existe, dans la catégorie \mathcal{C} ($\mathcal{C} = \text{DIFF}$ ou PL), un isomorphisme $\theta : \overset{\circ}{T} \rightarrow N$, laissant fixe M .

Démonstration : Considérons une suite croissante de compacts K_i dans N tels que : $N = \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i$.

Choisissons une suite numérique $\{u_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, de nombres strictement positifs, convergeant vers 1 en croissant ; on suppose de plus que la suite est non stationnaire.

Considérons la suite de tubes $u_i T$; si $\mathcal{C} = PL$, cela signifie que : $u_i T \subset \text{int}(u_{i+1} T)$ et $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} u_i T = T$.

Construisons par récurrence une suite d'automorphismes $\theta_i : N \rightarrow N$. θ_0 est l'identité. Supposons que θ_i soit donné de telle façon que $\theta_i(u_i T) \supset K_i$. D'après la proposition précédente nous savons construire un automorphisme h_i de N tel que :

$$\begin{aligned} - h_i|_{\theta_i(u_i T)} &= 1|_{\theta_i(u_i T)} \\ - h_i(\theta_i(u_{i+1} T)) &\supset K_{i+1} \end{aligned}$$

Posons alors $\theta_{i+1} = h_i \theta_i$. Nous avons : - $\theta_{i+1}(u_{i+1} T) \supset K_{i+1}$

$$- \theta_{i+1}|_{u_i T} = \theta_i|_{u_i T}$$

Si nous disons que $\theta|_{u_i T} = \theta_i|_{u_i T}$, θ est bien l'isomorphisme cherché.

c q f d

3.7 Corollaire : Théorème de Mazur pour des ouverts de \mathbb{R}^m .

Soient M_1 et M_2 deux ouverts de \mathbb{R}^m et $f : M_1 \rightarrow M_2$ une équivalence d'homotopie. Il existe un entier s et, dans la catégorie \mathcal{C} ($\mathcal{C} = \text{DIFF}$ ou PL), un isomorphisme $F : M_1 \times \mathbb{R}^s \rightarrow M_2 \times \mathbb{R}^s$, homotope à $f \times \text{Id}$ $\Big|_{\mathbb{R}^s}$.

Démonstration : Dans la catégorie \mathcal{C} , nous savons construire un plongement propre de M_1 dans \mathbb{R}^{2m+1} , (Cf. ch. 0) . Nous en déduisons un plongement propre $g : M_1 \rightarrow M_2 \times \mathbb{R}^{2m+1}$, homotope à $f \times \{0\}$.

Il existe un entier k tel que le plongement $g \times \{0\} : M_1 \rightarrow (M_2 \times \mathbb{R}^{2m+1}) \times \mathbb{R}^k$ admette un \mathbb{R}^n -fibré normal ν , avec $E(\nu) \subset N'$: Si $\mathcal{C} = \text{DIFF}$, on peut choisir $k = 0$ et ν est un fibré vectoriel. Si $\mathcal{C} = PL$, l'existence de k et de ν découle du théorème de Milnor (Cf. [12]).

M_1 et M_2 étant parallelisables, ν est stablement trivial ; quitte à augmenter k , on peut le supposer trivial ce qui permet, même si $\mathcal{E} = PL$, de supposer que ν contient un fibré en disques T' , isomorphe dans la catégorie à $M_1 \times D^{2m+1+k}$. Notons $M = g(M_1) \subset N'$; $N = N' \times \mathbb{R}^3$; et T un voisinage tubulaire de M , identifié à $M \times \{0\}$ dans N , tel que, pour tout $x \in T', \{x\} \times \mathbb{R}^3 \cap T$, soit un convexe de \mathbb{R}^3 . Nous allons montrer que les espaces N , M et T satisfont aux conditions de connexité de la proposition 3.5 de ce chapitre.

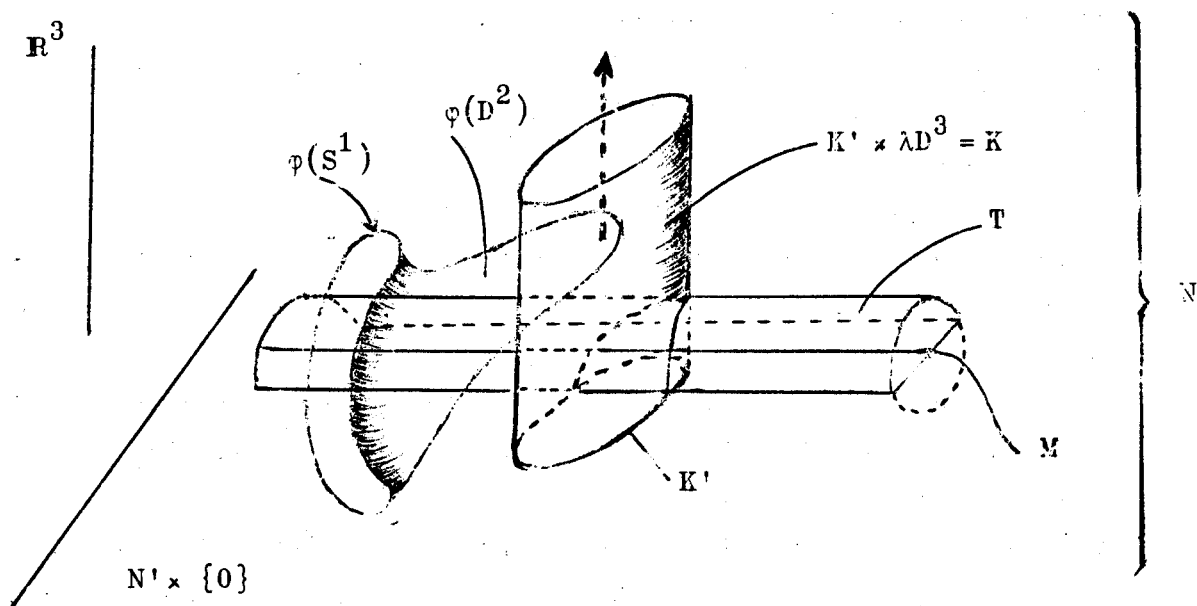
a) Démontrons que, pour des compacts arbitrairement grands dans N , la paire $(N, N - (T \cup K))$ est 2-connexe, (et qu'en particulier, la paire $(N, N - T)$ est 2-connexe).

Nous allons simplement démontrer la partie la plus difficile, à savoir que $\pi_2(N, N - (T \cup K)) = 0$; on démontrerait de même que, pour $i = 0, 1$, $\pi_i(N, N - (T \cup K)) = 0$.

Soit $\varphi : (D^2, \delta D^2) \rightarrow (N, N - (T \cup K))$. Grâce au théorème d'approximation, nous pouvons supposer que φ est différentiable ; (rappelons que N est un ouvert d'un espace euclidien). Soit p la projection naturelle de N sur \mathbb{R}^3 .

Nous savons, d'après le théorème de Sard [18], que, même si $p\varphi(D^2)$ contient l'origine de \mathbb{R}^3 , il existe un point arbitrairement voisin de l'origine dans \mathbb{R}^3 n'appartenant pas à l'image de $p\varphi$. Il est donc possible de modifier φ par une petite translation dans \mathbb{R}^3 , de telle sorte que $p\varphi(D^2)$ ne contienne plus l'origine de \mathbb{R}^3 ; nous choisirons une déformation de φ suffisamment petite pour que $\varphi(\delta D^2)$ reste inclus dans $N - (T \cup K)$. Autrement dit nous nous sommes ramenés par un lemme facile de position générale, au cas où $\varphi(D^2)$ ne rencontre pas $N' \times \{0\}$.

Utilisons à ce point la liberté qui nous est laissée pour choisir K : on obtient une famille de compacts arbitrairement grands dans N en prenant les compacts de la forme $K' \times \lambda D^3$ où K' est un compact de N' . Maintenant il suffit de déformer φ en faisant sur la composante $p\varphi$ une homothétie à partir de l'origine de \mathbb{R}^3 de telle sorte que l'on pousse $p\varphi(D^2)$ à l'extérieur de $\lambda D^3 \cup p(T)$. Il est clair que cette homothétie déforme $\varphi(S^1)$ à travers $N - (T \cup K)$, vue la condition de convexité dans la construction de T .



b) Démontrons que la paire $(N - M, T - M)$ est $(n - 3)$ -connexe. ($n = \dim N$). Sans perte de généralité nous pouvons supposer que N est connexe. Nous savons que $T \hookrightarrow N$ est une équivalence d'homotopie. Soit $\tilde{N} \xrightarrow{p} N$ le revêtement universel de N . Pour $A \subset N$, posons $\tilde{A} = p^{-1}A$. D'après le a) l'injection $(N - M) \rightarrow N$ induit un isomorphisme sur π_0 et π_1 ; il en est de même de l'injection $(T - M) \hookrightarrow T$, par un raisonnement de position générale analogue à et plus faible que celui développé en a). Donc $p|_{\tilde{N} - \tilde{M}} : (\tilde{N} - \tilde{M}) \rightarrow (N - M)$ et $p|_{\tilde{T} - \tilde{M}} : (\tilde{T} - \tilde{M}) \rightarrow (T - M)$ sont des revêtements universels.

Or le fait que $T \hookrightarrow N$ soit une équivalence d'homotopie implique que $\tilde{T} \hookrightarrow \tilde{N}$ est une équivalence d'homotopie; donc on a les égalités

$$\begin{aligned}
 0 &= H_*(\tilde{N}, \tilde{T}; \mathbb{Z}) \\
 &= H_*(\tilde{N} - \tilde{M}, \tilde{T} - \tilde{M}; \mathbb{Z}) && \text{(excision)} \\
 &= \pi_*(\tilde{N} - \tilde{M}, \tilde{T} - \tilde{M}) && \text{(théorème d'Hurewicz)} \\
 &= \pi_*(N - M, T - M) \quad .
 \end{aligned}$$

Enfin nous pouvons supposer sans perte de généralité que $\dim N \geq 5$. Toutes les conditions de la proposition (ch.I; 3.5) sont satisfaites. D'après le corollaire (ch.I; 3.6), il existe, dans la catégorie \mathcal{C} , un isomorphisme $\theta : \overset{\circ}{T} \rightarrow N$, laissant fixe la section nulle du tube, à savoir l'image de M_1 dans N . $\overset{\circ}{T}$ étant isomorphe à $M_1 \times \mathbb{R}^s$, nous en déduisons l'isomorphisme cherché.

c q f d

3.8 Fin de la démonstration du théorème de Mazur dans le cas général.

Rappel de la situation : Soit $f : M_1 \rightarrow M_2$ une équivalence d'homotopie entre deux variétés sans bord de dimension n de la catégorie \mathcal{C} ($\mathcal{C} = \text{DIFF}, \text{TOP}, \text{PL}$). On suppose que $f^*(\tau(M_2))$ est stablement isomorphe à $\tau(M_1)$. Il nous faut trouver un entier N et un isomorphisme

$$F : M_1 \times \mathbb{R}^N \rightarrow M_2 \times \mathbb{R}^N, \text{ homotope à } f \times \text{Id} \Big|_{\mathbb{R}^N}.$$

Démonstration : (Astuce de Hirsch) nous pouvons supposer M_1 et M_2 plongées dans \mathbb{R}^{n+k} , k assez grand pour qu'il existe des microfibrés normaux

$$v_j' \xrightleftharpoons[i_j']{p_j'} M_j \quad (j = 1, 2) \quad (\text{Cf. Milnor [14] pour } \mathcal{C} = \text{TOP et [12] pour } \mathcal{C} = \text{PL}).$$

D'après le théorème de Kister-Mazur [5], v_1' et v_2' peuvent être choisis avec une structure de \mathbb{R}^k -fibrés. $E(v_j')$ est un voisinage rétracte de M_j (Cf. ch. 0). Soit $F'' : E(v_1') \rightarrow E(v_2')$ l'équivalence d'homotopie $i_2' \circ f \circ p_1'$; $E(v_1')$ et $E(v_2')$ étant des ouverts de \mathbb{R}^{n+k} , nous avons démontré (ch.I; 3.7) qu'il existe un entier s et un isomorphisme

$$F' : E(v_1') \times \mathbb{R}^s \rightarrow E(v_2') \times \mathbb{R}^s,$$

homotope à $F' \times \text{Id} \Big|_{\mathbb{R}^s}$.

Posons $N = n + s + k$ et soient

$$v_j = v_j' \times \mathbb{R}^s \xrightleftharpoons[i_j]{p_j} M_j \quad (j = 1, 2).$$

Nous avons les isomorphismes suivants :

- quitte à augmenter N , l'hypothèse sur les fibrés tangents nous permet d'écrire :

$$(a) \quad F'^* p_2^*(\tau(M_2)) \cong p_1^* \tau(M_1)$$

— (b) Puisque $E(v_j)$ est parallelisable, nous avons
pour $j = 1, 2$ $M_j \times \mathbb{R}^N \cong E(\tau(E(v_j))|_{M_j}) = E(v_j \oplus \tau(M_j)) \cong E(p_j^* \tau(M_j))$

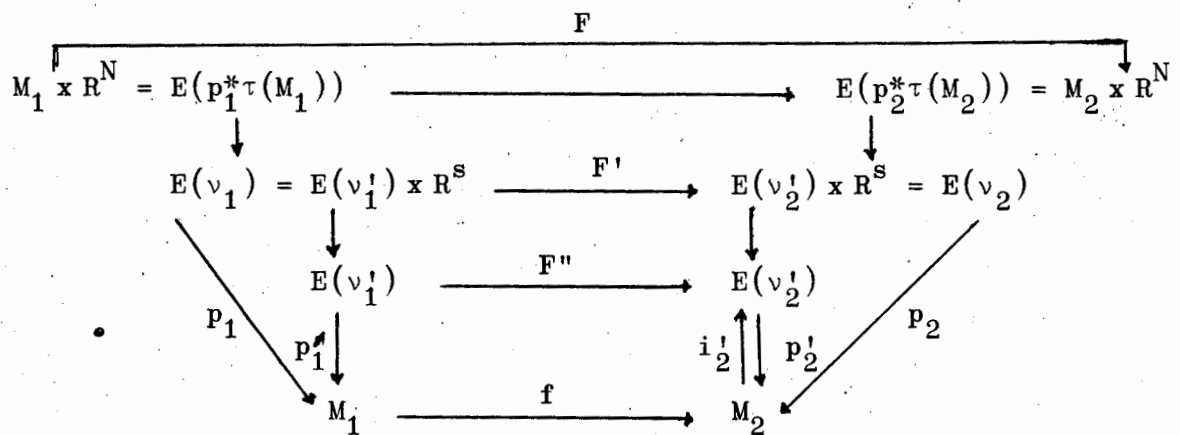
— F' induit un isomorphisme

$$(c) \quad E(F'^* p_2^* \tau(M_2)) \cong E(p_1^* \tau(M_1)).$$

La composition de ces isomorphismes donne F :

$$\begin{array}{ccc} E(p_1^*(\tau(M_1))) & \xrightarrow{(a)} & E(F'^* p_2^* \tau(M_2)) & \xrightarrow{(c)} & E(p_2^* \tau(M_2)) \\ \parallel \wr (b) & & & & \parallel \wr (b) \\ M_1 \times \mathbb{R}^N & \xrightarrow{F} & & & M_2 \times \mathbb{R}^N \end{array}$$

Figure



c.q.f.d.

3.9 Corollaire : Pour toute variété M contractible sans bord, il existe un entier s tel que $M \times \mathbb{R}^s$ soit isomorphe à \mathbb{R}^{n+s} .

§4. LE PROBLEME DE L'EXISTENCE ET DE L'UNICITE D'UNE
 =====
 STRUCTURE DE VARIETE PL SUR UNE VARIETE TOPOLOGIQUE
 =====

Si l'on se contente de résoudre le problème "stablement", on est ramené par le théorème de Mazur à des questions au sujet des microfibrés PL et TOP.

Le problème de l'unicité s'appelle le "Hauptvermutung" pour les variétés PL.

Si X est un complexe simplicial connexe et localement fini, désignons par $k_{\mathcal{C}}(X)$, pour $\mathcal{C} = \text{PL}$ ou TOP , l'ensemble des classes d'isomorphisme stable de microfibrés de type \mathcal{C} . Rappelons que deux microfibrés ξ_1 et ξ_2 sur X sont stablement isomorphes si et seulement si il existe des fibrés triviaux ε_1 et ε_2 tels que $\xi_1 \oplus \varepsilon_1$ soit isomorphe à $\xi_2 \oplus \varepsilon_2$ (*).

Si, en outre, X est de dimension finie, nous allons définir un ensemble $\mathcal{S}_{\text{PL}}(X)$ (resp. $\mathcal{S}_{\text{TOP}}(X)$) : un élément de $\mathcal{S}_{\text{PL}}(X)$ se représente par une équivalence d'homotopie $f : X \rightarrow M$ avec une variété PL (resp. TOP) sans bord ; $f : X \rightarrow M$ et $f' : X \rightarrow M'$ représentent le même élément de $\mathcal{S}_{\text{PL}}(X)$ (resp. de $\mathcal{S}_{\text{TOP}}(X)$) si et seulement si il existe deux entiers n et n' et un isomorphisme PL (resp. TOP)

$$F : M \times \mathbb{R}^n \rightarrow M' \times \mathbb{R}^{n'}$$

qui rende le diagramme suivant commutatif à homotopie près :

$$\begin{array}{ccccc} & & M & \xrightarrow{\times 0} & M \times \mathbb{R}^n \\ & \nearrow f & & & \downarrow F \\ X & & & & \\ & \searrow f' & M' & \xrightarrow{\times 0} & M' \times \mathbb{R}^{n'} \end{array}$$

Exercice : Montrer que $\mathcal{S}_{\text{PL}}(X)$ et $\mathcal{S}_{\text{TOP}}(X)$ sont des ensembles.

(*) $k_{\mathcal{C}}$ est un groupe abélien pour la somme de Whitney. (Cf. ch. 0).

Considérons le carré suivant d'applications naturelles :

$$(I-4-a) \quad \begin{array}{ccc} \mathfrak{s}_{PL}(X) & \xrightarrow{\quad \bar{\Psi} \quad} & \mathfrak{s}_{TOP}(X) \\ T_{PL} \downarrow & & \downarrow T_{TOP} \\ k_{PL}(X) & \xrightarrow{\quad \psi \quad} & k_{TOP}(X) \end{array}$$

$\bar{\Psi}$ et ψ oublient la structure PL. Au niveau des représentants, T_{PL} associe à une équivalence d'homotopie $f : X \rightarrow M$ le microfibré $f^* \tau_{PL}$ sur X . T_{TOP} est défini parallèlement. T_{PL} et T_{TOP} sont évidemment bien définis et rendent le carré commutatif.

Remarquons que si X' a le type d'homotopie de X , le carré associé à X' est naturellement isomorphe à celui associé à X .

4.1 Théorème : T_{PL} et T_{TOP} sont des isomorphismes.

Démonstration : L'injectivité est exactement le principe d'isomorphisme stable (ch.1; 1.1) pour PL et TOP. Vérifions la surjectivité pour PL ; la vérification pour TOP est parallèle. Soient $x \in k_{PL}(X)$ et ξ un \mathbb{R}^n -fibré sur X qui représente x (théorème de Kister-Mazur Ch.0 et [5]). Plongeons X simplicialement dans un espace euclidien et choisissons un voisinage régulier ouvert N tel que $X \hookrightarrow N$ soit une équivalence d'homotopie. Si $r : N \rightarrow X$ est une rétraction (Cf. Ch.0 p.), considérons l'équivalence d'homotopie $f : X \rightarrow E(r^* \xi)$ où f est l'application composée

$$X \xrightarrow{i} N \xrightarrow[\text{nulle}]{\text{section}} E(r^* \xi).$$

Or $\tau E(r^* \xi) = p^* r^* \xi \oplus \varepsilon^{(*)}$ où ε est un fibré trivial - car le fibré tangent à N est trivial. (Cf. Ch.0).

Si $[f]$ est l'élément de $\mathfrak{s}_{PL}(X)$ représenté par f , $T_{PL}([f])$ est par définition représenté par

$$\begin{aligned} i^*(p^* r^* \xi \oplus \varepsilon) &= (p^* r^* \xi \oplus \varepsilon)|_X \\ &= \xi \oplus \varepsilon|_X \end{aligned}$$

qui est stablement isomorphe à ξ .

c q f d

(*)

p est la projection du fibré $r^* \xi$ sur N .

Du carré (I - 4 - a) on déduit le

4.2 Corollaire : Soit M une variété topologique sans bord. Pour qu'il existe un entier n tel que $M \times \mathbb{R}^n$ admette une structure de variété PL, il faut et il suffit qu'il existe un micro-fibré PL sur M dont le micro-fibré TOP sous-jacent soit stablement isomorphe au micro-fibré tangent TOP de M .

Démonstration : Le corollaire se déduit du carré (I - 4 - a) à partir du moment où l'on sait que chaque variété topologique M^m a le type d'homotopie d'un complexe simplicial localement fini et de dimension finie. \tilde{X} est par exemple une triangulation de l'espace total d'un \mathbb{R}^k -fibré TOP normal à un plongement de M dans \mathbb{R}^{m+k} . Un tel plongement existe (Cf. ch. 0).

c q f d

4.3 Corollaire :

(a) Si $\phi : k_{PL}(X) \rightarrow k_{TOP}(X)$ est surjectif alors, pour toute variété topologique M sans bord qui a le type d'homotopie de X , il existe un entier n tel que $M \times \mathbb{R}^n$ admette une structure de variété PL.

(b) Si $\phi : k_{PL}(X) \rightarrow k_{TOP}(X)$ est injectif alors, pour tout homeomorphisme TOP $h : M_1 \rightarrow M_2$ de variétés PL ayant toutes deux le type d'homotopie de X il existe un entier n et un isomorphisme PL $H : M_1 \times \mathbb{R}^n \rightarrow M_2 \times \mathbb{R}^n$ homotope à $h \times 1_{\mathbb{R}^n}$.

Remarque : D. Sullivan a démontré que $\phi : k_{PL}(X) \rightarrow k_{TOP}(X)$ est injectif pour tout complexe simplicial fini qui satisfait à la condition suivante :

(*) $H_3(X; \mathbb{Z})$ n'a pas de 2-torsion.

D'ailleurs il a démontré un résultat plus fort qui permet de déduire des méthodes de chirurgie le théorème suivant :

4.4 Théorème (Sullivan) (*) : Soit $h : M_1 \rightarrow M_2$ un homéomorphisme de deux variétés compactes PL simplement connexes, à bord ou bien vide ou bien simplement connexe. L'on suppose (*) pour $X = M_1$ et l'on suppose $\dim M_1 \geq 6$, ou bien $bM_1 = \emptyset$ et $\dim M_1 \geq 5$. Alors l'application $h : (M_1, bM_1) \rightarrow (M_2, bM_2)$ est homotope à un isomorphisme PL.

(*) Thèse, Université de Princeton, 1967.

Au lieu de supposer M_1 simplement connexe et bM_1 vide ou simplement conn on suppose maintenant que M_1 et bM_1 sont connexes et que $bM_1 \hookrightarrow M_1$ induit un isomorphisme de π_1 . Alors $h|_{\text{int } M_1}$ est homotope à un isomorphisme $PL : \text{int } M_1 \rightarrow \text{int } M_2$.

La question de l'injectivité de $\phi : k_{PL}(X) \rightarrow k_{TOP}(X)$ reste dans le cas général un mystère complet.

Exercice : On démontre les analogues des résultats 4.1, 4.2 et 4.3 pour un carré :

$$(I-4-b) \quad \begin{array}{ccc} \mathfrak{s}_{DIFF}(X) & \xrightarrow{\quad \bar{\psi}' \quad} & \mathfrak{s}_{TOP}(X) \\ \downarrow T_0 & & \downarrow T_{TOP} \\ k_0(X) & \xrightarrow{\quad \phi' \quad} & k_{TOP}(X) \end{array}$$

et, ce qui est plus difficile, pour un carré

$$(I-4-c) \quad \begin{array}{ccc} \mathfrak{s}_{DIFF}(X) & \xrightarrow{\quad \bar{\phi} \quad} & \mathfrak{s}_{PL}(X) \\ \downarrow T_0 & & \downarrow T_{PL} \\ k_0(X) & \xrightarrow{\quad \varphi \quad} & k_{PL}(X) \end{array}$$

tel que $\phi' = \phi\varphi$ et $\bar{\psi}' = \bar{\psi}\bar{\phi}$.

X est encore un complexe simplicial connexe, localement fini et de dimension finie. $k_0(X)$ est l'ensemble de classes d'isomorphisme stable de fibrés vectoriels sur X .

Voici quelques indications pour le deuxième carré. Au niveau des représentants $\bar{\phi}$ associe à une équivalence d'homotopie $f : X \rightarrow M$, où M est une variété DIFF sans bord, la composée $X \xrightarrow{f} M \xrightarrow{h^{-1}} N$ où N est une variété PL et où h munit M d'une C^1 -triangulation de Whitehead (Cf. J.H.C. Whitehead [2]). φ peut être défini par la condition que (I-4-c) commute, car T_0 et T_{PL} sont des isomorphismes. Pour une définition plus directe de φ voir Milnor [12].

Remarque : ϕ (et donc ϕ') n'est ni injectif ni surjectif. Pour une explication simple voir Milnor [12]. Il existe en fait une suite exacte longue de groupes abéliens (Cf. Lashof-Rothenberg [26])

$$\rightarrow \Gamma^n \rightarrow k_0(S^n) \rightarrow k_{PL}(S^n) \rightarrow \Gamma^{n-1} \rightarrow k_0(S^{n-1}) \rightarrow$$

où Γ^n est le groupe de structures différentiables à difféomorphisme près sur la sphère S^n , (Cf. Munkres [16;p522] et Cerf [3]). On a

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	...
$ \Gamma^n $	0	0	0	0	0	0	0	28	2	8	6	992	...

(Cf. Kervaire-Milnor [25] et Cerf [24]).

§5. PROBLEME DE RENDRE PROPRE UNE EQUIVALENCE D'HOMOTOPIE

=====

La forme générale du théorème de Mazur permet de démontrer en employant les idées du chapitre V le théorème suivant :

5.1 Théorème : Soit $f : M_1 \rightarrow M_2$ une équivalence d'homotopie entre deux variétés DIFF toutes les deux sans bord et de dimension n . La condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un entier N et une équivalence d'homotopie propre. $F : M_1 \times \mathbb{R}^N \rightarrow M_2 \times \mathbb{R}^N$ homotope à $F \times 0$ est qu'il existe un entier s et une équivalence d'homotopie fibrée au-dessus de M_1 des fibrés de Hurewicz (à fibre homotope à S^{n+s-1}) associés aux fibrés $\tau(M_1) \oplus \varepsilon^s$ et $f^*\tau(M_2) \oplus \varepsilon^s$.

Nous indiquons la démonstration sous forme d'exercices.

Exercices

0) Lemme : Si $f : M_1 \rightarrow M_2$ est une équivalence d'homotopie propre, et si ξ_1 est un fibré vectoriel de dimension k sur M_1 tel que les fibrés en sphères S^{k-1} de ξ_1 et $f^*\xi_2$ aient le même type d'homotopie fibrée^(*), il

(*) On trouvera la définition d'une équivalence d'homotopie fibrée au chapitre V.

existe une équivalence d'homotopie propre φ des espaces totaux $E(\xi_i)$ qui rende le carré suivant commutatif à l'homotopie près.

$$\begin{array}{ccc} E(\xi_1) & \xrightarrow{\varphi} & E(\xi_2) \\ \text{proj.} \downarrow & & \downarrow \text{proj.} \\ M_1 & \xrightarrow{f} & M_2 \end{array}$$

1) Suffisance : Soit ξ^s un fibré vectoriel sur M_1 qui représente $[f^*\tau(M_2)] - [\tau(M_1)]$ dans le groupe $k_0(M_1)$ des classes stables de fibrés vectoriels sur M_1 . Dédire du principe d'isomorphisme stable un isomorphisme $\phi : E(\xi) \times \mathbb{R}^N \rightarrow M_2 \times \mathbb{R}^{s+N}$. Montrer qu'un représentant $\eta^{s'}$ de $[\tau(M_1)] - [f^*\tau(M_2)]$ a le type d'homotopie fibrée d'un fibré trivial. (). Appliquer convenablement 0) pour obtenir l'équivalence d'homotopie propre $M_1 \times \mathbb{R}^{s+N+s'} \rightarrow M_2 \times \mathbb{R}^{s+N+s'}$ demandée.

2) Nécessité : Soient M_1 et M_2 deux variétés DIFF; Soit f une application propre de M_1 dans M_2 et $g : M_1 \rightarrow M_2 \times \mathbb{R}^s$ un plongement dans $M_2 \times D^s$ qui est proprement homotope à $f \times 0$ dans $M_2 \times D^s$. Il existe un voisinage tubulaire fermé T de $g(M_1)$ tel que $M_2 \times \vec{0} \subset \text{int } T$ (voir page I.8). Montrer que la projection $\partial T \rightarrow \mathbb{R}^s - \{0\} \simeq S^{s-1}$ constitue une trivialisation du fibré $\partial T \rightarrow M_1$ en tant que fibré de Hurewicz à fibre homotope à S^{s-1} (Cf. ch. V). Or $\partial T \rightarrow M_1$ est le fibré en sphères associé au fibré normal de g qui dans le groupe des classes stable est $[f^*\tau(M_2)] - [\tau(M_1)]$. En déduire une équivalence d'homotopie fibrée sur M_1 entre les fibrés en sphères associés à $f^*\tau(M_2) \oplus \varepsilon^{s'}$ et $\tau(M_1) \oplus \varepsilon^{s'}$, $s' = s+n$.

3) Généraliser le théorème aux variétés topologiques. Pour la suffisance il convient d'observer que si ξ est un \mathbb{R}^n -fibré TOP sur X , $\xi + \varepsilon^1$ contient un fibré en sphères S^n localement trivial $E \rightarrow X$ tel que $\xi + \varepsilon^1$ est isomorphe au \mathbb{R}^{n+1} -fibré $M(p) \rightarrow X$, $M(p) = (0,1] \times E / (1,e) = (1,e')$, si $p(e) = p(e')$ []. La nécessité (suivant 2)) est plus cannulée.

BIBLIOGRAPHIE

=====

- [1] J. Mc. ALPINE Infinite dimensional manifolds and Morse theory,
Ph. D. thesis, Columbia University, New York, 1965.
- [2] C. BESSAGA Every infinite-dimensional Hilbert space is diffeomorphic with its unite sphere, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. 14 (1966), p. 27-31.
- [3] J. CERF La théorie de Smale sur le h-cobordisme des variétés, Séminaire H. Cartan, exposé n°11, 1961-62, Paris.
- [4] M. HIRSCH On tangential equivalence of manifolds, Ann. of Math. 83 (1966), p. 211-217.
- [5] J.M. KISTER Microbundles are fibre bundles, Ann. of Math. 80 (1964), p. 190-199.
- [6] S. LANG Introduction aux variétés différentiables, Dunod, 1967.
- [7] R. LASHOF,
M. ROTHENBERG On the Hauptvermutung, triangulation of manifolds, and h-cobordism, Bull. Amer. Math. Soc. 72(1966), p. 1040-1043.
- [8] B. MAZUR Stable equivalence of differentiable manifolds, Bull. Amer. Math. Soc. 67 (1961), p. 377-384.
- [9] " The method of infinite repetition in pure topology : II Stable applications, Ann. of Math. 83(1966), p. 387-401.
- [10] J. MILNOR On manifolds homeomorphic to 7-sphere, Ann. of Math. 64 (1956), p. 339-405.
- [11] " Some consequences of a theorem of Bott, Ann. of Math. 68 (1958), p. 444-449.
- [12] " Microbundles and differentiable structures, minéographié, Princeton University, 1961.
- [13] " Two complexes which are homeomorphic but combinatorially distinct, Ann. of Math. 74 (1961), p. 570-590.
- [14] " Microbundles I, Topology 3, supplément 1, (1964), p. 53-80.

- [15] J. MILNOR Lectures on the h-cobordism theorem, notes by
L. Siebenmann and J. Sondow, Princeton University Press
1965.
- [16] J. MUNKRES Obstructions to the smoothing of piecewise-differentiable
homeomorphisms, Ann. of Math. 73 (1960), p. 521-554.
- [17] " Elementary differential topology, Ann. of Math. Studi
54, Princeton University Press, 1963.
- [18] A. SARD The measure of critical values of differentiable maps
Bull. Amer. Math. Soc. 48 (1942), p. 883-890.
- [19] E. SPANIER Algebraic topology, Mc. Graw-Hill, 1966.
- [20] N. STEENROD The topology of fibre bundles, Princeton University Press
1951.
- [21] J. STALLINGS The piecewise-linear structure of euclidean space,
Proc. Cambridge Philos. Soc. 58 (1962), p. 481-488.
- [22] J.H.C. WHITEHEAD On C^1 -complexes, Ann. of Math. 41 (1940), p. 809-824.
- [23] E. ZEEMAN Seminar on combinatorial topology, I. H. E. S. 1963,
notes minéographiées.
- [24] J. CERF Sur les difféomorphismes de la sphère de dimension
trois ($\Gamma_4=0$), Lectures notes in Math. vol. 53,
Springer 1968.
- [25] M. Kervaire
 J. MILNOR Groups of homotopy spheres I,
Ann. of Math. 77 (1963), p. 504-537.
- [26] R. LASHOF
 M. ROTHENBERG Microbundles and smoothing,
Topology 3 (1964), p. 357-388.

C H A P I T R E I I

LE T H E O R E M E D E
R E P R E S E N T A B I L I T E D E B R O W N

La théorie des fibrés conduit à l'étude des foncteurs H , contravariants définis sur une catégorie d'espaces topologiques et de classes d'homotopie d'applications continues, qui sont à valeurs dans la catégorie des ensembles. Un exemple typique est le foncteur qui associe à un complexe simplicial localement fini l'ensemble $H(X)$ des classes d'équivalence de microfibrés PL sur X d'une dimension fixée (Cf. ch. IV). Le théorème de Brown donne des conditions sous lesquelles un tel foncteur est représentable dans le sens suivant:

Définition : (Grothendieck). Soit $H : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{E}$ un foncteur contravariant à valeurs dans la catégorie \mathcal{E} des ensembles. Pour tout $Y \in \mathcal{C}$, et tout $u \in H(Y)$ on peut former une transformation de foncteurs

$$T(u) : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(?, Y) \rightarrow H(?)$$

qui à $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ associe l'élément $H(f)u \in H(X)$. Le foncteur H est représentable s'il existe un $Y \in \mathcal{C}$ et un $u \in H(Y)$ tel que $T(u)$ soit un isomorphisme de foncteurs. En d'autres mots, pour tout $X \in \mathcal{C}$ et $x \in H(X)$ il existe un morphisme $f : X \rightarrow Y$ unique de telle sorte que $H(f)u = x$.

Dans le théorème de Brown, les objets de la catégorie utilisée sont des CW-complexes de Whitehead (avec point base). Nous commençons donc par rappeler certaines propriétés de ces complexes que nous utiliserons sans cesse dans les chapitres suivants.

§1. DEFINITION ET PROPRIETES DES CW-COMPLEXES

=====

Au sujet de ce qui est traité dans ce paragraphe nous donnons les références suivantes : J.H.C. Whitehead [8], Hilton [3], G.W. Whitehead [6], Spanier [6].

1.1 Définition : Un espace topologique X est muni d'une structure de CW-complexe s'il est muni d'une filtration croissante par des sous-espaces $X^{[n]}$, $n \in \mathbb{N}$, recouvrant X et vérifiant en outre les conditions suivantes :

(i) D^n désignant le disque unité de \mathbb{R}^n et ∂D^n son bord, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un ensemble d'indices A_n et pour tout $\alpha \in A_n$ une application continue $f_\alpha : \partial D^n \rightarrow X^{[n-1]}$ de telle façon que $X^{[n]}$ soit homéomorphe à $X^{[n-1]} \coprod (\coprod_{\alpha \in A_n} D^n \times \{\alpha\}) / \{ \forall x \in \partial D^n, f_\alpha(x) = x * \alpha \}$.

(ii) La topologie sur X est la limite inductive des topologies induites sur chaque $X^{[n]}$.

- Par définition $X^{[n]}$ s'appelle le n -squelette et l'image de $D^n \times \{\alpha\}$ dans $X^{[n]}$ est une cellule de dimension n , notée e_α^n , dont le bord ∂e_α^n est l'image par f_α de ∂D^n ; $\partial e_\alpha^n \subset X^{[n-1]}$. $e_\alpha^n - \partial e_\alpha^n$ est l'intérieur de la cellule et est noté $\overset{\circ}{e}_\alpha^n$; $\overset{\circ}{e}_\alpha^n$ est un exemplaire du disque ouvert $\overset{\circ}{D}_n$; si $\alpha \neq \beta$, $\overset{\circ}{e}_\alpha^n \cap \overset{\circ}{e}_\beta^n = \emptyset$. Remarquons que la topologie de X est la limite inductive des topologies induites sur chaque cellule.

- La dimension d'un CW-complexe est la dimension maximale de ses cellules.

- Le cardinal d'un CW-complexe est, par définition, le cardinal de l'ensemble de ses cellules.

Exemples :

1/ Si (X, x_0) est un espace topologique pointé et Y un espace topologique quelconque, on appelle produit réduit ("smash") le quotient de $X \times Y$ par le sous-ensemble $\{x_0\} \times Y$. Notation : $X \rtimes Y$.

Si X est un CW-complexe et x_0 un point de son 0-squelette, I désignant l'intervalle $[0,1]$, $X \rtimes I$ est un CW-complexe, ayant même type d'homotopie en X . (Exercice).

2/ Bouquet :

Soit $(X_\alpha, x_\alpha)_{\alpha \in A}$ une collection d'espaces topologiques pointés. On appelle bouquet, noté VX_α , le quotient $\coprod X_\alpha / \bigcup \{x_\alpha\}$. Si, pour tout $\alpha \in A$, X_α est un CW-complexe et x_α un point de $X_\alpha^{[0]}$, alors VX_α est un CW-complexe.

Par exemple, $X^{[n]} / X^{[n-1]}$ est un bouquet de cellules de dimension n , c'est-à-dire un bouquet de n -sphères.

1.2 Définition : Un sous-complexe Y d'un CW-complexe X est un CW-complexe, tel que Y soit un sous-espace topologique fermé de X et que $Y^{[k]} = Y \cap X^{[k]}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. 1.

Conséquence : Si e_α est une cellule de X , $e_\alpha \cap Y$ est vide ou e_α est une cellule de Y .

Exemple : Les squelettes de X sont des sous-complexes.

1.3 Lemme : "closure finiteness". Toute cellule d'un CW-complexe est contenue dans un sous-CW-complexe fini.

1.4 Lemme : Tout compact K d'un CW-complexe X est contenu dans un sous-CW-complexe fini.

1.5 Lemme : Tout CW-complexe est paracompact.

Cf. H. Miyazaki, "The paracompactness of CW-complexes",
Tohoku Math. J., 4 (1952), pp. 309-313.

- 1.6 Définition : Une application continue $f : X \rightarrow Y$, où X et Y sont deux CW-complexes, est dite cellulaire si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(X^{[n]})$ est inclus dans $Y^{[n]}$.
- 1.7 Lemme : Soit $f : X \rightarrow Y$; si la restriction de f à un sous-complexe X_0 de X est cellulaire, il existe une application continue cellulaire $g : X \rightarrow Y$, homotope à f relativement à X_0 .
- 1.8 Lemme : Soient X et Y deux CW-complexes, X_0 un sous-complexe de X et $f : X_0 \rightarrow Y$ une application cellulaire.
Alors $X \cup_f Y$ est canoniquement muni d'une structure de CW-complexe.
- 1.9 Définition : Un CW-complexe X est dit localement fini, si tout point possède un voisinage ne rencontrant qu'un nombre fini de cellules.
Il revient au même de dire que tout point n'appartient qu'à un nombre fini de cellules fermées ou que X est localement compact.
- 1.10 Lemme : Soient X et Y deux CW-complexes. Si Y est localement fini, alors $X \times Y$, muni de la topologie produit, est canoniquement un CW-complexe. Si Y n'est pas localement fini il existe sur le produit ensembliste une structure naturelle de CW-complexe, (notation $X \hat{\times} Y$), dont la topologie est plus fine que la topologie produit.
De plus, l'identité de $X \hat{\times} Y$ dans $X \times Y$ est une équivalence d'homotopie.

Pour la troisième partie du lemme on peut utiliser le résultat suivant de Milnor [4] : si X et Y sont deux CW-complexes, leur produit cartésien a le type d'homotopie d'un CW-complexe.

Remarquons alors que les topologies de $X \times Y$ et de $X \hat{\times} Y$ ont mêmes compacts. Par conséquent l'application identique de $X \hat{\times} Y$ dans $X \times Y$ induit un isomorphisme sur les groupes d'homotopie. D'après le lemme 1.14, c'est une équivalence d'homotopie.

Notations : Si X et Y sont deux espaces topologiques, $[X, Y]_{\text{libre}}$ désigne l'ensemble des classes d'homotopie libre d'applications continues de X

dans Y . Si X et Y sont pointés, $[X, Y]$ désigne l'ensemble des classes d'homotopie pointée d'applications de X dans Y respectant les points bas

- 1.11 Lemme : Soient X un CW-complexe et K un compact pointé.
 Alors $[K, X] = \varinjlim [K, X^{[n]}]$ et, $[K, X]_{\text{libre}} = \varinjlim [K, X^{[n]}]_{\text{libre}}$.
 Ce lemme est une conséquence immédiate du lemme 1.4.

- 1.12 Définition : Soient X et Y deux espaces topologiques connexes pointés et $f : X \rightarrow Y$ une application continue respectant les points base. f est n -équivalence (ou n -connexe) si l'application $f_*^q : \pi_q(X) \rightarrow \pi_q(Y)$ est injective pour $q \leq n-1$ et surjective pour $q \leq n$.
 Si f est une inclusion, ceci équivaut à dire $\pi_q(Y, X) = 0$, $0 \leq q \leq n$. Sinon, cela revient toujours à dire que $\pi_q(M(f), X \times \{0\}) = 0$, pour $q \leq n$, où $M(f) = X \times [0, 1] \cup Y / \{(x, 1) = f(x)\}$ est le cylindre de l'application f .

- 1.13 Lemme : Soit $f : X \rightarrow Y$ une application n -connexe ; soient P un CW-complexe connexe et $f_* : [P, X] \rightarrow [P, Y]$ l'application induite par f sur les classes d'homotopie.
 Alors si $\dim P \leq n$, f_* est surjective et si $\dim P \leq n-1$, f_* est injective.

- 1.14 Lemme : (Théorème de J.H.C. Whitehead).
 Si X et Y sont deux CW-complexes connexes. Si $f : X \rightarrow Y$ est une application continue telle que $f_* : \pi_*(X) \rightarrow \pi_*(Y)$ soit un isomorphisme (i.e. si f est une équivalence faible), alors f est une équivalence d'homotopie.

- 1.15 Lemme : Soit X un CW-complexe dénombrable ; il existe un complexe simplicial localement fini dénombrable Y , ayant même type d'homotopie que X . Si X est fini, Y peut être choisi fini.

- 1.16 Lemme : Tout CW-complexe est localement contractible.

- 1.17 Lemme : Soient X un CW-complexe et A un sous-CW-complexe de X .
 Etant données une application f de X dans un espace topologique quelconque Z et une homotopie h de $f|_A$, il existe une homotopie H de f , prolongeant h .
 On dit que l'injection de A dans X est une cofibration.

Par exemple, si X est un CW-complexe pointé, l'inclusion de son point base est une cofibration. Dans toute la suite les points-base des espaces topologiques seront supposés avoir cette propriété : nous dirons qu'il s'agit de points-base non dégénérés.

§2. THEOREME DE REPRESENTABILITE DE BROWN

=====

2.1 Définition d'un h-foncteur

Soit TOP^+ la catégorie des espaces topologiques pointés et des applications continues respectant les points base. Un foncteur H défini sur une sous-catégorie pleine de TOP^+ (resp. TOP) est un h-foncteur s'il possède la propriété suivante : pour tout couple (f_1, f_2) de morphismes de TOP^+ (resp. TOP), homotopes dans la catégorie, les morphismes $H(f_1)$ et $H(f_2)$ sont égaux.

Notations : - Si H est contravariant, au lieu de $H(f)$ nous utiliserons la notation f^* .

- Soit i l'injection canonique d'un sous-espace topologique X_0 dans X . Si $x \in H(X)$, nous noterons $x|_{X_0}$ l'élément $i^*x \in H(X_0)$ et nous parlerons de la restriction de x à X_0 .

2.2 Représentabilité

Soit H un h-foncteur contravariant défini sur une catégorie \mathcal{C} d'espaces topologiques et d'applications continues à valeurs dans la catégorie \mathcal{E} des ensembles. Deux points de vue peuvent être adoptés. Le premier consiste à remarquer que $H : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{E}$ se factorise par la catégorie quotient $\hat{\mathcal{C}}$ dont les morphismes sont les classes d'homotopie d'applications de \mathcal{C} : $H = \hat{H}\pi$ où π est le foncteur canonique de \mathcal{C} dans $\hat{\mathcal{C}}$ et où $\hat{H} : \hat{\mathcal{C}} \rightarrow \mathcal{E}$ est induit par H . On peut alors se demander si \hat{H} est représentable au sens de Grothendieck (Cf. p. II.2).

L'autre point de vue consiste à ne pas faire intervenir la factorisation du foncteur H par la catégorie-quotient $\hat{\mathcal{C}}$, et à donner une définition

directe de la représentabilité d'un h-foncteur contravariant en modifiant comme suit la définition abstraite. Nous dirons que H est "représentable" et que le couple (Y_H, u) est universel, si à tout élément x de $H(X)$, on peut associer une application continue $f : X \rightarrow Y_H$, unique à homotopie près, telle que $f^*u = x$.

Attention ! Si H est "représentable" au sens précédent, $H : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{E}$ n'a aucune raison d'être représentable au sens catégorique. En particulier H ne transforme pas en général les limites inductives de \mathcal{C} en limite projective ; nous reviendrons sur ce point au chapitre III.

Nous utiliserons avec Dold la définition suivante :

2.3 Définition : Soit H un h-foncteur contravariant défini sur une sous-catégorie pleine de TOP^+ à valeurs dans \mathcal{E}^+ . H est semi-exact s'il vérifie les axiomes suivants :

a) axiome du bouquet : si $X = \bigvee_{\alpha} X_{\alpha}$ est un bouquet dans la sous-catégorie alors l'application canonique de $H(X)$ dans $\prod H(X_{\alpha})$ est un isomorphisme.

b) axiome du recollement : Soit $X = X_1 \cup X_2$ la réunion de deux sous-espaces X_1 et X_2 dans la sous-catégorie. Soient $x_1 \in H(X_1)$ et $x_2 \in H(X_2)$ tels que

$$x_1|_{X_1 \cap X_2} = x_2|_{X_1 \cap X_2}.$$

Alors il existe $x \in H(X)$, en général non unique, tel que $x|_{X_1} = x_1$ et $x|_{X_2} = x_2$.

L'exercice suivant a pour but de justifier le terme "semi-exact" :

Exercice : (i) Soit $A \subset X$ un sous-complexe. Soit cA le cône $A \times [0,1] / \{A \times 1 = \text{point}\}$; identifions $A \times \{0\} \subset cA$ à $A \subset X$ pour former $X \cup cA$. (D'après l'appendice A II p. 2, la projection naturelle de $X \cup cA$ sur X/A est une équivalence d'homotopie). Dédurre de (b) que $H(A) \xrightarrow{i^*} H(X) \xrightarrow{j^*} H(X \cup cA)$ est une suite exacte d'ensembles pointés. Montrer que $* \rightarrow A \rightarrow X \rightarrow X/A \rightarrow *$ est une suite exacte dans \mathcal{E} .

(ii) Employer l'espace $X' = X_1 \times \{1\} \cup X_0 \times [1,2] \cup X_2 \times \{2\} \subset X \times [1,2]$, pour montrer que la propriété énoncée dans (i) entraîne (b) ; dans la formule précédente $X_0 = X_1 \cap X_2$. (Cf. Appendice A II p.7).

Pour un foncteur semi-exact, nous avons les lemmes suivants :

2.4 Lemme : Si X est un point, $H(X)$ est réduit à un élément.

C'est une conséquence évidente de l'axiome du bouquet.

2.5 Lemme : Si X est réunion d'une famille croissante de sous-espaces X_n , $n \in \mathbb{N}$, l'application naturelle $H(X) \rightarrow \varprojlim H(X_n)$ est surjective.

Preuve : Soit X' le sous-espace de $X \times [0, \infty)$ défini de la manière suivante : $X' = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X'_n$ où $X'_n = X_n \times [n, n+1]$.

La projection naturelle de X' sur X est une équivalence d'homotopie, ainsi que celle de X'_n sur X_n , ce qui nous permet de raisonner sur X' . Identifions dans la suite $H(X)$ avec $H(X')$ et $H(X_n)$ avec $H(X'_n)$.

Soient $L_0 = X'_0 \vee X'_2 \vee \dots$

et $L_1 = X'_1 \vee X'_3 \vee \dots$

On a $L_0 \cup L_1 = X'$ et $L_0 \cap L_1 = \bigvee X_n$.

Alors $H(L_0) = H(X_0) \cdot H(X_2) \cdot \dots$

$H(L_1) = H(X_1) \cdot H(X_3) \cdot \dots$

$H(L_0 \cap L_1) = \pi H(X_n)$

$H(L_0 \cup L_1) = H(X)$.

Considérons l'élément $(x_0, x_1, x_2, \dots) \in \varprojlim H(X_n)$.

Soient $y_0 = (x_0, x_2, \dots) \in H(L_0)$ et $y_1 = (x_1, x_3, \dots) \in H(L_1)$. On vérifie que $y_0|_{L_0 \cap L_1} = y_1|_{L_0 \cap L_1}$. Il existe donc $y \in H(X)$ tel que $y|_{L_0} = y_0$ et $y|_{L_1} = y_1$. L'image de y dans $\varprojlim H(X_n)$ est donc (x_0, x_1, \dots) . c q f d

Pour pouvoir appliquer le théorème de Whitehead (ch II; 1.14), nous utiliserons dans ce qui suit la catégorie \mathcal{C} et ses sous-catégories \mathcal{C}_0 , \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_d définies ci-dessous :

Les objets de \mathcal{C} sont CW-complexes pointés et les morphismes de \mathcal{C} sont les applications continues respectant les points base. \mathcal{C}_0 (resp. \mathcal{C}_d , resp. \mathcal{C}_f) est la sous-catégorie pleine dont les objets sont les CW-complexes finis (resp. dénombrables, resp. de dimension finie).

2.6 Théorème de Brown ([1])

- 1) Soit H un h -foncteur contravariant de la catégorie \mathcal{C} des CW-complexes pointés dans la catégorie \mathcal{E}^+ des ensembles pointés. Si H est semi-exact et si $H(S^0)$ n'a qu'un élément, alors H est représentable et l'espace classifiant est connexe.
- 2) Si H n'est défini que sur la sous-catégorie \mathcal{C}_f des CW-complexes de dimension finie, alors, sous les mêmes hypothèses H admet un prolongement unique à la catégorie \mathcal{C} en un foncteur représentable.
- 3) Si H n'est défini que sur la sous-catégorie \mathcal{C}_0 des CW-complexes finis et si, de plus, pour tout $X \in \mathcal{C}_0$ $H(X)$ est dénombrable, alors, sous les mêmes hypothèses H admet un prolongement unique à la catégorie \mathcal{C} en un foncteur représentable.

Démonstration1ère PARTIE :

Il existe un ensemble dénombrable \mathcal{X} de CW-complexes finis, tels que, pour tout $X \in \mathcal{C}_0$, il existe $X' \in \mathcal{X}$ et une équivalence d'homotopie $h : X \rightarrow X'$. (Cf. lemme (ch.II;1.15)).

Soit Y un CW-complexe quelconque et y un élément quelconque de $H(Y)$. Posons $Y_0 = YV\{[VX_x] ; x \in H(X), X \in \mathcal{X}\}$, où X_x désigne un exemplaire de X . Dans $H(X_x)$ nous avons l'élément privilégié $x(X_x)$ correspondant à x dans $H(X)$. A l'élément $y \cdot \prod\{x(X_x) ; x \in H(X), X \in \mathcal{X}\}$ du produit $H(Y) \cdot \prod\{H(X_x) ; x \in H(X), X \in \mathcal{X}\}$, l'axiome a) de la semi-exactitude permet d'associer un unique élément $u_0 \in H(Y_0)$. La construction rend évident le fait que, si $Z \in \mathcal{C}_0$ et $z \in H(Z)$, il existe $f : Z \rightarrow Y_0$ tel que : $f^*u_0 = z$. En revanche, il peut exister deux applications $f, g : Z \rightarrow Y_0$, non homotopes telles que $f^*u_0 = g^*u_0$.

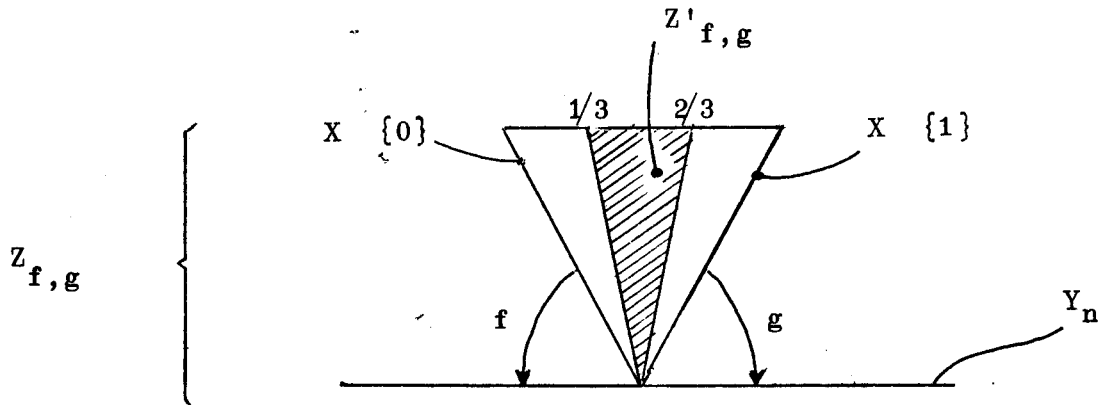
En résumé, pour tout $Z \in \mathcal{C}_0$, l'application canonique $u_0(Z) : [Z, Y_0] \rightarrow H(Z)$ est surjective mais non injective.

La suite de la construction consiste à modifier Y_0 de façon à "récupérer l'injectivité". Cette construction se fera par récurrence.

Supposons définis le CW-complexe Y_n et l'élément $u_n \in H(Y_n)$. Définissons

comme suit le couple (Y_{n+1}, u_{n+1}) :

pour tout $X \in \mathfrak{X}$ et pour chaque élément $\alpha \in [X, Y_n]$, choisissons un représentant cellulaire $f : X \rightarrow Y_n$. Si $f, g : X \rightarrow Y_n$ sont les représentants ainsi choisis de deux classes d'homotopie distinctes et si $f^*u_n = g^*u_n$, on fait correspondre au triple (X, f, g) le CW-complexe $Z_{f,g}$ construit en attachant $X \times I$ à Y_n par les identifications : $(x, 0) = f(x)$, $(x, 1) = g(x)$.



Remarquons que Y_n est un sous-complexe de $Z_{f,g}$. Y_{n+1} s'obtient alors à partir de la réunion disjointe des $Z_{f,g}$ en identifiant tous les exemplaires de Y_n ; Y_n est encore un sous-complexe de Y_{n+1} .

Nous voulons maintenant trouver un élément $u_{n+1} \in H(Y_{n+1})$, dont la restriction à Y_n soit u_n . C'est dans cette étape de la démonstration qu'intervient de façon essentielle l'hypothèse de "recollement".

Ecrivons $Z_{f,g}$ comme la réunion de Z'_{fg} et de Z''_{fg} où Z'_{fg} est l'exemplaire de $X \times [1/3, 2/3]$ canoniquement plongé dans Z_{fg} et où Z''_{fg} est l'adhérence de $Z_{fg} - Z'_{fg}$.

$Z'_{fg} \cap Z''_{fg}$ est le bouquet $X \star \{1/3\} \vee X \star \{2/3\}$. On en déduit une décomposition $Y_{n+1} = Y'_{n+1} \cup Y''_{n+1}$; $Y'_{n+1} \cap Y''_{n+1} = V(Z'_{fg} \cap Z''_{fg})$; $Y'_{n+1} \cap Y''_{n+1}$ peut être considéré comme un bouquet $A_1 \vee A_2$ où A_1 et A_2 sont deux exemplaires d'un bouquet VX , indicé par tous les triples (X, f, g) .

L'inclusion de Y_n dans Y_{n+1} est une équivalence d'homotopie ; il existe donc un unique élément $v_2 \in H(Y_{n+1})$ tel que $v_2|_{Y_n} = u_n$.

Soit maintenant $F : A_1 \rightarrow Y_n$ l'application dont la restriction à $A_1 \cap Z_{f,g}$ est définie par la formule : $F(x, 1/3) = f(x)$.

L'inclusion de A_1 dans Y'_{n+1} étant une équivalence d'homotopie, il existe un unique élément $v_1 \in H(Y'_{n+1})$ dont la restriction à A_1 est F^*u_n .

Montrons que $v_1|_{Y'_{n+1} \cap Y''_{n+1}} = v_2|_{Y'_{n+1} \cap Y''_{n+1}}$.

$Y'_{n+1} \cap Y''_{n+1}$ étant le bouquet $A_1 \vee A_2$, il suffit pour cela de démontrer que $v_1|_{A_1} = v_2|_{A_1}$ ce qui est évident, et que $v_1|_{A_2} = v_2|_{A_2}$; cette dernière égalité se démontre facilement en remarquant que l'inclusion de A_2 dans Y'_{n+1} est une équivalence d'homotopie et que $f^*u_n = g^*u_n$.

D'après l'axiome b) de la semi-exactitude il existe

$u_{n+1} \in H(Y_{n+1})$ tel que $u_{n+1}|_{Y'_1} = v_1$ et $u_{n+1}|_{Y''_1} = v_2$.

A partir du couple (Y_n, u_n) nous avons pu construire un couple (Y_{n+1}, u_{n+1}) tels que les applications f et g , vérifiant $f^*u_n = g^*u_n$ mais non homotopes dans Y_n , le deviennent dans Y_{n+1} .

Définissons alors le couple (Y_H, u_H) :

$$- Y_H = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} Y_n$$

- $u_H \in H(Y_H)$ est choisi de façon que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait $u_H|_{Y_n} = u_n$, ce qui est possible d'après le lemme (ch.II;25).

Le couple (Y_H, u_H) est universel :

1°/ (Y_H, u_H) est universel pour \mathcal{C}_0 :

Si $X \in \mathcal{C}_0$, pour tout $x \in H(X)$, il existe $f : X \rightarrow Y_H$ tel que $f^*u_H = x$; en effet, on a vu, au moment de la construction de Y_0 , que l'on peut choisir f à image dans $Y_0 \subset Y_H$.

Soient, maintenant, f et $g : X \rightarrow Y_H$ deux applications telles que $f^*u_H = g^*u_H$. X étant compact, d'après le lemme (ch.II;1.4), il existe $n \in \mathbb{N}$, tel que f et g se factorisent par Y_n . Par construction de Y_{n+1} , f et g sont homotopes tant qu'applications dans Y_{n+1} .

Conséquence : $[S^0, Y_H]$ est isomorphe à $H(S^0)$ qui, par hypothèse, est réduit à un élément. Donc Y_H est connexe.

2°/ (Y_H, u_H) est universel pour \mathcal{C} :

Si $X \in \mathcal{C}$, montrons d'abord que l'application $u_H(X) : [X, Y_H] \rightarrow H(X)$ est surjective. Soit $x \in H(X)$; il faut trouver $f : X \rightarrow Y_H$ tel que $f^*u_H = x$. Utilisons le fait que (Y_H, u_H) dépend du choix arbitraire de (Y, y) pour construire le nouveau couple (Y'_H, u'_H) à partir de $Y' = X \vee Y_H$ et $y' = (x, u_H)$. Y'_H et Y_H sont deux espaces classifiants pour \mathcal{C}_0 ; on en déduit que l'injection $i : Y_H \rightarrow Y'_H$ induit un isomorphisme de leurs groupes d'homotopie et, puisque ce sont des CW-complexes connexes, que i est une équivalence d'homotopie (Cf. lemme (ch.II;1.14)) dont $j : Y'_H \rightarrow Y_H$ désignera une homotopie inverse. Soit k l'inclusion de X dans Y'_H ; on a trivialement : $(jk)^*u_H = x$.

Montrons maintenant que $u_H(X)$ est injective : soient f et $g : X \rightarrow Y_H$ deux applications telles que $f^*u_H = g^*u_H$. Il faut montrer que f est homotope à g . f et g étant choisies cellulaires, nous construisons le couple universel (Y'', u'') à partir du couple (Y'', y'') défini comme suit :

$$Y'' = Y_H \vee (X \times [0,1]) / \{(x,0) = f(x), (x,1) = g(x) \mid x \in X\} ;$$

$y'' \in H(Y'')$ est choisi de façon à induire u_H sur Y_H et f^*u_H sur $X \times [0,1]$.

Ici encore l'inclusion de Y_H dans Y'' est une équivalence d'homotopie.

f et g , qui, en tant qu'applications dans Y'' , sont trivialement homotopes, le sont donc en tant qu'applications dans Y_H .

Ceci achève la démonstration de la première partie.

2ème PARTIE :

1°/ Construction d'un classifiant de dimension finie pour les complexes de dimension au plus égale à n .

La construction est celle de la première partie en remplaçant \mathcal{C} par le sous-ensemble \mathcal{C}_{n+1} des éléments de \mathcal{C} de dimension au plus $n+1$.

L'espace Y_n ainsi construit est classifiant pour les CW-complexes finis de dimension au plus $n+1$.

Comme dans la 1ère partie,

pour terminer la démonstration, il faut savoir que, si $f : Y_n \rightarrow Y'_n$ est une $(n+1)$ -équivalence entre deux classifiants pour les CW-complexes finis de dimension au plus $n+1$, alors, pour tout CW-complexe X de dimension inférieure ou égale à n , $f_* : [X, Y_n] \rightarrow [X, Y'_n]$ est un isomorphisme ; mais ceci résulte du lemme (ch.II;1.13).

Finalement Y_n est classifiant pour tous les complexes de dimension au plus n .

Remarquons que si la construction nous donne un espace classifiant Y_n de trop grande dimension, on peut prendre comme nouveau classifiant son $(n+1)$ -squelette (approximation cellulaire).

2°/ Construction de Y_H

Par récurrence nous pouvons choisir le couple (Y_{n+1}, u_{n+1}) à partir du couple (Y_n, u_n) de façon que

$$Y_n \subset Y_{n+1} \quad ; \quad u_{n+1}|_{Y_n} = u_n .$$

Posons $Y_H = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} Y_n$; on remarque que le $(n+1)$ -squelette $Y^{[n+1]}$ de Y_{n+k} ($k \geq 0$) est classifiant pour les complexes de dimension au plus n . L'inclusion de $Y_{n+k}^{[n+1]}$ dans $Y_{n+k+1}^{[n+1]}$ est donc une n -équivalence.

D'après le lemme (ch.II;1.13), le $(n+1)$ -squelette de Y_H est classifiant pour les complexes de dimension au plus $n-1$, car l'injection $Y_{n+k}^{[n+1]} \hookrightarrow Y_H^{[n+1]}$ induit l'isomorphisme $\pi_i(Y_H^{[n+1]}) \leftarrow \pi_i(Y_{n+k}^{[n+1]})$, $i \leq n$.

On en déduit, alors, un isomorphisme entre les foncteurs définis sur $\mathcal{C}_f[-, Y_H]$ et H ;

si $X \in \mathcal{C}_f$ et si $\dim X = n$, l'isomorphisme ci-dessus est la composition des isomorphismes suivants :

$$[X, Y_H] \cong [X, Y_H^{[n+2]}] \cong [X, Y_n] \cong H(X)$$

Ceci termine la démonstration de la deuxième partie.

3ème PARTIE

La construction est analogue à celle de la première partie. Seul l'ordre des opérations est modifié de façon qu'à chaque étape Y_n soit fini.

Puisque nous voulons construire Y_H classifiant pour les complexes finis, il est inutile d'introduire un espace Y arbitraire au début de la construction.

Commençons avec Y_0 réduit à un point et u_0 l'unique élément de $H(Y_0)$. Pour tout complexe fini X , $H(X)$ étant dénombrable, nous pouvons ordonner tous les couples (X, x) , $X \in \mathfrak{X}$, $x \in H(X)$: $(X_1, x_1), (X_2, x_2), \dots$

Pour $i \leq n$, supposons construit l'espace Y_i et l'élément $u_i \in H(Y_i)$. Soit t_1^i, t_2^i, \dots une énumération des triples $(X, [f], [g])$ où $x \in \mathfrak{X}$ et où $f, g : X \rightarrow Y_i$ sont deux applications non homotopes telles que $f^*u_i = g^*u_i$.

On construit Y_{n+1} à partir de $Y_n \vee X_{n+1}$ en attachant pour chaque triple $t_i^j = (X, [f], [g])$, $i, j \leq n$, le complexe $X \times I$ par les identifications $f(x) = (x, 0)$ et $f(x) = (x, 1)$. On choisit u_{n+1} de façon à prolonger $(u_n, x_{n+1}) \in H(Y_n \vee X_{n+1})$, et une énumération $t_1^{n+1}, t_2^{n+1}, \dots$ des triples $(X, [f], [g])$, $X \in \mathfrak{X}$, $f, g : X \rightarrow Y_{n+1}$ applications non homotopes telles que $f^*u_{n+1} = g^*u_{n+1}$. Ceci achève la construction par récurrence.

Soit $Y_H = \bigcup Y_n$. Si $f : X \rightarrow Y_H$ est une application d'un complexe fini X dans Y_H , d'après le lemme (ch.II;1.4) il existe un entier n tel que $f(X) \subset Y_n$. L'élément $f^*u_n \in H(X)$ est indépendant de n . Ceci définit une application naturelle de $[X, Y_H]$ dans $H(X)$, qui est bijective par construction même de Y_H . Nous avons donc un isomorphisme de foncteurs sur $\mathcal{C}_0 : [-, Y_H] \rightarrow H(-)$.

c q f d

§3. REPRESENTATION DES TRANSFORMATIONS
NATURELLES DE FONCTEURS REPRESENTABLES
=====

3.1 Généralités : Soient \mathcal{C} une catégorie à objet nul et X, Y deux objets de \mathcal{C} . Alors $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(? , X)$ et $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(? , Y)$ sont deux foncteurs sur \mathcal{C} à valeurs dans la catégorie des ensembles pointés. Tout $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ induit une transformation naturelle (= morphisme de foncteurs)

$$f_* : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(? , X) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(? , Y) ; \text{ pour } a \in \text{Hom}(A, X), f_*(a) \text{ est par définition } f \circ a \in \text{Hom}(A, Y).$$

3.

Proposition : L'application qui à f associe f_* est une bijection de $\text{Hom}(X, Y)$ sur l'ensemble des morphismes de foncteurs $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(? , X) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(? , Y)$.

Démonstration : Remarquons que f_* associe à $1_X \in \text{Hom}(X, X)$ le morphisme $f \in \text{Hom}(X, Y)$. Donc si f et f' sont deux morphismes distincts, f_* est distinct de f'_* .

Soit $\theta : \text{Hom}(? , X) \rightarrow \text{Hom}(? , Y)$ un morphisme de foncteurs. Si $a \in \text{Hom}(A, X)$ et $g : B \rightarrow A$, alors $g^*(a) = a \circ g \in \text{Hom}(B, X)$; par hypothèse $\theta(g^*(a)) = g^*(\theta(a))$, c'est-à-dire $\theta(a \circ g) = \theta(a) \circ g$.

Définissons alors $f = \theta(1_X) \in \text{Hom}(X, Y)$. Nous avons $f_* = \theta$, car, pour tout $a \in \text{Hom}(A, X)$, $\theta(a) = \theta(1_X \circ a) = \theta(1_X) \circ a = f_* a$. La bijectivité est ainsi démontrée.

c.q.f.d.

Le théorème de Brown (2ème et 3ème parties) pose le problème des transformations de foncteurs sous une forme plus difficile. On a une sous-catégorie pleine \mathcal{C}_0 de \mathcal{C} et deux objets X et Y dans \mathcal{C} ; il s'agit de trouver tous les morphismes de foncteurs, restreints à \mathcal{C}_0 , $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(? , X)|_{\mathcal{C}_0} \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(? , Y)|_{\mathcal{C}_0}$. Bien sûr si $X \in \mathcal{C}_0$, la solution est $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$.

Considérons un exemple concret. Soit \mathcal{C} la catégorie des CW-complexes pointés et des classes d'homotopie d'applications continues respectant les points-base. Soit \mathcal{C}_0 la sous-catégorie pleine des complexes de

dimension finie. Supposons que X soit un complexe de dimension infinie ; nous voulons déterminer l'ensemble des morphismes de foncteurs

$$H_X = [?, X] | \mathcal{C}_0 \rightarrow H_Y = [?, Y] | \mathcal{C}_0,$$

ensemble que nous noterons $\text{Hom}(H_X, H_Y)$. Considérons l'application naturelle $\varphi : [X, Y] \rightarrow \text{Hom}(H_X, H_Y)$; nous avons la

3.2 Proposition : Il existe un isomorphisme $\text{Hom}(H_X, H_Y) \cong \varprojlim_n [X^{[n]}, Y]$, où $X^{[n]}$ est le n -squelette de X , de telle sorte que φ , suivie de cet isomorphisme soit l'application naturelle

$$[X, Y] \rightarrow \varprojlim_n [X^{[n]}, Y].$$

Corollaire : φ est surjective.

Cela résulte du lemme (ch.II ; 2.5).

Remarque : En général φ n'est pas bijective ; nous étudierons son noyau au chapitre suivant (chap. 3).

Exercice : Démontrer la proposition (3.2). L'essentiel est de remarquer que, d'après le théorème d'approximation cellulaire (ch.II ; 1.7), pour A de dimension $\leq m$, $[A, X] \cong [A, X^{[n]}]$ si $n \geq m+1$.

§4. APPLICATIONS AUX THEORIES COHOMOLOGIQUES

=====

Le théorème de Brown, rédigé par l'auteur dans un article intitulé "Cohomology Theories" [1], a précisément pour conséquence fondamentale un théorème de représentation des théories cohomologiques extraordinaires, c'est-à-dire des théories vérifiant les axiomes d'Eilenberg-Steenrod [2; p13] sauf l'axiome de dimension. Ce théorème dit dans quels cas une théorie cohomologique peut être représentée par un " Ω -spectre". (voir aussi G.W. Whitehead [7]).

Regardons le cas de la cohomologie ordinaire à valeurs dans un groupe abélien G . Si q est un entier strictement positif, le foncteur

$H^q(-; G)$ est un h-foncteur contravariant semi-exact tel que $H^q(S^0; G) = 0$. On peut donc lui appliquer le théorème (ch.II ; 2.6). En vertu de l'axiome de dimension, son espace classifiant a tous les groupes d'homotopie nuls excepté le $q^{\text{ième}}$ groupe qui est G .

Un tel espace s'appelle un espace d'Eilenberg-MacLane du type (G, q) noté $K(G, q)$. Il est muni d'une classe fondamentale de cohomologie en dimension q , possédant la propriété universelle pour le foncteur $H^q(-; G)$. Si, maintenant, G est un groupe non abélien, on peut définir le foncteur $H^1(-; G)$; il vérifie les conditions du théorème de Brown et, par conséquent, il admet un espace classifiant, qui est un espace d'Eilenberg-Mac Lane de type $(G, 1)$.

Pour conclure, disons que, dans le cas où G est abélien, la collection des espaces $K(G, q)$ forme les objets d'un " Ω -spectre" classifiant la théorie cohomologique ordinaire à valeurs dans G .

BIBLIOGRAPHIE

=====

- [1] E. BROWN Cohomology theories, Ann. of Math. 75 (1962), p.467-484.
- [2] S. EILENBERG,
 N. STEENROD Foundations of algebraic topology,
 Princeton University Press, 1952.
- [3] P. HILTON An introduction to homotopy theory,
 Cambridge University Press, 1961.
- [4] J. MILNØR On space having the homotopy type of a CW-complex,
 Trans. Amer. Math. Soc. 90 (1959), p. 272-280.
- [5] E. SPANIER Algebraic topology, Mc Graw-Hill, 1966.
- [6] G.W. WHITEHEAD Homotopy theory, M. I. T. Press, 1956.
- [7] " Generalized homology theories,
 Trans. Ann. Math. Soc. 102 (1962), p. 227-283.
- [8] J.H.C. WHITEHEAD Combinatorial homotopy I,
 Bull. Amer. Math. Soc. 55 (1949), p. 213-245.
 ou Mathematical works, vol. III, p. 85-117.

III.1

CHAPITRE III

LES FANTÔMES

Ce court chapitre expose le phénomène bizarre des applications dites fantômatiques. Dans les chapitres suivants ce phénomène nous empêchera parfois de représenter une transformation de foncteurs par une unique classe d'homotopie d'applications entre les espaces classifiants fournis par le théorème de Brown que nous avons démontré au chapitre précédent.

Soit \mathcal{C} la catégorie des CW-complexes munis de points base et des applications continues qui respectent les points base. Sans précisions contraires nous resterons dans la catégorie \mathcal{C} .

Soit X un complexe réunion d'une suite croissante dénombrable de sous-complexes $X_1 \subset X_2 \subset X_3 \subset \dots$, $X = \bigcup_n X_n$. Nous avons déjà vu que pour tout complexe Y , l'application canonique

$$\varphi : [X, Y] \rightarrow \varprojlim_n [X_n, Y]$$

est surjective (ch.II ; 3.2). Nous allons montrer qu'en général φ n'est pas injective. Un élément de noyau de φ est une application de X dans Y "fantômatique" pour la filtration $\{X_n\}$.

Dire que φ est bijective pour tout Y serait exactement affirmer que X constitue une limite inductive des X_n dans la catégorie $\hat{\mathcal{C}}$ des CW-complexes avec points base, dans laquelle les morphismes sont les classes d'homotopie dans \mathcal{C} . Donc X n'est pas en général $\varinjlim X_n$ dans $\hat{\mathcal{C}}$. Néanmoins X est toujours $\varinjlim X_n$ dans \mathcal{C} .

Exercice : Dans la situation précédente, montrer que si $\varinjlim X_n$ existe dans $\hat{\mathcal{C}}$, $\varinjlim X_n$ a le même type d'homotopie que X . Donc si φ n'est pas une bijection, $\varinjlim X_n$ n'existe pas dans $\hat{\mathcal{C}}$.

Remarque : Nous connaissons déjà une situation plus simple où $[?, Y]$ ne transforme pas une limite inductive de \mathcal{C} dans une limite projective d'ensembles. Si $X \in \mathcal{C}$ est réunion des sous-complexes X_1 , X_2 et $X_0 = X_1 \cap X_2$,

X est la limite inductive dans \mathcal{C} du diagramme

$$\begin{array}{ccc} X_1 & & X_2 \\ & \searrow \quad \nearrow & \\ & X_0 & \end{array}$$

mais l'application naturelle $\phi : [X, Y] \rightarrow \varinjlim [X_i, Y]$ n'est pas injective en général - voir l'axiome (b) de la semi-exactitude p.II.8. Soient, par exemple, $X = S^n$, $n \geq 1$; X_1, X_2 les hémisphères et X_0 l'équateur S^{n-1} . En ce cas $\varinjlim X_i$ existe dans $\hat{\mathcal{C}}$: c'est un point et non S^n . (Remarquer la différence avec la situation de l'exercice ci-dessus). D'ailleurs cet exemple montre que, si, pour un complexe connexe fixé Y , ϕ est toujours un isomorphisme, alors $\pi_n(Y) = [S^n, Y] = 0$, pour tout n , et que, par conséquent, Y est nécessairement contractible.

Les techniques employées dans ce qui suit ont été introduites dans l'annexe A II en ce qui concerne les suites de Puppe et de Mayer-Vietor et dans l'annexe A I en ce qui concerne le foncteur \varprojlim^1 qui associe à un système projectif de groupes $\{G_n\}$ un ensemble pointé $\varprojlim^1 G_n$.

Soit $H : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{E}^+$ (= ensembles pointés) un foncteur qui a la forme $H(X) = [X, Y_H]$, $Y_H \in \mathcal{C}$. Le lecteur pourra constater que les seules propriétés de H que nous emploierons dans ce chapitre sont en fait les axiomes de semi-exactitude (ch.II.; 2.3), et que l'on peut affaiblir beaucoup l'hypothèse que H soit défini sur \mathcal{C} .

1. Théorème : Soit X un CW-complexe réunion croissante d'une suite de sous-complexes $X_1 \subset X_2 \subset X_3 \subset \dots$. Il existe une suite exacte d'ensembles pointés :

$$1 \rightarrow \varprojlim^1 H(SX_n) \xrightarrow{\alpha} H(X) \xrightarrow{\beta} \varprojlim H(X_n) \rightarrow 1$$

Démonstration : Remarquons que $H(SX_n)$ est un groupe et que, par suite, $\varprojlim^1 H(SX_n)$ est bien défini (Cf. p. A. II. 5). Pour démontrer le théorème il nous reste à construire une application naturelle injective $\alpha : \varprojlim^1 H(SX_n) \rightarrow H(X)$ dont l'image coïncide avec le "noyau" de β .

H étant un h-foncteur, nous pouvons, comme dans le lemme (ch.II;2.5) remplacer X par $X' = \bigvee_{n \in \mathbb{N}} X'_n$ avec $X'_n = X_n \propto [n, n+1]$.

Posons : $L_1 = X'_1 \vee X'_3 \vee \dots$
 $L_2 = X'_2 \vee X'_4 \vee \dots$

Nous avons $L_1 \cup L_2 = X'$ et $L_1 \cap L_2 = \bigvee X_n$.

Ecrivons la suite de Mayer Victoris relative à cette situation (Cf. A II;8):

$$H(L_1 \vee L_2) \leftarrow H(X') \leftarrow H(S(L_1 \cap L_2)) \xrightarrow{\partial^*} H(S(L_1 \vee L_2)) \leftarrow H(SX')$$

ou encore, la suite exacte mixte :

$$\begin{array}{ccccccc} \pi H(X'_n) & \leftarrow & H(X') & \leftarrow & \pi H(SX'_n) & \xrightarrow{\partial^*} & \pi H(SX'_n) \leftarrow H(SX') \\ & \nwarrow & & \swarrow \beta & & & \\ & \lim & H(X'_n) & & & & \\ & 1 & & & & & \end{array}$$

Si nous désignons par \square l'action de $\pi H(SX'_n)$ sur lui-même, relativement à laquelle la suite ci-dessus est exacte, et par $\pi H(SX'_n)/\square$ l'ensemble de ses orbites, nous avons la suite exacte d'ensembles pointés :

$$1 \leftarrow \lim H(X'_n) \xrightarrow{\beta} H(X') \leftarrow \pi H(SX'_n)/\square \leftarrow 1.$$

Rappelons alors, que par définition, $\lim^1 H(SX'_n)$ est l'ensemble des orbites relatives à une action Δ de $\pi H(SX'_n)$ sur lui-même que nous avons définie en annexe (A I; p. 1).

Pour démontrer que $\lim^1 H(SX'_n)$ est isomorphe à $\pi H(SX'_n)/\square$, nous explicitons une application bijective $\theta : \pi H(SX'_n) \rightarrow \pi H(SX'_n)$ rendant le diagramme ci-dessous commutatif:

$$\begin{array}{ccc} \pi H(SX'_n) \times \pi H(SX'_n) & \xrightarrow{\square} & \pi H(SX'_n) \\ \downarrow (\text{Id.} \times \theta) & & \downarrow \theta \\ \pi H(SX'_n) \times \pi H(SX'_n) & \xrightarrow{\Delta} & \pi H(SX'_n) \end{array}$$

Notations : - p désigne pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'application canonique de $H(SX'_n)$ dans $H(SX'_{n-1})$ qui n'est autre que la "restriction" de $H(SX_n)$ dans $H(SX_{n-1})$ lorsqu'on identifie $H(SX'_n)$ à $H(SX_n)$.

- i_1 est l'inclusion de $S(L_1 \cap L_2)$ dans SL_1 et
- i_2 est l'inclusion de $S(L_1 \cap L_2)$ dans SL_2 .

Soit l'élément $(x_1, x_3, x_5 \dots) \in \pi H(SX'_{2p+1}) = H(SL_1)$;

$i_1^*(x_1, x_3, x_5 \dots) = (x_1, px_3, x_3, px_5 \dots) \in H(S(L_1 \cap L_2))$.

Et soit l'élément $(x_2, x_4, \dots) \in \pi H(SX'_{2p}) = H(SL_2)$;

$i_2^*(x_2, x_4, \dots) = (px_2, x_2, px_4, x_4, \dots) \in H(S(L_1 \cap L_2))$.

Alors d'après la formule (p.A II.7) nous avons :

$$(x_1 x_2, x_3, x_4 \dots) \square (y_1, y_2, y_3, y_4 \dots) = x_1 y_1 p x_2^{-1}, p x_3 y_2 x_2^{-1}, x_3 y_3 p x_4^{-1}, p x_5 y_4 x_4^{-1}, \dots$$

D'autre part, nous avons (Cf. p. A I.1)

$$(x_1, x_2, x_3, \dots) \Delta (y_1, y_2, y_3, \dots) = (x_1 y_1 p x_2^{-1}, x_2 y_2 p x_3^{-1}, \dots)$$

Il est alors clair que l'application θ définie par :

$$\theta(y_1, y_2, y_3 \dots) = (y_1, y_2^{-1}, y_3, \dots) \text{ répond à la question.}$$

c q f d

2. Définition : Soit $\mathcal{R} = \{X_\alpha\}$ un recouvrement filtrant d'un complexe X . En d'autres mots, tout $X_\alpha \in \mathcal{R}$ est un sous-complexe ; $\cup \{X_\alpha ; X_\alpha \in \mathcal{R}\} = X$; et pour tout $X_\alpha, X_\beta \in \mathcal{R}$ il existe $X_\gamma \in \mathcal{R}$ contenant $X_\alpha \cup X_\beta$. Un élément $x \in H(X)$ est dit un fantôme relativement à \mathcal{R} si sa restriction à tout $X_\alpha \in \mathcal{R}$ est triviale.

Si $\mathcal{R} = \{X_\alpha\}$ est filtré par une famille dénombrable, le théorème 1 analyse la situation. Les deux cas spéciaux suivants sont naturels et invariants par une équivalence d'homotopie.

1er Cas. Un fantôme de dimension est fantôme relativement à la filtration par les squelettes du complexe.

2ème Cas. Un fantôme de finitude est fantôme relativement à la filtration par tous les sous-complexes finis.

3. Lemme : Un élément $x \in H(X)$ est un fantôme de dimension (resp. de "finitude") si et seulement si pour tout complexe Y de dimension finie (resp. fini) et pour toute application $f : Y \rightarrow X$, $f_* x = 0$.

Démonstration : Il est évident que la condition est suffisante. Supposons donc que x est un fantôme. L'application f est homotope à une application cellulaire g . Si $\dim(Y) = n < \infty$, $g(Y)$ est dans le n -squelette.

et si Y est fini (donc compact) gY et fY sont contenus dans un sous-complexe fini. Donc $0 = g^*x = f^*x$.

c q f d

4. Corollaire : Si $x \in H(X)$ est fantôme de dimension ou de finitude, et $f : Z \rightarrow X$ est une application continue, alors $f^*x \in H(Z)$ est aussi un tel fantôme.

Démonstration évidente.

5. Corollaire : Si X est un CW-complexe dénombrable et si, pour tout CW-complexe fini Y , $H(Y)$ est dénombrable, alors, pour qu'il existe des fantômes de "finitude" non triviaux sur X , il faut et il suffit que X soit réunion croissante de sous-complexes finis X_n , $n \in \mathbb{N}$, tels que la suite de groupes $H(SX_1) \leftarrow H(SX_2) \leftarrow \dots$ ne soit pas une suite de Mittag-Leffler. Si cette dernière condition est réalisée pour la suite $\{X_n\}$, elle l'est aussi pour toute autre suite croissante de sous-complexes finis de réunion X .

Démonstration : D'après le lemme (chIII;3), pour qu'il existe des fantômes il faut et il suffit qu'il en existe relativement à une suite croissante $\{X_n\}$ de sous-complexes finis tels que $X = \bigcup X_n$. D'après le Théorème (chIII;1), il faut et il suffit pour cela que $\varprojlim^1 H(SX_n)$ ne soit pas réduit à un élément, ce qui, d'après (AI; 5 et 6), est équivalent à dire que la suite $H(SX_1) \leftarrow H(SX_2) \leftarrow \dots$ n'est pas de Mittag-Leffler.

c q f d

Exemple 1 : Soit $g : S^m \rightarrow S^m$, $m \geq 1$, une application cellulaire de degré 2. Soit X le cylindre de l'application. Notons X' sa face origine (source de g) et X'' sa face extrême.

Posons

$$X_n = \bigsqcup_{p=1}^n Xx\{p\} / \{X''x\{p\} = X'x\{p+1\} ; 1 \leq p \leq n-1\}$$

X_n est un complexe fini qui a le type d'homotopie de S^m : l'injection de $S^m = X''x\{n\}$ dans X_n est une équivalence d'homotopie. Donc $[SX_n, S^{m+1}] = \mathbb{Z}$, pour tout n .

III.7

Soit i l'injection de SX_n dans SX_{n+1} . i et $Sg : SS^m \rightarrow SS^m$ ont même type d'homotopie. Il s'en suit que $i^* : [SX_{n+1}, S^{m+1}] \rightarrow [SX_n, S^{m+1}]$ est la multiplication par 2. La suite $[SX_1, S^{m+1}] \leftarrow [SX_2, S^{m+1}] \leftarrow \dots$ n'est donc pas une suite de Mittag-Leffler. D'après le corollaire (chIII;5), il existe des applications fantômes de $X = \varinjlim X_n$ dans S^{m+1} .

De plus, d'après (A I.6), nous savons que l'ensemble des classes d'homotopie d'applications fantômes a la puissance du continu.

Remarquons que cet exemple ne prouve pas l'existence de fantômes de dimension.

Exemple 2 : Il existe une application de $P^\infty(\mathbb{C})$ dans S^3 qui est un fantôme de dimension. Cet exemple est donné par B.I. Gray dans Topology 1966, Vol. 5 pp.241-243.

Exercice : Montrer qu'il existe des fibrés principaux de groupe $SO(3)$, fantômes de "finitude" sur SX , où X est défini dans l'exemple 1. Pour $m = 2$, remarquer que S^3 est le revêtement universel de $SO(3)$. Transformer aussi l'exemple 2 en un exemple traitant de fibrés de groupe $SO(3)$.

ETUDE DES SYSTEMES PROJECTIFS DE GROUPES

=====

Par "système projectif de groupes" nous entendrons la donnée d'une suite de groupes A_n et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'un morphisme de groupes $f_n: A_{n+1} \rightarrow A_n$. Nous noterons souvent un système projectif $\mathcal{P} = \{A_n, f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

Nous pouvons définir une action Δ du groupe $\prod_{n \in \mathbb{N}} A_n$ sur lui-même : l'action de $\{a_n\} \in \prod A_n$ sur $\{x_n\} \in \prod A_n$ est donnée par la formule

$$\{a_n\} \Delta \{x_n\} = \{a_n x_n f_n(a_{n+1}^{-1})\}.$$

C'est une action à gauche du groupe $\prod A_n$ sur lui-même. Par définition la limite projective du système \mathcal{P} , notée $\varprojlim(\mathcal{P})$ ou $\varprojlim_{n \in \mathbb{N}} A_n$ ou même $\varprojlim A_n$, est le sous-groupe de $\prod A_n$ qui est stabilisateur de e sous l'action Δ , où e est l'élément neutre de $\prod A_n$. Autrement dit, $\{a_n\} \in \varprojlim A_n \iff \{a_n\} \in \prod A_n$ si et seulement si $f_n a_{n+1} = a_n$, pour tout n . Par définition l'ensemble $\varprojlim^1(\mathcal{P})$ (ou $\varprojlim^1 A_n$) sera l'ensemble des orbites relatives à l'action Δ .

Si \mathcal{P} est un système de groupes abéliens $\varprojlim^1 \mathcal{P}$ a une structure naturelle de groupe abélien car il s'identifie naturellement au conoyau de l'homomorphisme $\{a_n\} \mapsto e \Delta \{a_n\} = \{a_n - f_n(a_{n+1})\}$ de $\prod A_n$ dans lui-même. Sinon $\varprojlim^1 \mathcal{P}$ n'est qu'un ensemble pointé par la classe de l'élément neutre. En outre \varprojlim et \varprojlim^1 sont deux foncteurs à valeurs respectivement dans la catégorie des groupes et dans la catégorie des ensembles pointés.

Bien que ces deux foncteurs ne soient pas à valeurs dans la même catégorie, le foncteur \varprojlim^1 peut être considéré comme le foncteur dérivé du foncteur \varprojlim dans un sens analogue à celui attribué à ce terme en théorie des catégories abéliennes. Par exemple, nous démontrerons qu'il existe une suite exacte reliant le foncteur \varprojlim au foncteur \varprojlim^1 .

1. Définition : Soit $G \xrightarrow{d} E \xrightarrow{j} E'$ une suite exacte d'ensembles pointés où G est un groupe pointé par son élément neutre. Soit Δ une action à droite (resp. à gauche) de G sur E telle que pour tout $g \in G$, $d(g) = e\Delta g$ (resp. $d(g) = g\Delta e$), où e est le point base de E . Si la condition $j(x) = j(y)$ équivaut à dire qu'il existe $g \in G$ tel que $x\Delta g = y$ (resp. $g\Delta x = y$), nous dirons que la suite est exacte en E relativement à l'action Δ .

2. Proposition : Soient $A_1 \xleftarrow{f_1} A_2 \xleftarrow{f_2} A_3 \dots$ un système projectif de groupes et $A'_1 \leftarrow A'_2 \leftarrow A'_3 \leftarrow \dots$ un système projectif de sous-groupes $A'_i \subset A_i$ tel que la flèche $A'_{i+1} \rightarrow A'_i$ soit la restriction de f_i . Considérons le système projectif de suites exactes $1 \rightarrow A'_n \rightarrow A_n \rightarrow A_n/A'_n \rightarrow 1$ où A_n/A'_n est l'ensemble des classes à droite de A_n modulo A'_n .

Alors il existe un morphisme $\partial : \varprojlim A_n/A'_n \rightarrow \varprojlim^1 A'_n$ d'ensembles pointés, de telle sorte que la suite $1 \rightarrow \varprojlim A'_n \xrightarrow{i} \varprojlim A_n \xrightarrow{j} \varprojlim (A_n/A'_n) \xrightarrow{\partial} \varprojlim^1 A'_n \rightarrow \varprojlim^1 1$ soit exacte ($i = \varprojlim i_n, j = \varprojlim j_n, I = \varprojlim^1 i_n$).

En $\varprojlim (A_n/A'_n)$ la suite est exacte relativement à l'action naturelle à droite de $\varprojlim A_n$.

Démonstration : Il est bien connu, et surtout évident, que le foncteur \varprojlim est exact à gauche sur la catégorie des ensembles pointés. D'où l'exactitude en $\varprojlim A'_n$ et $\varprojlim A_n$.

Si $a_n \in A_n$, $j_n(a_n) \in A_n/A'_n$ sera noté \dot{a}_n . Soit \square l'action de $\varprojlim A_n$ sur $\varprojlim A_n/A'_n$ définie par la formule : $\{a_n\} \in \varprojlim A_n, \{\dot{b}_n\} \in \varprojlim A_n/A'_n, \{\dot{b}_n\} \square \{a_n\} = \{\dot{b}_n a_n\}$. Si e_n désigne l'élément neutre de A_n , $\{\dot{e}_n\}$ est le point base de $\varprojlim A_n/A'_n$ et nous avons $j(\{a_n\}) = \{\dot{e}_n\} \square \{a_n\}$.

Définissons maintenant l'application ∂ : tout élément x de $\varprojlim A_n/A'_n$ peut s'écrire $\{\dot{a}_n\}$ où $\{a_n\} \in \prod A_n$ avec $a_n f_n(a_{n+1}^{-1}) \in A'_n$. Par définition $\partial(x)$ est la classe de $\{a_n f_n(a_{n+1}^{-1})\}$ dans $\varprojlim^1 A'_n$. Il est facile de vérifier que $\partial(x)$ est indépendant du choix du représentant a_n de \dot{a}_n .

Avec cette définition il est évident que ∂j et $I\partial$ sont "nulles".

Exactitude en $\varprojlim A_n/A'_n$: Soient x et $y \in \varprojlim A_n/A'_n$ tels que $\partial(x) = \partial(y)$.

Il est possible d'écrire $x = \{\dot{a}_n\}$ et $y = \{\dot{b}_n\}$ avec $b_n f_n(b_{n+1}^{-1}) = a_n f_n(a_{n+1}^{-1})$. Posons $c_n = a_n^{-1} b_n$; alors $f_n(c_{n+1}) = c_n$; donc $\{c_n\} \in \varprojlim A_n$ et $\{\dot{a}_n\} \square \{c_n\} = \{\dot{b}_n\}$.

Exactitude en $\varprojlim^1 A'_n$: Soit $z \in \varprojlim^1 A'_n$ tel que $I(z)$ soit le point base de $\varprojlim^1 A'_n$. Soit $\{a'_n\} \in \pi A'_n$ un représentant de z . $\{a'_n\}$, regardé comme élément de πA_n , appartient à la même orbite que $\{e_n\}$. Il existe donc $\{a_n\} \in \pi A_n$ tel que :

$$a'_n = a_n f_n(a_{n+1}^{-1})$$

Donc $\{\dot{a}_n\} \in \varprojlim^1 A'_n \setminus A_n$ et $\partial(\{\dot{a}_n\}) = z$. c q f d.

Exercice :

1) Supposons dans ce qui précède que, pour tout n , A'_n soit un sous-groupe distingué de A_n . Soit A''_n le groupe quotient. Démontrer que la suite $1 \rightarrow \varprojlim^1 A'_n \xrightarrow{I} \varprojlim^1 A_n \xrightarrow{\partial} \varprojlim^1 A''_n \xrightarrow{J} \varprojlim^1 A''_n \rightarrow 1$ est exacte, et que ∂ provient d'une action Δ à gauche relativement à laquelle la suite est exacte en $\varprojlim^1 A'_n$.

2) Même question qu'en 1) dans le cas où, pour tout n , A_n est un groupe abélien. Tous les objets de la suite sont alors des groupes abéliens et cette suite n'est pas autre chose que la suite de cohomologie d'un certain complexe.

3. Proposition: Invariance par subdivision : Soit $\mathcal{P} = \{A_n, f_n\}$ un système projectif. Soit $\mathcal{P}' = \{A_{n_k}, g_k\}$ une partie cofinale de \mathcal{P} : $g_k = f_{n_k} f_{n_{k+1}} \dots f_{n_{k+1}-1}$. L'injection de πA_{n_k} dans πA_n induit un isomorphisme θ de $\varprojlim^1 A_{n_k}$ sur $\varprojlim^1 A_n$.

Démonstration : Pour simplifier l'écriture, e désignera l'élément neutre de tous les groupes et p la composition d'un nombre fini d'applications f_n consécutives.

1°/ θ est surjective : en effet $(a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$ est équivalent dans πA_n à $(e, e, \dots, \underbrace{a_{n_1} p(a_{n_1+1}) \dots p(a_{n_2-1})}_{n_1^{\text{ième place}}, e, \dots, e, \underbrace{a_{n_2} p(a_{n_2+1}) \dots p(a_{n_3-1})}_{n_2^{\text{ième place}}, \dots)$

Pour le voir il suffit de faire agir sur $(a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$ l'élément $(c_1, c_2, \dots, c_n, \dots)$ donné par : - pour tout k , $c_{n_k} = e$

- pour $n_k < i < n_{k+1}$, $c_i = p(c_{i+1}) a_i^{-1}$.

$2^\circ / \theta$ est injective : supposons que $(e, e, \dots, a_{n_1}, e, \dots, a_{n_2}, e, \dots)$ s'équivalent dans πA_n à $(e, e, \dots, a'_{n_1}, e, \dots, a'_{n_2}, e, \dots)$. Il existe donc des éléments c_n tels que :

$$e = c_n e f_n(c_{n+1}^{-1}) \quad \text{pour } n \neq n_k$$

$$a'_{n_k} = c_{n_k} a_{n_k} f_{n_k}(c_{n_k+1}^{-1}) \quad \text{pour } n = n_k.$$

Alors $a'_{n_k} = c_{n_k} a_{n_k} g_{n_k}(c_{n_k+1}^{-1})$. C'est-à-dire que $\{a'_{n_k}\}$ est équivalent dans πA_{n_k} à $\{a_{n_k}\}$.

cqfd

4. Définition : Un système projectif $A_1 \leftarrow A_2 \leftarrow A_3 \leftarrow \dots$ est dit de Mittag-Leffler s'il existe une partie cofinale $B_1 \xleftarrow{g_1} B_2 \xleftarrow{g_2} B_3 \dots$ telle que le système projectif $\text{Im} g_1 \leftarrow \text{Im} g_2 \leftarrow \dots$ soit formé d'applications surjectives.

Remarque : Les système $B_1 \leftarrow B_2 \leftarrow B_3 \dots$ et $\text{Im} g_1 \leftarrow \text{Im} g_2 \leftarrow \dots$ sont deux parties cofinales du système $B_1 \xleftarrow{g_1} B_2 \xleftarrow{g_2} B_3 \dots$.

5. Proposition : Si \mathcal{P} est un système projectif de groupes, de Mittag-Leffler alors $\varprojlim^1(\mathcal{P}) = 0$.

Démonstration : D'après la proposition d'invariance par subdivision et grâce à la remarque précédente, il suffit de démontrer la proposition dans le cas où tous les morphismes du système sont surjectifs. Mais alors c'est une trivialité.

cqfd

6. Proposition : Soit \mathcal{P} un système projectif de groupes dénombrables. Si le système n'est pas de Mittag-Leffler, le cardinal de $\varprojlim^1(\mathcal{P})$ est 2^{\aleph_0} .

Démonstration : Si le système n'est pas de Mittag-Leffler, il existe une sous-suite filtrante $\{A_k\}$ telle que, si l'on désigne par A'_k l'image de A_k dans A_1 , pour tout k , A'_{k+1} est strictement inclus dans A'_k . Remarquons que le cardinal de A_1 est \aleph_0 et que le cardinal de $\varprojlim(A'_k \setminus A'_1)$ est 2^{\aleph_0} puisqu'il est isomorphe à $\prod_k (A'_{k+1} \setminus A'_k)$; en effet l'application de $A'_{k+1} \setminus A'_k$ dans $A'_k \setminus A'_1$ n'est autre que la projection lorsqu'on écrit $A'_{k+1} \setminus A'_1 = A'_k \setminus A'_1 \times A'_{k+1}$.

Considérons alors le système projectif des suites $1 \rightarrow A'_k \rightarrow A_1 \xrightarrow{j_k} A'_k \setminus A_1 \rightarrow 1$.
D'après la proposition (AI ; 2) nous avons la suite exacte mixte :

$$A_1 \xrightarrow{\lim^1 j_k} \varprojlim (A'_k \setminus A_1) \xrightarrow{\partial} \varprojlim^1 A'_k \rightarrow 1.$$

Autrement dit $\varprojlim^1 A'_k$ est en correspondance bijective avec les orbites, chacune dénombrable, de l'action de A_1 . Donc le cardinal de $\varprojlim^1 A'_k$ est 2^{\aleph_0} .
Par ailleurs l'application canonique de $\varprojlim^1 A_k$ dans $\varprojlim^1 A'_k$ est surjective, le foncteur \varprojlim^1 transformant les épimorphismes de systèmes de groupes en épimorphisme d'ensembles (c'est un des points à démontrer dans l'exercice page AI.3). Le cardinal de $\varprojlim^1(\mathcal{P})$, qui, d'après la propriété d'invariance par subdivision, est celui de $\varprojlim^1 A_k$, est donc supérieur à 2^{\aleph_0} .

D'autre part $\varprojlim^1 A_k$ est un quotient de πA_k . Finalement
 $\text{card.} \varprojlim^1(\mathcal{P}) = \text{card.} \varprojlim^1 A_k = 2^{\aleph_0}$.

cqfd

SUIITE DE PUPPE ET h-FONCTEURS REPRESENTABLES

=====

Tous les objets et morphismes utilisés dans ce paragraphe sont dans la catégorie \mathcal{C} des CW-complexes pointés -chacun par un point du 0-squelette- et des applications continues qui respectent les points-base. Nous nous proposons d'étudier comment agit le foncteur $[?, Y]$ sur certaines suites de morphismes de \mathcal{C} .

Précisons les notations suivantes :

Si $A \in \mathcal{C}$, $C(A)$ est le cône sur A dans la catégorie \mathcal{C} , c'est-à-dire le cône réduit, et SA est la suspension de A dans la catégorie \mathcal{C} , c'est-à-dire la suspension réduite. SA n'est d'ailleurs pas autre chose que le "smash"-produit $S \otimes A$ où S est le cercle représenté comme quotient de l'intervalle I par son bord. La n -ième suspension $S^n A$ est $S^n \otimes A$ ou encore $\underbrace{S \otimes S \dots \otimes S}_{n\text{-fois}} \otimes A$. Rappelons que l'on peut définir la suspension d'un morphisme, d'où la définition du foncteur suspension de \mathcal{C} dans \mathcal{C} . Enfin $X \rtimes I$ désignera le quotient $X \times I / \{*\} \times I$, où $\{*\}$ est le point base de X .

1. Définition : Soit A un sous-complexe de X et i l'injection de A dans X . Le cône de l'inclusion, noté $C(i)$, est $X \cup C(A)$. La suite de cofibration associée à l'injection i est la suite $A \xrightarrow{i} X \hookrightarrow C(i) \hookrightarrow \dots \hookrightarrow C^n(i) \hookrightarrow C^{n+1}(i) \hookrightarrow \dots$ dont les objets se définissent par récurrence : $C^{n+1}(i)$ est le cône de l'injection de $C^{n-1}(i)$ dans $C^n(i)$.

Exercice : Montrer que la suite de cofibration est un invariant du type d'homotopie : si $i' : A' \hookrightarrow X'$ est une injection homotopiquement équivalente^(*)

(*) $f : A \rightarrow B$ est homotopiquement équivalente à $f' : A' \rightarrow B'$ s'il existe deux équivalences d'homotopie $h_1 : A \rightarrow A'$ et $h_2 : B \rightarrow B'$, telles que $h_2 f$ soit homotope à $f' h_1$.

à i , les deux suites de cofibration, respectivement associée à i et i' sont homotopiquement équivalentes.

2. Lemme : Il existe une équivalence d'homotopie naturelle entre $X \cup C(A)$ et X/A rendant commutatif à homotopie près le diagramme

$$\begin{array}{ccc} X & \hookrightarrow & X \cup C(A) \\ & \searrow & \swarrow \\ & X/A & \end{array}$$

Preuve : Tout d'abord X/A est isomorphe à $X \cup C(A)/C(A)$.

Montrons donc que la projection de $X \cup C(A)$ sur $X \cup C(A)/C(A)$ est une équivalence d'homotopie. Une application de X/A dans un ensemble pointé s'identifiant naturellement à une application définie sur $X \cup C(A)$ qui envoie $C(A)$ au point base, il nous faut montrer qu'il existe $f : X \cup C(A) \rightarrow X \cup C(A)$, homotope à l'identité et tel que $f(C(A))$ soit réduit au point base. Or l'existence de f provient du fait que $C(A)$ est contractible et que l'injection de $C(A)$ dans $X \cup C(A)$ est une cofibration (Cf. Ch. II; 1.17).

c q f d

3. Lemme : Il existe une application $\partial : X/A \rightarrow SA$ et des équivalences d'homotopies h_1 et h_2 rendant le diagramme

$$\begin{array}{ccc} X/A & \xrightarrow{\partial} & SA \\ h_1 \downarrow & & \downarrow h_2 \\ X \cup C(A) & \longrightarrow & C(X) \cup C(A) \end{array}$$

commutatif à homotopie près. ∂ , h_1 et h_2 sont canoniques à homotopie près.

Preuve : h_1 est donnée par le lemme (A II; 2) ainsi que l'équivalence d'homotopie $h_2'' : X \cup C(A)/X \rightarrow C(X) \cup C(A)$.

Soit d'autre part h_2' l'isomorphisme canonique de SA sur $X \cup C(A)/X$.

Posons $\partial = h_2'^{-1} \pi h_1$, où π est la projection de $X \cup C(A)$ sur $X \cup C(A)/X$.

Si, enfin, nous posons $h_2 = h_2'' h_2'$, le diagramme carré, dont il nous faut montrer la commutativité à homotopie près, se décompose en carrés élémentaires ayant cette propriété :

$$\begin{array}{ccc}
 X/A & \xrightarrow{\partial} & SA \\
 h_1 \downarrow & & \downarrow h'_2 \\
 X \cup C(A) & \xrightarrow{\pi} & X \cup C(A)/X \\
 \parallel & & \downarrow h''_2 \\
 X \cup C(A) & \hookrightarrow & C(X) \cup C(A)
 \end{array}$$

c q f d

En remarquant que $S^n(X/A)$ est isomorphe à $S^n X / S^n A$, on construit de la même façon $\partial : S^n(X/A) \rightarrow S^{n+1} A$.

4. Définition : La suite de Puppe associée à i est

$$A \xrightarrow{i} X \rightarrow X/A \xrightarrow{\partial} SA \hookrightarrow SX \rightarrow SX/A \xrightarrow{\partial} S^2 A \dots \text{ ou bien la suite}$$

$$A \hookrightarrow X \rightarrow X \cup C(A) \rightarrow SA \rightarrow SX \dots, \text{ qui lui est homotopiquement équivalente.}$$

5. Proposition : Les suites de Puppe et de cofibration associées à $i : A \hookrightarrow X$ sont homotopiquement équivalentes ; c'est-à-dire qu'il existe un diagramme commutatif à l'homotopie près

$$\begin{array}{ccccccc}
 A \xrightarrow{i} X & \rightarrow & C(i) & \rightarrow & C^2(i) & \rightarrow & C^3(i) \rightarrow C^4(i) \dots \\
 \parallel & & \parallel & & \wr & & \wr & & \wr & & \wr \\
 A \hookrightarrow X & \rightarrow & X/A & \rightarrow & SA & \rightarrow & SX & \rightarrow & S(X/A) \dots
 \end{array}$$

où les flèches verticales désignent des équivalences d'homotopie.

Démonstration : D'après le lemme (AII ; 2), la suite $A \hookrightarrow X \rightarrow X/A$ est homotopiquement équivalente au début de la suite de cofibration.

Nous poursuivons la démonstration par récurrence : supposons donnée une équivalence d'homotopie de $S^n A \hookrightarrow S^n X$ avec $C^{3n-1}(i) \hookrightarrow C^{3n}(i)$; on peut alors prolonger cette équivalence en une équivalence d'homotopie des suites

$$S^n A \hookrightarrow S^n X \rightarrow S^n(X/A) \xrightarrow{\partial} S^{n+1}(A) \hookrightarrow S^{n+1}(X)$$

et $C^{3n-1}(i) \hookrightarrow C^{3n}(i) \hookrightarrow C^{3n+1}(i) \hookrightarrow C^{3n+2}(i) \hookrightarrow C^{3n+3}(i).$

Pour s'en persuader le lecteur méditera sur le diagramme ci-dessous dans lequel tous les morphismes lui sont fournis par les lemmes précédents et par l'hypothèse de récurrence :

$$\begin{array}{ccccccc}
 S^n A & \rightarrow & S^n X & \rightarrow & S^n X/A & \xrightarrow{\partial(3)} & S^{n+1} A & \rightarrow & S^{n+1} X \\
 \parallel & & \parallel & & \downarrow \wr(2) & & \downarrow \wr(3) & & \parallel \\
 S^n A & \rightarrow & S^n X & \rightarrow & C(S^n A) \cup S^n X & \rightarrow & C(X^n A) \cup C(S^n(X)) & \rightarrow & \frac{C(S^n A) \cup C(S^n X)}{C(S^n A) \cup S^n X} \\
 \downarrow \wr(1) & & \downarrow \wr(1) & & \downarrow \wr(4) & & \downarrow \wr(4) & & \downarrow \wr(2) \\
 C^{3n-1}(i) & \rightarrow & C^{3n}(i) & \rightarrow & C^{3n+1}(i) & \rightarrow & C^{3n+2}(i) & \rightarrow & C^{3n+3}(i)
 \end{array}$$

L'existence des flèches de ce diagramme est assurée par

- (1) hypothèse de récurrence
- (2) Lemme (A II ; 2)
- (3) Lemme (A II ; 3)
- (4) Invariance homotopique des suites de cofibrations.

c q f d

6. Corollaire : La suite de Puppe est un invariant du type d'homotopie de $i : A \rightarrow X$ dans le sens de l'exercice de la page AII.1.

7. Proposition : Soit A un sous-complexe du CW-complexe X .

Pour tout CW-complexe Y , la suite

$$[A, Y] \xleftarrow{i^*} [X, Y] \xleftarrow{j^*} [X/A, Y] \xleftarrow{\partial^*} [SA, Y] \xleftarrow{Si^*} [SX, Y] \xleftarrow{Sj^*} [SX/A, Y] \leftarrow \dots$$

est une suite exacte d'ensembles pointés. A partir du quatrième terme c'est une suite exacte de groupes. L'exactitude en $[X/A, Y]$ est relative à une action à gauche de $[SA, Y]$ sur $[X/A, Y]$.

Notations : \S désignera la suite de Puppe de la paire (X, A) et $[\S, Y]$ la suite mixte écrite ci-dessus.

Démonstration : Chaque suite partielle de deux flèches dans \S est homotopiquement équivalente, d'après la proposition précédente, à

$$A' \rightarrow X' \rightarrow X' \cup CA'$$

pour un couple (X', A') convenable. Mais on vérifie immédiatement que

$$[A', Y] \leftarrow [X', Y] \leftarrow [X' \cup CA', Y]$$

est une suite exacte d'ensembles pointés. Donc la suite $[s, Y]$ est une suite exacte d'ensembles pointés.

Par ailleurs, chaque flèche de

$$s : A \xrightarrow{i} X \xrightarrow{j} X/A \xrightarrow{\partial} SA \xrightarrow{S_1} SX \xrightarrow{S_2} S(X/A) \xrightarrow{S_3} S^2A \rightarrow \dots$$

après les trois premières, est une suspension ; donc

$$[SA, Y] \leftarrow [SX, Y] \leftarrow [S(X/A), Y] \leftarrow [S^2A, Y] \leftarrow \dots$$

est suite de morphismes de groupes. L'exactitude en tant que suite d'ensembles pointés équivaut à l'exactitude en tant que suite de groupes.

Il nous reste à trouver une action V du groupe $[SA, Y]$ sur l'ensemble pointé $[X/A, Y]$ telle que $[s, Y]$ y soit exacte relativement à V . Nous prendrons le soin d'employer un raisonnement valable pour les h -foncteurs semi-exacts (Chap. II; 2.3).

Explicitons d'abord la structure de groupe sur $[SA, Y]$. Fixons les deux conventions :

$$CA = A \rtimes I/A \times \{0\}, \quad SA = A \rtimes I/A \times \{0\} \cup A \times \{1\}.$$

Le quotient $SA/A \times \{1/2\}$ est un bouquet $SA \vee SA$ moyennant les deux injections i_0, i_1 de SA dans $SA/A \times \{1/2\}$ qui s'exprime par les formules

$$\begin{aligned} i_0(a, t) &= (a, t/2) \\ i_1(a, t) &= (a, (1+t)/2) \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} i_0(a, t) &= (a, t/2) \\ i_1(a, t) &= (a, (1+t)/2) \end{aligned}} \right\} a \in A, 0 \leq t \leq 1.$$

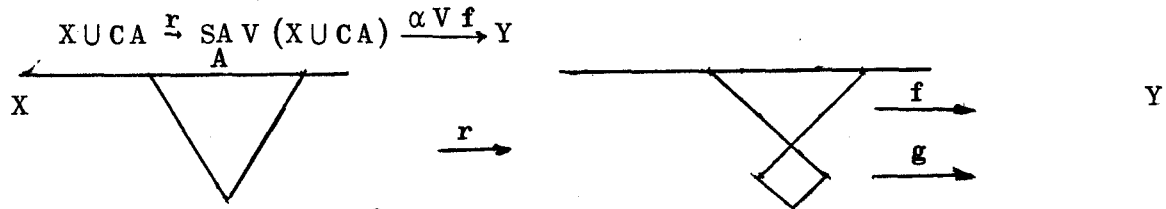
Si α, β sont deux applications de SA dans Y , il existe une application unique $\gamma = \alpha \vee \beta : SA \vee SA \rightarrow Y$ tel que $\alpha = \gamma \circ i_0, \beta = \gamma \circ i_1$. Le produit $[\alpha][\beta] \in [SA, Y]$ est représenté par

$$SA \xrightarrow{q} SA/A \times \{1/2\} = SA \vee SA \xrightarrow{\alpha \vee \beta} Y$$

où q est la projection naturelle de SA sur $SA/A \times \{1/2\}$. En d'autres mots $[\alpha][\beta] = q_*([\alpha] \vee [\beta])$. La vérification que cette règle munit $[SA, Y]$ de structure de groupe ne diffère guère de la vérification que $\pi_1(Y) = [S, Y]$ est un groupe.

Parallèlement le quotient $XUCA/A \times \{1/2\}$ est un bouquet $SA \vee (XUCA)$ grâce aux injections $j_0 : SA \rightarrow XUCA/A \times \{1/2\}$ et $j_1 : XUCA \rightarrow XUCA/A \times \{1/2\}$, où pour $a \in A$ et $t \in [0, 1]$,

$j_0(a,t) = (a,t/2)$, $j_1(a,t) = (a,(1+t)/2)$ et où $j_1|_X$ est l'identité.
 Soit r la projection naturelle $XUCA \rightarrow SAV(XUCA)$. Si $\alpha : SA \rightarrow Y$ et $f : XUCA \rightarrow Y$ sont deux applications continues nous définissons $[\alpha] \vee [f] \in [XUCA, Y]$ comme la classe de la composition



On vérifie facilement que

- (i) \vee est une action à gauche
 - (ii) $[\alpha] \vee [0] = \partial^*[\alpha]$, pour tout $[\alpha] \in [SA, Y]$
 - (iii) $j^*[f] = j^*([\alpha] \vee [f])$ pour tout $[f] \in [XUCA, Y]$ et tout $[\alpha] \in [SA, Y]$.
- Il est moins évident que
- (iv) si $[f], [f'] \in [XUCA, Y]$ et $j^*[f] = j^*[f']$, il existe un $[\alpha] \in [SA, Y]$ de telle sorte que $[\alpha] \vee [f] = [f']$.

Voici la construction de $[\alpha]$ à partir de $[f]$ et $[f']$. Nous collons deux exemplaires de $XUCA$ (l'un marqué avec prime) en identifiant les deux exemplaires de X , pour former

$$Z = ((XUCA) \cup (X'UCA')) / \{X = X'\}$$

Soit W l'homéomorphisme de SA sur $CAUCA' \subset Z$ qui, pour tout $(a,t) \in SA$, est défini par la formule $W(a,t) = (a,2t) \in CA'$ si $0 \leq t \leq 1/2$

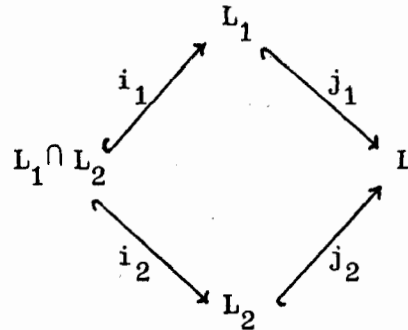
$$\text{et } W(a,t) = (a,2-2t) \in CA \text{ si } 1/2 \leq t \leq 1.$$

de telle sorte que $h|(XUCA)$ est homotope à f et $h|(X'UCA')$ est homotope à f' . Nous définissons $[\alpha] = W^*[h] = [hW]$. Pour vérifier $[\alpha] \vee [f] = [f']$ le lecteur pourra voir qu'il y a deux applications naturellement définies $g, g' : XUCA \rightarrow Z$ de telle sorte que $g^*[h] = [\alpha] \vee [f]$ et $g'^*[h] = [f']$. Ensuite l'on constate que g et g' sont homotopes.

8. Conséquence : suite de Mayer Vietoris

Soit L un CW-complexe, réunion de deux sous-complexes L_1 et L_2 , tous avec un point base commun.

Nous avons le diagramme



où i_1, i_2, j_1, j_2 sont les inclusions naturelles.

Proposition : Pour tout $Y \in C$, il existe une suite naturelle d'ensembles pointés :

$$\begin{array}{ccccccc}
 [L_1 \vee L_2, Y] & \xleftarrow{(j_1 \vee j_2)^*} & [L, Y] & \xleftarrow{\alpha} & [S(L_1 \cap L_2), Y] & \xleftarrow{\beta} & [SL_1 \vee SL_2, Y] \leftarrow \\
 & & & & & & (Sj_1)^* \times (Sj_2)^* \\
 & & & & & & [SL, Y] \leftarrow \dots
 \end{array}$$

β provient d'une action naturelle \square de $[SL_1 \vee SL_2, Y]$ sur $[S(L_1 \cap L_2), Y]$;
 si $(x_1, x_2) \in [SL_1 \vee SL_2, Y]$ et $u \in [S(L_1 \cap L_2), Y]$,
 $(x_1, x_2) \square u = [(Si_1)^* x_1] u [(Si_2)^* x_2]^1$

Démonstration : Posons $L' = L_1 \times \{1\} \cup (L_1 \cap L_2) \times [1, 2] \cup L_2 \times \{2\} \subset L \times [1, 2]$
 Désignons par L'_1 l'image de $L_1 \times \{1\}$ dans L' et par L'_2 celle de $L_2 \times \{2\}$,
 enfin par j'_1 (resp. j'_2) l'inclusion de L'_1 (resp. L'_2) dans L' .

Ecrivons la suite de Puppe de l'injection de $L'_1 \vee L'_2$ dans L' :

$$L'_1 \vee L'_2 \xrightarrow{j'_1 \vee j'_2} L' \hookrightarrow L' \cup C(L'_1 \vee L'_2) \xrightarrow{\partial} SL'_1 \vee SL'_2 \rightarrow SL'.$$

D'où pour tout $Y \in C$, la suite exacte

$$[L'_1 \vee L'_2, Y] \leftarrow [L', Y] \leftarrow [L' \cup C(L'_1 \vee L'_2), Y] \xleftarrow{\partial^*} [SL'_1 \vee SL'_2, Y] \leftarrow [SL', Y].$$

Or L'_1, L'_2 et L' sont des équivalents d'homotopie de L_1, L_2 , et de L et
 j'_1, j'_2 des équivalents d'homotopie de j_1 et j_2 respectivement.

D'autre part, $L' \cup C(L'_1 \vee L'_2)$ est équivalent à $L' / (L'_1 \vee L'_2)$ (Cf. AII ; 2),

qui est isomorphe à $S(L_1 \cap L_2)$. D'où la suite exacte annoncée dans l'énoncé
 de la proposition. Il reste simplement à voir que l'action

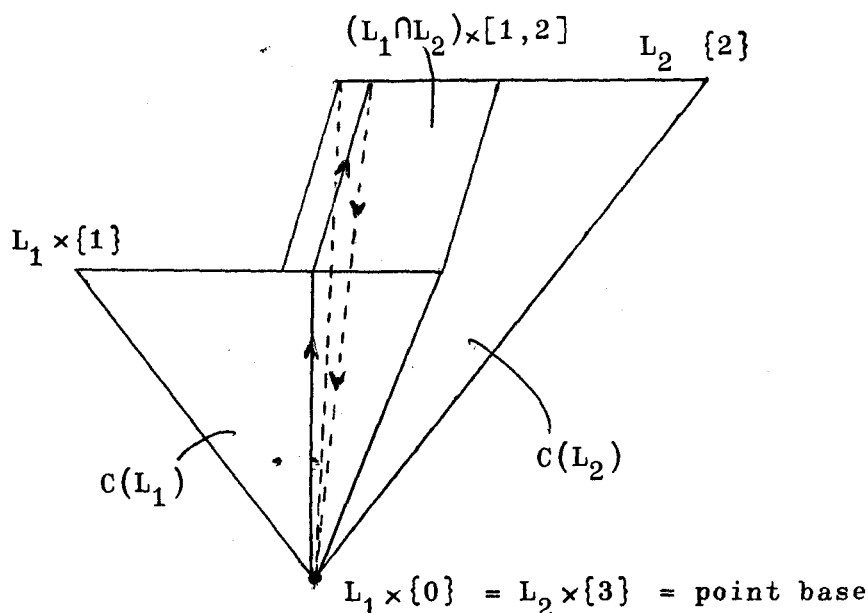
∇ de $[SL'_1 \vee SL'_2, Y]$ sur $[L' \cup C(L'_1 \vee L'_2), Y]$, décrite dans la proposition (AH;7)

se transporte sur l'action \square de $[SL_1 \vee SL_2, Y]$ sur $[S(L_1 \cap L_2), Y]$.
 Pour cela remplaçons $S(L_1 \cap L_2)$ par son équivalent

$$M = \{L_1 \times [0,1] \cup (L_1 \cap L_2) \times [1,2] \cup L_2 \times [2,3]\} / L_1 \times \{0\} \cup L_2 \times \{3\}$$

$[SL_1, Y]$ agit naturellement à gauche sur $[M, Y]$ et $[SL_2, Y]$ agit naturellement à droite sur $[M, Y]$ et aussi à gauche si l'on précède cette dernière action de l'antimorphisme canonique de $[SL_2, Y]$, $x_2 \rightarrow x_2^{-1}$. D'où une action naturelle à gauche \square de $[SL_1 \vee SL_2, Y]$ sur $[M, Y]$: $(x_1, x_2) \square u \mapsto x_1 u x_2^{-1}$.
 \square est la transportée de \square par l'isomorphisme canonique de $[M, Y]$ avec $[S(L_1 \cap L_2), Y]$.

A l'aide de la figure ci-dessous, nous allons maintenant comparer les actions \square et Δ .



Le chemin dessiné sur la figure, parcouru dans le sens de la flèche correspond au sens croissant du paramètre $t \in [0, 3]$. M est ainsi "orienté" comme la suspension $S(L_1 \cap L_2)$. Si maintenant nous regardons M comme le cône de l'injection de $L_1 \times \{1\} \vee L_2 \times \{2\}$ dans L' , le paramètre t va en croissant du sommet vers la base. Ce changement "d'orientation" change "l'orientation" du sous-cône $C(L_2)$ et, par là-même, fait passer de l'action \square à l'action ∇ de $S(L_1 \vee L_2)$ sur M .

c q f d

CHAPITRE IV

CLASSIFICATION DES FIBRES
ET DES MICROFIBRES

TABLE DES MATIERES

=====

- §1 Classification des fibrés et microfibrés de dimension n . p. IV.2
- §2 Stabilisation. p. IV.13
- §3 Structures de H-espaces sur les objets stables, correspondant à la somme de Whitney. p. IV.20
- §4 Une application $i : B_0 \rightarrow B_{PL}$. p. IV.26
- §5 Bonne définition de certaines applications en cohomologie. p. IV.28

Dans ce chapitre nous appliquerons la théorie de Brown à la classification des fibrés et des microfibrés. (Cf. chapitres II et III ou Brown [14]).

§1. CLASSIFICATION DES FIBRES ET MICROFIBRES DE DIMENSION n

1.1 Fibrés vectoriels de dimension n

Définition : Un n -fibré vectoriel réduit ξ muni d'un point-base x_0 est un n -fibré vectoriel $\xi : E \xrightarrow{p} X$, muni d'un isomorphisme d'espaces vectoriels $F : p^{-1}(x_0) \rightarrow \mathbb{R}^n$. Un isomorphisme $\varphi : \xi \rightarrow \xi'$ de fibrés vectoriels réduits est un isomorphisme des fibrés vectoriels (non réduits) sous-jacents, tel que $F = F' \circ \varphi|_{p^{-1}(x_0)}$.

On définit les n -microfibrés réduits PL ou TOP de façon analogue. La réduction consiste alors à se donner un micorisomorphisme PL ou TOP $F : p^{-1}(x_0) \rightarrow \mathbb{R}^n$, c'est-à-dire une homéomorphisme PL ou TOP d'un voisinage de $i(x_0)$ dans $p^{-1}(x_0)$ sur un voisinage de $\vec{0}$ dans \mathbb{R}^n .

1.2 Soit \mathcal{C} la catégorie des CW-complexes pointés par un sommet et des applications continues respectant les points-base. Définissons un foncteur

$$H : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{E}^+ \quad (= \text{ensembles pointés})$$

de la manière suivante : $H(X)$ est l'ensemble des classes d'isomorphisme des n -fibrés vectoriels réduits sur la base X . On pointe $H(X)$ par la classe du fibré trivial $X \times \mathbb{R}^n$ sur X . Si $f : X' \rightarrow X$ est une application continue pointée et si ξ est un fibré vectoriel réduit sur X , le fibré $f^*\xi$ sur X' est d'une façon évidente un fibré vectoriel réduit. En posant $H(f)[\xi] = [f^*\xi] \in H(X')$, on fait de H un foncteur.

Rappelons que si ξ est un fibré vectoriel non réduit sur $X \times I$, alors ξ est isomorphe au fibré $(i_0^*\xi) \times I$ sur $X \times I$, où $i_0 : X \hookrightarrow X \times I$ est l'inclusion $x \mapsto (x, 0)$. C'est là une propriété fondamentale que partagent toutes

les notions de fibrés sur un espace paracompact, que nous allons rencontrer dans la suite.

Exercice : De cette propriété on peut déduire que H est un h -foncteur ; autrement dit, si $f, g : X' \rightarrow X$ sont des applications de \mathcal{C} , homotopes en tant qu'applications pointées, et si ξ est un fibré vectoriel réduit sur X , alors $f^*\xi$ et $g^*\xi$ sont isomorphes.

1.3 Proposition : H vérifie les deux axiomes de semi-exactitude (Ch.II; 2.3)

Démonstration :

a) Axiome de recollement : Soit $X \in \mathcal{C}$, réunion de deux sous-objets X_1 et X_2 d'intersection $X_0 = X_1 \cap X_2$. Soient ξ_1 et ξ_2 deux n -fibrés vectoriels réduits respectivement sur X_1 et X_2 de sorte que $\xi_1|_{X_0}$ soit isomorphe à $\xi_2|_{X_0}$ en tant que fibrés réduits. Si on identifie $\xi_1|_{X_0}$ à $\xi_2|_{X_0}$ par un tel isomorphisme, on obtient un espace muni d'une projection sur X dont la restriction à X_1 (resp. X_2) est isomorphe à ξ_1 (resp. ξ_2). Malheureusement, il n'est pas facile de voir qu'il s'agit bien d'un fibré localement trivial. Pour éviter cette difficulté nous pouvons remplacer le triple $(X ; X_1, X_2)$ de \mathcal{C} par un triple $(Y ; Y_1, Y_2)$ ayant le même type d'homotopie, car H est un h -foncteur. Choisissons donc

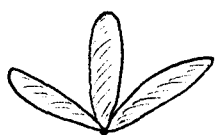
$$Y = X_1 \times \{1\} \cup X_0 \times [1, 2] \cup X_2 \times \{2\} ,$$

$$Y_1 = X_1 \times \{1\} \cup X_0 \times [1, 2], \quad Y_2 = X_2 \times \{2\} \cup X_0 \times [1, 2].$$

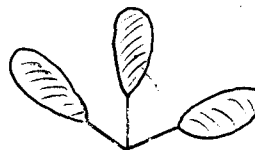
Prenons comme point-base de Y le point $\{*\} \times \{1/2\}$, où $\{*\}$ est le point-base de X . Le fait que le triple $(Y ; Y_1, Y_2)$ ait le même type d'homotopie que le triple $(X ; X_1, X_2)$ est un cas particulier du résultat démontré dans l'annexe A.III ; le lecteur pourra en trouver une démonstration directe. Maintenant, pour le triple $(Y ; Y_1, Y_2)$, la trivialité locale du fibré obtenu par recollement est évidente.

b) Axiome du bouquet : Sa vérification est un exercice facile. Pour éviter, comme dans a), la question de la trivialité locale d'un fibré obtenu par recollement sur un bouquet, on utilise l'astuce suivante : en appliquant le résultat démontré dans l'annexe A.III, on remplace le

bouquet (1) par le bouquet (2) :



(1)



(2)

cqfd

Remarque : C'est uniquement pour montrer que l'application $H(\bigvee_n X_n) \rightarrow \prod_n H(X_n)$ est injective que l'on a besoin des fibrés réduits.

L'exemple le plus simple qui montre que les classes d'isomorphisme de fibrés non réduits ne satisfont pas à (b) arrive avec le bouquet $S^2 \vee S^2$ et les fibrés de dimension 2.

Soit τ le fibré tangent de S^2 . Soit ξ_1 (resp. ξ_2) le fibré sur $S^2 \vee S^2$ obtenu par recollement de deux exemplaires de τ par une identification qui conserve (resp. qui change) l'orientation de la fibre au point-base. L'existence d'un isomorphisme $\xi_1 \cong \xi_2$ entraînerait l'existence d'un automorphisme de $\tau(S^2)$ qui changerait l'orientation de chaque fibre. Alors S^2 admettrait un champ de vecteurs non nuls, ce qui est impossible ; en regardant les classes d'Euler, on aurait $\chi(\tau) = \chi(-\tau) = -\chi(\tau)$, tandis que $\chi(\tau)$ est le double de la classe fondamentale (cf. Milnor [6; p.53]).

D'après la proposition (Ch.IV; 1.3) et le théorème de Brown (Ch.II; 2.6) il existe un espace classifiant pour le foncteur H , que nous noterons $B_0(n)$ et un n -fibré vectoriel réduit universel u_n sur $B_0(n)$.

1.4 Proposition : On peut choisir $B_0(n)$, CW-complexe dénombrable.

Démonstration : D'après la troisième partie de l'énoncé (Ch.II; 2.6), il suffit de montrer que pour tout CW-complexe fini X , l'ensemble $H(X)$ est

dénombrable. Pour un raisonnement par récurrence sur les cellules de X , considérons un n -fibré vectoriel réduit ξ sur le k -squelette $X^{[k]}$ de X . ξ est prolongeable en un fibré sur $X^{[k]} \cup e^{k+1}$, où e^{k+1} est une $(k+1)$ -cellule de X , si et seulement si $\xi|_{\partial e^{k+1}}$ est trivial. Et il existe autant de prolongements non isomorphes que de trivialisations non homotopes de $\xi|_{\partial e^{k+1}}$, c'est-à-dire que d'éléments de $\pi_k(0(n))$. $0(n)$ étant une variété différentiable compacte, $\pi_*(0(n))$ est trivialement dénombrable. Alors par récurrence il suit que $H(X)$ est dénombrable. cqfd

Remarquons qu'on aurait pu démontrer cette proposition en ne considérant que les ensembles $H(S^n)$ et en utilisant la suite de Puppe (Cf. annexe AII, proposition 7).

1.5 Autre construction de $B_{0(n)}$:

On peut montrer directement (Cf. Milnor; [6], p.24) que l'ensemble des classes d'isomorphisme de fibrés vectoriels non réduits sur X est en correspondance biunivoque avec l'ensemble des classes d'homotopie libre (c'est-à-dire non pointée) d'applications (non pointées) continues de X dans la grassmannienne $G(n)$ des sous-espaces vectoriels de dimension n de \mathbb{R}^∞ ; cette correspondance est donnée par le fibré "universel" sur $G(n)$ dont le fibré au-dessus de tout point (= sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^∞) est lui-même en tant qu'espace vectoriel.

Pour montrer que $G(n)$ a le type d'homotopie de $B_{0(n)}$ il suffit de remarquer que pour tout complexe X ,

$$[X, B_{0(n)}]_{\text{libre}} = [X \cup \{*\}, B_{0(n)}]$$

où $X \cup \{*\}$ est pointé par le point $\{*\}$, et que $H(X \cup \{*\})$ n'est autre que l'ensemble des classes d'isomorphisme de fibrés vectoriels non réduits sur X . Donc $[X, B_{0(n)}]_{\text{libre}}$ est isomorphe à $[X, G(n)]_{\text{libre}}$ d'où on déduit que $G(n) \simeq B_{0(n)}$.

Remarquons que ce dernier raisonnement sera valable pour tous les autres types de fibrés, et permettra de passer de la théorie pointée à la théorie non pointée.

Remarque sur les notations :

Lorsque nous voudrions distinguer entre les différents foncteurs introduits dans ce chapitre, nous utiliserons les notations suivantes :

Le foncteur classifié par B_A sera noté k_A .

Par exemple, l'ensemble des classes d'isomorphisme de fibrés vectoriels réduits de dimension n sur X sera noté $k_{0(n)}(X)$.

Parallèlement, l'ensemble des classes d'isomorphisme de fibrés vectoriels de dimension n sur X , non réduits, sera noté $k_{0(n)}^{\text{libre}}(X)$.

On a donc en résumé : $k_A(X) = [X, B_A]$; $k_A^{\text{libre}}(X) = [X, B_A]_{\text{libre}}$.

1.6 Fibrés vectoriels orientés :

D'une façon analogue à ce qui vient d'être dit dans le début de ce chapitre, il existe un classifiant $B_{SO(n)}$ pour les classes d'isomorphisme de fibrés vectoriels orientés réduits de dimension n . Par fibré orienté réduit, nous entendons un fibré vectoriel réduit muni d'une orientation qui induit sur la fibre-base l'orientation transportée de l'orientation positive de \mathbb{R}^n par l'isomorphisme donné. A ce propos il faut remarquer qu'à la différence du cas précédent, l'application d'oubli envoie les classes d'isomorphisme de fibrés réduits bijectivement sur les classes d'isomorphisme de fibrés non réduits ; c'est là une conséquence facile de la connexité du groupe $SO(n)$.

Comme dans la proposition (Ch.IV ; 1.4), $B_{SO(n)}$ peut être choisi CW-complexe dénombrable.

Enfin nous connaissons très bien un classifiant, à savoir la "grassmannienne orientée" $\tilde{G}(n)$, qui est un revêtement à deux feuillets de $G(n)$ (Cf. Milnor, [6 ; p.61]).

1.7 G-fibrés principaux :

Soit G un groupe topologique. Si X est un CW-complexe pointé, $H(X)$ désigne ici l'ensemble des classes d'isomorphisme des G -fibrés principaux réduits sur X . Nous avons ainsi défini un h-foncteur représentable. Soient B_G l'espace classifiant et u_G le G -fibré principal universel.

Si G opère effectivement sur \mathbb{R}^n , il y a une correspondance biunivoque entre les classes d'isomorphisme des G -fibrés principaux sur X et les classes d'isomorphisme de \mathbb{R}^n -fibrés admettant G comme groupe structural, qui sont donc classifiées par un couple (B_G, v_G) où v_G est un \mathbb{R}^n -fibré sur B_G admettant u_G pour fibré principal associé. Ceci justifie les notations $B_0(n)$ et $B_{SO}(n)$, utilisées précédemment.

Milnor a donné dans [5] une construction directe d'un classifiant B_G^1 et d'un fibré universel u_G^1 sur B_G^1 . $[X, B_G^1]$ libre classe les G -fibrés principaux "numérables" ^(*) sur un espace topologique X (non pointé). L'espace total E_G^1 de u_G^1 est contractible ^(**) car il est le joint infini $G * G * G * \dots$ (Cf. Husemoller, [4, Ch.4 et en particulier p.56]).

Exercice :

a) Montrer, en vertu de la contractibilité de E_G^1 , que, si l'on choisit un point base dans B_G^1 et si l'on réduit u_G^1 en spécifiant un isomorphisme de la fibre base avec G , alors le couple (B_G^1, u_G^1) devient classifiant pour les G -fibrés principaux réduits sur les CW-complexes pointés. (Cf. Husemoller, [4, p.47 et p.41]).

b) Conclure que l'application classifiante $B_G \rightarrow B_G^1$ est une équivalence d'homotopie faible et donc que $\pi_*(E_G) = 0$.

Exercice :

a) Si G est un groupe de Lie (donc triangulable), vérifier que l'espace total E_G de u_G sur le complexe B_G a le type d'homotopie d'un CW-complexe. (Utiliser le résultat démontré dans l'annexe AIII).

b) Conclure qu'en ce cas E_G est contractible.

(*) Si X est paracompact, tout G -fibré principal sur X est numérable.
(Cf. Husemoller, [4 ; p.48])

(**) D'après Dold [1, théorème 7.5], la contractibilité de l'espace total d'un G -fibré principal numérable est la condition nécessaire et suffisante pour qu'il soit universel.

Tirons de la contractibilité faible de l'espace total E_G de u_G une conséquence importante. Soit $\Omega B_G \rightarrow \Lambda B_G \xrightarrow{p} B_G$ la fibration^(*) où ΛB_G est l'espace des chemins commençant au point base b_0 et où la projection p fait correspondre à un chemin son extrémité. $\Omega B_G = p^{-1}(b_0)$ s'appelle l'espace des lacets de B_G . La contractibilité de ΛB_G permet de construire au-dessus de B_G une application fibrée

$$\begin{array}{ccc} \Omega B_G & \longrightarrow & G \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Lambda B_G & \longrightarrow & E_G \\ \downarrow & & \downarrow \\ B_G & = & B_G \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{(propriété de relèvements des} \\ \text{homotopies pour un fibré} \\ \text{localement trivial sur une} \\ \text{base paracompacte :} \\ \text{Cf. Spanier [12; p. 96]).} \end{array}$$

Des suites d'homotopie pour ces deux fibrations on déduit, moyennant le lemme des cinq, que $\Omega B_G \rightarrow G$ est une équivalence d'homotopie faible.

1.8 Microfibrés topologiques (Cf. Ch. 0 et Milnor [9])

Si dans 1.2 nous remplaçons le mot "fibré vectoriel" par "microfibré topologique" et le mot "isomorphisme" par le mot "microisomorphisme", nous définissons sur la catégorie \mathcal{C} des CW-complexes pointés un nouveau h-foncteur représentable dont l'espace classifiant est noté $B_{TOP}(n)$.

1.9 Microfibrés PL :

Soit \mathcal{C}_s la sous-catégorie pleine de \mathcal{C} , dont les objets sont les complexes simpliciaux localement finis dénombrables pointés. On définit sur \mathcal{C}_s un h-foncteur^(**) H en associant à tout objet X de \mathcal{C}_s l'ensemble des classes d'isomorphisme de microfibrés PL réduits de dimension n sur X . Cet ensemble est pointé par la classe du microfibré trivial.

(*) fibration au sens de Hurewicz (Cf. Ch. V).

(**) Soient X et Y deux complexes simpliciaux et $f : X \rightarrow Y$ une application continue. Si ξ est un microfibré PL sur Y , $f^*\xi$ est un microfibré topologique sur X . Mais f peut être approchée par une application simpliciale g . Donc dans la classe de $f^*\xi$, il existe un microfibré PL, $g^*\xi$. Il est unique à un isomorphisme près de microfibrés PL, car g est unique à une homotopie PL près.

Sur \mathcal{C}_s , ce foncteur H est semi-exact. La vérification en est plus directe que pour les fibrés vectoriels sur les CW-complexes généraux ; on se ramène d'abord au cas des \mathbb{R}^n -fibrés PL localement triviaux, en observant que le problème est local ; on remarque alors que tout espace avec projection PL, qui, au-dessus de chaque simplexe σ de la base, est PL-isomorphe au fibré $\sigma \times \mathbb{R}^n$, est lui-même un \mathbb{R}^n -fibré PL localement trivial. Le lecteur pourra déduire ce fait de l'exercice suivant

Exercice : Soient Δ^k le simplexe standard de dimension k , $k \geq 0$, et Δ^k son bord moins l'intérieur d'une face principale. Tout automorphisme du fibré PL trivial $\Delta^k \times \mathbb{R}^n$ se prolonge en un automorphisme du fibré $\Delta^k \times \mathbb{R}^n$.

1.9 A - Pour représenter H à l'aide du théorème de Brown (Ch.II ; 2.6), nous démontrerons d'abord la proposition suivante :

Proposition : Tout h-foncteur semi-exact H sur \mathcal{C}_s se prolonge de façon unique en un h-foncteur semi-exact sur la catégorie \mathcal{C}_d des CW-complexes dénombrables pointés.

Démonstration : Si $X \in \mathcal{C}_d$, on choisit un $Y \in \mathcal{C}_s$ et une équivalence d'homotopie $h : X \rightarrow Y$ (Ch.II ; lemme 1.15). Soit ensuite $H(X)$ un exemplaire de $H(Y)$ et soit $H(h)$ l'identité de $H(Y)$. Ceci détermine d'une façon évidente un prolongement de H en un h-foncteur sur \mathcal{C}_d . Bien entendu, ce prolongement dépend des choix des équivalences d'homotopie h mais il est visiblement déterminé à équivalence près. Il nous faut maintenant vérifier que H ainsi prolongé est semi-exact sur \mathcal{C}_d :

il est clair que si X est un bouquet $X = \bigvee X_\alpha$, la flèche canonique $H(X) \rightarrow \prod H(X_\alpha)$ est un isomorphisme.

Vérification de l'axiome de recollement :

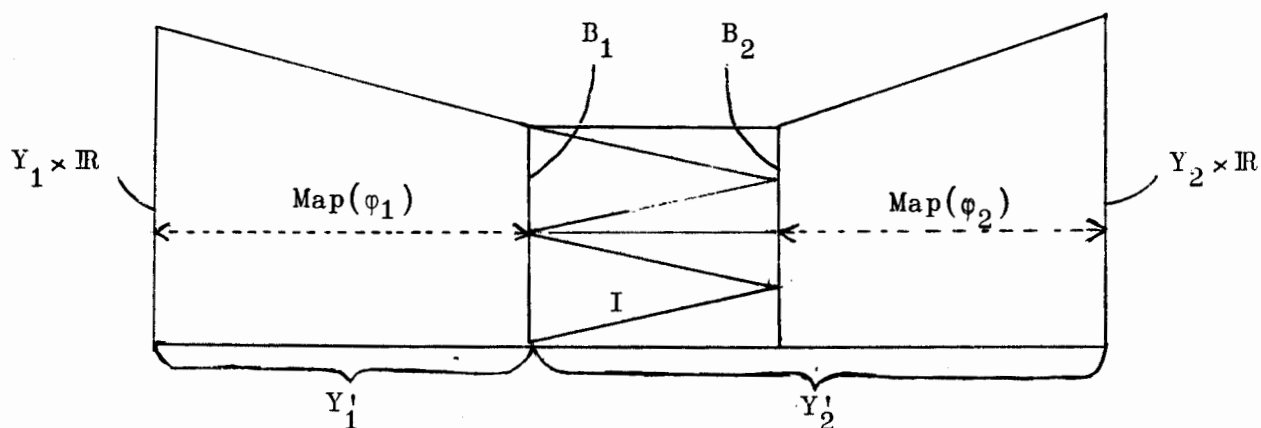
Soit $X \in \mathcal{C}_d$, et des sous-objets X_1, X_2, A , tels que $X = X_1 \cup X_2$, $A = X_1 \cap X_2$. Pour prolonger H , on a choisi Y, Y_1, Y_2, B , objets de \mathcal{C}_s et des équivalences d'homotopie $h : X \rightarrow Y, h_1 : X_1 \rightarrow Y_1, h_2 : X_2 \rightarrow Y_2, k : A \rightarrow B$. On en déduit

un diagramme commutatif à l'homotopie près

$$\begin{array}{ccccc}
 X_1 & \xleftarrow{j_1} & A & \xleftarrow{j_2} & X_2 \\
 h_1 \downarrow & & \downarrow k & & \downarrow h_2 \\
 Y_1 & \xleftarrow{f_1} & B & \xrightarrow{f_2} & Y_2
 \end{array}$$

où j_1 et j_2 sont les inclusions et où f_1 et f_2 sont construites à partir d'un inverse d'homotopie de k . En utilisant une application propre $\alpha : B \rightarrow \mathbb{R}$ (obtenue par exemple à partir d'une énumération des sommets de B), on remplace f_i ($i = 1, 2$) par $f'_i : B \rightarrow Y_i \times \mathbb{R}$ définies par $f'_i(x) = (f_i(x), \alpha(x))$. Les applications f'_i sont propres et respectivement homotopes à $f_i \times \{0\}$. Soit φ_1 une approximation simpliciale de f'_1 correspondant à une subdivision convenable B_1 de B (Cf. Spanier [12; p.126]), et soit φ_2 une approximation simpliciale de f'_2 correspondant à une subdivision convenable B_2 de $B_1^{(*)}$. φ_1 et φ_2 sont propres, homotopes respectivement à $f_1 \times \{0\}$ et $f_2 \times \{0\}$, et simpliciales. On peut donc choisir sur les cylindres $\text{Map}(\varphi_i)$ ($i = 1, 2$) une structure de complexe simplicial dénombrable (Cf. Spanier [12; exercice E p.151]), induisant sur la face origine la triangulation B_i de B . Les applications φ_i étant propres, ces complexes sont localement finis (c'est là qu'intervient le remplacement de f_i par f'_i). Modifions un peu $\text{Map}(\varphi_2)$ de façon que la triangulation qu'il induit sur B soit B_1 ; il suffit pour cela d'ajouter un collier $B \times I$, muni d'une triangulation qui induise B_1 sur $B \times \{0\}$ et B_2 sur $B \times \{1\}$, ce qui est possible car B_2 est une subdivision de B_1 . On note ce nouveau complexe Y'_2 et on note $\text{Map}(\varphi_1) = Y'_1$. Soit Y' la réunion sur B_1 de Y'_1 et de Y'_2 ; Y' est muni par construction d'une structure de complexe simplicial dénombrable et localement fini, admettant Y'_1 et Y'_2 pour sous-complexes.

(*) On suppose avoir fait de $Y_i \times \mathbb{R}$ un complexe simplicial de \mathcal{C}_s par un procédé naturel de subdivision qui fait de tout complexe $Y_i \times \{n\}$, $n \in \mathbb{Z}$, un sous-complexe de $Y_i \times \mathbb{R}$.



Nous avons le diagramme ci-dessous, commutatif à l'homotopie près, dont les flèches verticales sont des équivalences d'homotopie et les flèches horizontales des inclusions :

$$\begin{array}{ccccc}
 X_1 & \xleftarrow{j_1} & A & \xleftarrow{j_2} & X_2 \\
 \downarrow h'_1 & & \downarrow k & & \downarrow h'_2 \\
 Y'_1 & \xleftarrow{i_1} & B_1 & \xleftarrow{i_2} & Y'_2
 \end{array}$$

L'équivalence d'homotopie h'_i est donnée par la composition

$$X_i \xrightarrow{h_i} Y_i \xrightarrow{x\{0\}} Y_i \times \mathbb{R} \hookrightarrow Y'_i \quad \text{où toutes les flèches sont des équivalences}$$

d'homotopie. Remarquons que l'inclusion de A dans X_i ($i = 1, 2$) étant une cofibration (Cf. (Ch.II; 1.17) ou Spanier [12; p.402]), on peut remplacer h'_i par une application homotope rendant le diagramme commutatif, ce que nous supposons avoir fait. Il existe donc une application $h' : X \rightarrow Y'$ définie par $h'|_{X_1} = h'_1$ et $h'|_{X_2} = h'_2$ (qui vérifie aussi $h'|_A = k$). Le théorème de recollement des homotopies de l'annexe AIII montre que h' est une équivalence d'homotopie. C'est alors un exercice facile de vérifier que, donnée de $x_1 \in H(X_1)$ et de $x_2 \in H(X_2)$, ayant même restriction sur A , fournie $y'_1 \in H(Y'_1)$ et $y'_2 \in H(Y'_2)$ ayant même restriction sur B_1 ; il existe donc un élément convenable $y' \in H(Y')$, c'est-à-dire un élément $x \in H(X)$ dont on vérifie qu'il induit x_i sur X_i pour $i = 1, 2$. c.q.f.d.

Reprenons la démonstration que le foncteur $H = k_{PL(n)}$ est représentable.

1.9 B - Pour tout CW-complexe fini X , $H(X)$ est dénombrable :

On peut supposer que X est un complexe simplicial fini. Soit $\xi : X \xrightarrow{i} E \xrightarrow{j} X$ un microfibré PL sur X ; en se ramenant à un voisinage de $i(X)$, on peut supposer que E est un complexe simplicial fini. Il existe alors des triangulations X' de X et E' de E rendant les applications i et j simpliciales. Notons ξ' le microfibré $X' \xrightarrow{i} E' \xrightarrow{j} X'$; il représente le même élément que ξ dans $H(X) = H(X')$.

Un objet tel que ξ' est décrit par la donnée d'un nombre fini d'éléments (les sommets de X' et de E') et d'un nombre fini de relations entre ces éléments (les applications simpliciales i et j).

Il n'y a donc qu'un nombre dénombrable de microfibrés ayant une injection et une projection simpliciales, ce qui donne la conclusion.

1.9 C - $B_{PL(n)}$, classifiant de H :

Le théorème de Brown permet alors d'affirmer l'existence d'un CW-complexe dénombrable Y_H et d'un élément $u_H \in H(Y_H)$, universels pour la catégorie \mathcal{C}_d des CW-complexes dénombrables, ce qui permet de prolonger M à la catégorie \mathcal{C} toute entière.

D'après le lemme 1.15 du chapitre II, Y_H peut être choisi comme complexe simplicial appartenant à \mathcal{C}_s (ie : localement fini et dénombrable) on le note alors $B_{PL(n)}$.

L'élément universel u_H se représente donc comme un microfibré PL de dimension n , noté u_n , sur $B_{PL(n)} \in \mathcal{C}_s$. En particulier, si ξ est un microfibré PL de dimension n sur $X \in \mathcal{C}_s$, il existe une application PL $f' : X \rightarrow B_{PL(n)}$, unique à homotopie près, telle que $\xi \cong f'^*(u_n)$.

c.q.f.d.

1.10 Transformations naturelles

Le passage au microfibré topologique sous-jacent nous fournit des transformations dites d'oubli,

$$k_{PL(n)} \xrightarrow{j_n} k_{TOP(n)}, \quad k_{0(n)} \xrightarrow{k_n} k_{TOP(n)}.$$

Il y a d'ailleurs une transformation, définie sur \mathcal{C}_s , $i_n : k_{0(n)} \rightarrow k_{PL(n)}$, qui correspond à une notion de triangulation des fibrés vectoriels. On a $k_n = j_n i_n$. Nous ne parlerons pas de la définition de i_n car c'est une

affaire difficile (Hirsch-Mazur [3]).

En revanche, nous allons exposer une forme stable de ce problème au paragraphe 4 de ce chapitre. Pour le moment, nous supposons l'existence de i_n pour des raisons d'uniformité de l'exposé. Nous dirons aussi que i_n est un morphisme d'oubli.

D'après (Ch.II ; §3), $k_0(n) \xrightarrow{i_n} k_{PL}(n) \xrightarrow{j_n} k_{TOP}(n)$ est représentée par une suite d'applications, définies à homotopie près, des classifiants

$$B_0(n) \xrightarrow{i_n} B_{PL}(n) \xrightarrow{j_n} B_{TOP}(n) \quad .$$

Par exemple, j_n classifie le microfibré universel sur $B_{PL}(n)$ en tant que microfibré topologique. Δ

§2. STABILISATION

=====

Dans ce paragraphe A et A' seront toujours un des symboles 0, PL, TOP.

En associant à un fibré (ou microfibré) réduit ξ , le fibré $\xi \oplus \varepsilon^1$, où ε^1 désigne le fibré trivial de fibre \mathbb{R} , on obtient une transformation dite de stabilisation

$$s_n : k_{A(n)} \rightarrow k_{A(n+1)}, \text{ pour tout } n \geq 1.$$

L'espace total $E(\xi \oplus \varepsilon^1)$ est $E(\xi) \times \mathbb{R}$. La projection, la section nulle et la réduction de $\xi \oplus \varepsilon^1$ sont évidentes.

Définition : On définit le foncteur k_A par l'égalité $k_A = \varinjlim_n k_{A(n)}$, où la limite est prise suivant le système des flèches s_n de stabilisation. Donc un élément de $k_A(X)$ est représenté par un fibré réduit sur X et deux fibrés réduits $\xi_1^{n_1}$, $\xi_2^{n_2}$ représentent le même élément de $k_A(X)$ si et seulement si il existe deux fibrés triviaux ε_1 , ε_2 de dimensions convenables, tels que $\xi_1 \oplus \varepsilon_1 = \xi_2 \oplus \varepsilon_2$.

De la même façon on définit le foncteur k_A^{libre} par l'égalité $k_A^{\text{libre}} = \varinjlim_n k_{A(n)}^{\text{libre}}$. Alors $k_A^{\text{libre}}(X) = k_A(X \cup \text{point})$.

2.1 Proposition : La transformation d'oubli $k_A \rightarrow k_A^{\text{libre}}$ est un isomorphisme fonctoriel. Par conséquent k_A est muni comme k_A^{libre} d'une opération binaire fonctorielle, la somme de Whitney.

Démonstration : Soit ξ un n -fibré donné sur un CW-complexe X pointé par $\{*\}$ et soient deux réductions $f_1, f_2 : \xi|_{\{*\}} \rightarrow \mathbb{R}^n$, fournissant les fibrés réduits ξ_1 et ξ_2 . Nous allons construire un isomorphisme $\theta : \xi_1 \oplus \varepsilon^n \rightarrow \xi_2 \oplus \varepsilon^n$, c'est-à-dire un automorphisme θ de $\xi \oplus \varepsilon^n$ qui, au-dessus de $\{*\}$, soit $f_2^{-1} f_1 \oplus \text{Id}|_{\mathbb{R}^n}$. Rappelons d'abord que l'on peut se ramener au cas où $[0,1]$ est un voisinage de $\{*\}$ dans X sur lequel ξ est trivial (voir la démonstration du b) de la proposition (ch.IV; 1.3)). Considérons alors l'isomorphisme $g \oplus \text{Id}|_{\mathbb{R}^n} : \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^n$, où $g = f_1 f_2^{-1}$. Supposons qu'il existe une isotopie H de $g \oplus \text{Id}|_{\mathbb{R}^n}$ jusqu'à un isomorphisme de la forme $\text{Id}|_{\mathbb{R}^n} \oplus g'$. $(f_2^{-1} \oplus \text{Id}|_{\mathbb{R}^n}) H (f_1 \oplus \text{Id}|_{\mathbb{R}^n})$ est donc une isotopie de $f_2^{-1} f_1 \oplus \text{Id}|_{\mathbb{R}^n}$ jusqu'à $\text{Id}|_{\xi} \oplus g'$; Grâce à cette isotopie, nous pouvons construire l'automorphisme θ au-dessus de $[0,1]$, de telle sorte qu'au-dessus de $\partial(X - [0,1])$ il vaille $\text{Id}|_{\xi} \oplus g'$; il est donc prolongeable en un automorphisme θ de $\xi \oplus \varepsilon^n$ tout entier, répondant à la question. (Dans le cas des microfibrés, il faut sous-entendre micro-isomorphisme et microisotopie).

Il reste à trouver l'isotopie H de $g \oplus \text{Id}|_{\mathbb{R}^n}$ jusqu'à $\text{Id}|_{\mathbb{R}^n} \oplus g'$. Soit K_t , $0 \leq t \leq 1$, une isotopie de $\text{Id}|_{\mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^n}$ jusqu'à l'application de la matrice $\begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$ qui échange les axes. Alors $H_t = K_t (g \oplus \text{Id}|_{\mathbb{R}^n}) K_t^{-1}$ remplit nos conditions.

Pour les cas $A = 0$ et $A = \text{TOP}$, on peut mettre

$$K_t = \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{2} t I, & \sin \frac{\pi}{2} t I \\ -\sin \frac{\pi}{2} t I, & \cos \frac{\pi}{2} t I \end{pmatrix}$$

Pour le cas $A = \text{PL}$, la formule précédente ne fournit pas une isotopie PL. On pourrait en trouver à partir d'une isotopie PL de l'identité du cercle jusqu'à une rotation de 90° . (Les détails sont laissés en exercice).

c q f d

La stabilisation est représentée par une application $s_n : B_{A(n)} \rightarrow B_{A(n+1)}$, définie à homotopie près. Donc $k_A(X) = \varinjlim [X, B_{A(n)}]$. D'autre part la stabilisation est compatible avec les transformations d'oubli, c'est-à-dire que le diagramme suivant commute :

$$(D_n) \quad \begin{array}{ccccc} k_0(n) & \xrightarrow{i_n} & k_{PL}(n) & \xrightarrow{j_n} & k_{TOP}(n) \\ s_n \downarrow & & s_n \downarrow & & s_n \downarrow \\ k_0(n+1) & \xrightarrow{i_{n+1}} & k_{PL}(n+1) & \xrightarrow{j_{n+1}} & k_{TOP}(n+1) \end{array}$$

Les égalités $j_{n+1} s_n = s_n j_n$ et $k_{n+1} s_n = s_n k_n$ (où $k_n = j_n i_n$) sont évidentes. En ce qui concerne l'égalité $i_{n+1} s_n = s_n i_n$, le lecteur se rapportera aux références citées pour la définition de i_n p.IV.13. D_n est représenté par

$$(D'_n) \quad \begin{array}{ccccc} B_0(n) & \xrightarrow{i_n} & B_{PL}(n) & \xrightarrow{j_n} & B_{TOP}(n) \\ s_n \downarrow & & s_n \downarrow & & s_n \downarrow \\ B_0(n+1) & \xrightarrow{i_n} & B_{PL}(n+1) & \xrightarrow{j_n} & B_{TOP}(n+1) \end{array}$$

D'_n est commutatif à homotopie près parce que D_n est commutatif. Nous pouvons supposer que les applications de D'_n sont cellulaires.

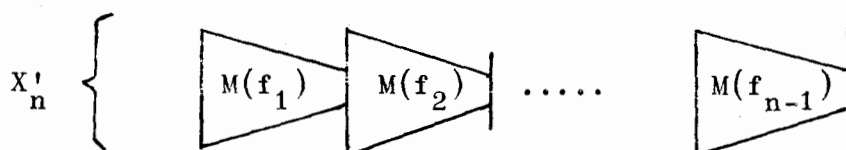
2.2 Définitions

- Soit $X_1 \xrightarrow{f_1} X_2 \xrightarrow{f_2} X_3 \rightarrow \dots$ une suite infinie d'espaces pointés et d'applications continues qui respectent les points-base.

Soit

$$X'_n = \left\{ \bigcup_{i=1}^{n-1} X_i \times [0,1] \cup X_n \times \{0\} \right\} \Bigg/ \left\{ \begin{array}{l} \forall i = 1, \dots, n-1, \\ \forall x \in X_i \\ f_i(x) \times \{0\} = x \times \{1\} \end{array} \right.$$

C'est une chaîne de $(n-1)$ "mapping-cylinders" $M(f_i)$



qui se rétracte par déformation sur $X_n = X_n \times \{0\}$.

- La réunion des X'_n , munie de la topologie limite inductive sera appelée le télescope du système $\{X_n, f_n\}$; X'_n est un télescope partiel.
- Par définition $B_A = \text{télescope } \{B_{A(n)}, s_n\}$. On dit que B_A est le classifiant stable. Puisque s_n est supposé cellulaire, c'est un CW-complexe pointé

Exercice : Soient $\{X_n, f_n\}$ et $\{X'_n, f'_n\}$ deux systèmes ayant le même type d'homotopie. Montrer que leurs télescopes respectifs ont le même type d'homotopie. (Ce résultat est une conséquence immédiate d'une proposition démontrée par Milnor dans [8 ; p.150]). La suite des espaces $B_{A(n)}$ et des applications de stabilisation étant bien définies à homotopie près, il résulte de ceci que B_A est bien défini à homotopie près. De toutes façons, nous retrouverons ce résultat p.IV.19.

2.3 Proposition : Si X est un CW-complexe fini, $k_A(X) = [X, B_A]$. Ceci signifie que, pour X fini B_A classifie les classes d'isomorphisme stable de fibrés réduits sur X .

Démonstration : $k_A(X) \Rightarrow \varinjlim k_{A(n)}(X) = \varinjlim [X, B_{A(n)}] = \varinjlim [X, B'_{A(n)}]$ où $B'_{A(n)}$ est le télescope partiel (voir les définitions précédentes). Mais puisque X est fini, $\varinjlim [X, B'_{A(n)}] = [X, B_A]$. C'est une conséquence du fait que l'image de X ou de $X \times I$ par une application continue est un compact, donc est dans $B'_{A(n)}$ pour n assez grand. cqfd

Remarque importante :

Nous allons montrer par un exemple que B_A ne classifie pas les classes d'isomorphisme stable de fibrés réduits sur les complexes de dimension infinie.

Considérons d'abord B_0 . Soit \mathbb{P}^n l'espace projectif réel de dimension n , muni de sa structure naturelle de complexe cellulaire pointé ; soit

$f_n : \mathbb{P}^n \rightarrow B_0$ l'application classifiante du fibré tangent stable de \mathbb{P}^n ; nous allons montrer que l'application

$$f = \bigvee_n f_n : \bigvee_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}^n \rightarrow B_0$$

ne peut correspondre à aucune classe stable de fibrés vectoriels sur $\bigvee_n \mathbb{P}^n$. Soit en effet ξ un fibré de dimension m sur $\bigvee_n \mathbb{P}^n$, dont la classe stable est classifiée par l'application f ; ξ induit sur \mathbb{P}^n un fibré vectoriel $\xi|_{\mathbb{P}^n}$, stablement isomorphe à $\tau(\mathbb{P}^n)$, dont la classe totale de Stiefel-Whitney $w(\xi|_{\mathbb{P}^n})$ est donc égale à $w(\tau(\mathbb{P}^n))$. Mais on sait que l'élément non nul $\alpha \in H^1(\mathbb{P}^n; \mathbb{Z}_2)$ engendre la cohomologie de \mathbb{P}^n en tant qu'algèbre sur \mathbb{Z}_2 (la seule relation est $\alpha^{n+1} = 0$), et que $w(\tau(\mathbb{P}^n)) = (1 + \alpha)^{n+1}$. En particulier, si $n+1 = 2^k - 1$, il vient

$$(1 + \alpha)^{n+1} = 1 + \alpha + \alpha^2 + \dots + \alpha^{2^k - 2}, \quad \text{où}$$

tous les termes de la somme sont non nuls ; donc $w_{2^k - 2}(\tau(\mathbb{P}^{2^k - 2})) \neq 0$.

Mais $w_{2^k - 2}(\tau(\mathbb{P}^{2^k - 2})) \in H^{2^k - 2}(\mathbb{P}^{2^k - 2}; \mathbb{Z}_2)$ est l'image par l'inclusion

$\mathbb{P}^{2^k - 2} \rightarrow \bigvee_n \mathbb{P}^n$ de $w_{2^k - 2}(\xi)$, qui est donc non nul. On en déduit que la dimension m de ξ est au moins égale de $2^k - 2$ pour tout k , ce qui constitue une contradiction. (Pour la définition des classes de Stiefel-Whitney et leur calcul dans le cas du fibré tangent d'un espace projectif, le lecteur pourra lire Milnor[6]).

Le raisonnement précédent s'applique aussi aux espaces B_{PL} , B_{TOP} et à un autre, B_G , qui s'attache aux fibrés de Hurewicz en sphères (Cf. Ch.V) ; en effet, les classes de Stiefel-Whitney sont en fait des images de classes dans $H^*(B_G; \mathbb{Z}_2)$, car leur construction est valable pour les fibrés de Hurewicz en sphères.

Problème : L'application naturelle $k_A(X) = \varinjlim [X, B_{A(n)}] \rightarrow [X, B_A]$ n'est pas en général surjective, d'après l'exemple ci-dessus. Est-elle en général injective ?

2.4 Représentation des "oublis" stables $k_0 \xrightarrow{i} k_{PL} \xrightarrow{j} k_{TOP}$

Soit A, A' un des couples $(0, PL)$ ou $(0, TOP)$ ou (PL, TOP) . L'oubli $t : k_A \rightarrow k_{A'}$, est obtenu par limite inductive des oublis $t_n : k_{A(n)} \rightarrow k_{A'(n)}$ et est représenté par le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc}
 B_{A(1)} & \xrightarrow{s_1} & B_{A(2)} & \xrightarrow{s_2} & B_{A(3)} & \xrightarrow{s_3} & \dots\dots\dots \\
 \downarrow t_1 & & \downarrow t_2 & & \downarrow t_3 & & \\
 B_{A(2)} & \xrightarrow{s_1} & B_{A'(2)} & \xrightarrow{s_2} & B_{A'(3)} & \xrightarrow{s_3} & \dots\dots\dots
 \end{array}$$

La commutativité à homotopie près de ce diagramme permet de construire concrètement une application

$t : B_A \equiv \text{télescope } \{B_{A(n)}\} \rightarrow \text{télescope } \{B_{A'(n)}\} \equiv B_{A'}$, qui prolonge chacun des t_n . D'ailleurs les t_n déterminent un élément de $\varprojlim [B_{A(n)}, B_{A'}]$. D'après le lemme (Ch.II; 2.5), il existe donc une application $t : B_A \rightarrow B_{A'}$, qui, à homotopie près, prolonge les t_n .

2.5 Proposition : Si X est un CW-complexe fini,

$$\begin{array}{ccc}
 k_A(X) & \xrightarrow{t} & k_{A'}(X) \\
 \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\
 [X, B_A] & \xrightarrow{t_*} & [X, B_{A'}]
 \end{array}
 \quad (†)$$

est un diagramme commutatif, où les flèches verticales désignent les isomorphismes naturels de la proposition (Ch.IV; 2.3).

Preuve : $t : k_A(X) \rightarrow k_{A'}(X)$ s'identifie (par la classification) à

$\varprojlim [X, B_{A(n)}] \xrightarrow{t_n^*} [X, B_{A'(n)}]$. En vertu de la définition de $t : B_A \rightarrow B_{A'}$, cette limite s'identifie aussi à $t_* : [X, B_A] \rightarrow [X, B_{A'}]$, d'où l'on déduit la commutativité de $(†)$. Au lecteur de fournir les détails !

Remarque importante :

A cause du phénomène des fantômes (Cf. Ch. III) nous ne pouvons pas affirmer que $t : B_A \rightarrow B_{A'}$ est bien définie à homotopie près ! En effet on a la suite exacte(*) donnée par le théorème 1 du chapitre III

$$0 \rightarrow \varprojlim^1 [SB_{A(n)}, B_{A'}] \rightarrow [B_A, B_{A'}] \rightarrow \varprojlim [B_{A(n)}, B_{A'}] \rightarrow 0$$

qui dit que t est déterminé modulo l'image dans $[B_A, B_{A'}]$ de $\varprojlim^1 [SB_{A(n)}, B_{A'}]$. Etant donné que t n'a pas un type d'homotopie bien déterminé, on pourrait douter du fait que B_A est lui-même un type d'homotopie bien déterminé (Cf. exercice p.IV.15), c'est-à-dire indépendant du choix des $B_{A(n)}$ et des applications $s_n : B_{A(n)} \rightarrow B_{A(n+1)}$. Nous venons de faire le calcul ! car rien n'empêche que $A' = A$ et que $t_n = \text{Id}|_{k_{A(n)}}$.

La conclusion est la suivante : Si B_A et $B_{A'}$ sont deux classifiants stables pour A , il existe une équivalence d'homotopie (**) $t : B_A \rightarrow B_{A'}$. La classe d'homotopie de $t|_{B_{A(n)}}$ est bien déterminée, mais à cause des fantômes nous ne pouvons affirmer que la classe de t est bien définie.

(*) Puisque $B_{A'}$ est un H-espace (Cf. Ch.IV, §3), c'est une suite exacte de groupes.

(**) D'après la proposition (Ch.IV; 2.3), $t_* : \pi_*(B_A) \rightarrow \pi_*(B_{A'})$ est un isomorphisme. Donc le théorème de Whitehead (Ch.II; 1.14) dit que t est une équivalence d'homotopie.

§3. STRUCTURES DE H-ESPACES SUR LES OBJETS =====

STABLES, CORRESPONDANT A LA SOMME DE WHITNEY. =====

3.1 Définition : Un espace topologique pointé (H, h_0) est dit muni d'une structure de H-espace au sens faible (resp. fort) s'il est donné avec une application continue pointée $m : H \times H \rightarrow H$, telle que $m|_{\{h_0\} \times H}$ et $m|_{H \times \{h_0\}}$ considérées comme applications de H dans H , soient des équivalences d'homotopie (resp. soient homotopes à $\text{Id}|_H$) dans la catégorie des espaces topologiques pointés.

3.2 Lemme : Soit (H, h_0, m') un H-espace au sens faible ; alors il existe $m : H \times H \rightarrow H$, telle que (H, h_0, m) soit un H-espace au sens fort.

Preuve : Soit g_1 (resp. g_2) : $H \rightarrow H$ un inverse d'homotopie de $m'|_{\{h_0\} \times H}$ (resp. de $m'|_{H \times \{h_0\}}$). L'application composée m définie par

$$m(h_1, h_2) = m'(g_1(h_1), g_2(h_2))$$

vérifie trivialement les axiomes d'une loi de H-espace fort sur H .

cqfd

3.3 Proposition : Les objets stables B_0, B_{PL}, B_{TOP} admettent chacun au moins une structure de H-espace au sens fort.

Démonstration : Il suffit d'après le lemme précédent d'exhiber une structure de H-espace au sens faible. Nous allons étudier le cas le plus délicat qui est celui de $B_{TOP} : B_{TOP}(n)$ n'étant pas à priori muni d'une structure de CW-complexe localement fini, le produit cartésien $B_{TOP}(n) \times B_{TOP}(n)$ muni de la topologie produit n'a pas de structure naturelle de CW-complexe.

On note $B_{TOP}(n) \hat{\times} B_{TOP}(n)$ le produit muni de sa topologie naturelle de CW-complexe, c'est-à-dire celle dans laquelle un ensemble est fermé si et seulement si son intersection avec tous les produits de deux cellules fermées est fermée. D'après le lemme (Ch.II ; 1.10), l'identité ensem-

bliste $i : B_{TOP(n)} \hat{\times} B_{TOP(n)} \rightarrow B_{TOP(n)} \times B_{TOP(n)}$ est une équivalence d'homotopie. Soit le fibré $u_n \hat{\times} u_n = i^*(u_n \times u_n)$, où u_n désigne le fibré universel sur $B_{TOP(n)}$. C'est un fibré de dimension $2n$ que l'on classe par une application $\varphi_n : B_{TOP(n)} \hat{\times} B_{TOP(n)} \rightarrow B_{TOP(2n)}$.

Soit $s_n : B_{TOP(n)} \rightarrow B_{TOP(n+1)}$ une application de stabilisation, qui classe $u_n \oplus \varepsilon^1$. En remplaçant $B_{TOP(n)}$ par le télescope partiel $B'_{TOP(n)}$ inclus dans B_{TOP} (Cf. définitions (ch.IV ; 2.2)), on peut supposer que s_n est une inclusion cellulaire. Alors $s_n \hat{\times} s_n : B_{TOP(n)} \hat{\times} B_{TOP(n)} \hookrightarrow B_{TOP(n+1)} \hat{\times} B_{TOP(n+1)}$ est une inclusion de sous-complexe. Enfin le diagramme ci-dessous est commutatif à homotopie près :

$$\begin{array}{ccc}
 B_{TOP(n)} \hat{\times} B_{TOP(n)} & \xrightarrow{\varphi_n} & B_{TOP(2n)} \\
 \downarrow s_n \hat{\times} s_n & & \downarrow s_{2n+1} s_{2n} \\
 B_{TOP(n+1)} \hat{\times} B_{TOP(n+1)} & \xrightarrow{\varphi_{n+1}} & B_{TOP(2n+2)}
 \end{array}$$

(*)

Pour vérifier cette commutativité notons p_1 et p_2 les projections sur le premier et le second facteur de $B_{TOP(n)} \hat{\times} B_{TOP(n)}$. Or $s_{n+1} s_n \varphi_n$ classe $(u_n \hat{\times} u_n) \oplus \varepsilon^2 \cong p_1^* u_n \oplus p_2^* u_n \oplus \varepsilon^1 \oplus \varepsilon^1$, tandis que $\varphi_{n+1}(s_n \hat{\times} s_n)$ classe $(u_n \oplus \varepsilon^1) \hat{\times} (u_n \oplus \varepsilon^1) \cong p_1^* u_n \oplus \varepsilon^1 \oplus p_2^* u_n \oplus \varepsilon^1$. Il suffit donc de vérifier le lemme suivant :

Lemme : Si ξ^n est un microfibré topologique réduit sur un CW-complexe, il existe un isomorphisme de microfibrés réduits $\xi \oplus \varepsilon^1 \cong \varepsilon^1 \oplus \xi$.

Démonstration du lemme : La permutation des facteurs qui donne l'isomorphisme des fibrés non réduits $\pi : \xi \oplus \varepsilon^1 \rightarrow \varepsilon^1 \oplus \xi$ induit le germe de l'automorphisme $\theta : (x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \mapsto (x_{n+1}, x_1, \dots, x_n)$ du fibré standard \mathbb{R}^{n+1} . Si n est pair, θ est isotope à $\text{Id}|_{\mathbb{R}^{n+1}}$. Donc on peut changer π au-dessus d'un petit voisinage du point-base b_0 de façon que π induise le germe de l'identité du fibré standard \mathbb{R}^{n+1} . π donne alors un isomorphisme de fibrés réduits. (Cette modification utilise un germe de structure produit au-dessus d'un voisinage \mathcal{U} de b_0 et une fonction $X \rightarrow [0,1]$, valant 1 en b_0 et 0 sur un voisinage de $X - \mathcal{U}$. Cf. Milnor [9; lemme 7.5]).

Si n est impair, θ change l'orientation de \mathbb{R}^{n+1} . Donc il faut partir de π composé avec la réflexion dans le facteur ε^1 .

Exercice : Fournir les détails de la démonstration précédente. Démontrer le lemme analogue pour les fibrés vectoriels réduits et les microfibrés PL réduits.

Suite de la démonstration de la proposition 3.3

L'inclusion $s_n \hat{\times} s_n$ étant une cofibration. (Ch.II; 1.17), on peut changer φ_{n+1} par une homotopie pour rendre le diagramme (*) commutatif. On en déduit alors qu'il existe une application continue $\mu : B_{TOP} \hat{\times} B_{TOP} \rightarrow B_{TOP}$. Soit p_0 le point-base de B_{TOP} . Montrons que $\mu|_{B_{TOP} \hat{\times} \{p_0\}} : B_{TOP} \rightarrow B_{TOP}$ est une équivalence d'homotopie. B_{TOP} étant un CW-complexe, il suffit de montrer que pour tout n

$$(\mu|_{B_{TOP} \hat{\times} \{p_0\}})_* : \pi_n(B_{TOP}) \rightarrow \pi_n(B_{TOP})$$

est un isomorphisme. Or $\pi_n(B_{TOP})$ s'identifie à l'ensemble $k_{TOP}(S^n)$, d'après (Ch.IV ; 2.3), et il est facile de voir que

$$(\mu|_{B_{TOP} \hat{\times} \{p_0\}})_* : k_{TOP}(S^n) \rightarrow k_{TOP}(S^n)$$

n'est autre que $[\xi^m] \mapsto [\xi^m \oplus \varepsilon^m]$, c'est-à-dire l'identité.

Symétriquement $\mu|_{\{p_0\} \hat{\times} B_{TOP}} : B_{TOP} \rightarrow B_{TOP}$

est une équivalence d'homotopie. Pour conclure on utilisera le lemme suivant :

Lemme : Soit (X, x_0) un CW-complexe pointé, et soit i l'identité de $X \hat{\times} X$ sur $X \times X$. Il existe alors $g : X \times X \rightarrow X \hat{\times} X$, inverse d'homotopie de i , tel que $g|(X \times \{x_0\}) \cup (\{x_0\} \times X)$ soit l'identité de $(X \times \{x_0\}) \cup (\{x_0\} \times X)$ sur $(X \hat{\times} \{x_0\}) \cup (\{x_0\} \hat{\times} X)$.

Démonstration du lemme : D'après Spanier [12; théorème 12, p.402], l'inclusion $(X \times \{x_0\}) \cup (\{x_0\} \times X)$ dans $X \times X$ est une cofibration. Sachant d'autre part que i est une équivalence d'homotopie et que

$i| (X \hat{\times} \{x_0\}) \cup (\{x_0\} \hat{\times} X)$ est un homéomorphisme sur son image, on montre facilement que, si h désigne un inverse d'homotopie de i ,
 $h| (X \times \{x_0\}) \cup (\{x_0\} \times X)$ est homotope à l'inclusion $(X \times \{x_0\}) \cup (\{x_0\} \times X)$ dans $X \hat{\times} X$. Il existe donc un prolongement de cette homotopie, dont l'aboutissement est une application g homotope à h . Ce g est l'application cherchée.

3.4.

3.4.

Fin de la démonstration de la proposition 3.3

Soit $g : B_{TOP} \times B_{TOP} \rightarrow B_{TOP} \hat{\times} B_{TOP}$, l'application fournie par le lemme précédent. Il est alors immédiat de vérifier que $m' = \mu g : B_{TOP} \times B_{TOP} \rightarrow B_{TOP}$ est une loi de H-espace faible sur B_{TOP} .

cqfd

Remarque 1 : A priori, $m'|_{B_{TOP} \times \{p_0\}}$ n'est pas forcément homotope à l'identité, bien qu'elle induise l'identité sur les groupes d'homotopie (voir Fantômes, Ch.III). Comme nous l'avons vu dans le lemme (Ch.IV ; 3.2) on peut remplacer m' par m tel que $m|_{B_{TOP} \times \{p_0\}}$ et $m|_{\{p_0\} \times B_{TOP}}$ soient homotopes à l'identité de B_{TOP} . En s'appuyant encore une fois sur la cofibration $B_{TOP} \times \{p_0\} \cup \{p_0\} \times B_{TOP} \hookrightarrow B_{TOP} \times B_{TOP}$ on voit que ces restrictions peuvent même être égales à l'identité.

3.

Remarque 2 : Les autres cas B_0 et B_{PL} sont plus simples car les objets sont munis de structures de CW-complexe dénombrable, ce qui permet de les supposer localement finis ; alors le faux produit $\hat{\times}$ et le produit cartésien coïncident.

3.5.

3.4 Première conséquence :

Soit X un espace topologique, x_0 un point-base de X , supposé non dégénéré (c'est-à-dire que l'inclusion $x_0 \hookrightarrow X$ est une cofibration). Soit Y un espace topologique pointé. Alors $\pi_1(Y)$ agit sur $[X, Y]$ de la manière suivante :

3.5.

Soit $f : X \rightarrow Y$ et soit $\alpha : S^1 \rightarrow Y$. On définit une application du bouquet XVI dans Y à l'aide de f et α , que l'on prolonge en une application $F : X \times I \rightarrow Y$. On note $\alpha(f) : X \rightarrow Y$ l'application $x \mapsto F(x, 1)$ et on vérifie

que la classe d'homotopie de $\alpha(f)$ ne dépend que des classes d'homotopie de α et de f .

3.4.1 Lemme : Dans les conditions précédentes, si Y est un H-espace, $\pi_1(Y)$ agit trivialement sur $[X, Y]$. (Cf. Spanier [12; théorème 5 p. 382]).

3.4.2 Corollaire : Si Y est un H-espace, et si X est un espace topologique muni d'un point-base non dégénéré, on a :

$$[X, Y] = [X, Y]_{\text{libre}}$$

Preuve : En effet, $[X, Y]_{\text{libre}}$ n'est autre que l'ensemble des orbites de l'action de $\pi_1(Y)$ sur $[X, Y]$.

Application aux objets stables : Si A est l'un des symboles 0, PL, TOP, et si X est un CW-complexe pointé :

$$[X, B_A] = [X, B_A]_{\text{libre}}$$

3.5 Localisation du classifiant :

La loi de H-espace $B_A \times B_A \rightarrow B_A$, construite à la proposition (ch.IV ; 3.3), définit un produit (= une opération binaire) fonctoriel dans $[?, B_A]$. Le foncteur $k_A(?)$ est aussi muni d'un produit fonctoriel, la somme de Whitney (Cf. proposition (Ch.IV ; 2.1)). Au lecteur de renforcer la proposition (Ch.IV ; 2.3) en vérifiant la proposition suivante :

3.5.1 Proposition : Pour tout CW-complexe pointé X (dénombrable si $A = \text{PL}^{(*)}$), l'application naturelle $k_A(X) \rightarrow [X, B_A]$ respecte ces opérations binaires.

3.5.2 Lemme (dû à I.M. James)

Soit $m : B \times B \rightarrow B$ une loi de H-espace. Pour tout CW-complexe connexe pointé X , l'opération $(x_1, x_2) \mapsto m_*(x_1, x_2)$, définie sur $[X, B]$ est une loi de monoïde, possédant une unité et des inverses à droite et à gauche.

Démonstration : L'unité est représenté par l'application constante.

(*) Voir la proposition (Ch. IV ; 1.9 A).

Pour obtenir les inverses à droite nous allons montrer que

$1 \times m : B \times B \rightarrow B \times B$ est une équivalence d'homotopie faible. Il s'en suivra que l'application $(1 \times m)_* : (x, y) \mapsto (x, x \cdot y)$ de $[X, B]^2 = [X, B \times B]$ dans lui-même est bijective (Cf. Ch.II ; 1.13) et qu'en particulier il existe y tel que $x \cdot y = e$.

Pour établir l'équivalence faible, considérons

$(1 \times m)_* : \pi_k(B \times B) \rightarrow \pi_k(B \times B) = [S^k, B \times B]$, pour tout $k > 0$. Puisque S^k est une suspension, $x \cdot y = x + y$, pour $x, y \in \pi_k(B)$ (Cf. Spanier [12; théorème 8 p. 13]). Donc $(1 \times m)_* : (x, y) \mapsto (x, x \cdot y) = (x, x + y)$ est un isomorphisme de groupes abéliens.

On obtient les inverses à gauche de la même façon à partir de $m \times 1$. c q f d

Appliquons maintenant ce lemme pour déduire l'existence de microfibrés inverses que Milnor a construits plus géométriquement dans [9]. Soit X un complexe simplicial fini connexe. Nous avons établi dans (Ch.IV ; 3.4)

$$k_A(X) \cong [X, B_A] \cong [X, B_A]_{\text{libre}} \cong k_A^{\text{libre}}(X)$$

et ces bijections respectent les produits (Ch.IV ; 3.5.1). Or sur $k_A^{\text{libre}}(X)$ le produit est évidemment commutatif et associatif. D'après le lemme de James (Ch.IV ; 3.5.2), $[X, B_A]$ est un monoïde unitaire avec éléments inverses. Donc tous sont des groupes abéliens.

D. Sullivan a récemment utilisé la notion de produit tensoriel de B_A ($A = 0$, PL ou TOP) avec un groupe abélien sans torsion. Elle s'exprime aisément dans la théorie de Brown. Soit G un groupe abélien. On considère le h-foncteur composé

$$[?, B_A] \otimes G : \{ \text{CW-complexes finis} \} \rightarrow \{ \text{groupes abéliens} \} \rightarrow \varepsilon^+ \quad (\text{=ensembles pointés}).$$

connexes et pointés

L'axiome du bouquet (Cf. Ch.II ; 2.3) est automatiquement vérifié. L'axiome du recollement est satisfait si et seulement si pour toute réunion $X_1 \cup X_2$ la suite exacte

$$[X_1 \cup X_2, B_A] \xrightarrow{i_1^* \oplus i_2^*} [X_1, B_A] \oplus [X_2, B_A] \xrightarrow{j_1^* - j_2^*} [X_1 \cap X_2, B_A]$$

(où i_1, i_2, j_1, j_2 sont des inclusions évidentes) reste exacte après tensorisation avec G . Donc pour G sans torsion, $[?, B_A] \otimes G$ satisfait aux deux conditions de la semi-exactitude. Si en plus G est dénombrable et B_A d'un type dénombrable (comme c'est le cas pour $A = 0$ ou PL), le théorème de Brown (Ch.II ; 2.6) nous fournit un classifiant noté $B_A \otimes G$.

Si p est un nombre premier et si on note $Z_{(p)} = \{a/b \in \mathbb{Q} \mid a, b \in \mathbb{Z}, p \nmid b\}$, l'espace $B_A \otimes Z_{(p)}$ s'appelle le localisé de B_A par rapport à l'entier premier p .

§4. UNE APPLICATION $i : B_0 \rightarrow B_{PL}$

Le but de ce paragraphe est de définir une application $B_0 \rightarrow B_{PL}$ qui corresponde à l'idée de triangulation des fibrés vectoriels. On voudrait définir d'abord des applications $B_{0(n)} \rightarrow B_{PL(n)}$ comme nous l'avons fait pour le couple B_0, B_{TOP} . Malheureusement c'est une construction difficile (Cf. Hirsch-Mazur [3]) ; la construction analogue pour les pseudo-fibrés PL (=block-bundles) de Morlet [10] et de Rourke-Sanderson [11] serait moins difficile, mais nous ne les traitons pas. Nous nous contenterons donc de la situation stable.

Rappelons de l'exercice (Chap. I, p.31) qu'il y a une transformation (notée là φ)

$$i : k_0 \rightarrow k_{PL}$$

de foncteurs définis sur la catégorie des complexes simpliciaux localement finis, de dimension finie. Rappelons que $k_0 = k_0^{\text{libre}}$ et $k_{PL} = k_{PL}^{\text{libre}}$ (Cf. prop. Ch.IV ; 2.1). Notre construction de i au Chap. I, p. 31 emploie le principe d'isomorphisme stable (Chap.I), et les théorèmes d'existence et d'unicité des triangulations C^1 des variétés lisses. Signalons qu'à force d'un peu de travail on peut éviter le principe d'isomorphisme stable (voir Milnor [7]).

Nous avons remarqué (proposition Ch.IV, 1.4) que $B_{0(n)}$ peut être un CW-complexe dénombrable pointé. D'après le lemme (Ch.II, 1.15)

nous pouvons changer $B_{0(n)}$ en un complexe simplicial localement fini et dénombrable. Soit ensuite B_n le n -squelette de $B_{0(n)}$. Par définition $B_0 = \text{téléscope } \{B_{0(n)}, s_n\}$ où $s_n : B_{0(n)} \rightarrow B_{0(n+1)}$ est une application simpliciale qui représente la stabilisation. L'inclusion dans B_0 de $B = \text{téléscope } \{B_n, s_n|_{B_n}\}$ induit un isomorphisme des groupes d'homotopie; elle est donc une équivalence d'homotopie. Si ξ_n est le n -fibré universel sur $B_{0(n)}$, le foncteur i associe à $\xi_n|_{B_n}$ un élément de $k_{PL}(B_n) = \varinjlim_k [B_n, B_{PL}(k)]$ et donc un élément x_n de $[B_n, B_{PL}]$. On voit facilement que $x_{n+1}|_{B_n} (= (s_n|_{B_n})^* x_{n+1})$ coïncide avec x_n , c'est-à-dire que $(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$ est un élément de $\varprojlim_n [B_n, B_{PL}]$. D'après le lemme (Ch.II, 2.5) il existe un élément x de $[B, B_{PL}] = [B_0, B_{PL}]$ tel que $x|_{B_n} = x_n$ pour tout n . Soit $i = B_0 \rightarrow B_{PL}$ un représentant de x . Le lecteur constatera sans difficulté que cette application représente $i : k_0 \rightarrow k_{PL}$ sur les complexes finis et même sur tous les complexes de dimension finie de \mathcal{C}_s ; dans ce dernier cas, on utilise le théorème de stabilité, cité p. IV.29, qui signifie que, pour tout x de dimension finie dans \mathcal{C}_s , $k_0(x) \rightarrow [x, B_0]$ et $k_{PL}(x) \rightarrow [x, B_{PL}]$ sont des isomorphismes.

§5. BONNE DEFINITION DE CERTAINES APPLICATIONS EN COHOMOLOGIE

Nous avons un diagramme commutatif de transformations d'oubli

$$(J) \quad \begin{array}{ccc} k_0 & \xrightarrow{\quad} & k_{PL} \\ & \searrow & \swarrow \\ & k_{TOP} & \end{array}$$

Nous avons défini ce diagramme sur la catégorie des complexes simpliciaux pointés, localement finis et de dimension finie. Pour les complexes finis nous avons représenté ce diagramme par un diagramme d'applications

$$(J') \quad \begin{array}{ccc} B_0 & \xrightarrow{i} & B_{PL} \\ & \searrow k & \swarrow j \\ & B_{TOP} & \end{array}$$

Donc pour tout complexe fini X le diagramme $[X, J']$ s'identifie naturellement au diagramme commutatif $J(X)$. A cause des fantômes (Cf. Ch.III), nous ne pouvons pas affirmer que i, j, k sont déterminés à homotopie près par (J) . Cette difficulté est amoindrie par la proposition suivante :

5.1 Proposition : pour tout groupe abélien G de coefficients, les diagrammes

$$\begin{array}{ccc} H_*(B_0; G) & \xrightarrow{i_*} & H_*(B_{PL}; G) \\ & \searrow k_* & \swarrow j_* \\ & H_*(B_{TOP}; G) & \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} H^*(B_0; G) & \xleftarrow{i^*} & H^*(B_{PL}; G) \\ & \swarrow k^* & \searrow j^* \\ & H^*(B_{TOP}; G) & \end{array}$$

sont commutatifs et dépendent seulement du diagramme de transformations d'oubli (J) et non du choix de i, j, k .

Démonstration

a) Diagramme d'homologie : vérifions d'abord que i_* , j_* et k_* dépendent seulement des transformations d'oubli de (J) . Chacune des applications i , j , k est bien définie sur chaque compact de sa source. Mais chaque chaîne singulière a un support compact ; la conclusion s'en suit. La commutativité du diagramme d'homologie se déduit du fait que, pour chaque compact K de B_0 , $j \circ i|_K$ est homotope à $k|_K$.

b) Diagramme de cohomologie : si G est un corps $H^n(-; G) = \text{Hom}_G(H_n(-; G); G)$ pour tout n . En ce cas l'affirmation pour l'homologie entraîne celle pour la cohomologie. Pour le cas général notre démonstration sera fondée sur le théorème suivant :

Théorème de stabilité :

$$(I) \quad \pi_m(B_0, B_{0(n)}) = 0, \quad m \leq n$$

$$(II) \quad \pi_m(B_{PL}, B_{PL(n)}) = 0, \quad m < n.$$

Démonstration du théorème : (I) est une traduction en termes de classifiants du théorème de stabilité pour les fibrés vectoriels (Ch.0 ;). (II) est un résultat assez difficile dû à A. Haefliger et C.T.C. Wall[2]. Morlet démontre (II) pour $m \leq n$ dans la thèse (Paris, 1967).

Fin de la démonstration de 5.1 : Montrons alors que le diagramme en cohomologie dépend seulement de (J) . Pour tout entier $n \geq 0$, on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} H^n(B_0; G) & \xleftarrow{k^*} & H^n(B_{TOP}; G) \\ \downarrow & \swarrow & \\ H^n(B_{0(n+1)}; G) & \xleftarrow{(k|_{B_{0(n+1)}})^*} & \end{array}$$

où la flèche verticale est la restriction. L'application $k|_{B_{0(n+1)}}$ est bien définie à homotopie près par l'oubli $k_{0(n+1)} \rightarrow k_{TOP(n+1)}$.

Donc $(k|_{B_{0(n+1)}})^*$ est bien définie. Pour achever la démonstration relative

à k^* , il suffit de démontrer que la flèche verticale est un isomorphisme. Le théorème de stabilité (Ch.0,) donne $\pi_m(B_0, B_{0(n+1)}) = 0$, $m \leq n+1$; donc $H_m(B_0, B_{0(n+1)}) = 0$, $m \leq n+1$, par le théorème de Hurewicz. Ensuite $H^m(B_0, B_{0(n+1)}) = 0$, $m \leq n+1$, d'après le théorème des coefficients universels. Enfin la suite exacte relative à la paire $(B_0, B_{0(n+1)})$ donne l'isomorphisme exigé. La bonne définition de k^* est démontrée.

La bonne définition de i^* et de j^* se démontre de la même façon. Pour j^* , on a besoin de $\pi_m(B_{PL}, B_{PL(n)}) = 0$, $m < n$. Pour la bonne définition de i^* , il faut employer la filtration $B_0 = \bigcup_m B_m$, où $B_m \in \mathcal{C}_s$ est de dimension finie (Cf. Ch.IV, §4), car l'oubli $k_0 \rightarrow k_{PL}$ n'est (pour nous) défini que sur les complexes de dimension finie de \mathcal{C}_s . La stabilité $\pi_p(B_0, B_m) = 0$, $p < m$, se déduit de $\pi_p(B_0, B_{0(m)}) = 0$, $p < m$.

La commutativité du diagramme de cohomologie se déduit de cette dernière stabilité et du fait que

$$\begin{array}{ccc}
 B_m & \xrightarrow{i|B_m} & B_{PL} \\
 & \searrow & \swarrow \\
 k|B_m & & B_{TOP}
 \end{array}$$

est commutatif à homotopie près.

cqfd

Remarques finales : faut-il craindre les fantômes ?

Les fantômes (Cf. Ch. III) nous ont empêché de préciser une classe d'homotopie préférentielle pour les applications d'oubli

$$(J) \quad \begin{array}{ccc} B_0 & \longrightarrow & B_{PL} \\ & \searrow & \swarrow \\ & B_{TOP} & \end{array}$$

De plus, ils compliquent la tâche de doter la loi de h -espace $B_A \times B_A \rightarrow B_A$, qui représente la somme de Whitney, des propriétés de commutativité et d'associativité à homotopie près dont la somme elle-même jouit.

Ces difficultés témoignent une myopie de la théorie de Brown. Il paraît que la méthode de Milnor [5] donnerait une application préférentielle $B_0 \rightarrow B_{TOP}$. Ceci arrive pour la raison que tout morphisme de groupes topologiques $G \rightarrow H$ engendre canoniquement une application bien définie $B_G \rightarrow B_H$ des classifiants de Milnor. Malheureusement la méthode de Milnor ne comprend pas aisément les microfibrés PL. Pour une raison analogue il paraît que la méthode semi-simpliciale (on trouvera des références dans Rourke et Sanderson [11]) permettrait de bien définir $B_0 \rightarrow B_{TOP}$, et même toutes les applications de (J). La généralité et la précision qu'offre dans cette situation la théorie semi-simpliciale, lui donne un avantage qui compense sa complexité considérable.

Comme avantage de la théorie de Brown, il faut souligner sa maniabilité. Citons comme exemple la construction de $B_{PL} \otimes G$, où G est un groupe abélien sans torsion (Cf. Ch. IV, 3.5).

Quant aux difficultés qu'engendrent les fantômes, on peut les éviter souvent dans le cadre de la théorie de Brown. (Voir par exemple ce Ch. IV, 5). Il faut enfin remarquer que A. Dold [13] avance l'idée que les axiomes de semi-exactitude sont aussi utiles qu'un classifiant. Il remplace le classifiant (qu'il ne suppose pas exister) par le foncteur lui-même et traite ce foncteur comme un "espace généralisé". Une transformation de foncteurs joue alors le rôle d'une "application généralisée".

BIBLIOGRAPHIE

=====

- [1] A. DOLD Partitions of unity in the theory of fibrations,
Ann. of Math. 78 (1963), p. 223-255
- [2] A. HAEFLIGER
C.T.C. WALL Piecewise linear bundles in the stable range,
Topology 4 (1965), p. 209-214.
- [3] M. HIRSCH
B. MAZUR Smoothings of piecewise linear manifolds,
Cambridge University, 1964, (notes minéographiées).
- [4] D. HUSEMOLLER Fibre bundles, Mc. Graw-Hill, 1966.
- [5] J. MILNOR Construction of universal bundles I, II,
Ann. of Math. 63 (1956), p. 272-280 ; p. 430-436.
- [6] " Lectures on carasteristic classes, notes by J. Stasheff,
Princeton University, 1957, (minéographiées).
- [7] " Microbundles and differentiable structures,
Princeton University, 1961 (notes minéographiées).
- [8] " Morse theory, Ann. of Math. Studies 51,
Princeton University Press, 1963.
- [9] " Microbundles I, Topology 3, Supplément 1 (1964)
p. 53-80.
- [10] C. MORLET Thèse, Paris 1967.
- [11] C. ROURKE
B. SANDERSON Block bundles I, II, III, Ann. of Math. 87 (1968),
p. 1-28 ; p. 255-277 ; p. 431-483.
- [12] E. SPANIER Algebraic topology, Mc. Graw-Hill, 1966.
- [13] A. DOLD Halbexacte Homotopiefunktoren,
Lecture Notes in Math. 12, Springer, 1966.
- [14] E. BROWN Cohomology theories,
Ann. of Math. 75 (1962), p. 467-484.

LE RECOLLEMENT D'EQUIVALENCES D'HOMOTOPIE

=====

Soit donné un diagramme, commutatif à homotopie près, d'espaces topologiques

$$(D) \quad \begin{array}{ccccc} X_1 & \longleftrightarrow & A & \hookrightarrow & X_2 \\ f_1 \downarrow & & f \downarrow & & \downarrow f_2 \\ Y_1 & \longleftrightarrow & B & \hookrightarrow & Y_2 \end{array}$$

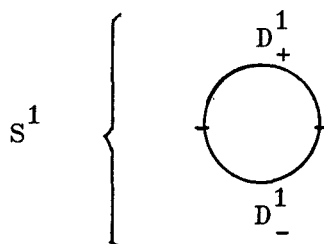
où les applications verticales sont des équivalences d'homotopie et les applications horizontales des inclusions qui sont des cofibrations ^(*).

Soit $X = X_1 \cup X_2$ et $Y = Y_1 \cup Y_2$. On suppose $X_1 \cap X_2 = A$ et $Y_1 \cap Y_2 = B$ et que X_1, X_2, Y_1, Y_2 sont fermés.

Théorème : Il existe une application de triples $F : (X; X_1, X_2) \rightarrow (Y; Y_1, Y_2)$ de sorte que f_i soit homotope à $F|_{X_i} : X_i \rightarrow Y_i$, $i = 1, 2$. Toute telle F est une équivalence d'homotopie de triples.

Remarque : Même à homotopie près, F n'est pas nécessairement unique.

Pour former un exemple on prend $(X; X_1, X_2) = (Y; Y_1, Y_2) = (S^1; D_+^1, D_-^1) \times S^1$



Démonstration du théorème : L'existence de F est facile à démontrer.

(*) On rappelle que $M \hookrightarrow N$ est une cofibration si toute application continue de $M = [0, 1] \cup N \times \{0\}$ se prolonge en une application continue de $N \times [0, 1]$. Toute inclusion d'un sous-complexe dans un CW-complexe en est une (Spanier [12; théorème 12, p. 402]).

Puisque $A \hookrightarrow X_1$ et $A \hookrightarrow X_2$ sont des cofibrations, on peut rendre le diagramme commutatif en prolongeant à X_1 et X_2 des homotopies de $f_1|_A$ et $f_2|_A$ jusqu'à f . La continuité de F résulte du fait que X_1 et X_2 sont fermés. Que F soit une équivalence d'homotopie, cela va découler du lemme suivant :

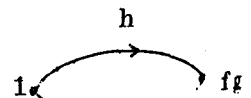
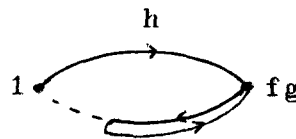
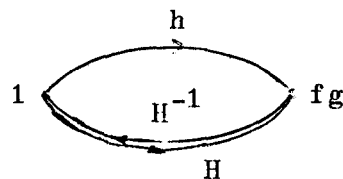
Lemme : Soient $A \hookrightarrow X$ et $B \hookrightarrow Y$ deux cofibrations et $(F, f) : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ une application de paires telle que $F : X \rightarrow Y$ et $f(=F|_A) : A \rightarrow B$ soient des équivalences d'homotopie de paires. De plus, étant donné $g : B \rightarrow A$ un inverse d'homotopie de f et h une homotopie de $1|_B$ jusqu'à fg , il existe $G' : (Y, B) \rightarrow (X, A)$ équivalence d'homotopie de paires, inverse de F , dont la restriction à B soit g et telle qu'une homotopie de $1|_Y$ jusqu'à FG' prolonge h .

Démonstration du lemme : L'inclusion de B dans Y étant une cofibration, on peut choisir pour inverse de F une application $G : Y \rightarrow X$ dont la restriction à B soit l'application donnée $g : B \rightarrow A$, inverse de $f = F|_A$.

Soit $H : Y \times I \rightarrow Y$ une homotopie de $1|_Y$ jusqu'à FG . En composant pour chaque $b \in B$ le chemin $h(b, t)$ et le chemin $H(b, t)$ décrit à l'envers, on obtient une homotopie non triviale $\lambda : B \times I \rightarrow Y$, de $1|_B$ jusqu'à $1|_B$. En prolongeant λ à $Y \times I$ on obtient une homotopie L de l'identité de Y jusqu'à $\varphi : Y \rightarrow Y$, où $\varphi|_B = 1|_B$.

Posons alors $G' = G\varphi$. Remarquons que $G'|_B = g$. Nous allons montrer qu'il existe une homotopie de paire de $(1|_Y, 1|_B)$ jusqu'à (FG', fg) . Tout d'abord nous avons une homotopie Φ de $1|_Y$ jusqu'à FG' en composant l'homotopie L et l'homotopie $H\varphi$. Dans cette homotopie, un point $b \in B$ décrit successivement les chemins $h(b, t)$, $H(b, 1-t)$, $H(\varphi(b), t) = H(b, t)$.

Ce chemin est déformable continuellement jusqu'au chemin $h(b, t)$:



La déformation de l'homotopie $\Phi|_{B \times I}$ jusqu'à h se prolonge^(*) en une déformation de l'homotopie Φ jusqu'à une homotopie Φ' entre $1|_Y$ et FG' , dont la restriction à $B \times I$ est h .

Φ' est une homotopie de paire de $(1_Y, 1_B)$ jusqu'à (FG', fg) .

La même construction faite sur G' donne une application $F' : X \times I \rightarrow X$ et une homotopie de paires de $(1_X, 1_A)$ jusqu'à $(G'F', gf)$. Mais (F', f) et (F, f) sont homotopes à $(FG'F, fgf)$. Donc $(G'F', gf)$ est homotope à $(1_X, 1_A)$

cqfd

Démonstration du théorème : Nous pouvons supposer (D) commutatif et

$F|_{X_i} = f_i$, $i = 1, 2$. Choisissons $g : B \rightarrow A$ un inverse de f et h une homotopie de $1|_B$ jusqu'à fg . D'après le lemme (appliqué deux fois) il est possible de prolonger g en une application de triples $G : (Y; Y_1, Y_2) \rightarrow (X; X_1, X)$ et de prolonger h en une homotopie H de $1|_Y$ jusqu'à FG qui respecte les sous-espaces Y_1, Y_2 . Par ailleurs le lemme dit que $g_i = G|_{Y_i} : Y_i \rightarrow X_i$, $i = 1, 2$, sont des équivalences d'homotopie.

Or l'homotopie $1|_Y \simeq FG$ dit que F est une domination de triples. Par symétrie G en est une également. Donc F et G sont des équivalences d'homotopie de triples inverses l'une de l'autre.

cqfd

(*) On rappelle que si $M \hookrightarrow N$ est une cofibrations :

$M \times [0, 1] \cup N \times \{0, 1\} \hookrightarrow N \times I$ est aussi une cofibration (Spanier [12; exercice E, p. 57]).

V.1

CHAPITRE V

FIBRATIONS DE HUREWICZ

§1. DEFINITIONS

=====

- .1 Soient E et B deux espaces topologiques et soit $p : E \rightarrow B$ une application continue. Le triple (E, p, B) est appelé espace avec projection ou espace au-dessus de B . On dit que p a la propriété de relèvement des homotopies (ou encore la propriété RH) pour l'espace topologique X , si, pour toute application continue $f : X \times I \rightarrow B$, et tout relèvement $G : X \times \{0\} \rightarrow E$ de $f|_{X \times \{0\}}$, il existe un relèvement $F : X \times I \rightarrow E$ de l'application f , vérifiant $F|_{X \times \{0\}} = G$.
- .2 Une application continue $p : E \rightarrow B$ est appelée une fibration de Hurewicz si p a la propriété de relèvement des homotopies pour tout espace topologique X . Le triple (E, p, B) est un fibré de Hurewicz.
- Remarque : Si B est connexe par arcs, p est nécessairement surjective.
- .3 Etant donnés deux espaces avec projection (E, p, B) et (E', p', B) sur la même base B , on appelle morphisme de (E, p, B) dans (E', p', B) une application continue $f : E \rightarrow E'$ au-dessus de B , c'est-à-dire telle que $p'f = p$.
- .4 Soient $f, g : (E, p, B) \rightarrow (E', p', B)$ deux morphismes d'espaces avec projection sur la même base. Une homotopie $H : E \times I \rightarrow E'$ entre f et g est dite verticale si chaque étape $H_t = H|_{E \times \{t\}}$ est un morphisme d'espaces avec projection. On dit alors que f et g sont verticalement homotopes, et on note $f \simeq_B g$.
- .5 Un morphisme $f : (E, p, B) \rightarrow (E', p', B)$ d'espaces avec projection sur la même base est une équivalence d'homotopie fibrée s'il existe un morphisme $g : (E', p', B) \rightarrow (E, p, B)$ tel que $fg \simeq_B \text{Id}_{E'}$ et $gf \simeq_B \text{Id}_E$. On dit alors que (E, p, B) et (E', p', B) ont le même type d'homotopie fibrée ou encore qu'ils sont HF-équivalents.

1.6 Image réciproque d'un espace avec projection

Rappelons d'abord la notion de produit fibré dans une catégorie abstraite C : Etant donné dans C le diagramme

$$\begin{array}{ccc} & A_1 & \\ & \downarrow f_1 & \\ A_2 & \xrightarrow{f_2} & B \end{array}$$

un objet E , muni de morphismes $\varphi_1 : E \rightarrow A_1$ et $\varphi_2 : E \rightarrow A_2$ tels que $f_1\varphi_1 = f_2\varphi_2$, est un produit fibré du diagramme précédent, s'il possède la propriété universelle suivante : pour tout diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{g_1} & A_1 \\ g_2 \downarrow & & \downarrow f_1 \\ A_2 & \xrightarrow{f_2} & B \end{array}$$

il existe un unique morphisme $\theta : X \rightarrow E$, tel que $g_1 = \theta\varphi_1$ et $g_2 = \theta\varphi_2$. Si un tel objet existe, il est unique à isomorphisme près. Dans la catégorie des espaces topologiques et des applications continues, tout diagramme

$$\begin{array}{ccc} & E & \\ & \downarrow p & \\ B' & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

possède un produit fibré ; soit le sous-espace topologique E' , du produit $B' \times E$, défini par $E' = \{(b', e) \in B' \times E \mid f(b') = p(e)\}$; soient $p' : E' \rightarrow B'$ et $\bar{f} : E' \rightarrow E$ les restrictions à E' des deux projections du produit sur chacun de ses facteurs ; E' , avec p' et \bar{f} , est solution du problème universel. On dit que (E', p', B') est l'image réciproque par f de l'espace avec projection (E, p, B) . En vertu de la propriété universelle d'un produit fibré, si p est une fibration de Hurewicz, p' est elle-même une fibration de Hurewicz.

On notera souvent $(E', p', B') = f^*(E, p, B)$.

Propriété faible de relèvement des homotopies

Dold étudie dans [1] un affaiblissement de la propriété RH dont nous aurons besoin lors du théorème (Ch. V ; 3) de classification des fibrés de Hurewicz sur une base CW-complexe.

1.7 Définitions : Soient E et B deux espaces topologiques et soit une application continue $p : E \rightarrow B$. On dit que p a la propriété faible de relèvement des homotopies (ou encore la propriété RH faible) pour l'espace topologique X , si pour toute application continue $f : X \times I \rightarrow B$, et tout relèvement $G : X \times \{0\} \rightarrow E$ de $f|_{X \times \{0\}}$, il existe un relèvement $F : X \times I \rightarrow E$ de f , tel que $F|_{X \times \{0\}}$ soit verticalement homotope à G (Cf. 1.4).

Une application continue $p : E \rightarrow B$ est une fibration faible si p a la propriété faible de relèvement des homotopies pour tout espace topologique X .

Remarques : i) L'image réciproque d'une fibration faible par une application continue est une fibration faible.

ii) On sait que, si $p : E \rightarrow B$ est une fibration de Hurewicz, et si $F \subset E$ désigne la fibre au-dessus d'un point $b_0 \in B$, $p_* : \pi_*(E, F) \rightarrow \pi_*(B, b_0)$ est un isomorphisme, donc qu'il existe une suite exacte de fibration (Cf. Hu[2 ; p.118]). Le lecteur pourra démontrer en exercice que cette propriété reste vraie pour les fibrations faibles. La propriété suivante est la raison d'être de la notion de fibration faible.

1.8 Lemme important : La propriété RH-faible est un invariant du type d'homotopie fibrée.

La démonstration se fait par un simple examen des définitions.

En revanche, la propriété RH n'est pas un invariant du type d'homotopie fibrée.

Exemple : $E = B = [0, 1]$, $p : E \rightarrow B$ est l'identité. (E, p, B) possède la propriété RH. La lettre L , munie de la projection sur sa base, possède

la propriété RH faible et non la propriété RH, alors qu'elle est HF-équivalente au fibré précédent.

§2. PREMIERES PROPRIETES

=====

2.1 Proposition : Soit (E, p, B) une fibration faible ; soit $f_0, f_1 : X \rightarrow B$ deux applications homotopes. Alors les fibrations faibles $f_0^*(E, p, B)$ et $f_1^*(E, p, B)$ sont HF-équivalentes.

Démonstration : Soit $F : X \times I \rightarrow B$ une homotopie entre f_0 et f_1 ; on note $(\mathcal{E}, \pi, X \times I)$ le fibré $F^*(E, p, B)$ et (E_i, p_i, X_i) le fibré $f_i^*(E, p, B)$ pour $i = 0, 1$; dans la suite on regardera E_i comme sous-espace de \mathcal{E} . Introduisons une homotopie α_0 (resp. α_1) de $\text{Id}_{X \times I}$ jusqu'à la projection $(x, u) \mapsto (x, 0)$ (resp. $(x, u) \mapsto (x, 1)$) ; on peut poser par exemple

$$\alpha_0(x, u, t) = (x, (1-t)u)$$

$$\alpha_1(x, u, t) = (x, u + t(1 - u)).$$

En relevant les homotopies $\alpha_i \circ (\pi \times \text{Id}_I) : \mathcal{E} \times I \rightarrow X \times I$, pour $i = 0, 1$, on obtient Φ et $\Psi : \mathcal{E} \times I \rightarrow \mathcal{E}$, rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E} \times I & \xrightarrow{\Phi \text{ (resp. } \Psi \text{)}} & \mathcal{E} \\ \pi \times \text{Id}_I \downarrow & & \downarrow \\ (X \times I) \times I & \xrightarrow{\alpha_0 \text{ (resp. } \alpha_1 \text{)}} & (X \times I) \end{array},$$

tels que Φ_0 (resp. Ψ_0) soit verticalement homotope à $\text{Id}_{\mathcal{E}}$ et que Φ_1 (resp. Ψ_1) applique \mathcal{E} dans E_0 (resp. E_1). De l'homotopie $\Phi_{1-t}|_{E_1}$, $0 \leq t \leq 1$, on déduit une homotopie verticale entre $\Psi_1 \Phi_1|_{E_1}$ et $\Psi_1|_{E_1}$. Mais $\Psi_1|_{E_1}$ est verticalement homotope à $\text{Id}|_{E_1}$, donc $\Psi_1 \Phi_1|_{E_1}$ est verticalement homotope à $\text{Id}|_{E_1}$. De la même manière on obtiendrait une homotopie verticale entre $\Phi_1 \Psi_1|_{E_0}$ et $\text{Id}|_{E_0}$.

cqfd

.2 Conséquences

- Si B est contractible, alors, pour tout point $b \in B$, (E, p, B) est HF-équivalent à $(B \times p^{-1}(b), p_1, B)$ où p_1 désigne la projection sur le premier facteur du produit.

- Si B est connexe par arcs, deux fibres quelconques ont le même type d'homotopie.

.3 Proposition : (Cf. Dold [1; théorème 6.1, p. 243])

Soient (E, p, B) et (E', p', B) deux fibrations faibles sur la même base B ; soit $f : E \rightarrow E'$ un morphisme d'espaces avec projection qui soit une équivalence d'homotopie; alors f est une équivalence d'homotopie fibrée.

Remarque préliminaire : Soit $g : E' \rightarrow E$ un morphisme qui soit un inverse d'homotopie de f ; il ne faut pas croire qu'il existe alors une homotopie verticale entre fg et $\text{Id}_{|E'}$. Il faudra en général faire choix d'un inverse particulier g' , ce qui apparaît clairement dans l'exemple suivant :

Exemple : Soit $E = E' = \mathbb{R}^1$ et $p = p'$ la projection sur le quotient $\mathbb{R}^1/\mathbb{Z} = S^1$ de \mathbb{R}^1 par le sous-groupe additif des entiers. Soit $F : E \rightarrow E'$ l'application $f(x) = x + 1$. Il est évident que f est une équivalence d'homotopie fibrée (c'est un isomorphisme). Cependant si on prend $g = \text{Id}$ comme inverse, on n'a pas d'homotopie verticale entre fg et $\text{Id}_{|E'}$.

Démonstration de la proposition : Nous démontrerons que si $f : E \rightarrow E'$ est un morphisme de fibrés faibles sur B tel qu'il existe une application $g : E' \rightarrow E$ de sorte que fg soit homotope à $\text{Id}_{|E'}$, alors il existe un morphisme $g' : E' \rightarrow E$ tel que fg' soit verticalement homotope à $\text{Id}_{|E'}$, c'est-à-dire $fg' \simeq_B \text{Id}_{|E'}$.

Si f est une équivalence d'homotopie g' le sera de même, et nous pourrons de ce fait affirmer l'existence d'un morphisme $f' : E \rightarrow E'$ tel que $g'f' \simeq_B \text{Id}_{|E}$. Mais alors

$$g'f \simeq_B (g'f)(g'f') = g'(fg')f' \simeq_B g'f' \simeq_B \text{Id}_{|E}$$

et g' sera l'inverse dont la proposition affirme l'existence.

A) Choix de l'inverse à droite g' :

Soit $g : E' \rightarrow E$ une application telle que $fg \simeq \text{Id}|_{E'}$. Par une application de la propriété RH (faible) on peut déformer g en un morphisme de fibrés, ce que nous supposons fait.

Soit $d : E' \times I \rightarrow E'$ une homotopie entre $d_0 = fg$ et $d_1 = \text{Id}|_{E'}$. On remarque que $pg = p'fg = p'd_0$, ce qui permet de trouver une homotopie $D : E' \times I \rightarrow E$ relevant $p'd$, telle que $D|_{E' \times \{0\}}$ soit verticalement homotopie à g . Définissons

$$g' = D|_{E' \times \{1\}} : E' \rightarrow E$$

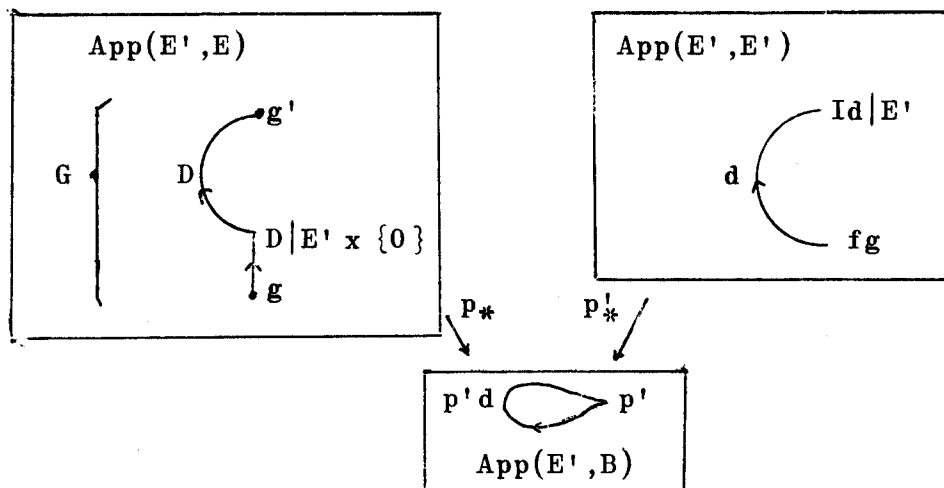
B) Une homotopie verticale entre fg' et $\text{Id}|_{E'}$

On prolonge $D : E' \times [0,1] \rightarrow E$ par $G : E' \times [-1,1] \rightarrow E$ en choisissant une homotopie verticale $G|_{E' \times [-1,0]}$ entre g et $D|_{E' \times \{0\}}$.

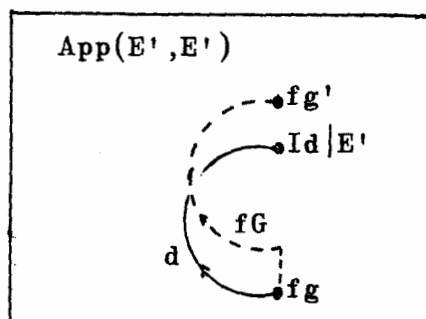
D'après la loi exponentielle (Chap. 0) on peut considérer toute homotopie comme un chemin dans un espace de fonctions continues. Cette astuce va beaucoup clarifier la démonstration pour les esprits géométriques. $\text{App}(X,Y)$ désignera l'espace des applications continues $X \rightarrow Y$ muni de la topologie "compacte-ouverte".

Remarquons que l'application induite $p'_* : \text{App}(E', E') \rightarrow \text{App}(E', B)$ hérite de $p' : E' \rightarrow B$ la propriété RH faible du moins pour les complexes simpliciaux finis (voir la loi exponentielle chap. 0).

Considérons sous forme de diagramme schématique les chemins déjà construits



Il nous faut montrer qu'il existe un chemin dans $\text{App}(E', E')$ du point $\text{Id}|E'$ au point fg' , qui est vertical, c'est-à-dire qui se projette sur le chemin constant en $p' \in \text{App}(E', B)$. Or nous avons déjà un chemin, soit $\pi : [a, b] \rightarrow \text{App}(E', E')$ de $\text{Id}|E'$ à fg' , à savoir le chemin d parcouru en sens inverse de $\text{Id}|E'$ à fg , suivi par le chemin fG de fg à fg'



Le chemin projeté $p'\pi : [a, b] \rightarrow \text{App}(E', B)$ est un lacet par $p' \in \text{App}(E', B)$ contractible sur p' . Si $H : [a, b] \times I \rightarrow \text{App}(E', B)$ réalise cette contraction, $H|_{[a, b] \times \{0\}} = p'\pi$ et $H([a, b] \times I \cup [a, b] \times \{1\}) = p'$. Donc en relevant l'homotopie H dans $\text{App}(E', E')$ et en se restreignant au relèvement de $H|_{[a, b] \times I \cup [a, b] \times \{1\}}$, on obtient un chemin vertical dont les extrémités sont respectivement verticalement homotopes à $\text{Id}|E'$ et à fg' . cqfd

Exercice : Dans la démonstration ci-dessus, nous avons déduit d'un inverse à droite d'homotopie de f , un inverse à droite d'homotopie dans la catégorie des applications sur B . Faire la même chose pour un inverse à gauche.

2.4 Proposition : Soit $f : (E, p, B) \rightarrow (E', p', B)$ un morphisme de fibrations faibles sur la même base. On suppose que E et E' ont chacun le type d'homotopie d'un CW-complexe connexe, et qu'il existe un point b de la base B tel que la restriction $f|_{\bar{p}^{-1}(b)} : \bar{p}^{-1}(b) \rightarrow \bar{p}'^{-1}(b)$ soit une équivalence d'homotopie. Alors f est une équivalence d'homotopie fibrée.

Démonstration : La suite exacte d'homotopie d'une fibration et le lemme des cinq montrent immédiatement que f est une équivalence d'homotopie faible. Mais E et E' ayant le type d'homotopie de CW-complexes connexes, d'après le théorème de Whitehead (Ch.II ; 1.14), f est une équivalence

d'homotopie. Il suffit alors d'appliquer la proposition (2.3) pour obtenir la conclusion.

Remarque : On trouvera dans (Dold [1; théorème 6.3 p.243]) une proposition beaucoup plus forte, supprimant en particulier les hypothèses de CW-complexe faites sur les espaces totaux E et E' .

§3. CLASSIFICATION DES FIBRATIONS DE HUREWICZ

=====

3.1 Un nouveau foncteur semi-exact

Lorsque (E, p, B) est un espace avec projection possédant la propriété RH-faible sur une base pointée, on utilise la notation $F \rightarrow E \xrightarrow{p} B$, où F désigne la fibre au-dessus du point-base.

Soit F_0 un CW-complexe. Nous dirons que le fibré $F \rightarrow E \rightarrow B$ est de "fibre-type" F_0 si chaque fibre a le type d'homotopie de F_0 . Nous dirons qu'il est réduit si l'on s'est donné une équivalence d'homotopie $f : F \rightarrow F_0$. Si $F \rightarrow E \rightarrow B$ et $F' \rightarrow E' \rightarrow B$ sont deux fibrés réduits, $\varphi : E \rightarrow E'$ est un morphisme de fibrés réduits si φ est un morphisme de fibrés au-dessus de B et si en outre le diagramme

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{\varphi|_F} & F' \\ f \searrow & & \swarrow f' \\ & F_0 & \end{array}$$

est commutatif à l'homotopie près.

Un fibré $F \rightarrow E \rightarrow B$ de fibre type F_0 muni d'une réduction $f : F \rightarrow F_0$, s'appelle un F_0 -fibré réduit.

Pour un F_0 donné, on définit de la manière suivante un foncteur contravariant sur la catégorie \mathcal{C} des CW-complexes pointés et des applications continues respectant les points-base, à valeurs dans la catégorie \mathcal{C}^+ des ensembles pointés : si X est un CW-complexe pointé, un élément de $H(X)$ est

représenté par un F_0 -fibré (faible)* réduit ; deux tels fibrés ξ, ξ' représentent le même élément dans $H(X)$, si il existe un morphisme de fibrés réduits $\varphi : \xi \rightarrow \xi'$, qui soit une équivalence d'homotopie fibrée. Si $g : Y \rightarrow X$ est un morphisme dans la catégorie \mathcal{C} , $H(g) : H(X) \rightarrow H(Y)$ est définie naturellement à partir de l'opération image réciproque.

Exercice : a) Montrer que l'image réciproque d'un F_0 -fibré réduit est lui-même un F_0 -fibré réduit.

b) Soient ξ, ξ' deux F_0 -fibrés réduits sur X qui sont équivalents. Pour toute application $g : Y \rightarrow X$ de complexes pointés, montrer que les images réciproques $g^*\xi, g^*\xi'$ sont deux F_0 -fibrés réduits sur Y équivalents.

Si g est homotope à g' dans la catégorie \mathcal{C} , on voit grâce à la proposition (Ch.V; 2.1) que $H(g) = H(g')$, ce qui montre que H est un h-foncteur. Pour montrer que H vérifie les axiomes de la semi-exactitude (Ch.II; 2.3), nous allons nous fonder sur un théorème de Dold dont nous ne reproduirons pas la démonstration assez longue (Cf. Dold [1, théorème 5.12, p.242]) :

3.2 Théorème de Dold : Soit B un espace paracompact, et $p : E \rightarrow B$ une application possédant la propriété RH-faible (resp. RH) au-dessus de chaque ouvert V_α d'un recouvrement $\{V_\alpha\}$ de la base, alors p possède la propriété RH-faible (resp. RH) au-dessus de B tout entier.

Le cas de RH, dû à Hurewicz [4] et Huebsch, est plus facile : deux pages suffisent pour la démonstration. L'exercice suivant achève une partie de la démonstration de 3.2 pour le cas RH faible.

Exercice : 1) Soit $p : E \rightarrow B$ une application possédant la propriété RH faible. Soient $H_1, H_2 : X \times I \rightarrow E$ deux relèvements d'une même homotopie $pH_1 = pH_2$, tels que $H_1|_{X \times \{0\}}$ et $H_2|_{X \times \{0\}}$ soient verticalement homotopes. Alors H_1 et H_2 sont reliées par une homotopie verticale.

2) Soit $p : E \rightarrow B$ une application qui jouit de la propriété RH faible au-dessus de deux ouverts U et V . Soient $a < b < c < d$ des

* Nous montrerons en (3.3) ci-dessous que l'on obtient le même foncteur en admettant seulement les fibrés forts (= de Hurewicz).

nombres réels, et $H : X \times [a, d] \rightarrow B$ une application telle que $H(X \times [a, c]) \subset U$, $H(X \times [b, d]) \subset V$.

Déduire de 1) que pour tout relèvement $H_1 : X \times [a, c] \rightarrow E$ de $H|_{X \times [a, c]}$ il existe un relèvement H_2 de H tel que $H_2|_{X \times [a, b]} = H_1|_{X \times [a, b]}$.

Nous passons maintenant à la vérification des deux axiomes de la semi-exactitude pour notre foncteur H :

A - VERIFICATION DE L'AXIOME DU RECOLLEMENT :

Etude préliminaire : Supposons tout d'abord que X est un CW-complexe pointé, réunion de deux ouverts O_1 et O_2 d'intersection A contenant le point-base. Soient $F_1 \rightarrow E_1 \xrightarrow{p_1} O_1$ et $F_2 \rightarrow E_2 \xrightarrow{p_2} O_2$ deux fibrations faibles réduites, et soit $f : p_1^{-1}(A) \rightarrow p_2^{-1}(A)$ une HF-équivalence entre leurs restrictions à A , respectant leurs réductions. En suivant une idée de Puppe, nous allons construire au-dessus de X une fibration faible réduite, induisant respectivement sur O_1 et O_2 des fibrations faibles HF équivalentes aux deux fibrations données. On note $Z=M(f)$ le cylindre de l'application f ; $Z = (p_1^{-1}(A) \times [0, 1]) \amalg p_2^{-1}(A) / \{ \forall e_1 \in p_1^{-1}(A), e_1 \times 1 = f(e_1) \}$.

On considère l'espace avec projection (E, p, X) où $E = E_1 \cup Z \cup E_2$ et où p est défini par $p|_{E_1} = p_1$, $p|_{E_2} = p_2$ et, pour

$$(e_1, u) \in p_1^{-1}(A) \times [0, 1], \quad p(e_1, u) = p_1(e_1).$$

La fibre-base F de cet espace avec projection est le cylindre de la restriction $F_1 \xrightarrow{f} F_2$. Les réductions des deux fibrés donnés définissent une application des deux faces extrémales de ce cylindre à valeurs dans la fibre type F_0 ; elle se prolonge naturellement en une équivalence d'homotopie de F dans F_0 , pour fournir une réduction de (E, p, X) . Nous allons maintenant montrer que (E, p, X) est une fibration faible répondant à la question. Pour cela nous aurons besoin d'un lemme sur le cylindre d'une équivalence d'homotopie.

Rappelons que si $A \subset B$ et s'il existe une homotopie h_t , $0 \leq t \leq 1$, de $\text{Id}|_B = h_0$ jusqu'à une rétraction $r = h_1$ telle que $h_t|_A = \text{Id}|_A$ pour tout t et $r(B) = A$, alors A est appelé un rétracte fort de déformation de B .

Soit $f : X \rightarrow Y$ une application continue. Le but Y considéré comme sous-espace du cylindre $Z = M(f)$ de f est visiblement un rétracte fort de déformation de Y .

2.1 Lemme : Si $f : X \rightarrow Y$ est une équivalence d'homotopie, $X = X \times \{0\} \subset Z$ est un rétracte fort de déformation de Z .

2.2 Complément : Soient donnés un inverse d'homotopie $g : Y \rightarrow X$ de f et deux homotopies F de $\text{Id}|_X$ à gf , G de $\text{Id}|_Y$ à fg . Les données f, g, F et G déterminent d'une façon standard une homotopie explicite $H : Z \times I \rightarrow Z$ telle que $H|(Z \times \{0\} \cup X \times I)$ soit la projection, et $H(Z \times \{1\}) = X$.

Démonstration de 3.2.1 et 3.2.2.

L'homotopie $F : \text{Id}|_X \simeq gf$ prolonge $g : Y \rightarrow X$ en une rétraction $r : Z \rightarrow X$.

On définit une homotopie $G' : Y \times I \rightarrow Z$ de l'inclusion $j : Y \hookrightarrow Z$ à la composition $Y \xrightarrow{g} X \xrightarrow{i} Z$ par les formules

$$G'(y, t) = \begin{cases} jG(y, 2t), & 0 \leq t \leq 1/2, y \in Y \\ q(g(y), 2 - 2t), & 1/2 \leq t \leq 1, y \in Y. \end{cases}$$

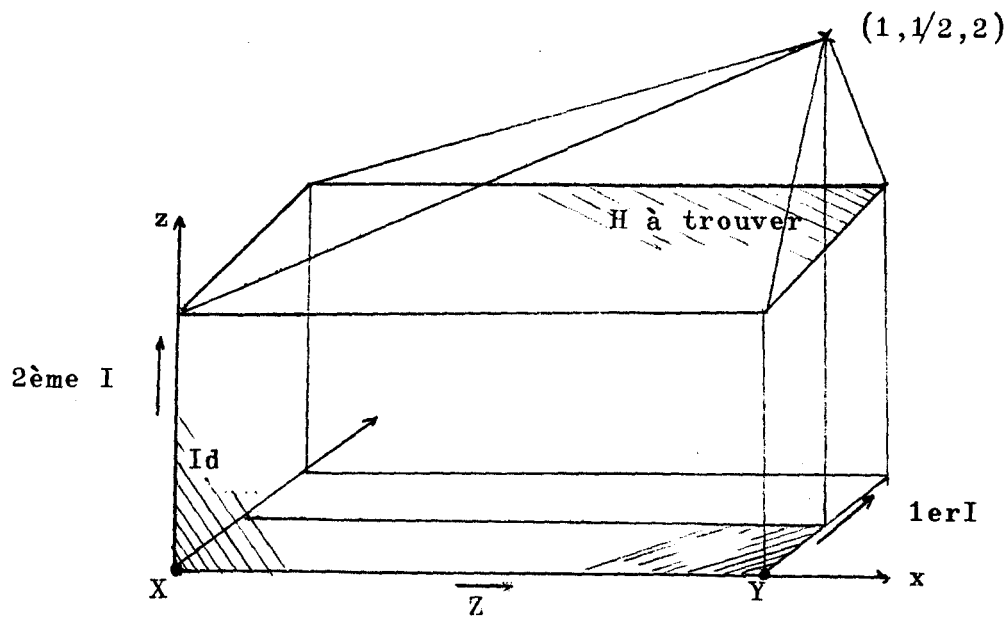
où $q : X \times I \rightarrow Z$ est l'application canonique.

La rétraction du carré $I^2 \subset \mathbb{R}^2$, $I = [0,1]$, sur trois de ses faces par projection centrale à partir du point $(-1/2, 1/2)$ détermine une rétraction standard $\rho : Z \times I \rightarrow Z \times \{0\} \cup Y \times I \cup Z \times \{1\}$. A l'aide de ρ on prolonge $G' : Y \times I \rightarrow Z$ en une homotopie $H' : Z \times I \rightarrow Z$ de $\text{Id}|_Z = H'|_{Z \times \{0\}}$ à $\text{ir} = H'|_{Z \times \{1\}}$.

Malheureusement $H'(x,t) = x$ pour $x \in X \subset Z$ n'est pas vérifié pour tout $t \in I$. Mais nous construisons une déformation standard

$$K : (Z \times I) \times I \rightarrow Z$$

de H' à l'homotopie H demandée.



$$\begin{aligned} \text{On fixe } K(z,t,0) &= H'(z,t) \quad \text{pour } z \in Z \\ K(z,0,t') &= z \\ K(x,t,t') &= H'(x,(1-t')t) \quad \text{pour } x \in X \\ K(z,1,t') &= H'(\text{ir}(z), 1 - t') \end{aligned}$$

K est donc défini sur $A = Z \times \{0\} \times I \cup X \times I \times I \cup Z \times \{1\} \times I \cup Z \times I \times \{0\}$. On définit à partir de la rétraction du cube $I^3 \subset \mathbb{R}^3$ sur 4 de ses faces, obtenue par projection à partir du point de coordonnées $(1, 1/2, 2)$, une rétraction explicite de $Z \times I \times I$ sur A , ce qui permet de définir K sur $Z \times I \times I$ tout entier.

On laisse au lecteur le soin de vérifier que $H(z,t) = K(z,t,1)$ vérifie les conditions de 3.2.2.

cqfd

Application : Soient $\xi = (X,p,B)$ et $\eta = (Y,q,B)$ deux espaces avec projection au-dessus de la même base B . Soit $f : X \rightarrow Y$ une équivalence d'homotopie fibrée. Notons $Z = M(f)$ le cylindre de f et, pour $b \in B$, posons $X_b = p^{-1}(b)$, $Y_b = q^{-1}(b)$, $Z_b = M(f|_{X_b})$; Z_b est canoniquement inclus dans Z . L'homotopie naturelle de $\text{Id}|_Z$ jusqu'à la rétraction de Z sur Y induisant dans chaque fibre l'homotopie naturelle de $\text{Id}|_{Z_b}$

jusqu'à la rétraction de Z_b sur Y_b , Y est un rétracte fort de déformation de Z au-dessus de B . L'injection $i : X \rightarrow Z$ est une équivalence d'homotopie fibrée. Il suit du lemme précédent, que pour tout $b \in B$, X_b est un rétracte fort de déformation de Z_b . Mais à condition d'utiliser les constructions canoniques décrites plus haut, les homotopies dans les fibres varient "continûment" en fonction du point $b \in B$, ce qui montre qu'il existe une rétraction fibrée $r : Z \rightarrow X$ et une homotopie fibrée H de $\text{Id}|_Z$ jusqu'à ir ; X est donc un rétracte fort de déformation de Z au-dessus de B , ainsi que l'était déjà Y .

Revenons maintenant au problème du recollement de deux fibrations faibles. En utilisant des notations déjà introduites, nous avons, comme conséquence de ce qui vient d'être dit, le résultat suivant :

Corollaire : $p_1^{-1}(0_1)$ et $p_2^{-1}(0_2)$ sont HF-équivalents respectivement à E_1 et E_2 , et possèdent par conséquent la propriété RH faible.

Démonstration : D'après ce qui précède $p_1^{-1}(A)$ et $p_2^{-1}(A)$ sont des rétractes forts de déformation de $Z = p^{-1}(A)$ au-dessus de A . La première partie du corollaire en découle immédiatement. La seconde partie ^{vient} du lemme d'invariance de la propriété RH faible par une HF-équivalence (Ch.V; 1.8).

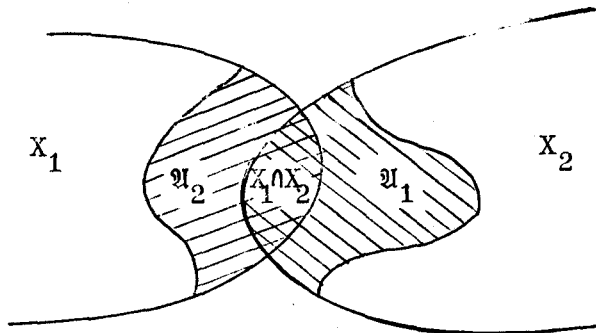
Conclusion : 0_1 et 0_2 étant des ouverts, le théorème de Dold (Ch.V; 3.2) nous dit que (E,p,X) est une fibration faible. Ceci achève l'étude préliminaire.

Plaçons-nous maintenant dans la situation qui nous intéresse, c'est-à-dire lorsque X est réunion de deux sous-complexes X_1 et X_2 d'intersection A . Pour remplacer X_1 et X_2 par des ouverts U_1 et U_2 nous allons nous servir du lemme suivant dont la démonstration est laissée en exercice :

Lemme : Soit A un sous-espace fermé de X tel que l'inclusion de A dans X soit une cofibration ; il existe alors un voisinage U de A dans X , déformable sur A dans X relativement à A , c'est-à-dire une homotopie $H : U \times I \rightarrow X$ vérifiant pour tout $x \in U$: $H(x,0) = x$, $H(x,1) \in A$, et $H(a,t) = a$ pour tout $a \in A$ et tout $t \in I$. On appellera U une "pseudo-auréole".

Une indication de démonstration se trouve dans (Spanier [8 ; exercice E p. 57])^(*)

Application au problème du recollement : Soit U_2 une "pseudo-auréole" de $X_1 \cap X_2$ dans X_1 , et U_1 une "pseudo-auréole" de $X_1 \cap X_2$ dans X_2



Par définition, on a une rétraction $s_1 : U_1 \rightarrow X_1 \cap X_2$ (resp. $s_2 : U_2 \rightarrow X_1 \cap X_2$) qui, suivie de l'inclusion $X_1 \cap X_2 \rightarrow X_2$, est homotope à l'inclusion $U_1 \hookrightarrow X_2$ (resp. $U_2 \hookrightarrow X_1$), relativement à $X_1 \cap X_2$. Pour $i = 1, 2$, soit $r_i : X_i \cup U_i \rightarrow X_i$ l'application définie par l'identité sur X_i et par s_i sur U_i . Notons $\xi_i = (E_i' \rightarrow X_i \cup U_i)$ le fibré $r_i^*(E_i \xrightarrow{p_i} X_i)$. La restriction de ξ_i à X_i n'est autre que $(E_i \xrightarrow{p_i} X_i)$. Pour vérifier l'axiome du recollement, il suffit

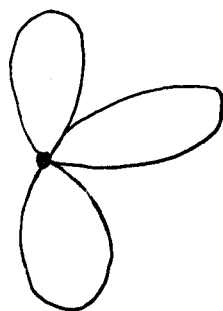
^(*) On ne peut pas espérer une homotopie $U \times I \rightarrow U$ relativement à A , car il n'existe pas en général de voisinage régulier d'un sous-CW-complexe dans un CW-complexe.

donc de construire un recollement de ξ_1 et de ξ_2 ; d'après l'étude du cas préliminaire, un tel recollement est possible si les restrictions $\xi_1|_U$ et $\xi_2|_U$ sont HF-équivalentes, où $U = (X_1 \cup U_1) \cap (X_2 \cup U_2) = U_1 \cup U_2$. A cet effet on remarque que U est une pseudo-auréole de U_i dans $X_i \cup U_i$; si on note $r : U \rightarrow X_1 \cap X_2$ la rétraction obtenue par recollement de s_1 et s_2 , on en déduit que $\xi_1|_U$ et $r^*(\xi_1|_{X_1 \cap X_2})$ sont HF-équivalents. Mais on a, par hypothèse, $\xi_1|_{X_1 \cap X_2} \widetilde{\text{HF}} \xi_2|_{X_1 \cap X_2}$; par conséquent $\xi_1|_U \widetilde{\text{HF}} \xi_2|_U$, ce qui permet d'effectuer le recollement. Ceci achève la vérification de l'axiome du recollement.

B - VERIFICATION DE L'AXIOME DU BOUQUET

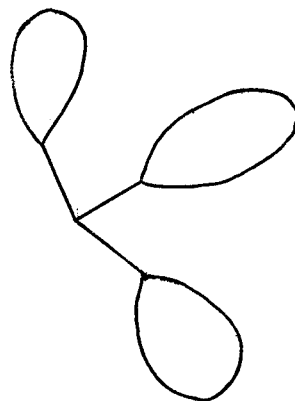
Soit $X = \bigvee_{j \in J} X_j$ un bouquet dans la catégorie \mathcal{C} des CW-complexes pointés et des applications continues respectant les points-base. Il s'agit de montrer que l'application canonique $\Lambda : H(X) \rightarrow \prod_{j \in J} H(X_j)$ est bijective. Puisque H est un h-foncteur, pour démontrer cette propriété, nous pouvons remplacer X_j par un Y_j convenable, ayant le même type d'homotopie que X_j dans la catégorie \mathcal{C} . Nous prendrons comme d'habitude pour Y_j le CW-complexe obtenu en attachant $[0,1]$ à X_j par l'identification de $\{1\}$ avec le point-base x_j de X_j , et nous le pointerons par $\{0\}$. Soit $\rho_j : Y_j \rightarrow X_j$ la projection naturelle : en appliquant le lemme sur le recollement des homotopies (Cf. AIII) à l'application $\rho_j : (Y_j, \{0\}) \rightarrow (X_j, \{x_j\})$, on voit que ρ_j est une équivalence d'homotopie de paires, c'est-à-dire une équivalence d'homotopie pointée. (*) Par conséquent, pour tout $j \in J$, $X_j \underset{(\mathcal{C})}{\simeq} Y_j$ et $X \underset{(\mathcal{C})}{\simeq} Y = \bigvee Y_j$.

$X =$



$\underset{(\mathcal{C})}{\simeq}$

$Y =$



(*) La démonstration directe de ce fait est un exercice facile.

1) Λ est surjective : Supposons donnée, pour tout $j \in J$, une fibration faible réduite $\xi_j = (F_j \rightarrow E_j \xrightarrow{p_j} X_j, f_j : F_j \rightarrow F_0)$. Ecrivons Y comme réunion de deux sous-complexes (non pointés), $B_1 = V\{[0,1]_j ; j \in J\}$ et $B_2 = \coprod \{X_j ; j \in J\}$. L'intersection $B_1 \cap B_2$ est la réunion disjointe des points $\{x_j\}$, $j \in J$. Au-dessus de B_1 , considérons le fibré trivial $\varepsilon_{F_0} = B_1 \times F_0$; au-dessus de B_2 , nous avons la collection des fibrés ξ_j qui définit un fibré faible η . Grâce aux équivalences d'homotopie de réduction f_j , nous avons une HF-équivalence de $\eta|_{B_1 \cap B_2}$ dans $\varepsilon_{F_0}|_{B_1 \cap B_2}$. D'après la propriété de recollement il existe sur Y un fibré faible ξ tel que $\xi|_{B_1} = \varepsilon_{F_0}$ et $\xi|_{B_2} = \eta$; sa fibre base étant F_0 , il est canoniquement réduit. Enfin il est facile de voir que $\xi|_{Y_j} \cong \rho_j^* \xi_j$, en tant que fibré réduit. cqfd

2) Λ est injective : On considère deux fibrés faibles réduits sur X , $\xi = (F \rightarrow E \xrightarrow{p} X, f : F \rightarrow F_0)$ et $\xi' = (F' \rightarrow E' \xrightarrow{p'} X, f' : F' \rightarrow F_0)$. On suppose avoir pour tout $j \in J$ des HF-équivalences de fibrés réduits $\varphi_j : \xi|_{X_j} \rightarrow \xi'|_{X_j}$; en particulier $f' \varphi_j|_F$ est homotope à f et par conséquent pour $j, j' \in J$ $\varphi_j|_F \simeq \varphi_{j'}|_F$. Si, au lieu d'une homotopie, nous avons l'égalité $\varphi_j|_F = \varphi_{j'}|_F$ pour tous les couples (j, j') , on pourrait recoller les φ_j et obtenir un morphisme de fibrés réduits $\Phi : \xi \rightarrow \xi'$, qui, d'après (AIII) serait une équivalence d'homotopie $\Phi : (E, F) \rightarrow (E', F')$. Comme Φ respecterait les projections p, p' , d'après la proposition (Ch.V; 2.3), Φ serait une HF-équivalence. Pour se ramener à cette situation, on utilise l'astuce déjà employée pour démontrer la surjectivité de Λ ; on considère les fibrés $\rho^* \xi$ et $\rho^* \xi'$ au-dessus de Y , où $\rho = V\{\rho_j ; j \in J\} : Y \rightarrow X$. Alors on construit, pour $j \in J$, $\phi_j : \rho^* \xi|_{Y_j} \rightarrow \rho^* \xi'|_{Y_j}$ de la façon suivante : au-dessus de X_j , $\phi_j = \varphi_j$; au-dessus de $[0,1]$, $\phi_j : F \times [0,1] \rightarrow F' \times [0,1]$ a pour première composante une homotopie de $\varphi_{j_0}|_F$ jusqu'à $\varphi_j|_F$, où j_0 est un indice choisi dans J . On a donc, pour $j, j' \in J$, $\phi_j|_{F \times \{0\}} = \phi_{j'}|_{F \times \{0\}}$. cqfd

Conclusion : Le foncteur H que nous avons défini plus haut est un h -foncteur représentable. L'espace classifiant, dont l'existence nous est assurée par application du théorème de Brown (Ch.II; 2.4), peut aussi être construit directement par une méthode analogue à celle que Milnor a utilisé pour la classification des G -fibrés principaux (Cf. Stasheff[9]) ; malheureusement Stasheff ne démontre le résultat que si F_0 est un CW-complexe fini.

3.3 Il y a assez de fibrés de Hurewicz

Si dans la définition du foncteur $H(X) = \{\text{classes d'équivalence de } F_0\text{-fibrés faibles réduits sur } X\}$ étudié ci-dessus, on remplace les fibrés faibles par la sous-classe des fibrés de Hurewicz, alors on obtient un nouveau foncteur $H'(X)$.

Affirmation : la transformation d'oubli $H' \rightarrow H$ est un isomorphisme de foncteurs.

Puisque la relation d'équivalence qui définit H et H' est la même, l'oubli $\omega : H'(X) \rightarrow H(X)$ est injectif. Pour montrer que ω est surjectif il suffit de rappeler :

Proposition : (Serre) voir Spanier, [8, Theorem 9, p.99].

Soit $p : E \rightarrow B$ une application continue d'espaces topologiques.

Dans le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{s} & E' = \{(e, \lambda) \in E \times X^I \mid p(e) = \lambda(0)\} \\ p \downarrow & \swarrow p' & \\ B & & \end{array}$$

où $p'(e, \lambda) = \lambda(1)$ et où, pour $e \in E$, $s(e) = (e, \text{chemin constant en } e)$
 p' est une fibration de Hurewicz et s est une équivalence d'homotopie.

Si p est une fibration faible, 2.3 montre que s est de plus une équivalence d'homotopie fibrée sur B .

3.4 Cas où la fibre-type est la sphère S^{n-1} ; stabilisation :

Lorsque $F_0 = S^{n-1}$, le foncteur H est noté $k_{G(n)}$ et son classifiant est noté $B_{G(n)}$. Pour les fibrés faibles, l'opération de stabilisation se fait par suspension. Si $F \rightarrow E \xrightarrow{p} B$ est une fibration faible réduite, c'est-à-dire munie d'une équivalence d'homotopie $f : F \rightarrow S^{n-1}$, on lui associe par suspension une fibration faible réduite $SF \rightarrow \mathcal{S}E \xrightarrow{\mathcal{S}p} B$, $Sf : SF \rightarrow SS^{n-1} = S^n$. On pose

$$\mathcal{S}E = (E \times [0,1] \cup B \times \{0,1\}) / \left(\begin{array}{l} e \times \{0\} = p(e) \times \{0\} \\ e \times \{1\} = p(e) \times \{1\} \end{array} \right)$$

$$\begin{aligned} \text{et } \mathcal{S}p(e,t) &= p(e) & \text{si } (e,t) \in E \times [0,1] \\ \mathcal{S}p(b,i) &= b & \text{si } (b,i) \in B \times \{0,1\} \end{aligned}$$

Si b_0 est le point-base de B , il est clair que $(\mathcal{S}p)^{-1}(b_0) = SF$, et que Sf est une équivalence d'homotopie.

Remarquons que si $\varphi : E \rightarrow E'$ est un morphisme d'espaces avec projection sur B , alors il existe un morphisme naturel $\mathcal{S}\varphi : \mathcal{S}E \rightarrow \mathcal{S}E'$ d'espaces avec projection sur B .

Lemme : Si $F \rightarrow E \xrightarrow{p} B$ est une fibration faible sur une base B CW-complexe, $SF \rightarrow \mathcal{S}E \xrightarrow{\mathcal{S}p} B$ est une fibration faible.

Démonstration : D'après le lemme (p. V.15), tout point b de B possède une pseudo-auréole U , c'est-à-dire un voisinage U de b dans B , déformable sur b dans B relativement à b : l'inclusion de U dans B et l'application de U dans B dont l'image est b sont donc homotopes relativement à b ; il existe donc une équivalence d'homotopie fibrée $\varphi_b : \bar{p}^{-1}(U) \rightarrow U \times \bar{p}^{-1}(b)$, et par suite il existe une équivalence d'homotopie fibrée $\mathcal{S}\varphi_b : (\mathcal{S}p)^{-1}(U) \rightarrow U \times S(\bar{p}^{-1}(b))$, ce qui montre que $(\mathcal{S}p)^{-1}(U)$ possède la propriété RH faible. Ceci étant valable pour tout $b \in B$, on peut appliquer le théorème de Dold (3.2), et donc $(\mathcal{S}E, \mathcal{S}p, B)$ a globalement la propriété RH-faible. cgfd

Remarque : Cette démonstration élégante n'est pas la meilleure. En utilisant l'équivalence entre la propriété RH forte et la propriété de relèvement continu des chemins (voir Hu[2, proposition 12.1, page 82])

on peut démontrer le lemme analogue pour la propriété RH forte sans hypothèse sur B . Le lecteur pourra ensuite reformuler la propriété RH faible comme une propriété de relèvement continu des chemins qui restent constants dans l'intervalle $[0, 1/2]$ du paramètre, et démontrer le lemme lui-même sans hypothèse sur B .

Conséquence : soit u_n le fibré universel sur $B_{G(n)}$. En classifiant le fibré su_n , on obtient une application $f_n : B_{G(n)} \rightarrow B_{G(n+1)}$. On appelle B_G le télescope du système $(B_{G(n)}, f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (Cf. Ch. IV, Définition 2.2).

3.5 Relations avec B_0, B_{TOP}, B_{PL} :

Soit η_n l'objet universel sur $B_{TOP(n)}$, c'est-à-dire le microfibré topologique universel de dimension n . En choisissant un voisinage convenable de la section nulle, on représente η_n par un \mathbb{R}^n -fibré topologique avec section nulle sur $B_{TOP(n)}$, unique à isomorphisme topologique près (Kister [5]). On lui associe le $(\mathbb{R}^n - 0)$ -fibré obtenu en enlevant la section nulle : c'est un fibré de Hurewicz sur $B_{TOP(n)}$, muni d'une équivalence d'homotopie canonique de sa fibre-base avec S^{n-1} . En effet, en tant que $(\mathbb{R}^n - 0)$ fibré réduit, il est muni d'un isomorphisme de sa fibre-base avec $(\mathbb{R}^n - 0)$; il suffit de composer cet isomorphisme avec la rétraction canonique de $\mathbb{R}^n - 0$ sur S^{n-1} pour obtenir l'équivalence d'homotopie cherchée. En classifiant ce fibré de Hurewicz réduit, on obtient une application $\varphi_n : B_{TOP(n)} \rightarrow B_{G(n)}$ rendant évidemment commutatif à homotopie près le diagramme ci-dessous :

$$\begin{array}{ccc} B_{TOP(n)} & \xrightarrow{\varphi_n} & B_{G(n)} \\ \text{Stabilisation} \downarrow & & \downarrow \text{suspension} \\ B_{TOP(n+1)} & \xrightarrow{\varphi_{n+1}} & B_{G(n+1)} \end{array}$$

Il existe donc une application $\varphi : B_{TOP} \rightarrow B_G$ rendant pour tout n le diagramme ci-dessous commutatif à homotopie près :

$$\begin{array}{ccc} B_{TOP(n)} & \xrightarrow{\varphi_n} & B_{G(n)} \\ \downarrow & & \downarrow \\ B_{TOP} & \xrightarrow{\varphi} & B_G \end{array}$$

Rappelons qu'a priori, il peut très bien exister des applications fantômes de B_{TOP} dans B_G . Par conséquent, nous ne savons pas a priori si φ est unique à homotopie près.

3.5.1 Somme de Whitney

Nous voulons donner une définition telle que le foncteur d'oubli $k_{TOP(*)} \rightarrow k_{G(*)}$ respecte la somme de Whitney. En particulier, la stabilisation $k_{TOP(n)} \rightarrow k_{TOP(n+1)}$ étant l'addition du fibré trivial de fibre R^1 , il faut que la stabilisation $k_{G(n)} \rightarrow k_{G(n+1)}$ soit la somme de Whitney avec le fibré trivial de fibre S^0 . La définition générale est donc la suivante : soient, pour $i = 1, 2$, la fibration faible $\xi_i : F_i \hookrightarrow E_i \xrightarrow{p_i} X$ avec la réduction $f_i : F_i \rightarrow S^{n_i-1}$; on construit l'espace avec projection $\xi_1 \oplus \xi_2 : F \hookrightarrow E \xrightarrow{p} X$ avec la réduction $f : F \rightarrow S^{n_1+n_2-1}$ comme suit :

$$E = \{(x_1, x_2) \in E_1 * E_2 \mid p_1(x_1) = p_2(x_2)\} \text{ où } * \text{ désigne l'opération de "joint" ; } p(x_1, x_2) = p_1(x_1) = p_2(x_2) ; F = F_1 * F_2 \text{ et } f = f_1 * f_2 : F_1 * F_2 \rightarrow S^{n_1-1} * S^{n_2-1}.$$

Exercice : a) Montrer que $\xi_1 \oplus \xi_2$ ainsi défini est un fibré réduit en sphères $S^{n_1+n_2-1}$ jouissant de la propriété RH-faible.

b) La somme de Whitney induit des transformations de foncteurs $\oplus : k_{G(m)} \times k_{G(n)} \rightarrow k_{G(m+n)}$ et $\oplus : k_G \times k_G \rightarrow k_G$, où $k_G = \varinjlim k_{G(n)}$.

c) Construire une loi de H-espace $m : B_G \times B_G \rightarrow B_G$ qui représente $\oplus : k_G \times k_G \rightarrow k_G$ sur les complexes finis.

La suite $B_0 \xrightarrow{i} B_{PL} \xrightarrow{j} B_{TOP} \xrightarrow{\varphi} B_G$, où i, j ont été définis au chapitre IV, représente la suite de foncteurs dits d'oubli

$$k_0 \xrightarrow{i} k_{PL} \xrightarrow{j} k_{TOP} \xrightarrow{\varphi} k_G$$

sur les complexes finis (Cf. Ch. IV proposition 2.5).

On sait que $\pi_i(B_G) = \varinjlim_k \pi_{k+i-1}(S^k) \cong \pi_{i-1}$ (voir Husemoller [5 ; p.210-213]). Puisque chaque π_i est fini (Serre [7]), $[X, B_G]$ est fini

pour tout complexe fini (Cf. Ch. IV, 1.4). On en déduit :

3.5.2 Affirmation : nous avons bien défini à homotopie près les applications $B_0 \rightarrow B_G$ et $B_{PL} \rightarrow B_G$.

Démonstration : B_A , $A = 0$ ou PL est un complexe dénombrable et s'exprime comme réunion de sous-complexes finis $X_1 \subset X_2 \subset \dots \subset B_A$. Pour chaque X fini dans B_A , l'application $\theta : B_A \rightarrow B_G$ est bien définie sur X à homotopie près puisque θ représente l'oubli $k_A \rightarrow k_G$ sur les complexes finis. Il suffit donc de montrer que la surjection naturelle

$\theta_* : [B_A, B_G] \rightarrow \varprojlim [X_m, B_G]$ est une bijection. Or la loi de H-espace $B_G \times B_G \rightarrow B_G$ construite dans l'exercice précédent induit une loi de monoïde, possédant des inverses (Ch. IV, lemme 3.5.2), sur $[Y, B_G]$ pour tout Cw-complexe Y . De plus θ_* est un homomorphisme des lois de monoïde. Il suffit donc de vérifier que $\theta_*^{-1}(0) = 0$.

Mais $\theta_*^{-1}(0) = \varprojlim [SX_n, B_G]$, ensemble qui est réduit à un élément parce que toute suite de groupes finis et de Mittag-Leffler (Cf. Ch. III).

c.q.f.d.

3.5.3 Exercice : Montrer par la même méthode que la loi de H-espace sur B_G , construite dans l'exercice 3.5.1 est définie de façon unique par la condition qu'elle représente $\oplus : k_G \times k_G \rightarrow k_G$ sur les complexes finis et donc qu'elle est à homotopie près, bien définie, associative et commutative.

BIBLIOGRAPHIE

=====

- [1] A. DOLD Partitions of unity in the theory of fibrations,
Ann. of Math. 78(1963), p.223-255.
- [2] S.T. HU Homotopy theory, Academic Press, 1959.
- [3] W. HUEBSCH Covering homotopy, Duke Math. J. 23(1956), p.281-291.
- [4] W. HUREWICZ On the concept of fibre space, Proc. Nat. Acad. Sci
USA 41 (1955), p.956-961.
- [5] D. HUSEMOLLER Fibre bundles, Mc. Graw-Hill, 1966.
- [6] J.M. KISTER Microbundles are fibre bundles, Ann. of Math. 80 (1964),
p.190-199.
- [7] J.P. SERRE Groupes d'homotopie et classes de groupes abéliens,
Ann. of Math. 58 (1953), p.258-294.
- [8] E. SPANIER Algebraic topology, Mc Graw-Hill, 1966.
- [9] J. STASHEFF A classification theorem for fibre spaces, Topology 2,
(1963), p.239-246.

C
u
ngant

TABLE DES MATIERES

=====

§1	Définitions	p. V.2
§2	Premières propriétés	p. V.5
§3	Classification des fibrations de Hurewicz	p. V.9
	Bibliographie	p. V.23