Collisions totales, mouvements complètement paraboliques et réduction des homothéties dans le problème des n corps

Alain Chenciner

UFR de Mathématique, Université Paris 7,
2, place Jussieu, 75251 Paris cedex 05
et
Astronomie et Systèmes Dynamiques,
URA 707 du CNRS, Bureau des Longitudes,
77, avenue Denfert-Rochereau, 75014 Paris

A Jurgen Moser, pour son soixante-dixième anniversaire

Nous étudions les propriétés du problème des n corps qui proviennent de l'homogénéité du potentiel et retrouvons dans un cadre conceptuel commun divers résultats de Sundman, McGehee et Saari. Les résultats ne sont pas nouveaux mais il nous a semblé que cette présentation les éclaire agréablement. Nous considérons des potentiels de type newtonien, homogènes de degré 2κ en la configuration. Pour n'être pas obligés de distinguer divers cas dans les inégalités, nous supposerons, ce qui inclut le cas newtonien, que $-1 < \kappa < 0$.

A) Equations et notations

Soit E un espace euclidien de dimension p finie, $m_1, \ldots, m_n$ des nombres réels positifs, $\mathcal{X}$ le sous-espace de E^n défini par

$$\mathcal{X} = \big\{(\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_n) \in E^n,\ \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i = 0\big\}.$$

Arguant de l'invariance par translation pour fixer le centre de masse à l'origine d'un repère galiléen, appelons *espace des configurations* l'ouvert $\hat{\mathcal{X}}$ de $\mathcal{X}$ défini par la condition que quels que soient les indices i et j distincts, on ait $\vec{r}_i \neq \vec{r}_j$. Une *configuration* est un élément x de cet ouvert, et le *potentiel* une fonction sur $\hat{\mathcal{X}}$ à valeurs réelles de la forme

$$x \mapsto U(x) = \sum_{i<j} m_i m_j |\vec{r}_i - \vec{r}_j|^{2\kappa}.$$

L'*espace des états* est le fibré tangent à l'espace des configurations. Nous l'identifierons à l'ouvert $\hat{\mathcal{X}} \times \mathcal{X}$ du produit $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$ et noterons (x, y) ses éléments. L'espace $\mathcal{X}$ est muni du *produit scalaire des masses* : si $x = (\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_n)$, $y = (\vec{s}_1, \ldots, \vec{s}_n)$, et si $\langle\, ,\rangle_E$ désigne le produit scalaire dans E,

$$x \cdot y = \sum_{i=1}^{n} m_i \langle \vec{r}_i, \vec{s}_i \rangle_E$$

Le lecteur de l'article [2] reconnaîtra le produit scalaire $\mu\otimes\epsilon$, défini sur l'espace $\mathcal{D}\otimes E$ où s'effectue de manière plus naturelle la réduction des translations. Nous noterons $\nabla U(x)$ le gradient du potentiel pour la métrique sur $\hat{\mathcal{X}}$ définie par ce produit scalaire. Les équations du mouvement, qui depuis Lagrange s'écrivent $m_i\ddot{\vec{r}}_i = \frac{\partial U}{\partial \vec{r}_i}$, $i = 1, \ldots, n$, deviennent

$$\dot{x} = y, \qquad \dot{y} = \nabla U(x)$$

(suivant l'habitude en mécanique, le point désigne la dérivée par rapport au temps). Nous noterons X_H le champ de vecteurs correspondant sur l'espace des états. Sur cet espace sont définies les fonctions

$$I = x \cdot x,\ J = x \cdot y,\ K = y \cdot y,\ H = \frac{1}{2}K - U.$$

La première $I = \sum_i m_i|\vec{r}_i|^2 = (1/\sum_i m_i)\sum_{i<j} m_i m_j |\vec{r}_i - \vec{r}_j|^2$ est le *moment d'inertie* par rapport au centre de gravité, dont la racine $r = I^{\frac{1}{2}} = ||x||$ mesure la *taille* d'une configuration; la deuxième $J = \frac{1}{2}\dot{I}$ est, au facteur 2 près, la dérivée de I suivant X_H; la troisième $K = \sum_i m_i|\dot{\vec{r}}_i|^2 = (1/\sum_i m_i)\sum_{i<j} m_i m_j |\dot{\vec{r}}_i - \dot{\vec{r}}_j|^2$ est le double de l'*énergie cinétique* dans un repère fixant le centre de gravité; enfin H est l'*énergie totale* (ou *hamiltonien*) du système représenté par (x, y). Le champ X_H est le gradient symplectique de H pour la forme symplectique définie, avec des notations faciles à expliciter, par $\omega = dy \wedge dx$. Calculons la dérivée $\dot{J} = \frac{1}{2}\ddot{I}$ de J le long d'une courbe intégrale de X_H en tenant compte de l'homogénéité de degré 2κ de $U(x)$:

$$\frac{1}{2}\ddot{I} = \dot{x}\cdot y + x\cdot\dot{y} = y\cdot y + x\cdot\nabla U(x) = K + 2\kappa U = 2H + 2(\kappa+1)U = -2\kappa H + (\kappa+1)K.$$

C'est la *relation de Lagrange-Jacobi* (ou *relation du viriel*), base de notre compréhension du comportement global des solutions du Problème des n corps. La fonction U étant toujours positive, la fonction J est croissante le long de chaque solution d'énergie totale H positive ou nulle. L'existence d'une telle *fonction de Liapunov* interdit toute récurrence non triviale, en particulier tout mouvement périodique. En énergie négative, il est bien connu que les choses sont plus compliquées; en particulier, la fonction J doit être remplacée par la *fonction de Sundman* décrite dans l'appendice 1.

Rappelons enfin que l'invariance du hamiltonien par l'action des isométries de E implique la conservation du *moment cinétique* $\mathcal{C}$, bivecteur de E défini par

$$\mathcal{C}\big((\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_n), (\dot{\vec{r}}_1, \ldots, \dot{\vec{r}}_n)\big) = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i \wedge \dot{\vec{r}}_i.$$

Lorsque E est de dimension trois, la structure euclidienne et le choix d'une orientation permettent d'identifier $\mathcal{C}$ à l'opérateur "produit vectoriel" par un vecteur $\vec{\mathcal{C}}$ et le support de $\mathcal{C}$ au plan orthogonal à $\vec{\mathcal{C}}$. On notera c la norme de $\vec{\mathcal{C}}$. Le produit vectoriel par le vecteur unitaire $\frac{1}{c}\vec{\mathcal{C}}$ définit sur ce plan une structure complexe (opérateur de carré égal à moins l'Identité) compatible avec la structure euclidienne, c'est-à-dire une structure hermitienne. De même, la formule $\mathcal{I}_{\mathcal{C}}\big((\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_n)\big) = (\frac{1}{c}\vec{\mathcal{C}}\wedge\vec{r}_1, \ldots, \frac{1}{c}\vec{\mathcal{C}}\wedge\vec{r}_n)$ définit une structure complexe (et une structure hermitienne) sur le sous-espace de $\mathcal{X}$

formé des n-uples $(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n)$ dont chaque composante appartient au plan orthogonal à $\vec{\mathcal{C}}$, donc sur $\mathcal{X}$ si le mouvement a lieu dans un plan. On trouvera dans [2] la définition, pour E de dimension quelconque, de la structure hermitienne sur le support de $\mathcal{C}$ et donc également sur le sous-espace de $\mathcal{X}$ formé des n-uples $(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n)$ dont chaque composante appartient au support de $\mathcal{C}$. On doit alors définir c comme la norme de l'opérateur complexe associé à $\mathcal{C}$. L'inégalité de Schwarz s'écrit $IK - J^2 \geq 0$ et il y a égalité si et seulement si x et y sont proportionnels, c'est-à-dire si l'état (x, y) définit un *mouvement homothétique*. L'*inégalité de Sundman*

$$IK - J^2 \geq c^2,$$

raffinement de cette inégalité en une inégalité de Schwarz complexe pour la structure que nous venons d'introduire, joue un rôle fondamental dans la suite. Elle s'obtient en minorant la norme $||y||$ de de la vitesse par celle de sa projection orthogonale sur la droite complexe engendrée par la configuration x. Les cas d'égalité correspondent à des *mouvements homographiques*, dans lesquels y est un multiple complexe de x (voir [2]). On peut préciser ceci à l'aide de la *décomposition de Saari des vitesses :* en chaque point x de l'espace des configurations, l'espace $T_x\hat{\mathcal{X}}$ des vitesses en x est canoniquement identifié à $\mathcal{X}$ et est donc muni du produit scalaire des masses. Il se décompose naturellement en la somme orthogonale de trois sous-espaces : chaque vitesse y est la somme d'une composante y_h, proportionnelle à x, qui induit une variation homothétique de la configuration, d'une composante y_r de rotation pure tangente à l'orbite de x sous l'action du groupe des isométries de E (i.e. telle qu'il existe un opérateur antisymétrique Ω de l'espace euclidien E vérifiant pour chaque i, $\dot{\vec{r}}_i = \Omega\vec{r}_i$), et d'une composante y_d qui induit une déformation de la configuration normalisée $r^{-1}x = I^{-\frac{1}{2}}x$. Seule y_r contribue au moment cinétique, par l'intermédiaire de l'opérateur d'inertie de la configuration considérée comme un corps solide. L'orthogonalité des trois composantes implique l'identité $K = ||y||^2 = ||y_h||^2 + ||y_r||^2 + ||y_d||^2$. Calculant $x \cdot y = x \cdot y_h$, on voit que $y_h = I^{-1}Jx$, donc $||y_h||^2 = I^{-1}J^2 = (\dot{r})^2$. Enfin, on vérifie que y_d est orthogonale à la droite complexe engendrée par x. L'inégalité de Sundman revient donc à minorer le terme de rotation $||y_r||^2$, en fait le carré de la norme de sa projection sur cette droite complexe, par $I^{-1}c^2$, et ignorer le terme de déformation $||y_d||^2$.

B) La symétrie d'homothétie

Lorsque le potentiel est homogène, la symétrie d'homothétie pose un problème de réduction plus délicat que celles de translation et de rotation. Bien comprise par Elie Cartan ([3] par.93), elle est associée à un champ de vecteur Y dont le flot correspond à une homothétie de la configuration et une homothétie des vitesses. Ce champ, qui définit l'équation différentielle

$$\dot{x} = x, \quad \dot{y} = \kappa y,$$

possède les propriétés suivantes (voir [2]) :

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}_Y\omega = (\kappa + 1)\omega, \\
&\mathcal{L}_Y H = \partial_Y H = 2\kappa H, \\
&\mathcal{L}_Y X_H = [Y, X_H] = (\kappa - 1)X_H, \\
&\mathcal{L}_Y \mathcal{C} = \partial_Y \mathcal{C} = (\kappa + 1)\mathcal{C}.
\end{aligned}$$

La troisième assure l'existence d'un feuilletage singulier de dimension deux de $\hat{\mathcal{X}} \times \mathcal{X}$ dont les feuilles sont les variétés intégrales du champ de plans engendré par Y et X_H. Les feuilles singulières de ce feuilletage sont les courbes intégrales de X_H qui, au paramétrage près, sont des courbes intégrales de Y, c'est-à-dire les mouvements homothétiques. La forme particulièrement simple de cette condition de Frobenius – le champ Y n'apparaît pas dans son membre de droite – permet d'engendrer ce feuilletage à l'aide du champ Y et d'un champ ϕX_H commutant avec lui, où le "facteur intégrant" ϕ est n'importe quelle fonction définie sur l'espace des états et vérifiant $\mathcal{L}_Y \phi = (1-\kappa)\phi$. Comme la sous-variété $I = 0$ n'appartient pas au domaine de définition de la fonction homogène U, on pourra partout poser

$$\phi = I^{\frac{1-\kappa}{2}}.$$

On aurait pu choisir $\phi = U^{\frac{1-\kappa}{2\kappa}}$ ou même préférer un facteur intégrant qui ne dépende que des intégrales premières, mais ce dernier choix imposerait des restrictions au domaine. Le champ ϕX_H possède les mêmes courbes intégrales que X_H, paramétrées autrement (une trajectoire se terminant en temps fini pour un des paramétrages peut continuer indéfiniment pour l'autre). Il possède de plus la symétrie définie par Y et définit donc un champ de vecteur sur l'espace quotient. On ne peut cependant parler de réduction que lorsque les deux intégrales premières H et $\mathcal{C}$ sont nulles. En effet, si κ n'est égal ni à -1 ni à 0, le champ Y n'est pas tangent aux niveaux non nuls des intégrales premières H et $\mathcal{C}$. Seules les composantes du moment cinétique normalisé $|H|^{-\frac{\kappa+1}{2\kappa}}\mathcal{C}$ sont invariantes par Y, et le passage au quotient sacrifie une intégrale première. De plus, le champ Y n'est hamiltonien que lorsque $\kappa = -1$. En dehors de ce cas, c'est au contraire un champ de Liouville pour la forme symplectique de l'espace des états et il ne lui correspond pas d'intégrale première. Euler [6] a le premier utilisé cette symétrie d'homothétie pour réduire le problème des trois corps sur la droite en énergie nulle. Les points singuliers de l'image directe de ϕX_H sur le quotient par Y de la sous-variété d'énergie nulle, qui correspondent comme nous venons de le remarquer à des mouvements homothétiques, apparaissent également dans cet article. On posera dans la suite

$$\tilde{X}_H = I^{\frac{1-\kappa}{2}} X_H.$$

Il sera commode d'introduire les fonctions suivantes, invariantes par Y :

$$\tilde{J} = I^{-\frac{1+\kappa}{2}} J, \quad \tilde{K} = I^{-\kappa} K, \quad \tilde{U} = I^{-\kappa} U, \quad \tilde{H} = I^{-\kappa} H, \quad \tilde{\mathcal{C}} = I^{-\frac{1+\kappa}{2}} \mathcal{C}, \quad \tilde{c} = I^{-\frac{1+\kappa}{2}} c.$$

On vérifie que

$$\partial_{\tilde{X}_H} \tilde{H} = -2\kappa \tilde{J} \tilde{H}, \quad \partial_{\tilde{X}_H} \tilde{\mathcal{C}} = -(\kappa+1) \tilde{J} \tilde{\mathcal{C}}.$$

C) Le champ réduit et ses singularités

Les hypersurfaces de niveau de la fonction I sont transverses aux courbes intégrales de Y et chacune d'elles rencontre chacune des courbes intégrales en un et un seul point. L'hypersurface d'équation $I = 1$ est donc un bon représentant du quotient de l'espace des états $\hat{\mathcal{X}} \times \mathcal{X}$ par le flot de Y. Appelons $\tilde{Z}$ l'unique champ de vecteurs sur ce dernier tangent aux sous-variétés $I =$ constante ($\partial_{\tilde{Z}} I = 0$) qui ait même image directe que $\tilde{X}_H$ dans ce quotient (et vérifie donc $[Y, \tilde{Z}] = 0$) :

$$\tilde{Z} = \tilde{X}_H - \tilde{J} Y = I^{\frac{1-\kappa}{2}} X_H - I^{-\frac{1+\kappa}{2}} JY.$$

Nous noterons Z et appellerons *champ réduit* la restriction de $\tilde{Z}$ à la sous-variété d'équation $I = 1$. Passer au quotient en fixant $I = 1$ revient à remplacer par Z le champ de vecteurs $\tilde{X}_H$ et par $J, K, U, H, \mathcal{C}$ les fonctions invariantes $\tilde{J}, \tilde{K}, \tilde{U}, \tilde{H}, \tilde{\mathcal{C}}$. La région $I = 1$, $H < 0$ (resp. $I = 1$, $H > 0$, resp. $I = 1$, $H = 0$) représente n'importe laquelle des sous-variétés d'énergie constante négative (resp. n'importe laquelle des sous-variétés d'énergie constante positive, resp. le quotient par le flot de Y de la sous-variété d'énergie nulle).

Exercice. Remplacer le champ $\tilde{X}_H$ par $\hat{X}_H = U^{\frac{1-\kappa}{2\kappa}} X_H$ conduit à remplacer $I = 1$ par $U = 1$ et $\tilde{Z}$ par $\hat{W} = \hat{X}_H - \hat{L} Y$, où $\hat{L} = \frac{1}{2\kappa} U^{\frac{1-3\kappa}{2\kappa}} L$ et $L = y \cdot \nabla U(x)$. Ce type de normalisation a été utilisé par Wang [11].

Défini dans la sous-variété $I = 1$ des états dont la configuration est normalisée, le champ de vecteurs Z laisse invariantes la sous-variété des états d'énergie nulle et celle (pas forcément régulière) des états de moment cinétique nul, donc également leur intersection que nous appellerons *variété de McGehee*. Cette dernière peut encore être définie comme le quotient par le flot de Y de l'ensemble des états (non normalisés) dont l'énergie et le moment cinétique s'annulent. La terminologie vient de ce que le difféomorphisme $(x, y) \mapsto (s, \zeta)$ défini en suivant les courbes intégrales de Y d'une hypersurface d'équation $H = h$ à l'hypersurface d'équation $I = 1$ conduit naturellement aux *coordonnées de McGehee* : $r = \sqrt{I}$, $s = r^{-1} x$, $\zeta = r^{-\kappa} y$, assorties du changement de temps $dt/d\tau = r^{1-\kappa}$ (passage de X_H à $\tilde{X}_H$), et que dans cette représentation la *variété de collision* $r = 0$ s'identifie à la sous-variété d'équations $I = 1, H = 0, \mathcal{C} = 0$. Pour $\kappa = -\frac{1}{2}$, on trouvera dans [4] une description dans le présent langage de la variété de McGehee et du champ Z pour le problème des deux corps, celui des trois corps sur R et le problème isocèle des trois corps dans R^3.

Le champ Z laisse également invariantes les sous-variétés obtenues en fixant à une valeur non nulle le moment cinétique invariant $|H|^{-\frac{\kappa+1}{2\kappa}} \mathcal{C}$. Ces dernières correspondent à ce qu'on peut appeler les solutions générales du problème des n corps.

Remarques importantes. 1) Le flot du champ de vecteurs Y commute avec l'action naturelle $(x, y) \mapsto (Ax, Ay)$ des isométries A de E sur l'espace des phases. Le champ de vecteurs Z et la variété de McGehee passent donc au quotient par cette action, ainsi que les fonctions I, J, K, U, H, c. *Tout ce qui suit est également valable après ce passage au quotient.* **2)** Soit $\tilde{F}$ une fonction sur l'espace des phases invariante par le champ Y. Si $\tilde{F}$ tend vers une limite le long d'une courbe intégrale de l'un des trois champs $X_H, \tilde{X}_H, Z$, elle tend vers la même limite le long de la courbe intégrale correspondante de chacun des deux autres. Seul diffère le temps mis à atteindre cette limite.

Lemme. *Les singularités du champ réduit Z appartiennent à la variété de McGehee : ce sont les états (x_0, y_0) définissant un mouvement homothétique d'énergie nulle. Ils vérifient $J_0 = x_0 \cdot y_0 \neq 0$. Les courbes intégrales de Z qui leur sont asymptotes (positivement ou négativement) sont contenues dans la réunion des sous-ensembles $\mathcal{C} = 0$ et $H = 0$. Elles correspondent (dans le passage de X_H à Z) à des mouvements des n corps le long desquels ou bien $I \to 0$, $K \to \infty$ (en temps fini), ou bien $K \to 0$, $I \to \infty$ (en temps infini). De plus, si $\mathcal{C} = 0$ et $H \neq 0$ (resp. $H = 0$ et $\mathcal{C} \neq 0$) c'est I (resp. K) qui tend vers zéro.*

Corollaire. *Pour les mouvements ci-dessus, si I tend vers 0 lorsque t tend vers t_0, on a $J_0(t-t_0) > 0$ et, au voisinage de t_0, I est équivalent à $\big[(1-\kappa)J_0(t-t_0)\big]^{\frac{2}{1-\kappa}}$, J à $J_0\big[(1-\kappa)J_0(t-t_0)\big]^{\frac{1+\kappa}{1-\kappa}}$, K à $J_0^2\big[(1-\kappa)J_0(t-t_0)\big]^{\frac{2\kappa}{1-\kappa}}$, et U à $\frac{1}{2}J_0^2\big[(1-\kappa)J_0(t-t_0)\big]^{\frac{2\kappa}{1-\kappa}}$; de mê me, si I tend vers l'infini lorsque t tend vers l'infini, on a $J_0 t > 0$ et, au voisinage de l'infini, I est équivalent à $\big[(1-\kappa)J_0 t\big]^{\frac{2}{1-\kappa}}$, J à $J_0\big[(1-\kappa)J_0 t\big]^{\frac{1+\kappa}{1-\kappa}}$, K à $J_0^2\big[(1-\kappa)J_0 t\big]^{\frac{2\kappa}{1-\kappa}}$, et U à $\frac{1}{2}J_0^2\big[(1-\kappa)J_0 t\big]^{\frac{2\kappa}{1-\kappa}}$. Ceci implique qu'il ne se forme pas de sous-amas : chaque distance mutuelle entre les corps est de l'ordre de $|t-t_0|^{\frac{1}{1-\kappa}}$ si I tend vers zéro au temps t_0, et $|t|^{\frac{1}{1-\kappa}}$ si I tend vers l'infini.*

Démonstration du Lemme. Soit (x_0, y_0) une singularité du champ réduit Z. Notons $I_0 = x_0 \cdot x_0 = 1$, $J_0 = x_0 \cdot y_0$, $K_0 = y_0 \cdot y_0$, $U_0 = U(x_0)$. Le mouvement correspondant à (x_0, y_0) se faisant le long d'une courbe intégrale de Y, il est homothétique. En particulier $K_0 - J_0^2 = 0$. En outre, l'énergie et le moment cinétique, étant invariants, ne peuvent qu'être nuls. On a donc $J_0^2 = K_0 = 2U_0$, qui implique que J_0 et K_0 sont différents de 0. Notons que l'absence de singularité du champ X_H implique également la non-annulation de $J_0 = x_0 \cdot y_0$ puisque Z et X_H se confondent en un point où $J = 0$. Enfin, l'invariance de $|H|^{-\frac{\kappa+1}{2\kappa}}\mathcal{C}$ par Z force toute courbe intégrale de Z positivement ou négativement asymptote à la variété de McGehee à vérifier $\mathcal{C} = 0$ ou $H = 0$.

Le long d'une solution des équations de Newton correspondant à une courbe intégrale de Z asymptote à une singularité, la fonction invariante $\tilde{J} = I^{-\frac{1+\kappa}{2}}J$, qui s'écrit encore $\frac{1}{1-\kappa}\partial_{X_H} I^{\frac{1-\kappa}{2}}$, a donc une limite non nulle J_0. On en déduit que, suivant que J_0 est négatif ou positif, la fonction $I^{\frac{1-\kappa}{2}}$ (et donc également la fonction I) tend vers 0 en temps fini ou vers l'infini en temps infini. Un raisonnement analogue vaut bien entendu lorsqu'au lieu de croître, le temps décroît. D'autre part, $\tilde{K}$ tend vers $K_0 = J_0^2 > 0$. Le long d'une telle solution, les conditions $I \to 0$ et $I \to \infty$ équivalent donc respectivement aux conditions $K \to \infty$ et $K \to 0$. Considérons enfin une courbe intégrale de Z qui vérifie $H \neq 0$ (et donc $\mathcal{C} = 0$), et est positivement (resp. négativement) asymptote à une singularité (x_0, y_0). Le long d'une solution correspondante des équations de Newton, la fonction invariante $\tilde{H} = I^{-\kappa}H$ tend vers 0, donc $I \to 0$. De même, si une courbe intégrale du champ Z vérifie $\mathcal{C} \neq 0$ (et donc $H = 0$) et est asymptote à une singularité (x_0, y_0), le long d'une solution correspondante des équations de Newton, l'application invariante $\tilde{\mathcal{C}} = I^{-\frac{1+\kappa}{2}}\mathcal{C}$ tend vers 0, donc $I \to \infty$, ce qui termine la démonstration.

Complément. Appelées *configurations centrales,* les configurations de n corps admettant des mouvements homothétiques sont extrêmement particulières. Ce sont celles qui sont proportionnelles à la configuration des forces d'attraction qu'elles engendrent : $\nabla U(x) = \lambda x$. Interprétant λ comme un multiplicateur de Lagrange, on obtient la caractérisation classique de ces configurations comme points critiques des restrictions du potentiel aux sous-variétés formées des configurations d'inertie I fixée. Bien entendu, ce sont également les points critiques de $\tilde{U}$, d'où on déduit que $\lambda = 2\kappa U/I$. La détermination des configurations centrales est un problème d'algèbre très difficile. Les seuls cas bien compris sont ceux de trois corps (Lagrange), quatre corps de masses égales (Albouy) et n corps sur la droite (Euler, Moulton). Dans tous les autres cas on ne sait pas même s'il y a un nombre fini de telles configurations à similitude près. On trouvera dans l'habilitation d'Alain Albouy [1] une remarquable description de l'état de la question.

Démonstration du Corollaire. L'estimation asymptotique sur I est une conséquence immédiate du fait que $\partial_{X_H} I^{\frac{1-\kappa}{2}} = (1-\kappa)\tilde{J}$ tend vers la quantité non nulle $(1-\kappa)J_0$. Celles sur J, K et U s'en déduisent aussitôt puisque $\tilde{J}, \tilde{K}$ et $\tilde{U}$ tendent respectivement vers $J_0, K_0 = J_0^2$ et $U_0 = \frac{1}{2}J_0^2$. L'affirmation sur l'ordre de grandeur des distances mutuelles se déduit des estimations supérieures et inférieures respectivement données par I et U.

Remarque. Les estimations sur $\dot{I} = 2J$, et $\ddot{I} = 4H + 4(\kappa + 1)U$ qu'on déduit du Corollaire sont celles qu'on obtiendrait en dérivant formellement celle donnée pour I.

Définition. *Une solution des équations de Newton est appelée* mouvement de collision totale *si I tend vers 0 en temps fini,* mouvement complètement parabolique *si K tend vers 0 en temps infini (dans les deux cas le sens du temps peut être quelconque).*

Le lemme que nous venons de démontrer admet une réciproque, énoncée dans le théorème ci-dessous qui rassemble des résultats de Sundman[10], McGehee[8], Saari[9].

Théorème fondamental. *Un mouvement de collision totale (resp. complètement parabolique) ne peut exister que si le moment cinétique (resp. l'énergie) s'annule. Dans les deux cas, la courbe intégrale du champ Z qui lui correspond tend (en temps infini) vers l'ensemble des singularités de ce champ, les fonctions $\tilde{J}, \tilde{K}, \tilde{U}$ ont respectivement pour limite $J_0, J_0^2, \frac{1}{2}J_0^2$ avec $J_0 \neq 0$ et toutes les conclusions du Lemme précédent et de son Corollaire s'appliquent; en particulier, la configuration normalisée $s = I^{-\frac{1}{2}}x$ tend vers l'ensemble des configurations centrales et toutes les distances mutuelles des corps sont de l'ordre de $|t-t_0|^{\frac{1}{1-\kappa}}$ si la collision a lieu au temps t_0 (resp. $|t|^{\frac{1}{1-\kappa}}$ dans le cas complètement parabolique).*

Les deux paragraphes qui suivent sont consacrés à la démonstration de ce théorème. Les démonstrations concernant les deux types de mouvement sont pratiquement parallèles. Dans les deux cas, les points techniques fondamentaux sont d'une part l'*existence d'une limite finie non nulle de $\tilde{J}$*, ce qui fournit les estimations de temps, d'autre part l'*existence d'une limite finie non nulle de $\tilde{U}$*, résultat de compacité qui assure qu'on reste loin des collisions partielles, ce qui prouve l'existence d'un ensemble limite invariant vers lequel converge l'orbite de Z. Ces deux points équivalent aux estimations asymptotiques classiques de $\dot{I}$ et $\ddot{I}$ que l'on trouve dans le livre de Wintner ([12] paragraphes 333 à 339) mais on notera qu'aucun théorème Tauberien n'est requis. La différence principale entre les deux paragraphes est la nécessité dans le cas complètement parabolique de recourir à un argument de *décomposition en amas* pour estimer a priori le comportement asymptotique de I. Cet argument, que nous empruntons à l'article [7] de Marchal et Saari et rappelons dans l'appendice 1, se ramène à une comparaison du problème considéré à un problème des deux corps sur une droite. C'est avec la fonction de Sundman, décrite dans le même appendice, qui compare au problème des deux corps dans le plan, le seul outil global dont on dispose en général.

D) Collisions totales

Supposons qu'une courbe intégrale de X_H conduise à une collision totale à l'instant t_0 : $\lim_{t\to t_0} I(t) = 0$. On supposera par exemple que t atteint sa limite en croissant.

Lemme 1. *Le temps t_0 est fini. Il existe un réel positif θ tel que, dans l'intervalle $[t_0 - \theta, t_0[$, les fonctions I, J, K se comportent de la façon suivante : $I > 0$ décroit, $J < 0$ croit, $K > 0$ tend vers l'infini.*

Démonstration. U tend vers $+\infty$ ainsi que $\ddot{I} = 4H + 4(\kappa+1)U$ (formule de Lagrange-Jacobi) et $K = 2H + 2U$. Si $\dot{I} = 2J$ devient positive ou nulle, elle le reste et I ne peut décroître, d'où le Lemme.

Lemme 2 (Sundman[10]). *Une collision totale du système ne peut se produire que si $\mathcal{C} = 0$.*

Démonstration. La fonction de Sundman $\tilde{S} = \tilde{J}^2 + \tilde{c}^2 - 2\tilde{H}$ (voir l'appendice 1) finit par décroitre puisqu'il en est ainsi de I. Mais si $\mathcal{C}$ n'est pas nul, le terme $\tilde{c}^2 = I^{-(1+\kappa)}c^2$ la fait tendre vers $+\infty$.

Lemme 3. *Le long d'une solution des équations de Newton conduisant à une collision totale au temps t_0, la fonction $\tilde{J}$ a une limite* non nulle J_0 *(telle que $J_0(t-t_0) > 0$). Au voisinage de la collision, la fonction I est donc équivalente à $\big[(1-\kappa)J_0(t-t_0)\big]^{\frac{2}{1-\kappa}}$ et la fonction J à $J_0\big[(1-\kappa)J_0(t-t_0)\big]^{\frac{1+\kappa}{1-\kappa}}$.*

Démonstration. Le long d'une courbe intégrale de X_H conduisant à une collision totale, la fonction $\tilde{H} = I^{-\kappa}H$ tend vers 0 puisqu'il en est ainsi de I. On déduit alors du lemme 2 que la courbe intégrale de Z lui correspondant tend vers la variété de McGehee. La fonction de Sundman, qui d'après le Lemme 2 vaut $\tilde{S} = \tilde{J}^2 - 2\tilde{H}$, est donc minorée au voisinage de la collision. Puisqu'elle décroît, elle tend vers une limite, qui est également celle de $\tilde{J}^2$. Le lemme 1 assurant que $\tilde{J}$ reste négative au voisinage de la collision si t tend vers t_0 en croissant, on en déduit que $\tilde{J}$ possède dans ce cas une limite $J_0 \leq 0$. Enfin, J_0 ne peut être nulle car on déduirait de la formule

$$\partial_Z \tilde{J} = \partial_{\tilde{X}_H} \tilde{J} = (\kappa+1)(\tilde{K} - \tilde{J}^2) - 2\kappa\tilde{H} = 2\tilde{H} - (\kappa+1)\tilde{J}^2 + 2(\kappa+1)\tilde{U}$$

et de la minoration élémentaire $\tilde{U} \geq m_0 = (\sum m_i m_j)(\sum m_i)^\kappa (\inf m_i)^{-\kappa}$, qu'assez près de la collision, $\partial_Z \tilde{J}$ reste bornée inférieurement par une constante strictement positive ne dépendant que des masses. Ceci impliquerait que $\tilde{J}$ tende vers sa limite J_0 en un temps fini pour le champ Z ou, ce qui revient au même, le champ $\tilde{X}_H$ (car $\tilde{J}$ est

invariante par Y). Mais la courbe intégrale de $\tilde{X}_H$ met un temps infini à atteindre la collision car le passage de X_H à $\tilde{X}_H$ correspond au remplacement du temps t par un temps τ tel que $dt/d\tau = I^{\frac{1-\kappa}{2}}$. En particulier, $\frac{d\ log\ I^{\frac{1}{2}}}{d\tau} = \tilde{J}$ reste borné en module au voisinage de la collision. Puisque $\log I^2 \to -\infty$, τ tend nécessairement vers l'infini lorsque $t \to t_0$.
La fin de la démonstration se fait comme dans le corollaire du paragraphe précédent.

Lemme 4. *Si une solution des équations de Newton conduit à une collision totale au temps t_0, la courbe intégrale du champ Z qui lui correspond tend (en temps infini) vers l'ensemble des singularités de ce dernier champ, c'est-à-dire les mouvements homothétiques d'énergie nulle. De plus, les fonctions $\tilde{K}$ et $\tilde{U}$ tendent respectivement vers J_0^2 et $\frac{1}{2}J_0^2$. Au voisinage de la collision, les fonctions K et U sont donc repectivement équivalentes à $J_0^2\big[(1-\kappa)J_0(t-t_0)\big]^{\frac{2\kappa}{1-\kappa}}$ et $\frac{1}{2}J_0^2\big[(1-\kappa)J_0(t-t_0)\big]^{\frac{2\kappa}{1-\kappa}}$.*

Démonstration. En majorant $\frac{d}{dt}|\vec{r}_i - \vec{r}_j|$ par $|\dot{\vec{r}}_i - \dot{\vec{r}}_j|$, on obtient immédiatement l'estimation élémentaire

$$|\dot{U}| \leq M_0 U^{\frac{2\kappa-1}{2\kappa}} K^{\frac{1}{2}},$$

où M_0 est une constante ne dépendant que des masses et de κ. Près d'une collision, U tend vers $+\infty$, donc $K = 2(H+U) \leq 3U$, ce qui implique que $|\dot{U}| \leq \sqrt{3}M_0 U^{\frac{3\kappa-1}{2\kappa}}$ et donc que $U \leq M_1|t-t_0|^{\frac{2\kappa}{1-\kappa}}$, où M_1 est une constante. De l'estimation sur la fonction I donnée dans le Lemme 3, on déduit que $\tilde{U}$ reste bornée au cours du mouvement, autrement dit que *la configuration, une fois normalisée à la taille unité, reste loin des collisions partielles.* C'est le point fondamental de la démonstration. Il implique en effet que $\tilde{K} = 2(\tilde{H}+\tilde{U})$ reste également borné (puisque $\tilde{H}$ tend vers 0) et donc que la courbe intégrale correspondante du champ Z reste dans un compact de l'espace des phases. Cette dernière a donc pour ensemble ω-limite un compact invariant de la variété de McGehee sur lequel $\tilde{J}$ est égale à la constante J_0. La dérivée de $\tilde{J}$, $\partial_Z \tilde{J} = (\kappa+1)(\tilde{K}-\tilde{J}^2) - 2\kappa\tilde{H} = (\kappa+1)(\tilde{K}-\tilde{J}^2)$, s'annule donc sur cet ensemble limite, ce qui implique que les mouvements limites sont homothétiques. Enfin $\tilde{K}$ et $\tilde{U}$ tendent vers des limites K_0 et U_0 qui vérifient $K_0 = 2U_0 = J_0^2$, d'où les estimations sur K et U comme dans le lemme 3.

La partie “collisions totales” du Théorème fondamental est ainsi démontrée.

E) Mouvements complètement paraboliques.

Supposons qu'un mouvement (une courbe intégrale de X_H) soit complètement parabolique, par exemple lorsque $t \to +\infty$.

Lemme 1. *Un mouvement complètement parabolique ne peut se produire que si $H = 0$.*

Démonstration. De $K = 2H + 2U > 2H$ on déduit, puisque K tend vers 0, que $H \leq 0$. Si H est strictement négative, U tend vers la quantité positive $-H$, donc $\ddot{I} = 4(\kappa+1)U + 4H$ tend vers $-4\kappa H < 0$ et I est strictement concave, ce qui interdit au mouvement d'être défini sur une durée infinie.

Lemme 2. *La courbe intégrale du champ Z correspondant à un mouvement complètement parabolique tend (en temps infini) vers l'ensemble des singularités de ce dernier champ, c'est-à-dire les mouvements homothétiques d'énergie nulle. Les fonctions $\tilde{J}, \tilde{K}$, et $\tilde{U}$ tendent repectivement vers J_0, J_0^2 et $\frac{1}{2}J_0^2$, où J_0 vérifie $J_0 t > 0$. Les fonctions I, J, K et U sont donc respectivement équivalentes à*

$$\left[(1-\kappa)J_0 t\right]^{\frac{2}{1-\kappa}}, J_0\left[(1-\kappa)J_0 t\right]^{\frac{1+\kappa}{1-\kappa}}, J_0^2\left[(1-\kappa)J_0 t\right]^{\frac{2\kappa}{1-\kappa}} \text{ et } \frac{1}{2}J_0^2\left[(1-\kappa)J_0 t\right]^{\frac{2\kappa}{1-\kappa}}.$$

Démonstration. On déduit du Lemme 1 que $\tilde{K} = 2\tilde{U}$, donc que $\tilde{K} \geq m_0 > 0$ où m_0 ne dépend que des masses et de κ (voir la démonstration du Lemme 3 dans le paragraphe précédent). Puisque $\tilde{K} = I^{-\kappa}K$, ceci implique que I tend vers $+\infty$ lorsque t tend vers $+\infty$. Pour estimer plus précisément le comportement asymptotique de I, nous le comparons, en nous inspirant de Marchal-Saari[7], à celui du carré λ^2 de la plus grande distance entre les centres de gravité de deux configurations quelconques dont la réunion forme la configuration considérée (décomposition en deux amas). Nous rappelons dans l'appendice 2 le principe de l'estimation de λ par comparaison à un problème des deux corps sur la droite. Le résultat en est que les seuls comportements asymptotiques non bornés que peut avoir I sont les suivants :

(i) I est parabolique, c'est-à-dire équivalent à $I_0|t|^{\frac{2}{1-\kappa}}$ avec $I_0 \neq 0$,

(ii) I est hyperbolique, c'est-à-dire équivalent à $I_0|t|^2$ avec $I_0 \neq 0$,

(iii) I est superhyperbolique, c'est-à-dire $\lim_{t\to+\infty} I/t^2 = +\infty$.

On exclut facilement les deux dernières possibilités, non compatibles à l'annulation de $\ddot{I} = 4(\kappa+1)U$ lorsque t tend vers $+\infty$. En effet, quel que soit $\epsilon > 0$, $\ddot{I}$ finit par être inférieur à ϵ, donc $I < a + bt + \epsilon t^2/2$, où a et b sont des constantes. Puisque I est parabolique, les conditions $t \to +\infty$ et $\tau \to +\infty$ sont équivalentes. En effet, $dt/d\tau = I^{\frac{1-\kappa}{2}}$ équivaut à $I_0^{\frac{1-\kappa}{2}} t$ lorsque $t \to +\infty$, donc τ équivaut à $I_0^{-\frac{1-\kappa}{2}} \log t$. Autrement dit, on suit également la solution de $\tilde{X}_H$, ou celle du champ quotient Z qui lui correspond pendant un temps infini. La suite de la démonstration est basée sur l'étude du comportement asymptotique de $\tilde{J}$. Puisque $H = 0$, il est naturel de travailler directement avec $\tilde{J}$ plutôt qu'avec la fonction de Sundman qui fait intervenir la valeur inconnue du moment cinétique. De

$$\partial_Z \tilde{J} = \partial_{\tilde{X}_H} \tilde{J} = (\kappa+1)(\tilde{K} - \tilde{J}^2) \geq 0,$$

on déduit que $\tilde{J}$ croît lorsque τ tend vers $+\infty$. Si $\tilde{J} = \frac{1}{1-\kappa}\frac{d}{dt}\left(I^{\frac{1-\kappa}{2}}\right)$ tend vers $+\infty$, une intégration montre que $\frac{1}{t}I^{\frac{1-\kappa}{2}}$ tend vers $+\infty$, ce qui est incompatible avec le comportement parabolique de I. On en déduit que $\tilde{J}$ tend vers une limite finie J_0. Cette limite est nécessairement positive, car $\frac{d}{dt}\left(I^{\frac{1-\kappa}{2}}\right)$ tend vers $(1-\kappa)J_0$, donc $I^{\frac{1-\kappa}{2}}$, qui tend vers $+\infty$, est équivalent à $(1-\kappa)J_0 t$ qui doit tendre vers $+\infty$.

La fin de la démonstration se fait exactement comme dans le cas des collisions : de la majoration $|\dot{U}| \leq M_0 U^{\frac{2\kappa-1}{2\kappa}} K^{\frac{1}{2}} = 2M_0 U^{\frac{3\kappa-1}{2\kappa}}$, on déduit que $\tilde{U}$ est bornée, donc également $\tilde{K} = 2\tilde{U}$, ce qui donne la compacité nécessaire.

F) Linéarisation du champ réduit en ses singularités.

Soit (x_0, y_0) une singularité de Z, c'est-à-dire un état définissant un mouvement homothétique d'énergie nulle :

$$||x_0||^2 = 1,\ y_0 = J_0 x_0,\ (\nabla_x U)(x_0) = \kappa J_0^2 x_0,\ \tilde{U}(x_0) = \frac{1}{2} J_0^2.$$

où $J_0 = \tilde{J}(x_0, y_0) = J(x_0, y_0)$ est différent de 0. Le champ de vecteurs $\mathcal{L}_{(x_0,y_0)} Z$ déduit de Z par linéarisation au point (x_0, y_0) est défini sur les vecteurs tangents à la sous-variété d'équation $I = 1$ en (x_0, y_0), vecteurs qu'on identifiera aux éléments (X, Y) de $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$ tels que $x_0 \cdot X = 0$. Il est associé à l'équation différentielle

$$\begin{aligned}
\frac{dX}{d\tau} &= Y - \big(d\tilde{J}(x_0, y_0)(X, Y)\big) x_0 - J_0 X,\\
\frac{dY}{d\tau} &= \big(d\nabla_x U(x_0)\big)(X) - \kappa\big(d\tilde{J}(x_0, y_0)(X, Y)\big) y_0 - \kappa J_0 Y.
\end{aligned}$$

Remarquons que dans une base orthonormée de $\mathcal{X}$, l'endomorphisme $d\nabla_x U(x_0)$ est représenté par la matrice *symétrique* des dérivées partielles secondes (Hessien) de U en x_0.

Un vecteur propre (X, Y) de $\mathcal{L}_{(x_0,y_0)} Z$ de valeur propre λ vérifie par définition les équations

$$\begin{aligned}
&Y - \big(d\tilde{J}(x_0, y_0)(X, Y)\big) x_0 - J_0 X = \lambda X,\\
&\big(d\nabla_x U(x_0)\big)(X) - \kappa\big(d\tilde{J}(x_0, y_0)(X, Y)\big) y_0 - \kappa J_0 Y = \lambda Y.
\end{aligned}$$

Notons $\tilde{Y} = Y - (x_0 \cdot Y) x_0$ la projection orthogonale dans $\mathcal{X}$ de Y sur le sous-espace orthogonal à x_0 : $\tilde{Y}$ coïncide avec Y si et seulement si (X, Y) est tangent à la sous-variété d'équation $H = 0$ ou, ce qui est équivalent, à la sous-variété d'équation $\tilde{J} = J_0$. On vérifie en effet que

$$d\tilde{J}(x_0, y_0)(X, Y) = x_0 \cdot Y = \frac{1}{J_0} dH(x_0, y_0)(X, Y).$$

La première des équations aux valeurs propres s'écrit $\tilde{Y} = (\lambda + J_0) X$. Quant à la deuxième, elle devient

$$\big(d\nabla_x U(x_0)\big)(X) - \kappa J_0^2 X - \big((\kappa + 1) J_0 \lambda + \lambda^2\big) X = (\lambda + 2\kappa J_0)(x_0 \cdot Y) x_0.$$

On reconnaît dans l'application $X \mapsto \big(d\nabla_x U(x_0)\big)(X) - \kappa J_0^2 X$ la restriction à l'orthogonal de x_0 de la dérivée seconde en x_0 de la fonction invariante $\tilde{U}$, c'est-à-dire encore l'endomorphisme $\nabla^2_{x^2}\big(U|_{I=1}\big)(x_0)$ de cet espace associé par la métrique au Hessien en x_0 de la restriction de U à la sous-variété d'équation $I = 1$. Ainsi le premier membre de l'équation est orthogonal à x_0 alors que le deuxième lui est parallèle. Les deux s'annulent donc et les équations que vérifient X, Y, λ sont

$$\begin{aligned}
&\tilde{Y} = (\lambda + J_0) X,\\
&\nabla^2_{x^2}\big(U|_{I=1}\big)(x_0) X = \big((\kappa + 1) J_0 \lambda + \lambda^2\big) X,\\
&(\lambda + 2\kappa \tilde{J}_0)(x_0 \cdot Y) x_0 = 0.
\end{aligned}$$

Les solutions sont de trois types suivant que (X, Y) est

1) tangent à $\mathcal{C} = 0$ sans être tangent à la variété de McGehee,
2) tangent à $H = 0$ sans être tangent à la variété de McGehee,
3) tangent à la variété de McGehee.

Le Lemme suivant, à comparer à [9] les décrit complètement :

Lemme. *1) Un vecteur propre du premier type est toujours associé à la valeur propre $\lambda = -2\kappa J_0$; on les obtient tous en additionnant à un multiple de $(X = 0, Y = x_0)$ un éventuel vecteur propre du troisième type de même valeur propre. 2) Les vecteurs propres du deuxième type sont associés à la valeur propre $\lambda = -(\kappa+1)J_0$; ils sont de la forme $\big(X, (\lambda+J_0)X\big)$, où X est un vecteur propre de l'endomorphisme $\nabla^2_{x^2}\big(U|_{I=1}\big)(x_0)$ associé à la valeur propre 0 et ayant une "composante de rotation" non nulle. 3) Les vecteurs propres du troisième type associés à la valeur propre λ sont de la forme $\big(X, (\lambda + J_0)X\big)$, où X est un vecteur propre de l'endomorphisme $\nabla^2_{x^2}\big(U|_{I=1}\big)(x_0)$ associé à la valeur propre $h = \big((\kappa + 1)J_0\lambda + \lambda^2\big)$.*

Démonstration. Si le vecteur propre (X, Y) est du premier type, le terme $x_0 \cdot Y$ est non nul et la troisième équation implique que $\lambda = -2\kappa J_0$. Choisir $X = \tilde{Y} = 0$ fournit une solution évidente d'où la conclusion dans le premier cas. Si le vecteur propre (X, Y) est du deuxième ou du troisième type, il est tangent à la sous-variété d'équation $H = 0$, ce qui équivaut à $x_0 \cdot Y = 0$ et implique $Y = \tilde{Y} = (\lambda+J_0)X$. Il reste à écrire que les vecteurs propres du deuxième type n'annulent pas la dérivée au point (x_0, y_0) du bivecteur moment cinétique. Ceci équivaut à ce que, dans la décomposition de Saari de la vitesse, la composante de rotation de X ne s'annule pas. L'invariance du potentiel par rotation montre que, si X est purement de rotation, c'est un vecteur propre de valeur propre nulle de l'endomorphisme $\nabla^2_{x^2}\big(U|_{I=1}\big)(x_0)$. La valeur propre λ doit être différente de 0 et annuler $\big((\kappa+1)J_0\lambda + \lambda^2\big)$, d'où la conclusion. Remarquons que les valeurs propres correspondant à des directions propres non tangentes à la variété de McGehee pouvaient être anticipées à partir des formules

$$\partial_Z \tilde{H} = -2\kappa \tilde{J}\tilde{H}, \quad \partial_Z \tilde{\mathcal{C}} = -(\kappa + 1)\tilde{J}\tilde{\mathcal{C}}.$$

Appendice 1. Les deux façons de comparer un problème des n corps à un problème des 2 corps.

1) La fonction de Sundman et la fonction $\tilde{J}$

Le cas de deux corps est caractérisé par le fait que la fonction potentiel U est une fonction du moment d'inertie I. L'énergie totale s'écrit

$$H = \frac{1}{2}K - \frac{(m_1 m_2)^{1-\kappa}}{(m_1 + m_2)^{-\kappa}} I^\kappa.$$

Eliminons l'énergie cinétique à l'aide de l'*égalité de Sundman*

$$IK - J^2 = c^2.$$

On obtient l'identité

$$\tilde{J}^2 + \tilde{c}^2 - 2\tilde{H} = 2\frac{(m_1 m_2)^{1-\kappa}}{(m_1+m_2)^{-\kappa}}.$$

Dans le problème général de n corps, on définit la *fonction de Sundman*, fonction réelle $\tilde{S}$ sur l'espace des états, invariante par Y, par le premier membre de l'identité ci-dessus :

$$\tilde{S} = \tilde{J}^2 + \tilde{c}^2 - 2\tilde{H} = 2\tilde{U} - (\tilde{K} - \tilde{J}^2 - \tilde{c}^2).$$

L'égalité de Sundman devient l'*inégalité de Sundman*

$$IK - J^2 \geq c^2, \text{ c'est-à-dire } \tilde{K} - \tilde{J}^2 - \tilde{c}^2 \geq 0,$$

et on déduit de l'*identité de Lagrange-Jacobi* $\ddot{I} = -4\kappa H + 2(\kappa+1)K$, que la dérivée suivant $\tilde{X}_H$ de la fonction de Sundman vaut

$$\partial_{\tilde{X}_H}\tilde{S} = \tilde{J}(\tilde{K} - \tilde{J}^2 - \tilde{c}^2).$$

Celle-ci est donc du signe de $\tilde{J}$; autrement dit, les fonctions I et $\tilde{S}$ sont en même temps non croissantes ou non décroissantes : la fonction de Sundman (resp. son opposée) est une *fonction de Liapunov* – fonction non décroissante le long des courbes intégrales – pour le champ de vecteurs $\tilde{X}_H$ restreint à la sous-variété d'équation $\tilde{J} > 0$ (resp. $\tilde{J} < 0$).

Remarques. 1) Une fois fixées les valeurs de H et c, la fonction de Sundman est une fonction sur le plan (I, J). Lorsque c n'est pas nul, il est agréable de se placer dans le plan de coordonnées $(\dot{r}, c/r)$: pour le potentiel newtonien ($\kappa = -\frac{1}{2}$), les courbes de niveau de la fonction de Sundman deviennent les cercles orthogonaux au cercle de rayon $\sqrt{-2H}$, et sont caractérisées par leur centre, de coordonnées $(0, \sqrt{I}U/c)$ (voir la thèse d'A. Albouy dans [1])

2) Les mouvements au cours desquels la fonction de Sundman reste constante sont d'une part les mouvements à "taille" I constante, d'autre part les mouvements qui vérifient identiquement $IK - J^2 = c^2$, c'est-à-dire les mouvements homothétiques complexes (mouvements homographiques dont la configuration est centrale, voir [2] chapitre 2).

3) La fonction invariante $\tilde{J}$, dont le carré coïncide avec $\tilde{S}$ lorsqu'énergie et moment cinétique sont nuls, joue également un rôle très important; de l'identité

$$\partial_{\tilde{X}_H}\tilde{J} = (\kappa+1)(\tilde{K} - \tilde{J}^2) - 2\kappa\tilde{H},$$

et de l'inégalité de Sundman, on déduit que c'est une fonction de Liapunov pour le champ de vecteurs $\tilde{X}_H$ restreint à la sous-variété à bord invariante d'équation $\tilde{H} \geq 0$.

Exercice. Montrer que les points critiques de la restriction à $H = 0$ de la fonction $\tilde{J}$ sont les états définissant un mouvement homothétique d'énergie nulle.

2) Estimations asymptotiques de la taille par décompositions en amas (Marchal-Saari).

Il s'agit ici d'une comparaison du problème des n corps considéré à un problème des deux corps sur la droite d'énergie et de moment cinétique (nul !) *différents.* Cette méthode est décrite en détail dans [7]. A une partition de l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$ en deux composantes correspond une partition d'une configuration de n corps en deux "amas" disjoints. Il n'est pas difficile de montrer que le maximum Λ pour toutes ces partitions des distances des centres de gravité des deux amas possède les propriétés suivantes :

1) Au cours d'un mouvement, les temps en lesquels Λ n'est pas analytique sont isolés.

2) Il existe une constante positive k ne dépendant que des masses telle qu'en tout point où Λ est analytique on ait

$$\ddot{\Lambda} \geq -k/\Lambda^2.$$

3) Si t_0 est une valeur de non-analyticité de Λ,

$$\lim_{t \to t_0^-} \dot{\Lambda}(t) \leq \lim_{t \to t_0^+} \dot{\Lambda}(t).$$

Ces estimations reviennent à la comparaison du problème des n corps considéré au problème des deux corps sur la droite dont le Hamiltonien est $f = \dot{\Lambda}^2 - 2k/\Lambda$. On déduit de 2) et 3) qu'au cours d'un mouvement, la fonction $f(\Lambda, \dot{\Lambda})$ croît le long de la courbe paramétrée $t \mapsto \big(\Lambda(t), \dot{\Lambda}(t)\big)$ si $\dot{\Lambda} > 0$, décroît si $\dot{\Lambda} < 0$. Les différentes possibilités pour le comportement asymptotique de Λ se déduisent de cette comparaison qu'on se représentera mieux dans le plan $(\dot{\Lambda}, 1/\Lambda)$ (Figure 1).

Figure 1

Il reste à remarquer que lorsque $t \to \infty$ les comportements asymptotiques de I et Λ^2 sont les mêmes (mais pas, bien entendu, ceux de leurs dérivées, ce qui est la source des difficultés de l'article de Marchal et Saari).

Appendice 2. Les cas extrêmes : potentiel de Jacobi-Banachiewitz et potentiel logarithmique.

1) potentiel de Jacobi-Banachiewitz : il s'agit du cas où $\kappa = -1$. C'est le seul où Y soit un champ hamiltonien : $Y = X_J$. Le hamiltonien J coïncide avec la fonction invariante $\tilde{J}$. De même, $\tilde{\mathcal{C}} = \mathcal{C}$ et $\tilde{c} = c$. Je renvoie à [2] pour une étude détaillée de la réduction de X_H par le groupe des similitudes. La relation de Lagrange-Jacobi devient $\ddot{I} = 4H$. Par intégration et élimination du temps elle fournit l'intégrale première supplémentaire $G = 2IH - J^2 = \tilde{c}^2 - \tilde{S}$, qu'on pourrait remplacer par la fonction de Sundman $\tilde{S}$. L'annulation du moment cinétique cesse d'être une condition nécessaire à la collision totale : Newton savait déjà que le Problème de force centrale avec ce potentiel admettait des solutions spirales se terminant en un temps fini par une collision. Plus généralement, aucune contrainte sur la configuration asymptotique n'est imposée par l'existence d'une collision totale, qui est un phénomène très commun : la fonction I est en effet de la forme $I = 2Ht^2 + \alpha t + \beta$, où α et β sont des constantes, et s'annule au bout d'un temps fini pour peu que l'énergie H soit négative.

2) potentiel logarithmique : le cas où $\kappa = 0$ étant trivial, on le remplace avantageusement par celui où

$$U(x) = -\sum_{i<j} m_i m_j \ln |\vec{r}_i - \vec{r}_j|.$$

La fonction U n'est plus homogène, mais sa dérivée $dU(x)$ l'est, de degré $2\kappa - 1$ avec $\kappa = 0$. Si Y désigne le champ de vecteurs qui définit l'équation différentielle $\dot{x} = x$, $\dot{y} = 0$, les formules données au début du paragraphe B) sont encore valables à l'exception près de celle concernant l'énergie :

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}_Y \omega = \omega, \\
&\mathcal{L}_Y H = \partial_Y H = \sum_{i<j} m_i m_j, \\
&\mathcal{L}_Y X_H = [Y, X_H] = -X_H, \\
&\mathcal{L}_Y \mathcal{C} = \partial_Y \mathcal{C} = \mathcal{C}.
\end{aligned}$$

Si Φ vérifie $\mathcal{L}_Y \Phi = \Phi$, par exemple si $\Phi = I^{\frac{1}{2}}$, le champ de vecteurs reparamétré $\tilde{X}_H = \Phi X_H$ commute avec Y et ses restrictions à deux quelconques des hypersurfaces d'énergie constante sont conjuguées par le flot de Y. Il n'y a donc plus de variété de collision au sens où nous l'avons définie. Notons cependant qu'à une orbite de collision totale correspond une orbite du champ quotient Z le long de laquelle la fonction invariante $\tilde{H}$ tend vers $+\infty$. Il est alors possible d'étendre la définition de la variété de collision en donnant un sens au niveau d'énergie $+\infty$ et en passant au quotient par le flot de Y dans ce niveau après avoir fixé à la valeur 0 le moment cinétique.

Appendice 3. Généralisations.

1) Collisions partielles simultanées : on généralise sans peine tout ce qui précède à ce cas. L'influence sur un amas en collision des autres corps est négligeable devant les forces internes à l'amas. Les collisions partielles se produisant toutes à des vitesses comparables, tout se passe après oubli du mouvement des centres de gravité des amas comme si l'on avait un certain nombre de collisions totales synchronisées (voir [4], paragraphe 2.4). Pour plus de détails, on se reportera à [5].

2) potentiels asymptotiquement homogènes : là encore tout se généralise, et rien n'empêche de mélanger les degrés d'homogénéité en considérant par exemple des sommes de potentiels homogènes.

Remerciements : Ce travail a commencé en collaboration avec Alain Albouy, qui a suggéré l'importance du champ Y.

Article paru dans *Regular and Chaotic Dynamics*, V.3, $N_0$3, 1998, p. 93-106. Dans l'article imprimé, l'éditeur a cru bon de changer la numérotation de façon incohérente. La version électronique (http://turpion.ioc.ac.ru/php/homes/pa.phtml?jrnid=rd) a été rétablie en conformité avec le présent preprint.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. ALBOUY - *Recherches sur les configurations centrales*, in *Habilitation Université Denis Diderot*, disponible comme note technique du Bureau des Longitudes (décembre 1997) sous le titre *Recherches sur le Problème des N corps.*

[2] A. ALBOUY, A. CHENCINER - *Le Problème des N corps et les distances mutuelles*, Inventiones Mathematicæ131 (1998), 151-184.

[3] E. CARTAN - *Leçons sur les invariants intégraux*, Hermann (1922).

[4] A. CHENCINER - *A l'infini en temps fini*, Séminaire Bourbaki 832 (juin 1997).

[5] M.S. ELBIALY - *Collision singularities in celestial mechanics*, Siam Journal Math. Anal. **21** 6 (1990), 1563-1593.

[6] L. EULER - *Considérations sur le problème des trois corps*, Mémoires de l'Académie des Sciences de Berlin (lu en 1765) **19** (1770), 194–220.

[7] C. MARCHAL, D. SAARI - *On the final evolution of the n body problem*, Journal of Differential Equations **20** (1976), 150–186.

[8] R. McGEHEE - *Triple collision in the collinear three body Problem*, Inventiones Mathematicæ **27** (1974), 191–227.

[9] D. SAARI - *The manifold structure for collision and for hyperbolic-parabolic orbits in the n-body problem*, J. of Differential Equations **55** (1984), 300–329.

[10] K.F. SUNDMAN - *Mémoire sur le problème des trois corps*, Acta Math. **36** (1913), 105–179.

[11] WANG QIU DONG - *The global solution of the N-body problem*, Celestial Machanics and Dynamical Astronomy **50** (1991), 73-88

[12] A. WINTNER - *The analytical foundations of Celestial Mechanics*, Princeton University Press (1941).