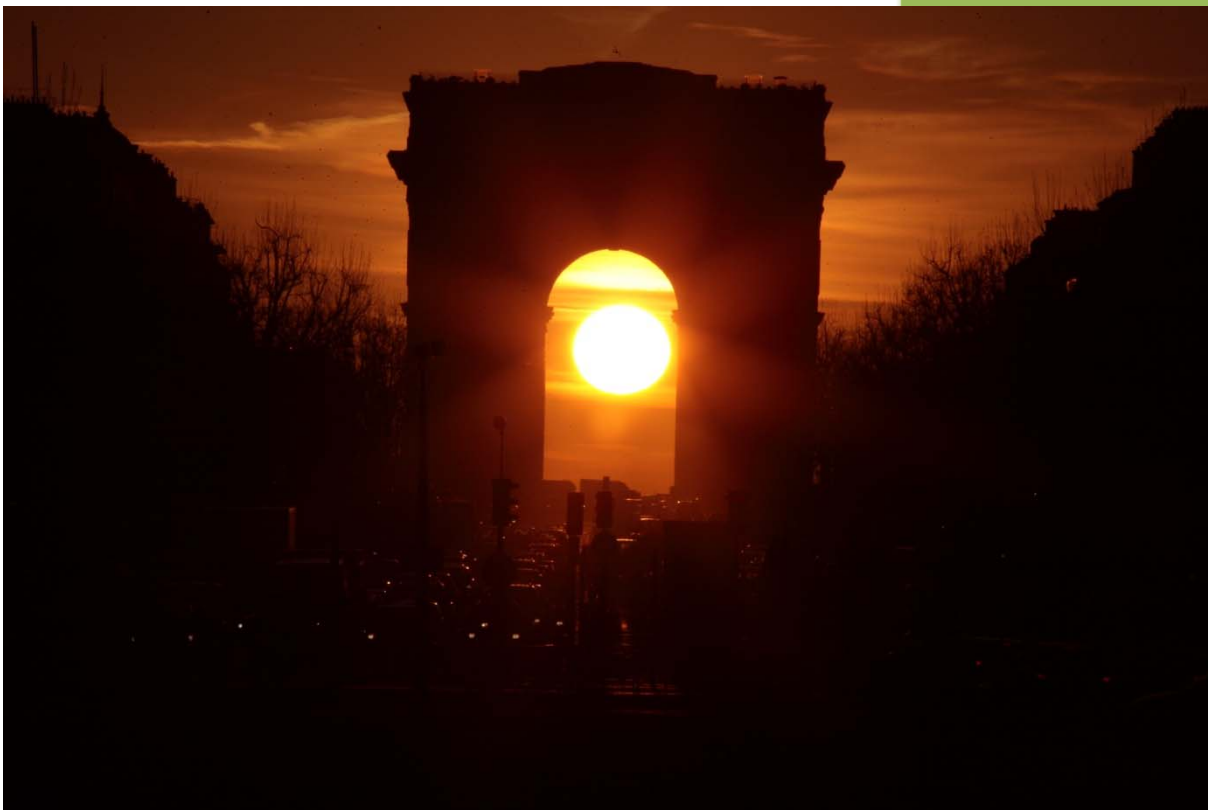


DU de l'Observatoire de Paris

2014  
2015

# Les phénomènes astronomiques



P. Rocher

IMCCE

01/01/2014



# INTRODUCTION

Ce document correspond au cours sur les phénomènes astronomiques présenté au DU de l'observatoire de Paris. Dans la présentation du cours, j'ai volontairement supprimé un grand nombre de démonstrations mathématiques. De même, j'ai limité au maximum l'usage des formules mathématiques lorsqu'il est possible d'expliquer les phénomènes astronomiques à l'aide de graphiques. Dans ce document, j'ai conservé les deux approches, graphiques et mathématiques, de manière à satisfaire les lecteurs désirant en savoir un peu plus. Ces démonstrations mathématiques pourront être ignorées et ne feront pas l'objet de questions lors de l'examen de fin d'année.

Dans ce but, j'ai fait figurer le logo  devant les textes pouvant être ignorés

## COURS SUR LES PHÉNOMÈNES ASTRONOMIQUES

### 1 Les repères astronomiques

#### 1.1 Les repères fondamentaux de l'astronomie

Pour se repérer dans l'espace, on doit utiliser des repères. Si l'on se limite à la mécanique classique, on utilise des repères de dimension trois. Ces repères sont en général orthonormés, c'est-à-dire que les trois axes du repère sont perpendiculaires entre eux et que les vecteurs unitaires des trois axes sont égaux. Par convention, les repères seront notés  $(O,xyz)$ .  $O$  est l'origine du repère.

L'origine  $O$  du repère peut être positionnée en différents points. Un repère ayant pour origine le centre sur le Soleil est appelé repère héliocentrique, un repère ayant pour origine le centre de la Terre est un repère géocentrique. Pour la Lune, on dira que le repère est sélénocentrique, pour Jupiter on emploiera les termes jovicentriques. Pour un repère centré sur un lieu particulier de la Terre, on parlera d'un repère topocentrique.

En mécanique newtonienne on appelle repère galiléen (les Anglo-saxons parlent de repère inertiel) un repère qui est translation uniforme, c'est-à-dire qui se déplace linéairement à vitesse constante. Dans le système solaire, on peut considérer que le repère situé au barycentre du système solaire est un repère inertiel, cela signifie que l'on suppose que le mouvement du système solaire par rapport aux étoiles proches est un mouvement de translation uniforme et que l'on néglige le mouvement du système solaire par rapport au centre de la galaxie. Tous les autres repères liés au Soleil ou aux corps du système solaire ne sont pas inertiels.

Les différents repères utilisés en astronomie ont une origine historique, il en est de même des noms des différentes variables associées à ces repères.

L'astronome ne mesure que des angles, car il n'a pas accès aux distances des astres, il utilise donc de préférence un système de coordonnées polaires sphériques sur une sphère unité. Il introduit ainsi la notion de sphère céleste.

Nous allons décrire différents repères utilisés par les astronomes. Comme on observe depuis la Terre les mesures seront faites et les calculs seront faits dans des repères liés à la Terre, les repères seront donc souvent géocentriques.

## 1.2 Les repères écliptiques et équatoriaux.

Le repère écliptique a pour plan de base  $(O,xy)$  le plan de l'orbite du barycentre Terre Lune autour du Soleil. Historiquement, les astronomes de l'Antiquité pensaient que la Terre était le centre de l'univers, le plan de l'écliptique était donc pour eux le plan de la trajectoire apparente du Soleil parmi les étoiles des constellations du zodiaque. Le terme écliptique<sup>1</sup> a pour origine le fait que les éclipses de Lune et Soleil ne peuvent se produire que lorsque la Lune est proche de ce plan. Les deux coordonnées polaires définies sur ce repère portent les noms de longitude écliptique ( $\lambda$ ) et de latitude écliptique ( $\beta$ ), elles sont généralement exprimées en degrés. La direction  $Oz$  normale au plan de l'écliptique porte le nom de pôle de l'écliptique, elle est définie de sorte que le barycentre Terre Lune tourne dans le sens direct (sans mathématique : inverse des aiguilles d'une montre) autour du Soleil (ou que le Soleil apparent tourne dans le sens direct autour de la Terre donc d'ouest en est). Le repère écliptique dépend de la théorie décrivant le mouvement du barycentre Terre Lune. La direction  $Ox$ , origine des longitudes, pourrait être quelconque ; nous verrons que l'on a choisi une direction particulière, celle de l'équinoxe de printemps.

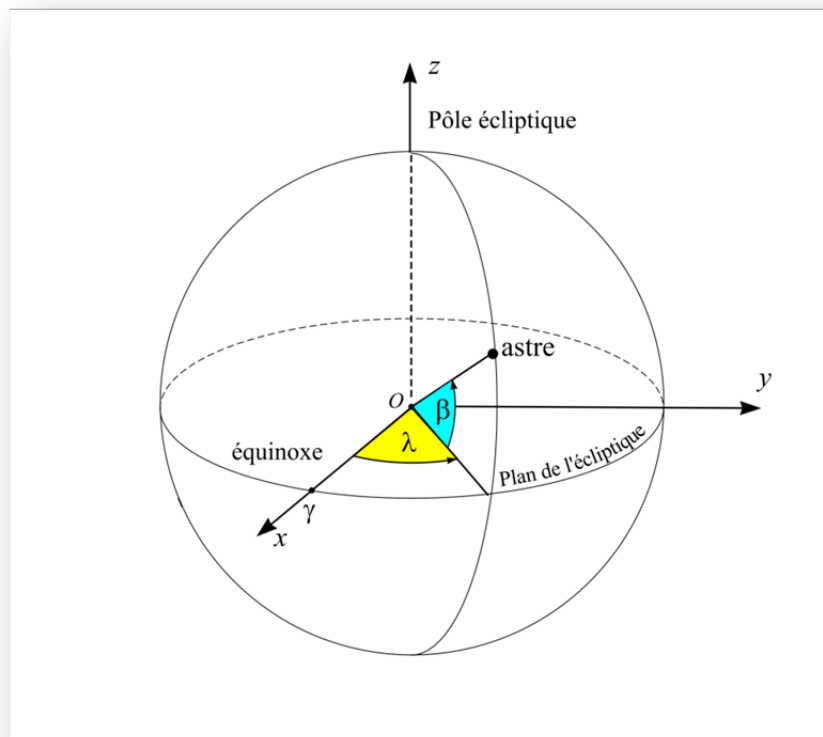


Figure 1 : Le repère écliptique

Le repère écliptique est un repère céleste, il ne fait intervenir que le mouvement apparent du Soleil vu depuis la Terre, mais ne fait pas intervenir la rotation de la Terre sur elle-même. Comme toutes les planètes principales tournent autour du Soleil sur des trajectoires proches de l'écliptique, le repère écliptique sera privilégié pour la construction des théories planétaires.

Les Grecques privilégièrent l'astronomie écliptique est l'usage des coordonnées écliptiques.

<sup>1</sup> Du latin *eclipticus* (« sujet aux éclipses » ou « de l'écliptique ») venant lui même du grec ancien  $\kappa\lambda\epsilon\iota\pi\tau\iota\kappa\omicron\varsigma$ , *ekleiptikos* de même sens.

On peut également faire des mesures sur le ciel par rapport au plan équatorial terrestre, dans ce cas on utilise un autre repère qui est le repère équatorial. À un instant quelconque, l'équateur céleste est le plan normal à l'axe de rotation instantané de la Terre sur elle-même.

L'axe des pôles de l'écliptique et l'axe de rotation de la Terre ne sont pas parallèles, il en est de même des deux plans normaux à ces deux axes : l'écliptique et l'équateur céleste. Si ces deux plans ne sont pas parallèles, ils se coupent selon une droite que nous appelons droite des équinoxes.

Le repère lié à l'équateur et à l'axe de rotation terrestre porte le nom de repère équatorial. La sphère céleste associée à ce repère porte le nom de sphère céleste équatoriale. Les deux coordonnées polaires définies sur ce repère portent les noms d'ascension droite ( $\alpha$ ) et de déclinaison ( $\delta$ ). Généralement l'ascension droite est exprimée en heures ( $24\text{h} = 360 = 2\pi$ ) et la déclinaison est exprimée en degrés. De nouveau on pourrait prendre une direction quelconque comme axe Ox du repère équatorial, mais il est judicieux de prendre comme axe l'intersection du plan de l'écliptique et de l'équateur c'est-à-dire la droite des équinoxes. Sur cette droite on a le choix entre deux directions, celle du Soleil à l'équinoxe de printemps ou celle du Soleil à l'équinoxe d'automne. On a choisi la direction de l'équinoxe de printemps. Ainsi cette direction porte également le nom de direction du point vernal. On l'a noté avec la lettre grecque  $\gamma$  qui est proche du symbole  $\Lambda$  du signe de Bélier, premier signe du zodiaque (longitude  $0^\circ$  à  $30^\circ$ ). De même la direction opposée est souvent notée du signe G de la Balance, septième signe du zodiaque (longitude  $180^\circ$  à  $210^\circ$ ). Le grand cercle de la sphère céleste passant par les pôles célestes et les équinoxes porte le nom de colure des équinoxes.

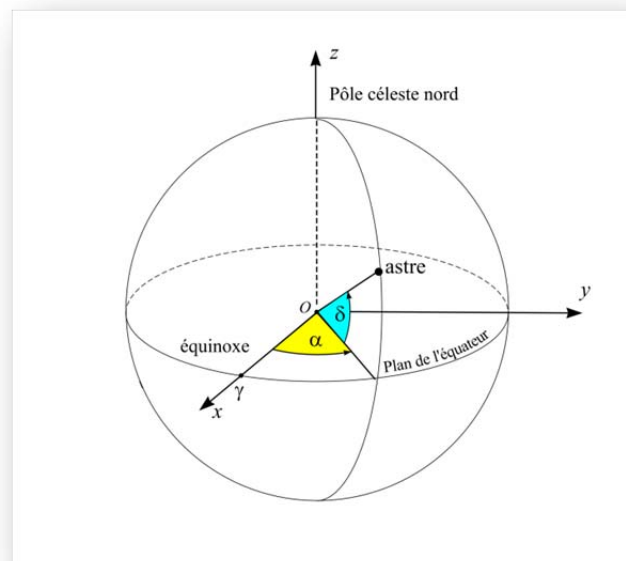


Figure 2 : Repère équatorial

L'angle que fait le plan de l'écliptique sur le plan de l'équateur porte le nom d'obliquité de l'écliptique, c'est l'inclinaison de l'orbite du barycentre Terre Lune sur le plan équatorial. On le note généralement avec la lettre grecque  $\varepsilon$  et il vaut environ  $23^\circ 26' 21''$  pour l'époque du premier janvier 2000 à 12h TT. La droite perpendiculaire à la droite des équinoxes contenue dans le plan de l'écliptique porte le nom de droite des solstices. De même, le grand cercle de la sphère céleste qui passe par les pôles célestes et les points solsticiaux porte le nom de colure des solstices. On remarquera que le colure des solstices passe également par les pôles de l'écliptique. Les colures des solstices et des équinoxes divisent l'équateur et l'écliptique en quatre secteurs égaux de  $90^\circ$ .

## 2 Les phénomènes astronomiques

On appelle phénomène astronomique toute configuration mettant en jeu plusieurs corps du système solaire, ces configurations peuvent ne pas être visibles depuis la Terre.

### 2.1 Phénomènes entre une planète ou la Lune, la Terre et le Soleil

Ces phénomènes sont calculés pour le centre de la Terre et correspondent à des positions particulières des planètes ou de la Lune et du Soleil. Dans certains cas, il y a une différence entre les planètes inférieures et les planètes supérieures. On appelle planète inférieure une planète dont l'orbite est à l'intérieur de l'orbite de la Terre et l'on appelle planète supérieure une planète dont l'orbite est à l'extérieur de l'orbite de la Terre. Par abus de langage les planètes inférieures sont parfois appelées intérieures et les planètes supérieures sont appelées extérieures. Certains corps (astéroïdes ou comètes) ont des orbites qui peuvent couper l'orbite terrestre, ils ne sont ni inférieurs ni supérieurs, ces corps sont appelés *géocroiseurs*. La Lune tournant autour de la Terre est un cas particulier, elle présente parfois les propriétés des planètes inférieures (conjonction) et parfois les propriétés des planètes supérieures (opposition).

#### 2.1.1 Les conjonctions et les oppositions

Pour un astre quelconque, on appelle élongation l'angle ayant pour sommet le centre de la Terre et pour côtés les directions Terre-Soleil et Terre-astre. L'élongation peut aussi se calculer dans le plan de l'écliptique en utilisant la projection orthogonale de la direction de l'astre dans l'écliptique, dans ce cas on parle d'élongation en longitude.

On a un alignement, vu depuis la Terre lorsque l'élongation est nulle ou égale à  $180^\circ$ . En réalité, on n'a jamais un alignement parfait. Par contre, on a régulièrement des alignements en longitude lorsque les élongations en longitude sont nulles ou égales à  $180^\circ$ .

Lorsque l'élongation en longitude est égale à  $180^\circ$ , l'astre est en opposition par rapport au Soleil. Cela n'est possible que si la Terre passe entre le corps et le Soleil.

Lorsque l'élongation en longitude est nulle, l'astre est en conjonction avec le Soleil.

Les planètes supérieures présentent une conjonction et une opposition.

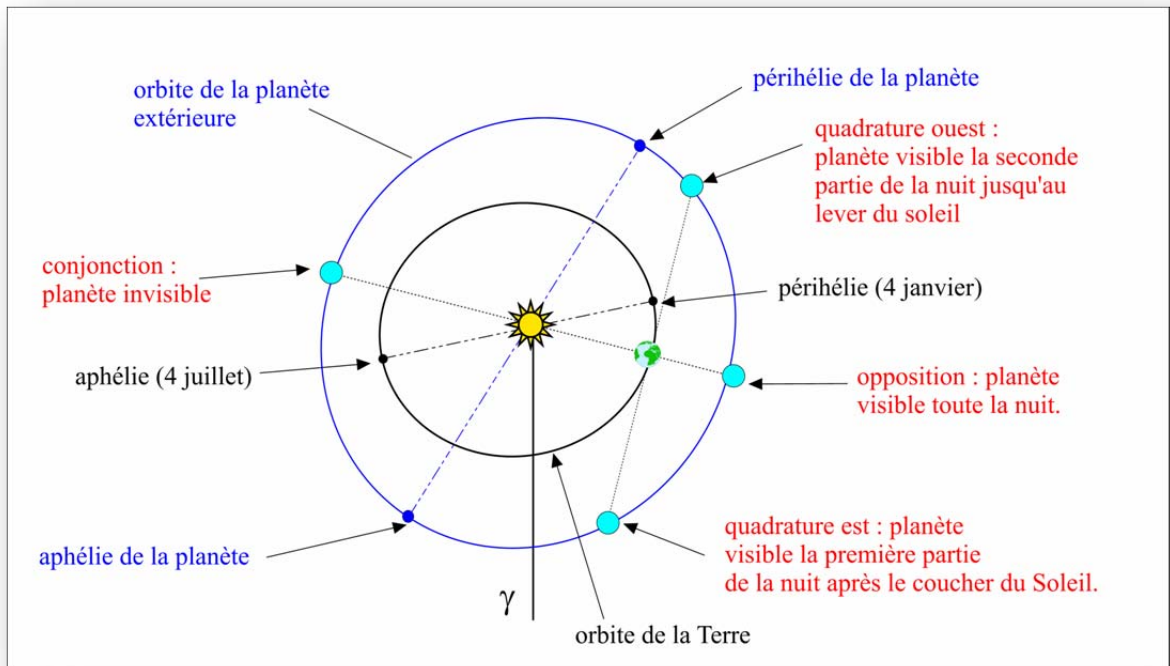


Figure 1. Planètes supérieures : Opposition, conjonction et quadratures.

Les planètes inférieures ne sont jamais en opposition, mais présentent deux conjonctions. Une conjonction inférieure, lorsque la planète est entre la Terre et le Soleil et une conjonction supérieure lorsque le Soleil est entre la planète et la Terre.

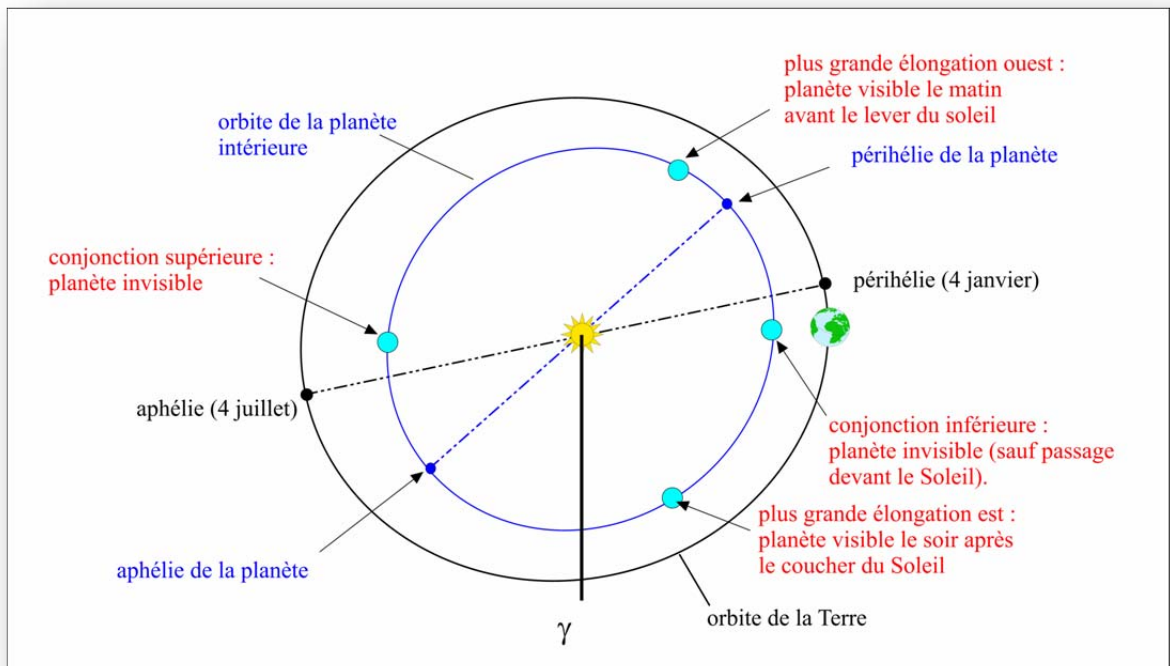


Figure 2. Conjonctions inférieures, supérieures et plus grandes elongations.

Lorsque les planètes sont en opposition, elles sont du côté opposé au Soleil, elles sont donc observables toute la nuit. Lorsque les planètes sont en conjonction, elles sont dans la même direction que le Soleil et elles ne sont donc pas observables. En conjonction inférieure, les planètes inférieures peuvent éventuellement passer devant le Soleil, on a alors un passage de la planète devant le Soleil.

### 2.1.2 Les quadratures et les plus grandes élongations

Il y a quadrature lorsque l'élongation en longitude est égale à  $90^\circ$  ou à  $270^\circ$ .

Pour les planètes inférieures, il n'existe pas de quadrature, mais il existe deux positions particulières, correspondant aux plus grandes élongations. On distingue la plus grande élongation est et la plus grande élongation ouest.

Le cas de la Lune est particulier, car elle tourne autour de la Terre, il y a une conjonction, une opposition et deux quadratures. La conjonction en longitude correspond à la nouvelle Lune, l'opposition en longitude correspond à la pleine Lune et les quadratures en longitude correspondent respectivement au premier et au dernier quartier de Lune. La nouvelle Lune et la pleine Lune portent également le nom de syzygies. Au moment des conjonctions, il y a possibilité d'éclipse du Soleil. Au moment des oppositions, il y a possibilité d'éclipse de Lune.

On remarquera que les phases sont calculées pour le centre de la Terre et non pour un lieu sur Terre. Or dans le cas de la Lune, compte tenu de la forte parallaxe de la Lune, les instants des phases topocentriques calculées pour un lieu quelconque sur Terre peuvent présenter des écarts plus ou moins importants avec les phases géocentriques.

### 2.1.3 Les phases des planètes

En fonction des positions relatives des planètes et de la Terre, la portion des astres éclairée par le Soleil présente des phases différentes vues depuis la Terre. On appelle angle de phase l'angle ayant pour sommet le centre de la planète et pour côtés les directions du Soleil et de la Terre.

Dans les éphémérides, on donne parfois la fraction illuminée  $k$  du disque de la planète, cette valeur se calcule à partir de l'angle de phase  $i$  par la relation suivante :

$$k = \frac{1}{2}(1 + \cos i)$$

L'angle de phase est minimal à l'opposition ou à la conjonction supérieure pour les planètes inférieures.

L'angle de phase est proche de  $180^\circ$  à la conjonction inférieure pour les planètes inférieures.

Les phases des planètes ne sont observables que jusqu'à Jupiter ; après elles sont trop faibles pour être observées.

On remarquera que les « phases » de la Lune, c'est-à-dire la pleine Lune, la nouvelle Lune et les deux quartiers de Lune sont calculés à l'aide de l'élongation en longitude entre la Lune et le Soleil et non à l'aide de l'angle de phase. Ainsi au moment de la nouvelle Lune l'angle de phase de la Lune n'est pas égal à  $180^\circ$  bien que son élongation en longitude soit nulle. De même au moment de la pleine Lune, l'angle de phase n'est pas nul bien que l'élongation soit de  $180^\circ$ .



### 2.1.4 La révolution synodique moyenne

L'intervalle de temps moyen qui s'écoule entre deux phénomènes identiques, c'est-à-dire qui ramènent les positions relatives des trois corps dans un même état, porte le nom de révolution synodique moyenne. On conçoit très bien que cette période de révolution est obtenue à partir des mouvements moyens de la Terre et du second corps autour du Soleil. La vitesse des corps autour du Soleil n'étant pas uniforme et leur distance n'étant pas constante, la distance du corps à la Terre au moment du phénomène ne sera pas la même après une révolution synodique. Par exemple, la distance entre la Terre et Mars ne sera pas la même à deux oppositions successives. Si l'on désire calculer avec quelle fréquence on va retrouver des oppositions avec des distances quasi identiques, on doit combiner la révolution synodique et la révolution anomalistique de la planète (qui ramène la planète à une même position par rapport à son périhélie). La figure 3 nous donne les oppositions successives de Mars entre 1980 et 2003.

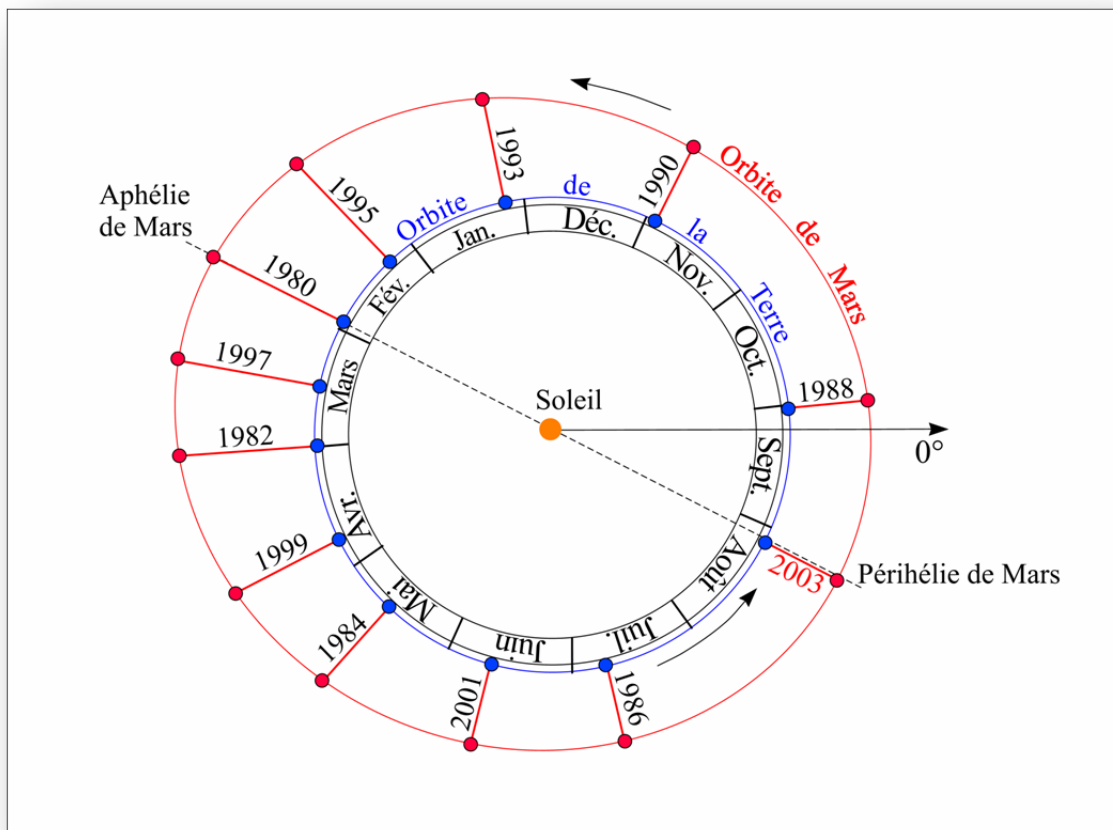


Figure 3. Oppositions de Mars.

De même si l'on désire calculer avec quelle fréquence on va retrouver des conjonctions avec la planète dans le plan de l'écliptique, on doit combiner la révolution synodique (qui ramène une conjonction) et la révolution draconitique de la planète (qui ramène la planète au nœud de son orbite).

## 2.2 Station et rétrogradation des planètes

L'ensemble des planètes tourne autour du Soleil avec des vitesses angulaires moyennes de plus en plus faibles au fur et à mesure que l'on s'éloigne du Soleil (c'est une conséquence de la troisième loi de Kepler). La vitesse angulaire d'une planète vue depuis la Terre est la combinaison de la vitesse de la planète et de la vitesse de Terre. Cette combinaison des

vitesse peut donner à la planète une vitesse angulaire apparente positive, nulle ou négative. Lorsque la vitesse angulaire est positive, le mouvement apparent de la planète vu depuis la Terre est direct. Lorsque la vitesse est nulle, on dit que la planète est stationnaire. Lorsque la vitesse est négative, on dit que la planète est rétrograde. Ces différents mouvements sont visibles sur le fond d'étoiles.

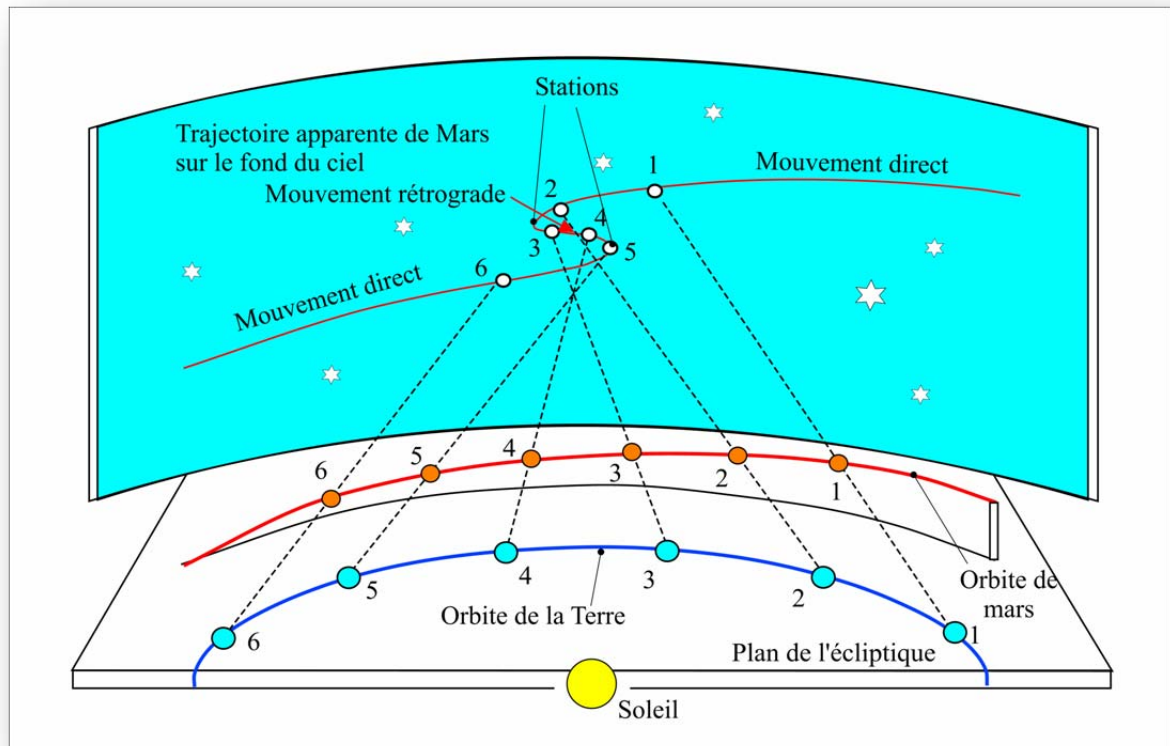


Figure 4. *Mouvement apparent de Mars.*

### 2.3 Autres phénomènes

Il y a également des positions particulières des planètes ou de la Lune :

- Les instants où elles passent au nœud ascendant ou au nœud descendant de leurs orbites. Ces instants sont importants, car à ce moment l'astre est très proche de l'écliptique.
- Les instants où elles passent au périhélie et à l'aphélie, au périégée ou à l'apogée. Ces instants correspondent aux distances minimales et maximales de l'astre au Soleil et de l'astre à la Terre.
- Les instants où les déclinaisons sont extrémales ou nulles. Ces instants sont également importants, car lorsque la déclinaison est maximale l'astre monte le plus haut dans le ciel, lorsque la déclinaison est minimale l'astre monte le plus bas dans le ciel et lorsque la déclinaison est nulle l'astre est dans le plan de l'équateur terrestre.
- Les instants où elles entrent dans les signes du zodiaque.
- Les instants où elles entrent ou sortent des constellations.
- Les conjonctions de planètes entre elles.

En général, la plupart de ces phénomènes sont géocentriques, parfois dans le cas de la Lune on calcule le phénomène topocentrique pour tenir compte de la forte parallaxe lunaire, c'est le cas notamment pour les entrées dans les constellations où pour les extremums en latitude ou en déclinaison.

On calcule également parfois des phénomènes héliocentriques : par exemple les conjonctions, les oppositions et les quadratures entre planètes.

## 2.4 Le lever, le coucher et le passage au méridien des astres

La Terre tournant sur elle-même d'ouest en est, le ciel et les planètes ont un mouvement apparent circulaire vu depuis la Terre dirigé d'est en ouest. Les planètes et les étoiles se lèvent dans la direction de l'est, et après être passées dans la direction du méridien, elles se couchent vers l'ouest. Le lever et le coucher des étoiles et des planètes varient en fonction de la latitude du lieu d'observation et du jour considéré.

Dans le repère équatorial, défini par l'équateur et la direction du pôle, les positions des étoiles et des planètes sont données par leur ascension droite  $\alpha$  (ou leur angle horaire  $H$ ) et leur déclinaison  $\delta$ . Dans le repère horizontal local, défini par l'horizon et le zénith, les coordonnées des planètes et des étoiles sont données par leur hauteur  $h$  (ou leur distance zénithale  $z$ ) et leur azimut  $a$ . Les levers et les couchers des astres correspondent à des hauteurs apparentes nulles. Le passage supérieur au méridien correspond à l'instant où l'azimut (ou l'angle horaire) est nul, à cet instant si la déclinaison du corps est constante alors le corps culmine au-dessus de l'horizon et sa hauteur est maximale. Il ne faut pas confondre culmination et passage au zénith. Il y a passage au zénith uniquement lorsque le corps culmine à  $90^\circ$ . Le passage inférieur au méridien correspond à l'instant où l'azimut (ou l'angle horaire) est égal à  $12h$ , à cet instant la hauteur de l'astre est minimale, le passage inférieur au méridien est observable si sa hauteur est positive.

Nous allons étudier le lever et le coucher des planètes et des étoiles pour un lieu de latitude donnée. Nous traiterons à part le cas du Soleil et de la Lune.



### *Pour en savoir plus.*

Calcul de la hauteur  $h$  et de l'azimut  $a$  d'un astre à partir de sa déclinaison et de son ascension droite.

Pour un lieu dont on connaît la latitude  $\varphi$  et la longitude  $\lambda$  les formules de trigonométrie sphérique permettant de passer des coordonnées équatoriales ( $\alpha$ ,  $\delta$ ) aux coordonnées horizontales ( $a$ ,  $h$ ) à un instant  $t$  en temps légal sont les suivantes :

$$\begin{aligned}\sin h &= \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos H \\ \cos h \sin a &= \cos \delta \sin H \\ \cos h \cos a &= -\cos \varphi \sin \delta + \sin \varphi \cos \delta \cos H\end{aligned}$$

Où  $H$  est l'angle horaire défini par  $H = T - \alpha$ , où  $T$  est le temps sidéral local du lieu d'observation à l'instant  $t$  de l'observation.

L'ascension droite et la déclinaison sont données dans les éphémérides, sous forme de tableaux.

La valeur du temps sidéral local  $T$  à l'instant  $t$ , exprimée en heure légale se calcule à partir du temps sidéral au méridien international à zéro heure de temps universel (0h UTC) à l'aide des expressions suivantes :

1. On passe de l'heure légale au temps universel coordonné (UTC) en retranchant la valeur  $\Delta t$  du décalage horaire du pays.

$$t_{UT} = t - \Delta t$$

2. Puis on calcule la valeur du temps sidéral au méridien international à l'instant  $t_{UT}$ . Ce temps sidéral est égal au temps sidéral au méridien international à zéro heure de temps

universel plus la variation de temps sidéral pendant la période  $t_{UT}$ . Pour cela on effectue une règle de trois, sachant que l'angle temps sidéral varie de 24h (360°) en 23h 56m 4s de temps universel ; on a la relation suivante :

$$T_G(t_{UT}) = T_G(0hUT) + t_{UT} \frac{24h}{23h56m4s}$$

$$T_G(t_{UT}) = T_G(0hUT) + t_{UT} \times 1,0027379$$

3. Le temps sidéral local  $T$  est alors calculé en retranchant au temps sidéral au méridien international la valeur de la longitude du lieu comptée négativement vers l'est.

$$T = T_G(t_{UT}) - \lambda$$

La valeur du temps sidéral au méridien international à 0h UTC chaque jour de l'année est fournie par les éphémérides.

### 2.4.1 Les formules de trigonométrie sphérique<sup>2</sup>

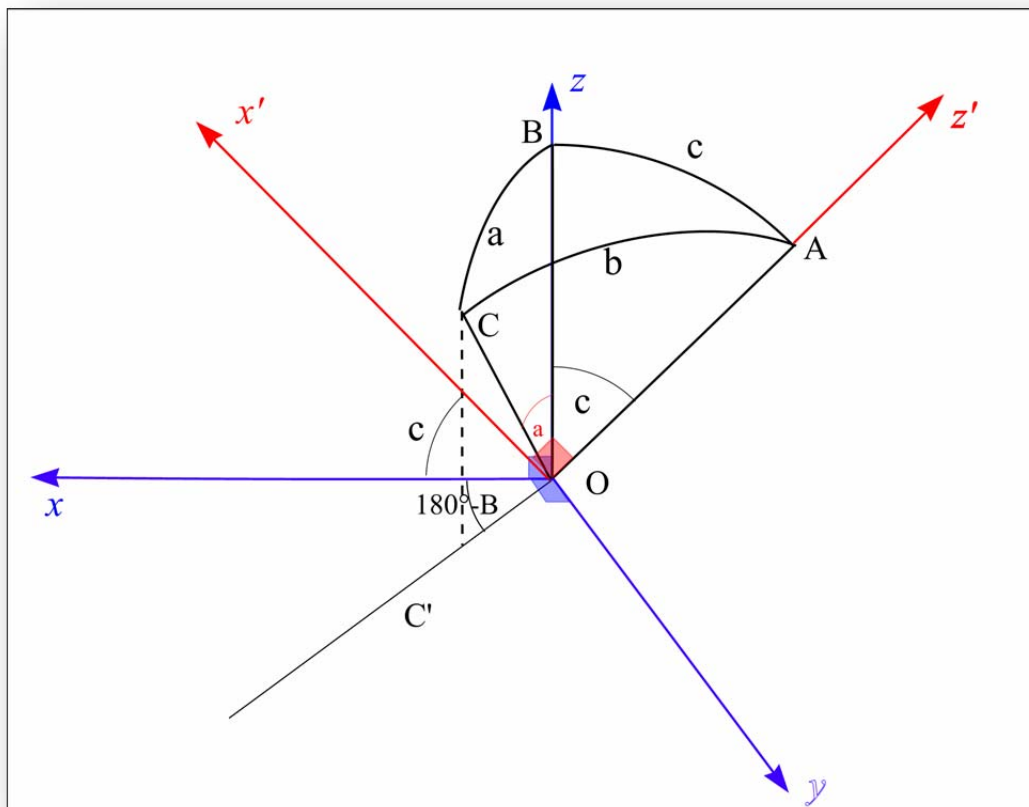


Figure 5. Triangle sphérique.

Soit le triangle sphérique  $OABC$  et le repère  $Oxyz$  : tel que  $B$  soit sur  $Oz$  et  $AB$  soit dans le plan  $xOz$ .

Le vecteur  $OC$  dans  $Oxyz$  a pour coordonnées :

$$x = -\sin a \cos B$$

$$y = \sin a \sin B$$

$$z = \cos a$$

<sup>2</sup> L'ensemble des formules de trigonométrie sphérique se trouve en annexe en fin de document.

où  $a$  est l'angle  $COB$  et  $B$  est l'angle des plans  $COB$  et  $BOA$ .  
 $Ox'y'z'$  est le trièdre obtenu par une rotation de  $Oxyz$  d'un angle  $c$  autour de l'axe  $Oy$ .  
 Le vecteur  $OC$  dans  $Ox'y'z'$  a pour coordonnées :

$$\begin{aligned}x' &= \sin b \cos A \\y' &= \sin b \sin A \\z' &= \cos b\end{aligned}$$

où  $b$  est l'angle  $COA$  et  $A$  l'angle des plans  $COA$  et  $AOB$ .

On passe du repère  $Oxyz$  au repère  $Ox'y'z'$  par la rotation d'angle  $c$  autour de  $Oy$ , donc on a la relation suivante entre les coordonnées  $xyz$  et  $x'y'z'$ :

$$\begin{aligned}x &= x' \cos c - z' \sin c \\y &= y' \\z &= x' \sin c + z' \cos c\end{aligned}$$

D'où l'on déduit les trois formules principales suivantes :

$$\begin{aligned}\sin a \cos B &= \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos A \\ \sin a \sin B &= \sin b \sin A \\ \cos a &= \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A\end{aligned}$$

On trouvera en annexe d'autres formules utiles.

Pour retrouver les formules précédentes, il suffit d'appliquer ces trois relations au triangle sphérique local défini par le pôle céleste, le zénith et la direction de l'astre.

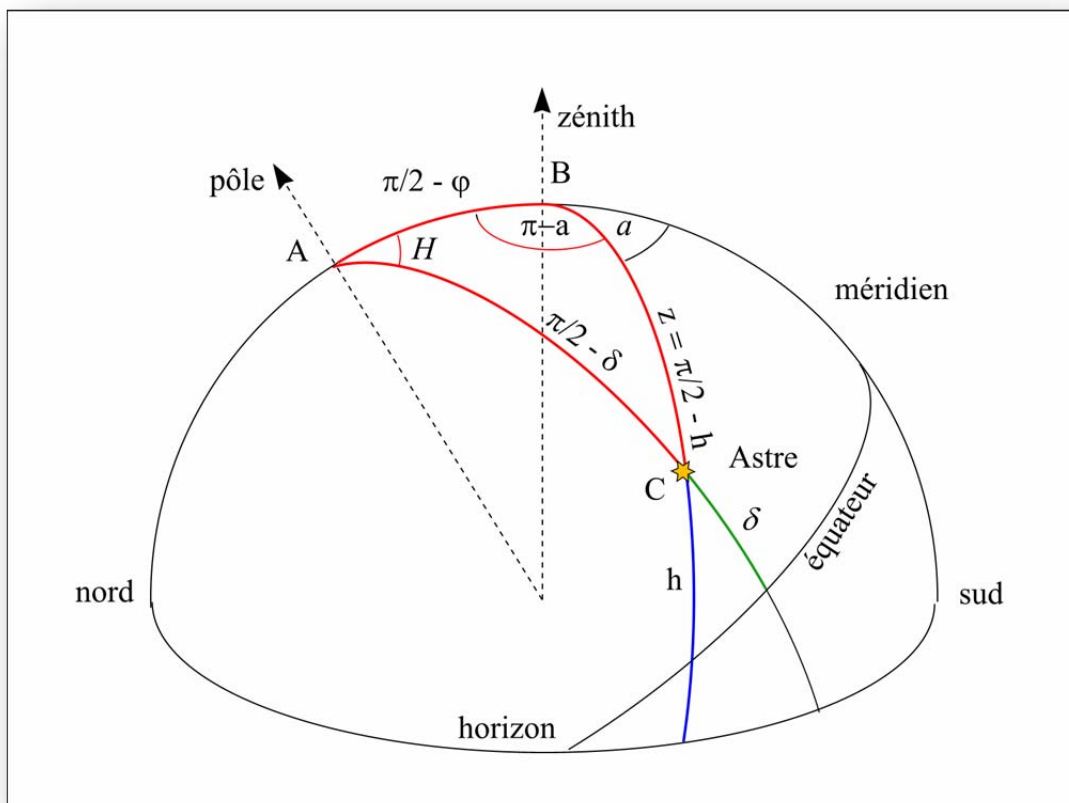


Figure 6. Triangle sphérique local.

### 2.4.2 Le lever et le coucher des étoiles

Le problème du lever et du coucher des étoiles est particulier dans la mesure où les coordonnées équatoriales des étoiles peuvent être considérées comme fixes si l'on néglige la précession des équinoxes et le mouvement propre des étoiles, ce qui est possible sur de courtes périodes de temps. Les étoiles vont donc parcourir durant le mouvement diurne de la Terre des petits cercles ayant pour pôle le pôle céleste nord, c'est-à-dire des petits cercles parallèles à l'équateur terrestre. Les planètes, le Soleil et la Lune n'ayant pas des coordonnées équatoriales fixes *ne vont pas parcourir exactement ces petits cercles*.

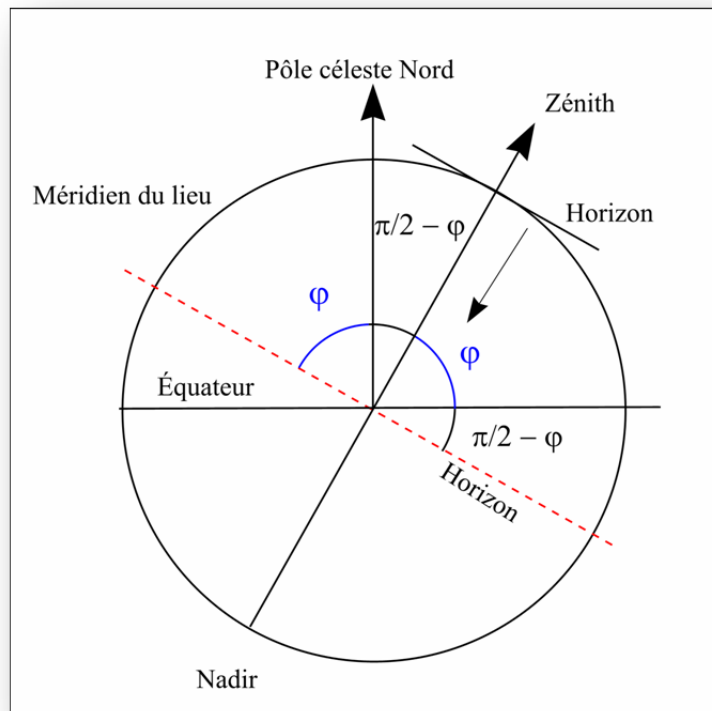


Figure 7. Coupe méridienne équatoriale.

Sur la figure 7 nous avons tracé une coupe méridienne de la sphère terrestre, l'équateur terrestre et la direction des pôles, puis pour un point de la sphère terrestre, de latitude  $\varphi$ , nous avons tracé le plan horizontal à la sphère en ce point et la direction du zénith. La direction opposée au zénith porte le nom de nadir. Si l'on transpose le lieu d'observation au centre de la Terre et si l'on fait tourner la figure de  $\pi/2 - \varphi$  de manière à rendre horizontal l'horizon du lieu on obtient la figure 8. Le cercle représente le méridien local du lieu.

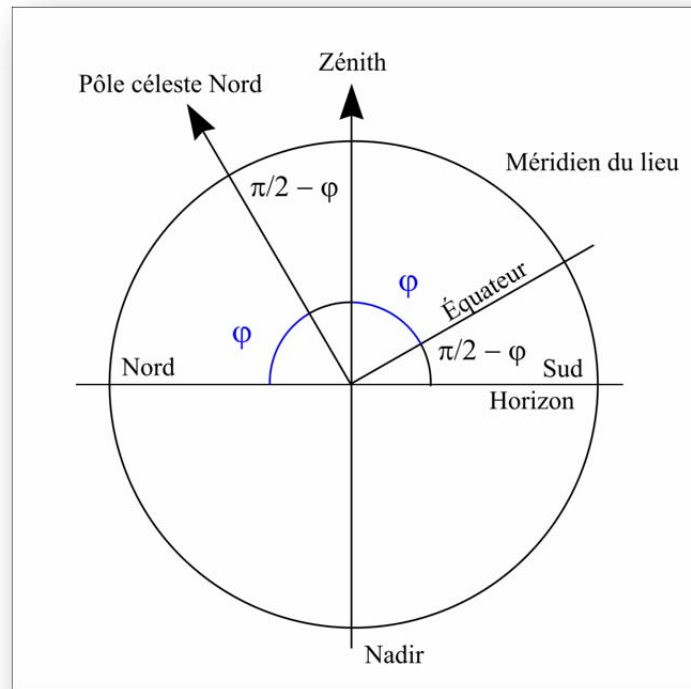


Figure 8. Coupe méridienne horizontale.

Sur cette figure on voit que l'angle entre la direction du pôle et la direction de l'horizon est égal à la latitude du lieu. L'angle entre la direction du zénith et la direction du pôle est égal au complémentaire de la latitude c'est-à-dire à la colatitude  $\bar{\varphi}$ . De même, la hauteur de l'équateur au-dessus de l'horizon est égale à la colatitude du lieu.

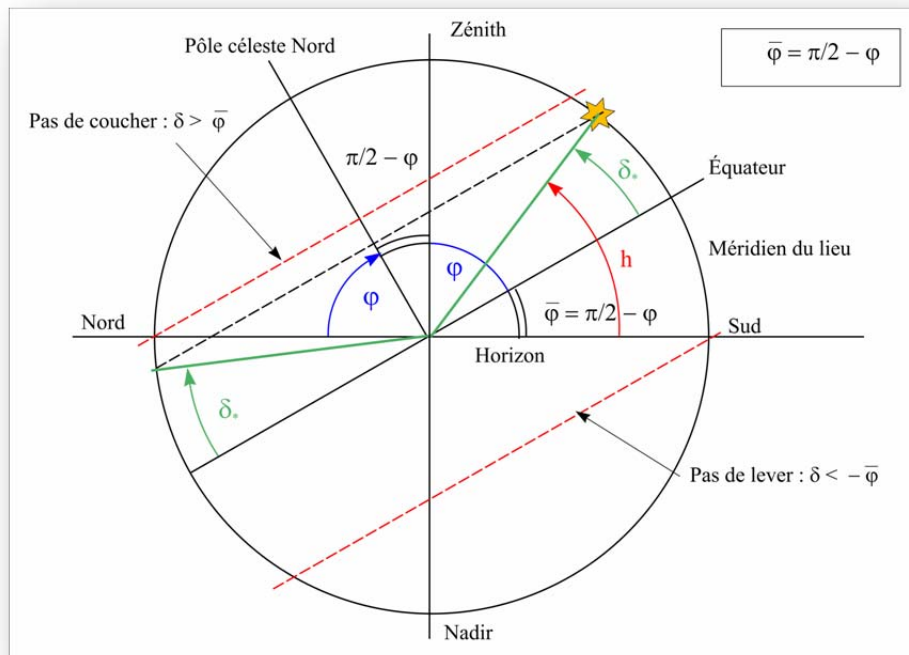


Figure 9. Lever, coucher et passages d'une étoile.

Pour un lieu de l'hémisphère nord, plaçons une étoile de déclinaison  $\delta_*$  à son passage supérieur au méridien. Un astre de déclinaison  $\delta_*$  (on rappelle que la déclinaison est la hauteur de l'astre au-dessus de l'équateur) a, à son passage supérieur au méridien, une hauteur  $h_{sup}$  égale à la somme de sa déclinaison et de la colatitude du lieu.

$$h_{sup} = \bar{\varphi} + \delta_*$$

La projection de la trajectoire apparente de l'étoile (petit cercle normal à la ligne des pôles) pendant une rotation de la Terre sur elle-même est une corde parallèle à l'équateur terrestre.

De même, on voit très facilement que la hauteur de l'astre à son passage inférieur au méridien, est égale à sa déclinaison moins la colatitude du lieu.

$$h_{inf} = \delta_* - \bar{\varphi}$$

Il est alors facile de déterminer pour un lieu donné de l'hémisphère nord quelles sont les étoiles qui se lèvent, qui ne se lèvent pas et celles qui ne se couchent jamais. Ces étoiles portent le nom d'étoiles circumpolaires.

Étoiles qui	Conditions	Résultats
ne se lèvent pas	$h_{sup} < 0$	$\delta_* < -\bar{\varphi}$
se lèvent et se couchent	$h_{sup} > 0$ et $h_{inf} < 0$	$-\bar{\varphi} < \delta_* < \bar{\varphi}$
ne se couchent pas	$h_{inf} > 0$	$\delta_* > \bar{\varphi}$

On constate que plus l'on monte en latitude moins l'on voit d'étoiles. Ainsi au pôle on ne voit que la moitié des étoiles, celles de l'hémisphère nord ou de l'hémisphère sud suivant que l'on se trouve au pôle Nord ou au pôle Sud. Lorsqu'on est sur l'équateur, on a la possibilité d'observer au cours de l'année la totalité des étoiles de la sphère céleste, dans ce cas les étoiles proches des pôles sont proches de l'horizon et il n'y a pas d'étoiles circumpolaires.

Pour une étoile donnée, ses coordonnées équatoriales étant fixes, les azimuts de son lever et de son coucher sont toujours quasiment les mêmes au cours de l'année ainsi que la hauteur de son passage au méridien. Ces quantités varient lentement en raison de la précession des équinoxes et du mouvement propre des étoiles.

### 2.4.3 Pour en savoir plus

Toutes les étoiles observables en un lieu donné se lèvent et se couchent chaque jour, mais elles ne sont visibles que si le Soleil est couché lorsqu'elles sont au-dessus de l'horizon. La période de visibilité d'une étoile dépend donc de la position apparente du Soleil sur l'écliptique. Voici quelques définitions relatives aux levers et aux couchers des étoiles par rapport aux levers et aux couchers du Soleil.

Dans les définitions qui suivent l'adjectif vrai indique un phénomène (lever ou coucher) réel mais non observable, alors que l'adjectif apparent indique un phénomène à la fois réel et observable. Ces définitions sont celles publiées par Delambre dans son histoire de l'Astronomie, on trouve parfois des définitions différentes notamment celles des levers achroniques et des couchers cosmiques.



**Phénomènes vrais :**

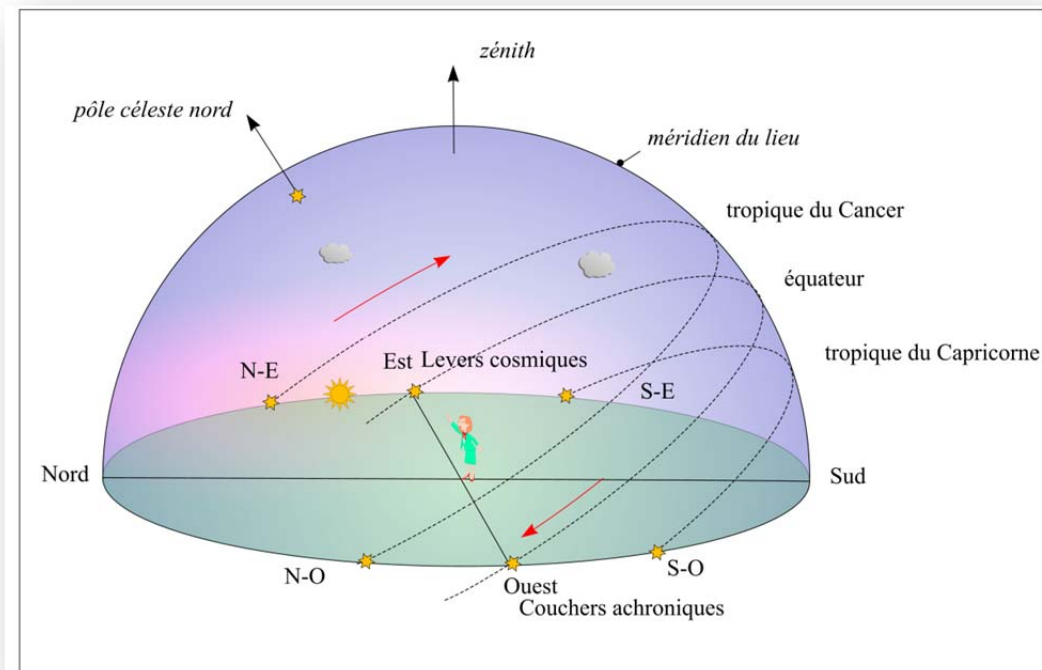


Figure 10. Levers cosmiques et couchers achroniques.

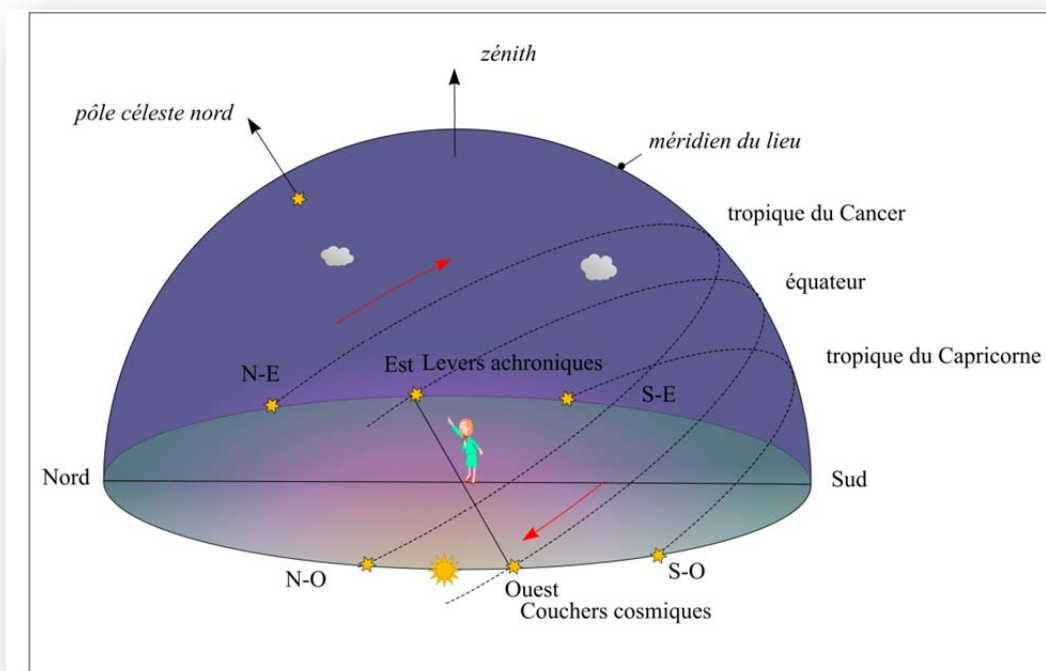


Figure 11. Levers achroniques et couchers cosmiques

**Le lever cosmique ou le lever vrai du matin :** jour où l'étoile se lève le matin en même temps que le Soleil.

**Le coucher cosmique ou le coucher vrai du soir** : jour où l'étoile se couche le soir en même temps que le Soleil.

**Le lever achronique ou le lever vrai du soir** : jour où l'étoile se lève le soir à l'est en même temps que le Soleil se couche à l'ouest.

**Le coucher achronique ou le coucher vrai du matin** : jour où l'étoile se couche le matin à l'ouest en même temps que le Soleil se lève à l'est.

**Phénomènes apparents :**

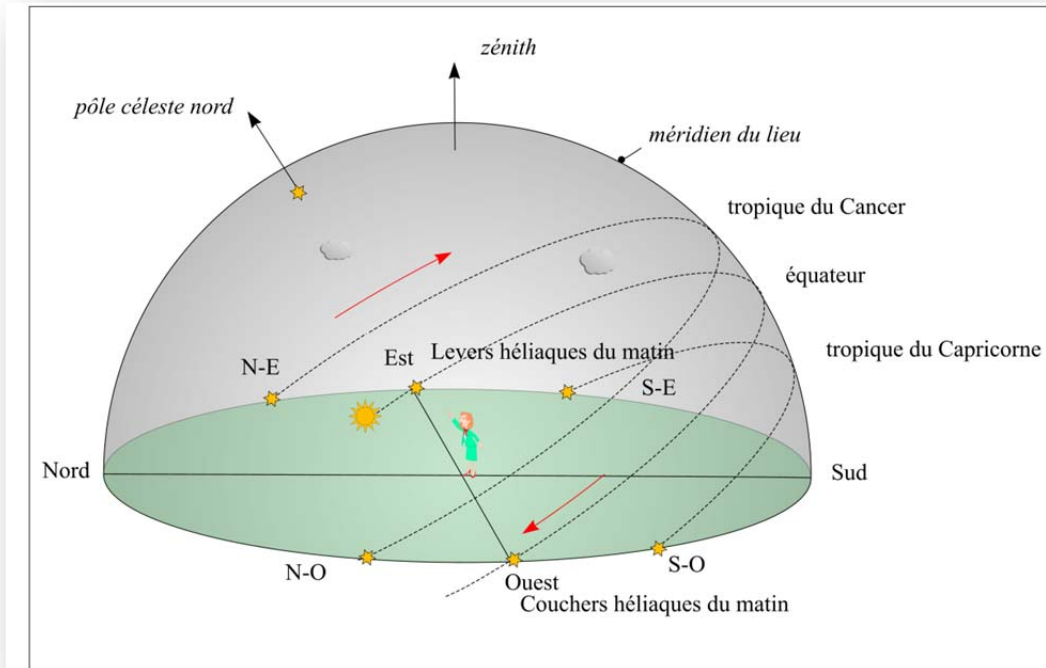


Figure 12. Levers et couchers héliaques du matin

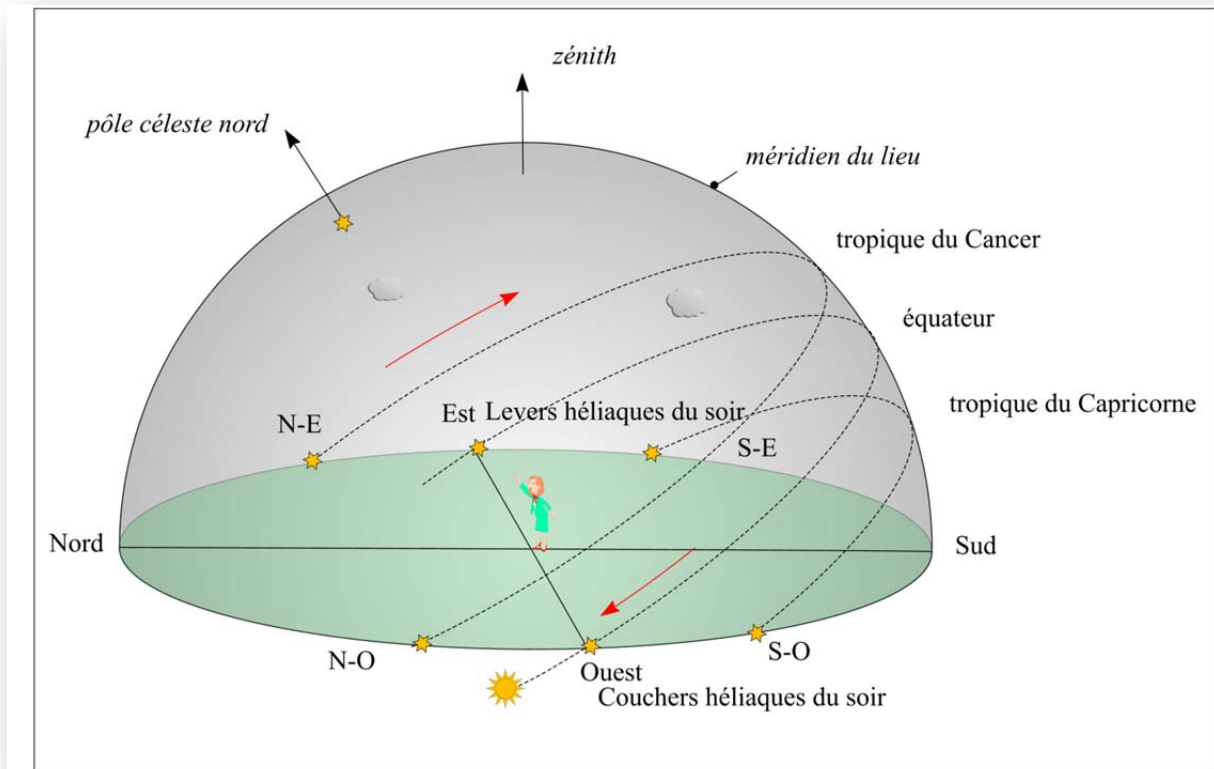


Figure 13. Levers et couchers héliaques du soir

**Le lever héliaque du matin ou le lever apparent du matin** : premier jour où l'étoile est visible à l'est dans la lueur de l'aube juste avant le lever du Soleil. C'est le début de la période de visibilité du matin.

**Le coucher héliaque du soir ou le coucher apparent du soir** : dernier jour où l'étoile est visible à l'ouest dans la lueur du crépuscule juste après le coucher du Soleil. C'est la fin de la période de visibilité du soir.

**Le lever héliaque du soir ou le lever apparent du soir** : dernier jour où le lever de l'étoile est visible à l'est à l'opposé de la lueur du crépuscule juste après le coucher du Soleil. Après cette date, l'étoile est déjà levée lorsque le Soleil se couche, c'est donc le début de la période de visibilité du soir.

**Le coucher héliaque du matin ou le coucher apparent du matin** : premier jour où le coucher de l'étoile est visible à l'ouest à l'opposé de la lueur de l'aube juste avant le lever du Soleil. Après cette date le coucher est visible avant le lever du Soleil, c'est donc la fin de la période de visibilité du matin.

Phénomènes		Visibilité	Nom	Nom de l'instant
Lever	matutinal	vrai	cosmique	<i>anatole</i>
		apparent	héliaque	<i>épitole</i>
	vespéral	vrai	achronique	
		apparent	héliaque	

Coucher	matutinal	vrai	achronique	<i>dyse</i>
		apparent	héliaque	
	vespéral	vrai	cosmique	
		apparent	héliaque	<i>crypse</i>

Les termes *anatole*, *épitole*, *dyse* et *crypse* ne sont plus utilisés de nos jours, voici les définitions qu'en donne Delambre dans son *Histoire de l'Astronomie Ancienne*.

« *L'anatole a lieu quand l'astre parait à l'horizon, pour s'élever bientôt au-dessus ; l'épitole est l'apparition de l'astre à l'horizon lorsque le soleil s'éloigne chaque jour de cet astre. La dyse ou simple coucher n'a de rapport qu'à l'horizon ; la crypse a de plus rapport au soleil qui se rapproche de l'étoile et l'absorbe dans ses rayons.* »

Nota : Claude Ptolémée dans l'Almageste (Livre VIII) cite, sans les utiliser, des notions plus complexes. Ainsi pour le lever du matin (qu'il nomme *apétiote du matin*), il distingue : l'*épanatole orientale invisible* (l'astre se lève juste avant le Soleil), la *synanatole orientale vraie* (l'astre se lève en même temps que le Soleil) et la *proanatole orientale visible* (l'astre se lève juste après le Soleil). Il utilise les mêmes termes pour le soir en remplaçant l'ordre des phénomènes. *L'apétiote du soir* se décompose donc en l'*épanatole visible du soir* (l'astre se lève juste après le coucher du Soleil), la *synanatole vraie du soir* (l'astre se lève en même temps que le Soleil se couche) et en *proanatole invisible du soir* (l'astre se lève juste avant que le Soleil ne se couche). Delambre est très critique sur ces notions « *Tout ce fatras scolastique est de l'invention de professeur qui veulent parler d'une science qui n'est pas faite. Il est d'une inutilité absolue pour l'Astronomie ; à quoi bon classer si méthodiquement une foule de circonstances la plupart inobservables, et qui n'auraient en aucun cas aucun usage ?* ».

Dans les calendriers solaires, les dates des levers et couchers héliaques, cosmiques et achroniques des étoiles évoluent lentement en raison de la précession des équinoxes.

### Histoire :

L'étude des premières et dernières visibilités des étoiles remonte à la plus haute antiquité. *La sphère en mouvement* et les *levers et couchers des étoiles* sont les plus anciens traités d'astronomie qui nous soient parvenus des Grecs, ils sont l'œuvre d'Autolycus de Pitane (vers 330 av. J.-C.).

Ces deux ouvrages sont les premiers d'une collection grecque que les historiens nomment « *la petite astronomie* », par opposition à la « *Grande Syntaxe Mathématique (l'Almageste)* » de Claude Ptolémée (milieu du deuxième siècle).

La petite astronomie regroupe les ouvrages suivants qui sont postérieurs aux traités d'Autolycus :

- *Les Phénomènes* d'Euclide,
- *Des grandeurs et distances du Soleil et de la Lune* d'Aristarque de Samos
- *Sur les Ascensions* d'Hypsiclès,
- *Sphériques – Des jours et des nuits – Des habitations* de Théodose.

Dans l'antiquité, les astronomes grecs produisaient des *parapegmes*, sortes d'almanachs donnant les dates des levers et couchers héliques des principales étoiles dans leur calendrier lunaire. Les levers et couchers héliques sont liés au Soleil donc aux calendriers solaires et aux saisons, la connaissance des dates ou l'observation de ces phénomènes permettait de reconnaître l'approche des différentes saisons. Hésiode : « *Commence la moisson quand les Pléiades, filles d'Atlas, se lèvent dans les cieux, et le labourage quand elles disparaissent ; elles demeurent cachées quarante jours et quarante nuits, et se montrent de nouveau lorsque l'année est révolue, à l'époque où s'aiguisse le tranchant du fer.* » (Les travaux et les jours, La moisson).

## 2.5 Calcul des levers et des couchers (formulaire)

On peut faire une recherche systématique, jour après jour des levers couchers d'une étoile et calculer quels jours ont lieu les différents types de lever et de coucher, on peut également calculer directement ces jours en utilisant les procédés que nous allons décrire.

### 2.5.1 Lever cosmique et achronique des étoiles

Il y a un lever cosmique d'une étoile lorsque l'étoile se lève en même temps que le Soleil. Il y a un lever achronique d'une étoile lorsque l'étoile se lève en même temps que le soleil se couche. Ces levers ne sont jamais observables, on les appelle également levers vrais du matin (LVM) et du soir (LVS).

Dans ce calcul nous allons dans un premier temps négliger la réfraction atmosphérique.

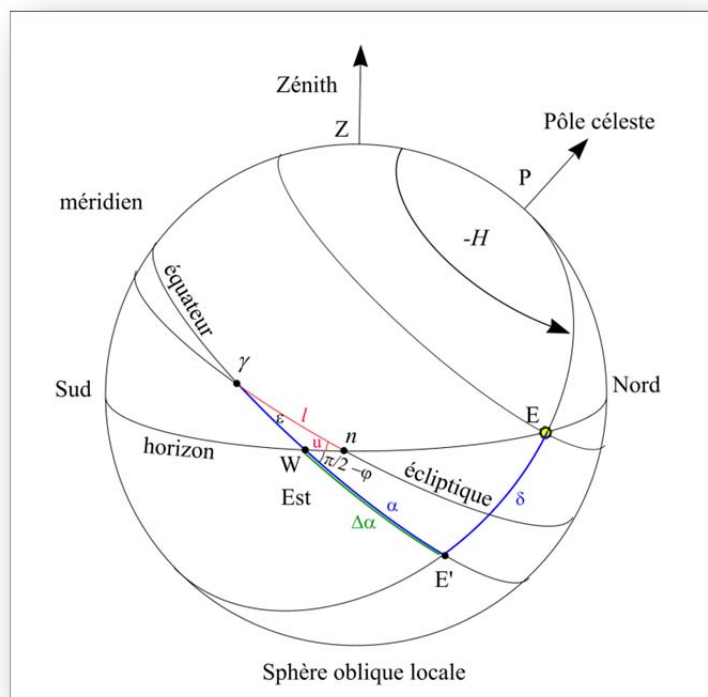


Figure 14. Sphère oblique locale est, ascension oblique et différence ascensionnelle..

Considérons la sphère oblique est de la figure ci-dessus, l'étoile est sur l'horizon est à son lever, nous allons calculer l'ascension oblique de cette étoile, c'est-à-dire l'angle  $\gamma W$ , à partir de la déclinaison  $\delta$  de l'étoile et de la latitude du lieu  $\varphi$ .

Pour cela considérons le triangle sphérique EE'W rectangle en E', l'angle WE' que l'on notera  $\Delta\alpha$  et qui porte le nom de différence ascensionnelle, est donné par la formule suivante :

$$\sin \Delta\alpha = \tan \delta \tan \varphi \quad (1)$$

L'ascension oblique est alors :  $\alpha - \Delta\alpha$ . (2)

Pour connaître le jour du lever cosmique du Soleil, il suffit de calculer la longitude  $l$  du point  $n$  de l'écliptique qui se lève en même temps que l'étoile, connaissant cette longitude  $l$  le lever cosmique de l'étoile aura lieu le jour où la longitude géocentrique du Soleil  $\lambda$  sera proche de la valeur  $l$ .

Considérons le triangle sphérique  $\gamma nW$ , dans ce triangle on a les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \sin u \cos l &= \cos\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) \sin \varepsilon + \sin\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) \cos \varepsilon \cos(\alpha - \Delta\alpha) \\ \sin u \sin l &= \sin\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) \sin(\alpha - \Delta\alpha) \end{aligned} \quad (3)$$

Ce qui donne

$$\begin{aligned} \sin u \cos l &= -\sin \varphi \sin \varepsilon + \cos \varphi \cos \varepsilon \cos(\alpha - \Delta\alpha) \\ \sin u \sin l &= \cos \varphi \sin(\alpha - \Delta\alpha) \end{aligned} \quad (4)$$

Or  $u$  est compris entre  $0^\circ$  et  $180^\circ$  donc son sinus est toujours positif, le signe des deux expressions permet de connaître dans quel cadran trigonométrique se trouve l'angle  $l$ .

Ce qui permet de calculer  $l$ , puis connaissant  $l$  il suffit de trouver dans une éphéméride du Soleil quel est le jour où la longitude  $\lambda$  du Soleil est égale à  $l$ .

Connaissant le jour du lever cosmique, on peut très facilement trouver le jour du lever achronique de l'étoile, en effet le point de l'écliptique qui se couche à l'instant où l'étoile se lève a pour longitude  $l + 180^\circ$ .

#### **Exemple : étoile Arcturus en 2000.**

Ascension droite  $\alpha$  : 14h15m39,677s soit  $213^\circ 54' 55,16''$ , déclinaison  $\delta$  :  $+19^\circ 10' 56,71''$

À Paris : Latitude  $\varphi$  :  $48^\circ 50' 11,2''$  N

L'obliquité de l'écliptique en 2000 est égale à :  $\varepsilon = 23^\circ 26' 21,412''$

En utilisant les équations (1) et (2), on trouve une différence ascensionnelle égale à  $\Delta\alpha = 23^\circ 26' 50,23''$  et l'ascension oblique est égale à  $190^\circ 28' 04,92''$ .

Les formules (4) donnent :

$$\sin u \cos l = -0,8933055291$$

$$\sin u \sin l = -0,1195882939$$

et

$$\tan l = 0,1338716598$$

On en déduit que  $l = 187^\circ 37' 29,81''$ , la longitude du Soleil est voisine de cette valeur entre le 30 septembre et le 1<sup>er</sup> octobre en l'an 2000. Le lever cosmique d'Arcturus a donc lieu à cette date.

*Vérification pour l'an 2000 :*

Lever coucher passage d'Arcturus à Paris sans tenir compte de la réfraction.

Date	Lever en UTC	Azimut des Astron	Passage en UTC	Haut.	Coucher en UTC	Azimut des Astron
27/09/2000	6h 7,2m	240,1°	13h 39,7m	60,3°	21h 12,3m	119,9°
28/09/2000	6h 3,2m	240,1°	13h 35,8m	60,3°	21h 8,3m	119,9°
29/09/2000	5h 59,3m	240,1°	13h 31,8m	60,3°	21h 4,4m	119,9°
30/09/2000	5h 55,4m	240,1°	13h 27,9m	60,3°	21h 0,5m	119,9°
01/10/2000	5h 51,4m	240,1°	13h 24,0m	60,3°	20h 56,5m	119,9°
02/10/2000	5h 47,5m	240,1°	13h 20,1m	60,3°	20h 52,6m	119,9°
03/10/2000	5h 43,6m	240,1°	13h 16,1m	60,3°	20h 48,7m	119,9°
04/10/2000	5h 39,6m	240,1°	13h 12,2m	60,3°	20h 44,7m	119,9°

Lever coucher passage du Soleil à Paris sans tenir compte de la réfraction.

Date	Lever en UTC	Azimut des Astron	Passage en UTC	Haut.	Coucher en UTC	Azimut des Astron
27/09/2000	5h 49,7m	272,7°	11h 41,5m	39,3°	17h 32,5m	87,0°
28/09/2000	5h 51,1m	273,3°	11h 41,2m	38,9°	17h 30,4m	86,4°
29/09/2000	5h 52,6m	273,9°	11h 40,8m	38,5°	17h 28,3m	85,9°
30/09/2000	5h 54,0m	274,5°	11h 40,5m	38,1°	17h 26,2m	85,3°
01/10/2000	5h 55,5m	275,0°	11h 40,2m	37,8°	17h 24,1m	84,7°
02/10/2000	5h 56,9m	275,6°	11h 39,9m	37,4°	17h 22,0m	84,1°
03/10/2000	5h 58,4m	276,2°	11h 39,6m	37,0°	17h 19,9m	83,5°
04/10/2000	5h 59,9m	276,8°	11h 39,3m	36,6°	17h 17,8m	82,9°

Pour le lever achronique de l'étoile le Soleil doit se trouver à la longitude  $l + 180^\circ$  soit :  $7^\circ 37' 29,81''$  ce qui correspond aux 27/28 mars en 2000.

*Vérification pour l'an 2000 :*

Lever coucher passage d'Arcturus à Paris sans tenir compte de la réfraction.

Date	Lever en UTC	Azimut des Astron	Passage en UTC	Haut.	Coucher en UTC	Azimut des Astron
24/03/2000	18h 22,4m	240,1°	1h 58,9m	60,3°	9h 31,4m	119,9°
25/03/2000	18h 18,5m	240,1°	1h 55,0m	60,3°	9h 27,5m	119,9°
26/03/2000	18h 14,6m	240,1°	1h 51,0m	60,3°	9h 23,6m	119,9°
27/03/2000	18h 10,6m	240,1°	1h 47,1m	60,3°	9h 19,7m	119,9°
28/03/2000	18h 6,7m	240,1°	1h 43,2m	60,3°	9h 15,7m	119,9°
29/03/2000	18h 2,8m	240,1°	1h 39,3m	60,3°	9h 11,8m	119,9°
30/03/2000	17h 58,9m	240,1°	1h 35,3m	60,3°	9h 7,9m	119,9°

Lever coucher passage du Soleil à Paris sans tenir compte de la réfraction.

Date	Lever en UTC	Azimut des Astron	Passage en UTC	Haut.	Coucher en UTC	Azimut des Astron
24/03/2000	5h 49,8m	267,6°	11h 56,8m	42,8°	18h 4,7m	92,7°
25/03/2000	5h 47,7m	267,1°	11h 56,5m	43,2°	18h 6,2m	93,3°
26/03/2000	5h 45,6m	266,5°	11h 56,2m	43,6°	18h 7,7m	93,8°
27/03/2000	5h 43,5m	265,9°	11h 55,9m	44,0°	18h 9,2m	94,4°
28/03/2000	5h 41,4m	265,3°	11h 55,6m	44,4°	18h 10,7m	95,0°
29/03/2000	5h 39,3m	264,7°	11h 55,3m	44,8°	18h 12,2m	95,6°
30/03/2000	5h 37,3m	264,1°	11h 55,0m	45,2°	18h 13,7m	96,2°

## 2.5.2 Pour améliorer le calcul

Réfraction atmosphérique sur l'étoile.

Nous allons maintenant tenir compte de la réfraction atmosphérique à l'instant du lever de l'étoile. Le problème est plus complexe, nous allons utiliser la figure suivante :

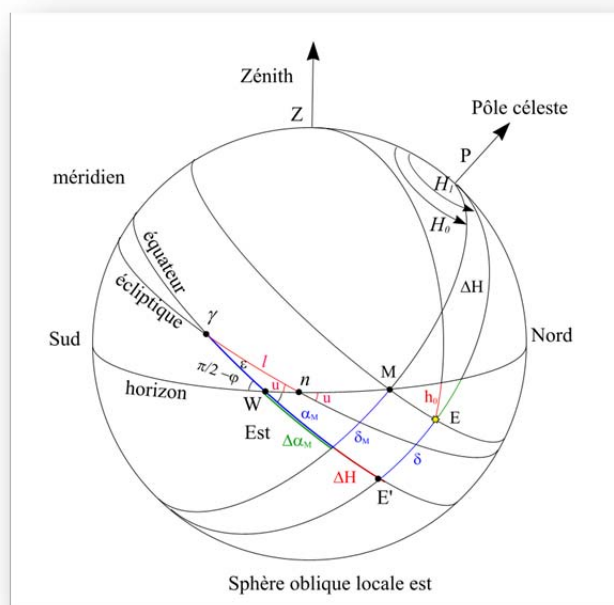


Figure 15. Sphère oblique locale est : réfraction au lever de l'étoile.

Si  $h_0$  est la réfraction atmosphérique horizontale, on peut considérer que le formulaire est identique au précédent si l'on remplace l'étoile en E par une étoile M de coordonnées équatoriales ( $\alpha_M$ ,  $\delta_M$ ) qui se trouverait sur l'horizon au point M défini par l'intersection du parallèle céleste de déclinaison  $\delta$  avec l'horizon et dont l'ascension droite serait l'ascension droite de l'étoile plus la différence entre l'angle horaire ( $H_1$ ) de l'étoile à l'instant où elle est à une hauteur  $h_0$  sous l'horizon du lieu et l'angle horaire  $H_0$  de l'étoile à son lever géométrique (sans réfraction).

L'ascension droite de M est donc égale à l'ascension droite de l'étoile plus la variation d'angle horaire  $\Delta H$  qui s'obtient à partir des formules suivantes (issues du calcul d'un lever coucher).

$$\begin{aligned}\cos H_0 &= -\tan \varphi \tan \delta \\ \cos H_1 &= \frac{\sin h_0 - \sin \delta \sin \varphi}{\cos \varphi \cos \delta} \\ \Delta H &= H_1 - H_0 \\ \alpha_M &= \alpha + \Delta H\end{aligned}\quad (5)$$

Attention pour les levers les angles horaires sont négatifs, donc  $\Delta H$  est négatif, la valeur de l'ascension droite du point M est donc plus petite que celle de l'étoile.

La déclinaison de M est la même que celle de l'étoile.

Ensuite on reprend les formules précédentes en remplaçant les coordonnées équatoriales de l'étoile par les coordonnées équatoriales du point M.



$$\sin \Delta\alpha_M = \tan \delta \tan \varphi \quad (6)$$

Et

$$\begin{aligned} \sin u \cos l &= -\sin \varphi \sin \varepsilon + \cos \varphi \cos \varepsilon \cos(\alpha_M - \Delta\alpha_M) \\ \sin u \sin l &= \cos \varphi \sin(\alpha_M - \Delta\alpha_M) \end{aligned} \quad (7)$$

Cette formule nous donne la longitude  $l$  du point de l'écliptique qui est sur l'horizon est à l'instant où l'étoile est à une hauteur  $h_0$  sous l'horizon.

Remarque : le principe de calcul est le même quelle que soit la valeur de  $h_0$ , on pourrait par exemple donner à  $h_0$  la valeur d'une hauteur critique au-dessus de l'horizon à partir de laquelle on estime que l'étoile devient visible.

### Réfraction ou arc de vision pour la position du Soleil.

Nous devons maintenant tenir compte de la réfraction atmosphérique pour le Soleil, nous allons faire le calcul pour une hauteur  $h_s$  quelconque du Soleil sous l'horizon, cela permet de calculer également les levés héliques,  $h_s$  est alors l'arc de vision. Le lever hélique du matin correspond au jour où l'étoile se lève à l'horizon lorsque le Soleil est encore  $q$  degrés sous l'horizon ( $q$  porte le nom d'arc de vision), ce lever est observable et est appelé également lever apparent du matin.

On prend  $h_s = |h_0|$ , ainsi l'angle  $l'$  est positif et s'ajoute à la longitude de  $n$ .

Dans la figure ci-dessous, soit  $n'$  le point de l'écliptique qui se trouve à une hauteur  $h_s$  sous l'horizon (sur la figure on n'a pas tracé la position de l'étoile, mais la position du point M qui est à l'horizon lorsque l'étoile est  $h_0$  sous l'horizon).

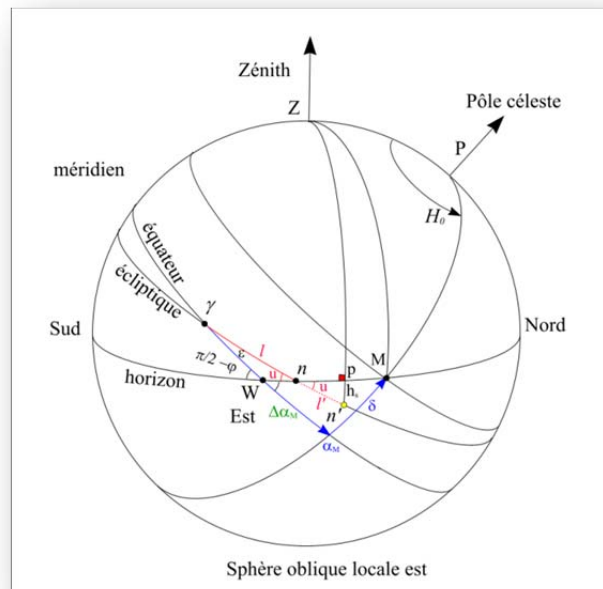


Figure 16. Sphère oblique locale est : réfraction ou arc de vision pour le Soleil.

Le triangle sphérique  $nn'p$  est rectangle en  $p$  et  $l'$  est l'arc de longitude  $nn'$ . On a la relation suivante :

$$\sin l' = \frac{\sin h_s}{\sin u} \quad (8)$$

On peut calculer l'angle  $u$  ou simplement son sinus par les formules suivantes :

$$\begin{aligned} \cos u &= -\cos \varepsilon \cos\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) \sin \varepsilon \cos(\alpha_M - \Delta\alpha_M) \\ \cos u &= \cos \varepsilon \sin \varphi + \sin \varepsilon \cos \varphi \cos(\alpha_M - \Delta\alpha_M) \\ \sin u &= \frac{\sin(\alpha_M - \Delta\alpha_M) \cos \varphi}{\sin l} \end{aligned} \quad (9)$$

La longitude du point de l'écliptique qui se trouve à une hauteur  $h_s$  sous l'horizon lorsque l'étoile est à une hauteur  $h_0$  sous l'horizon est égale à  $l + l'$ .

Reprenons l'exemple de l'étoile Arcturus à Paris en 2000 :

Calcul des coordonnées du point M :

La réfraction horizontale est égale à  $h_0 = -36,6'$

On trouve à l'aide des formules (5)  $H_0 = -113,4472862^\circ = -113^\circ 26' 50,23''$

Et  $H_l = -114,5212467^\circ = -114^\circ 31' 16,49''$

$\Delta H = -1,0739605^\circ = -1^\circ 4' 26,26''$

D'où  $\alpha_M = 212,8413604^\circ = 212^\circ 50' 28,9''$

La différence ascensionnelle de M est la même que celle de l'étoile,  $\Delta\alpha_M = 23,4472864^\circ = 23^\circ 26' 50,23''$ , l'ascension oblique de M est égale à  $189,3940743^\circ$  soit  $189^\circ 23' 38,67''$ . Puis on trouve  $l = 186,843077315^\circ = 186^\circ 50' 35,08''$ , valeur à comparer avec la valeur précédente  $l = 187^\circ 37' 29,81''$  obtenue sans réfraction atmosphérique sur l'étoile (l'écart est de  $0,781869444^\circ$ ).

Il reste à calculer le  $\sin u$  (formule 9) puis l'angle  $l'$  (formule 8).

Dans le cas de la réfraction, c'est-à-dire avec  $h_s = |h_0| = 36,6'$

On trouve  $\sin u = 0,9020430531$  et  $l' = 0,6762455924^\circ$  puis  $l + l' = 186,5193229^\circ = 186^\circ 31' 09,56''$

On retrouve une valeur presque identique à la précédente, ce qui est normal, car les deux corrections ont tendance à se compenser. La réfraction sur l'étoile déplace la date vers le passé et la réfraction sur le Soleil l'éloigne vers le futur et ces deux déplacements sont du même ordre de grandeur.

Par contre si on calcule un lever héliaque la valeur de  $h_s$  est celle de l'arc de vision. Si l'on prend par exemple  $h_s = 9^\circ$ , alors on trouve :  $l' = 9,9868642^\circ$  et  $l + l' = 196,8299415^\circ$ .

Le Soleil a cette longitude vers les 9/10 octobre 2000.

Vérification :

Lever coucher d'Arcturus à Paris en UTC en tenant compte de la réfraction.

Date	Lever en UTC	Azimut des Astron	Passage en UTC	Haut.	Coucher en UTC	Azimut des Astron
09/10/2000	5h 15,7m	239,2°	12h 52,5m	60,3°	20h 29,4m	120,8°
10/10/2000	5h 11,8m	239,2°	12h 48,6m	60,3°	20h 25,4m	120,8°
11/10/2000	5h 7,8m	239,2°	12h 44,7m	60,3°	20h 21,5m	120,8°

Hauteur du Soleil à l'instant du lever d'Arcturus le 9 et le 10 octobre 2000

le lundi 9 octobre 2000 à 5h 15,7 UTC

azimut : 270° 2' 43,83"  
 hauteur : - 8° 26' 56,32"  
 le mardi 10 octobre 2000 à 5h 11,8m UTC  
 azimut : 269° 36' 54,22"  
 hauteur : - 9° 19' 46,62"

### 2.5.3 Calcul du lever achronique et du lever héliaque du soir de l'étoile

Si l'on tient compte de la réfraction pour l'étoile, le calcul est le même, mais il convient d'ajouter 180° à la valeur de  $l$  calculée en tenant compte de la réfraction de l'étoile (point M).

La date du lever héliaque du soir correspond donc au jour où la longitude  $\lambda$  du Soleil vaut  $l + 180^\circ - l'$ .

Exemple pour Arcturus en 2000 à Paris.

On a trouvé  $l = 186,843077315^\circ$  il suffit d'ajouter 180° ce qui donne  $6,843077315^\circ$  puis  $l' = 0,6762455924^\circ$  et  $l + 180^\circ - l' = 6,166831708^\circ$  soit  $6^\circ 10' 0,59''$  pour un lever achronique. On constate que dans le cas d'un lever achronique les deux corrections vont dans le même sens, il n'y a donc pas de compensation possible comme dans le cas du lever cosmique. Le Soleil atteint cette longitude au voisinage du 26/27 mars en 2000.

#### Vérification

Lever coucher d'Arcturus à Paris en UTC en tenant compte de la réfraction

Date	Lever en UTC	Azimut des Astron	Passage en UTC	Haut.	Coucher en UTC	Azimut des Astron
24/03/2000	18h 18,2m	239,2°	1h 58,9m	60,3°	9h 35,7m	120,8°
25/03/2000	18h 14,2m	239,2°	1h 55,0m	60,3°	9h 31,8m	120,8°
26/03/2000	18h 10,3m	239,2°	1h 51,0m	60,3°	9h 27,9m	120,8°
27/03/2000	18h 6,4m	239,2°	1h 47,1m	60,3°	9h 23,9m	120,8°
28/03/2000	18h 2,4m	239,2°	1h 43,2m	60,3°	9h 20,0m	120,8°
29/03/2000	17h 58,5m	239,2°	1h 39,3m	60,3°	9h 16,1m	120,8°
30/03/2000	17h 54,6m	239,2°	1h 35,3m	60,3°	9h 12,1m	120,8°

Lever coucher du Soleil à Paris en UTC en tenant compte de la réfraction

Date	Lever en UTC	Azimut des Astron	Passage en UTC	Haut.	Coucher en UTC	Azimut des Astron
24/03/2000	5h 46,1m	267,0°	11h 56,8m	42,8°	18h 8,5m	93,4°
25/03/2000	5h 44,0m	266,4°	11h 56,5m	43,2°	18h 10,0m	94,0°
26/03/2000	5h 41,9m	265,8°	11h 56,2m	43,6°	18h 11,5m	94,6°
27/03/2000	5h 39,8m	265,2°	11h 55,9m	44,0°	18h 13,0m	95,1°
28/03/2000	5h 37,7m	264,6°	11h 55,6m	44,4°	18h 14,5m	95,7°
29/03/2000	5h 35,6m	264,0°	11h 55,3m	44,8°	18h 15,9m	96,3°
30/03/2000	5h 33,5m	263,4°	11h 55,0m	45,2°	18h 17,4m	96,9°

Pour le lever héliaque du soir en utilisant de nouveau un arc de vision de 9° on trouve  $l' = 9,9868642^\circ$  et  $l + 180^\circ - l' = 356,8562131^\circ$  soit  $356^\circ 51' 22,37''$  le Soleil a cette longitude au voisinage des 16/17 mars 2000.

#### Vérification :

Lever coucher d'Arcturus à Paris en UTC en tenant compte de la réfraction

Date	Lever en UTC	Azimut des Astron	Passage en UTC	Haut.	Coucher en UTC	Azimut des Astron
15/03/2000	18h 53,5m	239,2°	2h 34,3m	60,3°	10h 11,1m	120,8°
16/03/2000	18h 49,6m	239,2°	2h 30,4m	60,3°	10h 7,2m	120,8°
17/03/2000	18h 45,7m	239,2°	2h 26,4m	60,3°	10h 3,3m	120,8°
18/03/2000	18h 41,7m	239,2°	2h 22,5m	60,3°	9h 59,3m	120,8°
19/03/2000	18h 37,8m	239,2°	2h 18,6m	60,3°	9h 55,4m	120,8°

20/03/2000	18h 33,9m	239,2°	2h 14,6m	60,3°	9h 51,5m	120,8°
21/03/2000	18h 30,0m	239,2°	2h 10,7m	60,3°	9h 47,5m	120,8°

### Hauteur du Soleil à l'instant du lever d'Arcturus le 16 et 17 mars 2000

le jeudi 16 mars 2000 à 18h 49,6 UTC  
azimut : 98° 38' 57,59"  
hauteur : - 9° 19' 52,34"  
le vendredi 17 mars 2000 à 18h 45,7m UTC  
azimut : 98° 12' 57,47"  
hauteur : - 8° 26' 39,59"

### En résumé on a les résultats suivants :

On calcule la valeur de  $l$ , puis de  $l'$ , les jours des levers correspondent aux jours où le Soleil à la longitude  $\lambda$  égale aux valeurs suivantes :

Type de lever	Jour où la longitude du Soleil $\lambda$ vérifie
Lever cosmique (vrai)	$\lambda = l$
Lever achronique (vrai)	$\lambda = l + 180^\circ$
Lever héliaque du matin (apparent du matin)	$\lambda = l + l'$
Lever héliaque du soir (apparent du soir)	$\lambda = l + 180 - l'$

### 2.5.4 Coucher cosmique et achronique des étoiles

Le coucher cosmique a lieu lorsque l'étoile se couche en même temps que le Soleil, le coucher achronique a lieu lorsque l'étoile se couche en même temps que le Soleil se lève. Ce sont des couchers vrais non observables. On distingue également les couchers héliques du matin et du soir, ce sont des couchers apparents observables.

La figure est identique, mais elle est vue depuis l'ouest. Soit  $N$  le point de l'écliptique qui se couche en même temps que l'étoile.

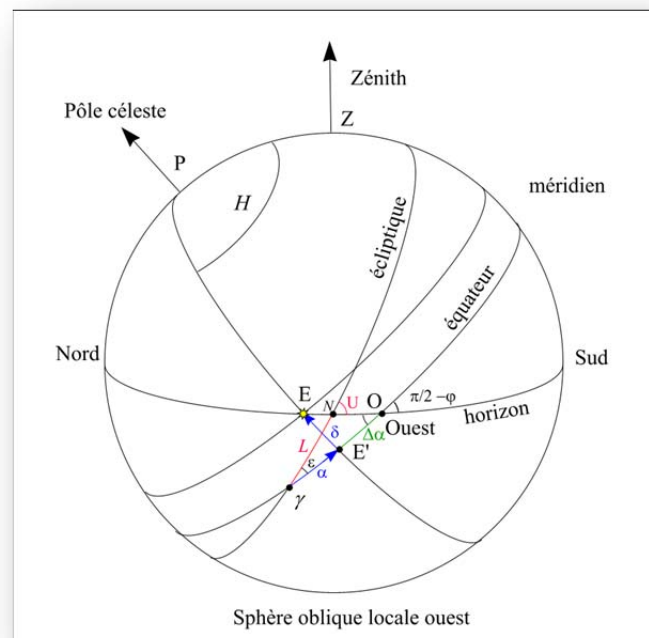


Figure 17. Sphère oblique locale ouest : ascension oblique et différence ascensionnelle.

Considérons la sphère oblique de la figure ci-dessus, l'étoile est sur l'horizon ouest à son coucher, nous allons calculer l'ascension oblique de cette étoile, c'est-à-dire l'angle  $\gamma O$  à partir de la déclinaison  $\delta$  de l'étoile et de la latitude du lieu  $\varphi$ .

Pour cela considérons le triangle sphérique EE'O rectangle en E'. Dans ce triangle l'angle OE' noté  $\Delta\alpha$  porte le nom de différence ascensionnelle, il est donné par la formule suivante :

$$\sin \Delta\alpha = \tan \delta \tan \varphi \quad (10)$$

L'ascension oblique est alors :  $\alpha + \Delta\alpha$ . (11)

On remarque que pour les couchers on ajoute la différence ascensionnelle.

Dans le triangle  $\gamma NO$  on a les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \sin(\pi - U) \cos L &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) \sin \varepsilon + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) \cos \varepsilon \cos(\alpha + \Delta\alpha) \\ \sin(\pi - U) \sin L &= \sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) \sin(\alpha + \Delta\alpha) \end{aligned} \quad (12)$$

Ce qui s'écrit également

$$\begin{aligned} \cos U \cos L &= \sin \varphi \sin \varepsilon + \cos \varphi \cos \varepsilon \cos(\alpha + \Delta\alpha) \\ \cos U \sin L &= \cos \varphi \sin(\alpha + \Delta\alpha) \\ \text{ou} \\ \cot L &= \tan \varphi \frac{\sin \varepsilon}{\sin(\alpha + \Delta\alpha)} + \cos \varepsilon \cot(\alpha + \Delta\alpha) \end{aligned} \quad (13)$$

Cette formule nous permet de calculer la longitude  $L$  du point  $N$  de l'écliptique qui se couche en même temps que l'étoile. Donc le jour où le Soleil a cette longitude. Cette formule ne tient pas compte de la réfraction.

### Exemple : étoile Arcturus en 2000.

Ascension droite : 14h15m39.677s soit  $213^\circ 54' 55,16''$ , déclinaison :  $+19^\circ 10' 56,71''$

À Paris : Latitude :  $48^\circ 50' 11,2''$  N

L'obliquité de l'écliptique en 2000 est égale à :  $\varepsilon = 23^\circ 26' 21,412''$

La différence ascensionnelle est de  $23^\circ 26' 50,23''$  et l'ascension oblique est de  $237^\circ 21' 45,39''$ .

Les formules suivantes donnent :

$$\cos U \cos L = -0,02623385461$$

$$\cos U \sin L = -0,5542796555$$

et

$$\tan L = 21,12841074$$

On en déduit que  $L = 267^\circ 17' 24,84''$ , la longitude du Soleil est voisine de cette valeur entre le 18 et le 19 décembre en l'an 2000. Le coucher cosmique d'Arcturus a donc lieu à cette date.

Vérification pour l'an 2000 :

Lever coucher passage d'Arcturus à Paris sans tenir compte de la réfraction.

Date	Lever en UTC	Azimut des Astron	Passage en UTC	Haut.	Coucher en UTC	Azimut des Astron
15/12/2000	0h 56,6m	240,1°	8h 29,1m	60,3°	16h 1,6m	119,9°
16/12/2000	0h 52,7m	240,1°	8h 25,2m	60,3°	15h 57,7m	119,9°
17/12/2000	0h 48,7m	240,1°	8h 21,2m	60,3°	15h 53,8m	119,9°
18/12/2000	0h 44,8m	240,1°	8h 17,3m	60,3°	15h 49,8m	119,9°

19/12/2000	0h 40,9m	240,1°	8h 13,4m	60,3°	15h 45,9m	119,9°
20/12/2000	0h 36,9m	240,1°	8h 9,5m	60,3°	15h 42,0m	119,9°

Lever coucher passage du Soleil à Paris sans tenir compte de la réfraction.

Date	Lever en UTC	Azimut des Astron	Passage en UTC	Haut.	Coucher en UTC	Azimut des Astron
15/12/2000	7h 43,8m	306,9°	11h 45,9m	17,9°	15h 48,0m	53,1°
16/12/2000	7h 44,6m	307,0°	11h 46,4m	17,8°	15h 48,2m	53,0°
17/12/2000	7h 45,3m	307,1°	11h 46,9m	17,8°	15h 48,5m	52,9°
18/12/2000	7h 46,0m	307,1°	11h 47,4m	17,8°	15h 48,8m	52,9°
19/12/2000	7h 46,6m	307,1°	11h 47,9m	17,7°	15h 49,2m	52,8°
20/12/2000	7h 47,2m	307,2°	11h 48,4m	17,7°	15h 49,6m	52,8°

Pour le coucher achronique de l'étoile le Soleil doit se trouver à la longitude  $L + 180^\circ = 87^\circ 17' 24,84''$  ce qui arrive entre le 18 et le 19 juin en 2000.

Vérification pour l'an 2000 :

Lever coucher passage d'Arcturus à Paris sans tenir compte de la réfraction.

Date	Lever en UTC	Azimut des Astron	Passage en UTC	Haut.	Coucher en UTC	Azimut des Astron
15/06/2000	12h 56,1m	240,1°	20h 28,6m	60,3°	4h 5,1m	119,9°
16/06/2000	12h 52,2m	240,1°	20h 24,7m	60,3°	4h 1,2m	119,9°
17/06/2000	12h 48,2m	240,1°	20h 20,8m	60,3°	3h 57,3m	119,9°
18/06/2000	12h 44,3m	240,1°	20h 16,8m	60,3°	3h 53,3m	119,9°
19/06/2000	12h 40,4m	240,1°	20h 12,9m	60,3°	3h 49,4m	119,9°
20/06/2000	12h 36,4m	240,1°	20h 9,0m	60,3°	3h 45,5m	119,9°

Lever coucher passage du Soleil à Paris sans tenir compte de la réfraction.

Date	Lever en UTC	Azimut des Astron	Passage en UTC	Haut.	Coucher en UTC	Azimut des Astron
15/06/2000	3h 53,0m	233,0°	11h 51,2m	64,5°	19h 49,5m	127,0°
16/06/2000	3h 53,0m	233,0°	11h 51,4m	64,5°	19h 50,0m	127,1°
17/06/2000	3h 53,0m	232,9°	11h 51,6m	64,6°	19h 50,3m	127,1°
18/06/2000	3h 53,0m	232,9°	11h 51,8m	64,6°	19h 50,7m	127,1°
19/06/2000	3h 53,2m	232,8°	11h 52,0m	64,6°	19h 51,0m	127,2°
20/06/2000	3h 53,3m	232,8°	11h 52,3m	64,6°	19h 51,2m	127,2°

## 2.5.5 Amélioration du calcul

### Réfraction sur l'étoile.

Si on tient compte de la réfraction, on peut faire le même raisonnement que pour les levers.

Si  $h_0$  est la réfraction atmosphérique horizontale, on peut considérer que le formulaire est identique aux formules précédentes si l'on remplace l'étoile en E par une étoile M de coordonnées équatoriales  $(\alpha_M, \delta_M)$  qui se trouverait sur l'horizon au point M défini par l'intersection du parallèle céleste de déclinaison  $\delta$  avec l'horizon à l'instant où l'étoile est  $h_0$  sous l'horizon du lieu.

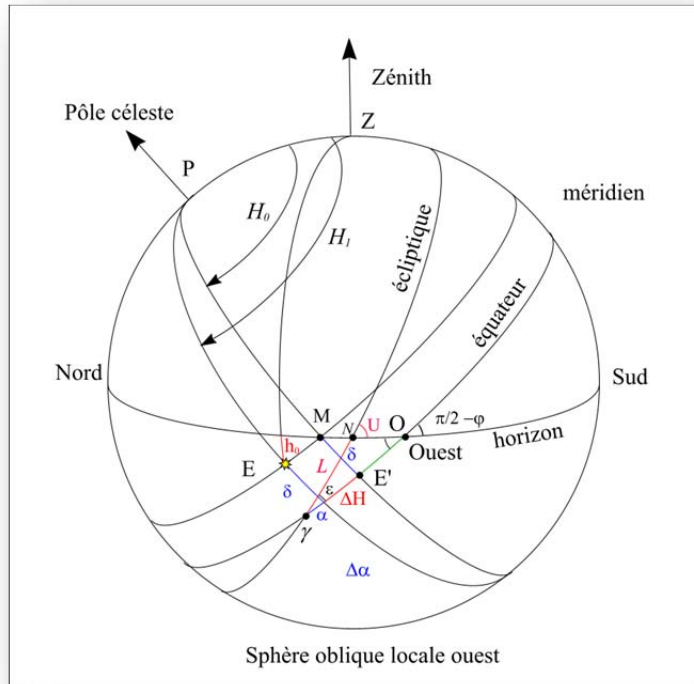


Figure 18. Sphère oblique locale ouest : réfraction sur l'étoile.

L'ascension droite de M est égale à l'ascension droite de l'étoile plus la variation d'angle horaire  $\Delta H$  entre l'angle horaire  $H_1$  de l'étoile lorsqu'elle est à  $h_0$  degrés sous l'horizon et l'angle horaire  $H_0$  de l'étoile à son coucher géométrique (sans réfraction). Cette différence s'obtient à partir des formules suivantes (issues du calcul d'un lever coucher).

$$\begin{aligned} \cos H_0 &= -\tan \varphi \tan \delta \\ \cos H_1 &= \frac{\sin h_0 - \sin \delta \sin \varphi}{\cos \varphi \cos \delta} \\ \Delta H &= H_1 - H_0 \\ \alpha_M &= \alpha + \Delta H \end{aligned} \quad (14)$$

Attention pour les couchers les angles horaires sont positifs, l'ascension droite du point M est donc plus grande que l'ascension droite de l'étoile.

La déclinaison de M est identique à la déclinaison de l'étoile.

Ensuite on reprend les formules précédentes en remplaçant les coordonnées équatoriales de l'étoile par les coordonnées équatoriales du point M.

$$\sin \Delta \alpha_M = \tan \delta_M \tan \varphi \quad (15)$$

L'ascension oblique est alors :  $\alpha + \Delta \alpha_M$ .

et

$$\begin{aligned}
\cos U \cos L &= \sin \varphi \sin \varepsilon + \cos \varphi \cos \varepsilon \cos(\alpha + \Delta\alpha_M) \\
\cos U \sin L &= \cos \varphi \sin(\alpha + \Delta\alpha_M) \\
\text{ou} & \\
\cot L &= \tan \varphi \frac{\sin \varepsilon}{\sin(\alpha + \Delta\alpha_M)} + \cos \varepsilon \cot(\alpha + \Delta\alpha_M)
\end{aligned}
\tag{16}$$

Cette formule nous donne la longitude  $L$  du point de l'écliptique qui est sur l'horizon ouest à l'instant où l'étoile est à une hauteur  $h_0$  sous l'horizon.

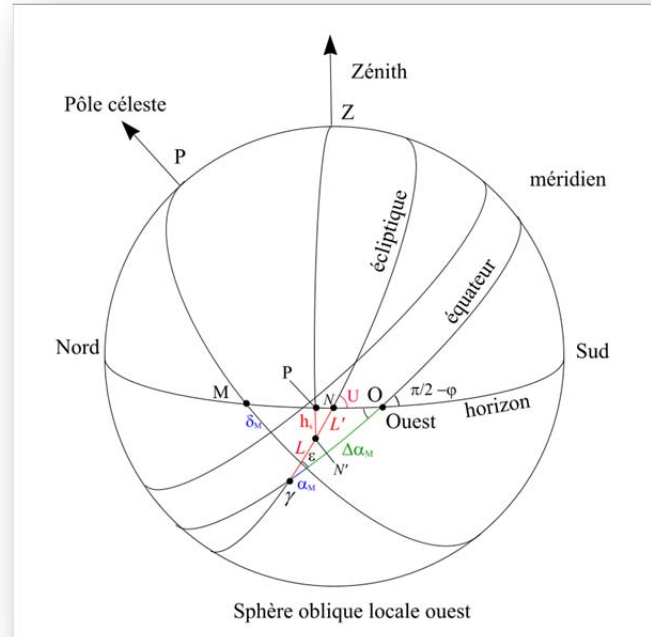


Figure 19. Sphère oblique locale ouest : réfraction et arc de vision du Soleil.

### Réfraction ou arc de vision pour le Soleil.

Nous devons maintenant tenir compte de la réfraction atmosphérique pour le Soleil, de nouveau nous allons faire le calcul pour une hauteur  $h_s$  quelconque du Soleil sous l'horizon, cela permettra de calculer également les couchers héliques.  $h_s$  est alors l'arc de vision. Pour un coucher cosmique on prendra  $h_s = |h_0|$ , alors l'angle  $L'$  est positif et on le retranche à la longitude  $L$  de  $N$ .

Soit  $N'$  le point de l'écliptique qui se trouve à une hauteur  $h_s$  sous l'horizon.

Le triangle sphérique  $NN'P$  est rectangle en  $P$ ,  $L'$  est l'arc de longitude  $NN'$ . On a la relation suivante :

$$\sin L' = \frac{\sin h_s}{\sin U} \tag{17}$$

On peut calculer l'angle  $U$  ou simplement son sinus par les formules suivantes :

$$\begin{aligned}
\cos U &= -\cos \varepsilon \sin \varphi + \sin \varepsilon \cos \varphi \cos(\alpha_M + \Delta\alpha_M) \\
\sin U &= \frac{\sin(\alpha_M + \Delta\alpha_M) \cos \varphi}{\sin L}
\end{aligned}
\tag{18}$$



La longitude du point de l'écliptique  $N'$  qui se trouve à une hauteur  $h_s$  sous l'horizon lorsque l'étoile est à une hauteur  $h_0$  sous l'horizon est égale à  $L - L'$ . Le coucher cosmique ou héliaque du soir a lieu le jour où la longitude  $\lambda$  du Soleil est proche de cette valeur.

Reprenons l'exemple de l'étoile Arcturus à Paris en 2000 :

Calcul des coordonnées du point M :

La réfraction horizontale est égale à  $h_0 = -36,6'$

Attention pour les couchers les angles horaires sont positifs.

On trouve  $H_0 = 113,4472862^\circ = 113^\circ 26' 50,23''$

Et  $H_I = 114,5212467^\circ = 114^\circ 31' 16,49''$

$\Delta H = 1,0739605^\circ = 1^\circ 4' 26,26''$

D'où  $\alpha_M = 214,9892814^\circ = 214^\circ 59' 21,41''$

La différence ascensionnelle de M est la même que celle de l'étoile,  $\Delta\alpha_M = 23,4472864^\circ = 23^\circ 26' 50,23''$  ce qui donne une l'ascension oblique de M égale à  $238,4365675^\circ$  soit  $238^\circ 26' 11,64''$ .

En trouve  $L = 268,30002^\circ$  soit  $268^\circ 18' 00,07''$ , valeur à comparer avec la valeur précédente  $L = 267^\circ 17' 24,84''$  obtenue sans réfraction atmosphérique sur l'étoile.

Il reste à calculer  $\sin U$  puis  $L'$ .

Dans le cas de la réfraction, c'est-à-dire avec  $h_s = |h_0| = 36,6'$

On trouve  $\sin U = 0,5610827644$  et  $L' = 0,01897457556^\circ$  et  $L - L' = 268,2810454^\circ$

On retrouve une valeur quasi identique à la précédente, ce qui est normal, car les deux corrections ont tendance à se compenser. La réfraction sur l'étoile déplace la date vers le futur et la réfraction sur le Soleil l'éloigne vers le passé et ces deux déplacements sont du même ordre de grandeur.

Par contre si on calcule un coucher héliaque la valeur de  $h_s$  est celle de l'arc de vision soit par exemple  $9^\circ$ , alors on trouve :  $L' = 16,18908611^\circ$  et  $L - L' = 252,1109339^\circ = 252^\circ 06' 39,36''$

Cela nous amène vers les 3/4 décembre 2000.

*Vérification :*

Lever coucher d'Arcturus à Paris en UTC

Date	Lever en UTC	Azimut des Astron	Passage en UTC	Haut.	Coucher en UTC	Azimut des Astron
03/12/2000	1h 39,5m	239,2°	9h 16,3m	60,3°	16h 53,1m	120,8°
04/12/2000	1h 35,5m	239,2°	9h 12,4m	60,3°	16h 49,2m	120,8°
05/12/2000	1h 31,6m	239,2°	9h 8,4m	60,3°	16h 45,2m	120,8°
06/12/2000	1h 27,7m	239,2°	9h 4,5m	60,3°	16h 41,3m	120,8°

Position du soleil à l'instant des couchers de l'étoile les 3 et 4 décembre 2000.

le dimanche 3 décembre 2000 à 16h 53,1m UTC

azimut :  $66^\circ 34' 43,01''$

hauteur :  $-9^\circ 8' 48,83''$

le lundi 4 décembre 2000 à 16h 49,2m UTC

azimut :  $65^\circ 43' 34,54''$

hauteur :  $-8^\circ 35' 57,23''$

## 2.5.6 Calcul du coucher achronique et du coucher héliaque du matin de l'étoile

Si l'on tient compte de la réfraction pour l'étoile, le calcul est le même, mais il convient d'ajouter  $180^\circ$  à la valeur de  $L$  calculée en tenant compte de la réfraction de l'étoile (point M).

Les dates du coucher achronique et du coucher héliaque de matin correspondent aux jours où la longitude  $\lambda$  du Soleil vaut  $L + 180^\circ + L'$ .

Exemple pour Arcturus en 2000 à Paris.

On a trouvé  $L = 268,30002^\circ$  il suffit d'ajouter  $180^\circ$  cela donne  $88,30002^\circ$  puis  $L' = 0.01897457556^\circ$  et  $L + 180^\circ + L' = 88,31899458^\circ$  soit  $88^\circ 19' 08,38''$  pour un coucher achronique.

On constate que dans le cas d'un coucher achronique les deux corrections vont dans le même sens, il n'y a donc pas de compensation possible comme dans le cas du coucher cosmique. Le Soleil atteint cette longitude au voisinage du 19/20 juin en 2000.

### Vérification

Lever coucher d'Arcturus à Paris en UTC en tenant compte de la réfraction

Date	Lever en UTC	Azimut des Astron	Passage en UTC	Haut.	Coucher en UTC	Azimut des Astron
17/06/2000	12h 43,9m	239,2°	20h 20,8m	60,3°	4h 1,6m	120,8°
18/06/2000	12h 40,0m	239,2°	20h 16,8m	60,3°	3h 57,6m	120,8°
19/06/2000	12h 36,1m	239,2°	20h 12,9m	60,3°	3h 53,7m	120,8°
20/06/2000	12h 32,1m	239,2°	20h 9,0m	60,3°	3h 49,8m	120,8°
21/06/2000	12h 28,2m	239,2°	20h 5,1m	60,3°	3h 45,8m	120,8°

Lever coucher du Soleil à Paris en UTC en tenant compte de la réfraction

Date	Lever en UTC	Azimut des Astron	Passage en UTC	Haut.	Coucher en UTC	Azimut des Astron
17/06/2000	3h 48,3m	232,0°	11h 51,6m	64,6°	19h 55,0m	128,0°
18/06/2000	3h 48,4m	232,0°	11h 51,8m	64,6°	19h 55,3m	128,0°
19/06/2000	3h 48,5m	232,0°	11h 52,0m	64,6°	19h 55,6m	128,0°
20/06/2000	3h 48,6m	231,9°	11h 52,3m	64,6°	19h 55,9m	128,1°
21/06/2000	3h 48,8m	231,9°	11h 52,5m	64,6°	19h 56,1m	128,1°

Pour le coucher héliaque du matin, avec un arc de vision de  $9^\circ$  on trouve  $L' = 16,18908611^\circ$  et  $L + 180^\circ + L' = 104,4891061^\circ$  soit  $104^\circ 29' 20,78''$  ce qui correspond au voisinage des 6/7 juillet 2000.

### Vérification :

Lever coucher d'Arcturus à Paris en UTC en tenant compte de la réfraction

Date	Lever en UTC	Azimut des Astron	Passage en UTC	Haut.	Coucher en UTC	Azimut des Astron
05/07/2000	11h 33,2m	239,2°	19h 10,0m	60,3°	2h 50,8m	120,8°
06/07/2000	11h 29,2m	239,2°	19h 6,1m	60,3°	2h 46,8m	120,8°
07/07/2000	11h 25,3m	239,2°	19h 2,1m	60,3°	2h 42,9m	120,8°
08/07/2000	11h 21,4m	239,2°	18h 58,2m	60,3°	2h 39,0m	120,8°

Hauteur du Soleil à l'instant du lever d'Arcturus le 6 et 7 juillet 2000

le jeudi 6 juillet 2000 à 2h 46,8m UTC

azimut :  $219^\circ 26' 35,15''$

hauteur :  $-8^\circ 55' 39,20''$

le vendredi 7 juillet 2000 à 2h 20m 54,00s UTC

azimut : 213° 57' 30,47"  
 hauteur : -11° 35' 1,81"

**En résumé pour les couchers on a les résultats suivants :**

On calcule la valeur de  $L$  puis de  $L'$  et les jours des couchers correspondent aux jours où le Soleil à la longitude  $\lambda$  égale aux valeurs suivantes

Type de coucher	Jour où la longitude du Soleil $\lambda$ vérifie
Coucher cosmique (vrai)	$\lambda = L$
Coucher achronique (vrai)	$\lambda = L + 180^\circ$
Coucher héliaque du soir (apparent du soir)	$\lambda = L - L'$
Coucher héliaque du matin (apparent du matin)	$\lambda = L + 180 + L'$

Résumé des levers couchers de l'étoile Arcturus en J2000.

Lever héliaque du soir (apparent)	16 – 17 mars	Première visibilité du soir
Lever achronique (vrai)	26 mars	
Coucher achronique (vrai)	20 juin	
Coucher héliaque du matin (apparent)	6 – 7 juillet	Dernière visibilité du matin
Lever cosmique (vrai)	30 sept. – 1 <sup>er</sup> octobre	
Lever héliaque (apparent)	9 – 10 octobre	Première visibilité du matin
Coucher héliaque du soir (apparent)	3 – 4 décembre	Dernière visibilité du soir
Coucher cosmique (vrai)	18 – 19 décembre	

**2.6 Le lever, le coucher et le passage au méridien du Soleil.**

Au cours de l'année, la déclinaison du Soleil varie de  $-23^\circ 26'$  à  $23^\circ 26'$ . Lorsqu'elle vaut  $-23^\circ 26'$  nous sommes, dans l'hémisphère nord, au solstice d'hiver. Lorsqu'elle passe par zéro nous sommes aux équinoxes de printemps et d'automne. Lorsqu'elle vaut  $23^\circ 26'$  nous sommes, dans l'hémisphère nord, au solstice d'été. Pour un lieu donné de l'hémisphère nord (en dehors de la zone intertropicale, la hauteur du Soleil à son passage au méridien est égale à la colatitude du lieu plus sa déclinaison. Le jour du solstice d'été elle est égale à  $23^\circ 26'$  plus la colatitude. Le jour des équinoxes, elle est égale à la colatitude. Le jour du solstice d'hiver elle est égale à la colatitude moins  $23^\circ 26'$ .

Pour le calcul exact des levers et les couchers, on doit tenir compte de la réfraction atmosphérique.

L'atmosphère terrestre comme tous les gaz (et tous les milieux transparents à l'exception du vide) dévie la trajectoire des rayons lumineux, ce phénomène s'appelle la réfraction, il a pour effet de remonter les images, on voit donc le Soleil alors qu'il est géométriquement sous l'horizon. En réalité lorsque le centre du Soleil est vu sur l'horizon il se trouve  $36,6'$  (minutes de degrés) sous l'horizon, c'est la valeur moyenne de la réfraction horizontale que nous utilisons dans les calculs.

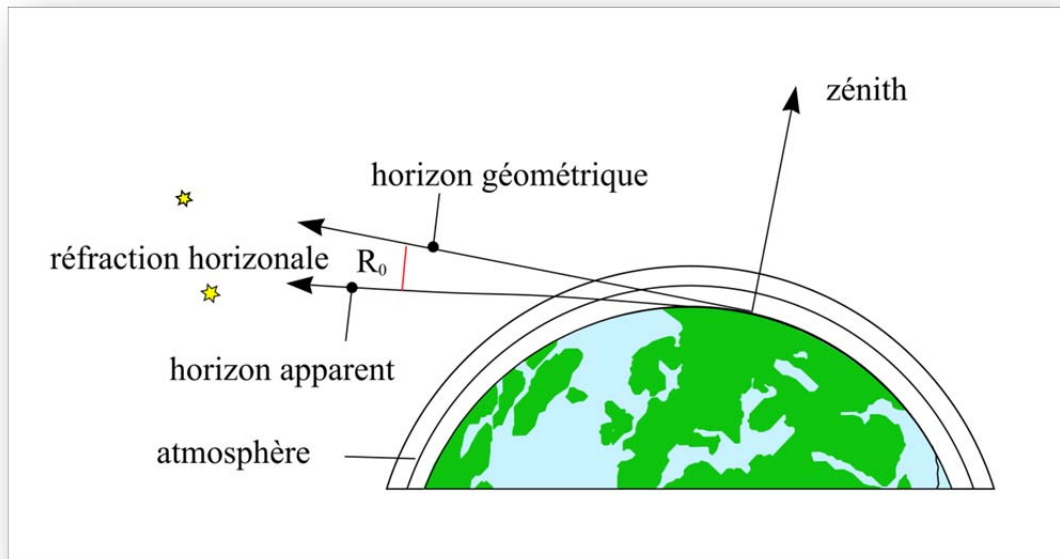


Figure 20. Réfraction atmosphérique.

Dans le cas du Soleil (et de la Lune) nous pouvons également tenir compte du diamètre apparent de ces deux corps et calculer le lever et le coucher du bord supérieur, du bord inférieur ou du centre du corps.

Pour un lieu quelconque de l'hémisphère nord, le jour des équinoxes si l'on tient compte de la réfraction atmosphérique le Soleil se lève presque à l'est et se couche presque à l'ouest. Le jour du solstice d'hiver, le Soleil se lève le plus au sud-est et se couche le plus au sud-ouest. Le jour du solstice d'été, le Soleil se lève le plus au nord-est et se couche le plus au nord-ouest. Les jours des solstices, les amplitudes ortives et occases sont maximales.

Dans l'hémisphère nord, pour un lieu de latitude  $\varphi$  supérieure à  $23^{\circ}26'$  (c'est-à-dire en dehors de la zone intertropicale) et de colatitude  $\bar{\varphi}$ , et si  $R(h)$  est la valeur de la réfraction atmosphérique en fonction de la hauteur  $h$ , le tableau suivant nous donne les amplitudes ortives et occases chaque saison ainsi que la hauteur du Soleil au passage au méridien sud du lieu.

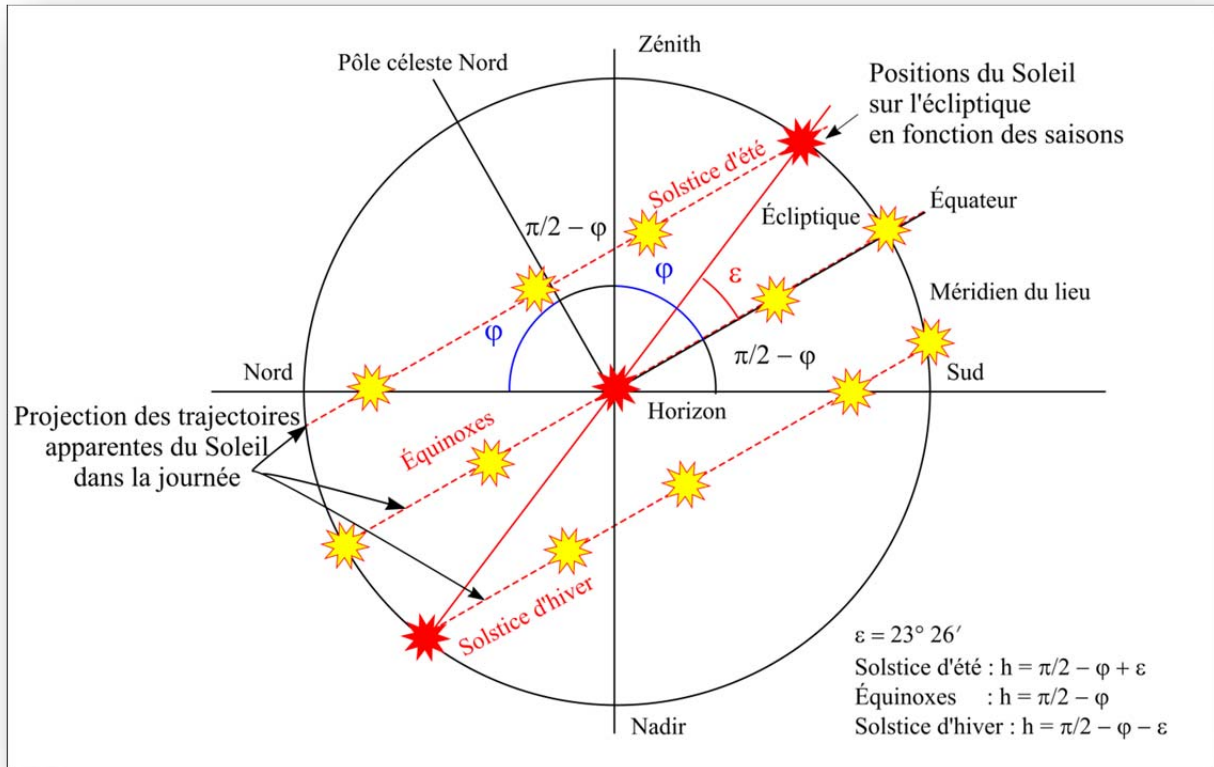


Figure 21. Levers et couchers du Soleil.

Saison	Amplitudes ortives	Hauteur au méridien	Amplitudes occases
Équinoxe printemps	Proche de zéro	$\bar{\varphi} + R(\bar{\varphi})$	Proche de zéro
Solstice d'été	Valeur maximale nord	$\bar{\varphi} + 23^{\circ}26' + R(\bar{\varphi} + 23^{\circ}26')$	Valeur maximale nord
Équinoxe d'automne	Proche de zéro	$\bar{\varphi} + R(\bar{\varphi})$	Proche de zéro
Solstice d'hiver	Valeur maximale sud	$\bar{\varphi} - 23^{\circ}26' + R(\bar{\varphi} - 23^{\circ}26')$	Valeur maximale sud

Les azimuts  $a$  du lever et du coucher du Soleil sont donnés par les formules suivantes :

$$\cos R_0 \cdot \cos a = \sin R_0 \tan \varphi - \frac{\sin \delta}{\cos \varphi}$$

Où  $R_0$  est la réfraction horizontale moyenne et  $\delta$  est la déclinaison du Soleil. Alors  $a$  est l'azimut au coucher et  $a + \pi$  est l'azimut du lever. L'amplitude ortive est égale à :  $a - 270^{\circ}$ , et l'amplitude occase est égale à :  $a - 90^{\circ}$ . On remarque que si l'on néglige la réfraction atmosphérique ( $R_0 = 0 \Rightarrow \sin R_0 = 0$  et  $\cos R_0 = 1$ ) alors

$$\cos a = -\frac{\sin \delta}{\cos \varphi}$$

le  $\cos a$  est nul lorsque la déclinaison est nulle (le jour des équinoxes) et l'on a bien  $a = 90^{\circ}$  et  $a = 270^{\circ}$  alors les amplitudes occases et ortives sont nulles et le Soleil se lève plein est et se couche plein ouest quelle que soit la latitude du lieu.

## 2.7 Le passage au méridien en un lieu quelconque.

Avant tout, il convient de bien rappeler les définitions du méridien, de l'azimut, de la hauteur ou de la distance zénithale d'un astre.

Soit  $\lambda$  et  $\varphi$  la longitude et la latitude géographique d'un lieu. Mathématiquement, la latitude géographique est comptée positivement vers le nord et négativement vers le sud à partir de l'équateur terrestre. La verticale du lieu est définie par la direction normale à l'horizon local. Cette direction définit le zénith (vers le haut) et le nadir (vers le bas). En un lieu le cercle méridien de la sphère céleste passant par ce lieu est le grand cercle qui passe par le zénith et l'axe des pôles.

Ce cercle méridien se décompose **en quatre méridiens**, les deux demi-cercles joignant les deux pôles et les deux demi-cercles joignant le zénith et le nadir, c'est un peu un abus de langage d'appeler ces demi-cercles méridiens on devrait plutôt dire demi-cercle azimutal sud et demi-cercle azimutal nord..

Le demi-cercle joignant les deux pôles et contenant le zénith du lieu porte le nom de méridien supérieur ou plus simplement de méridien du lieu et le demi-cercle joignant les deux pôles et contenant le nadir porte le nom de méridien inférieur.

Le demi-cercle joignant le zénith et le nadir et contenant le pôle Sud porte le nom de méridien sud, le demi-cercle joignant le zénith et le nadir et contenant le pôle Nord porte le nom de méridien nord.

La distance zénithale  $z$  est comptée à partir du zénith de  $0^\circ$  à  $180^\circ$  sur le demi-cercle de la sphère céleste du plan vertical passant par l'astre, ce demi-cercle porte le nom de vertical, la hauteur  $h$  de l'astre se mesure à partir de l'horizon sur ce même demi-cercle. On a par définition  $h = 90^\circ - z$ . La hauteur varie donc de  $-90^\circ$  à  $90^\circ$ . Lorsque la hauteur est égale à  $90^\circ$  l'astre passe au zénith, lorsque la hauteur est égale à  $-90^\circ$  l'astre passe au nadir. Pour qu'un astre soit visible, il faut que sa hauteur soit positive.

L'angle que fait le vertical de l'astre avec le méridien contenant la direction du sud (méridien sud) s'appelle l'azimut de l'astre, il est compté positivement vers l'ouest de  $0^\circ$  à  $360^\circ$  à partir du sud.

Les angles locaux donnant la position des astres dans le repère équatorial local sont la déclinaison  $\delta$  et l'angle horaire  $H$ , la déclinaison  $\delta$  est comptée positivement vers le nord et négativement vers le sud à partir de l'équateur dans le méridien contenant l'astre, elle varie de  $-90^\circ$  à  $90^\circ$ . L'angle horaire  $H$  est l'angle que fait le méridien contenant l'astre avec le méridien du lieu (méridien supérieur), il est compté positivement vers l'ouest de  $0^\circ$  à  $360^\circ$  (ou de 0h à 24h).

On a donc les définitions des méridiens suivantes :

Méridien supérieur	$\Leftrightarrow$	$H = 0^\circ$
Méridien inférieur	$\Leftrightarrow$	$H = 180^\circ$
Méridien sud (demi-cercle azimutal sud)	$\Leftrightarrow$	$a = 0^\circ$
Méridien nord (demi-cercle azimutal nord)	$\Leftrightarrow$	$a = 180^\circ$

Les deux figures suivantes montrent l'aspect des sphères célestes locales pour un lieu de l'hémisphère nord et un lieu de l'hémisphère sud. On peut faire de nombreuses remarques à partir de ces dessins. On remarque que le méridien du lieu, c'est-à-dire le méridien supérieur a toujours pour angle horaire nul  $H = 0$ . Pour les latitudes supérieures à  $45^\circ$  dans l'hémisphère nord il est en majeure partie orienté vers le sud ( $a = 0^\circ$ ), seule la partie comprise entre le zénith et le pôle Nord est orientée vers le nord ( $a = 180^\circ$ ). Inversement dans l'hémisphère sud pour les latitudes inférieures à  $-45^\circ$ , le méridien supérieur est en majeure partie orienté vers le nord ( $a = 180^\circ$ ) seule la partie comprise entre le zénith et le pôle Sud est orientée vers le sud ( $a = 0^\circ$ ). Les étoiles comprises entre les pôles et les zéniths n'ont pas un azimut qui varie continûment avec le temps, mais un azimut qui reste compris entre deux limites, ces limites correspondent aux plus grandes digressions orientales ou occidentales de l'étoile. Les autres

étoiles ont un azimut qui croît continûment avec le temps dans l'hémisphère nord et qui décroît continûment avec le temps dans l'hémisphère sud.

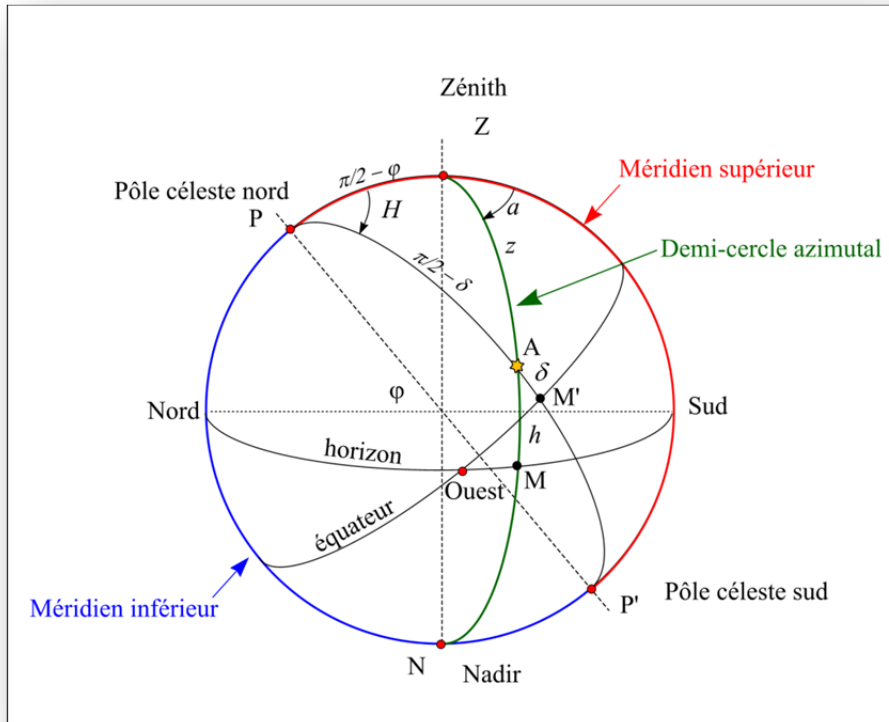


Figure 22. Sphère locale pour un lieu de l'hémisphère nord (latitude positive).

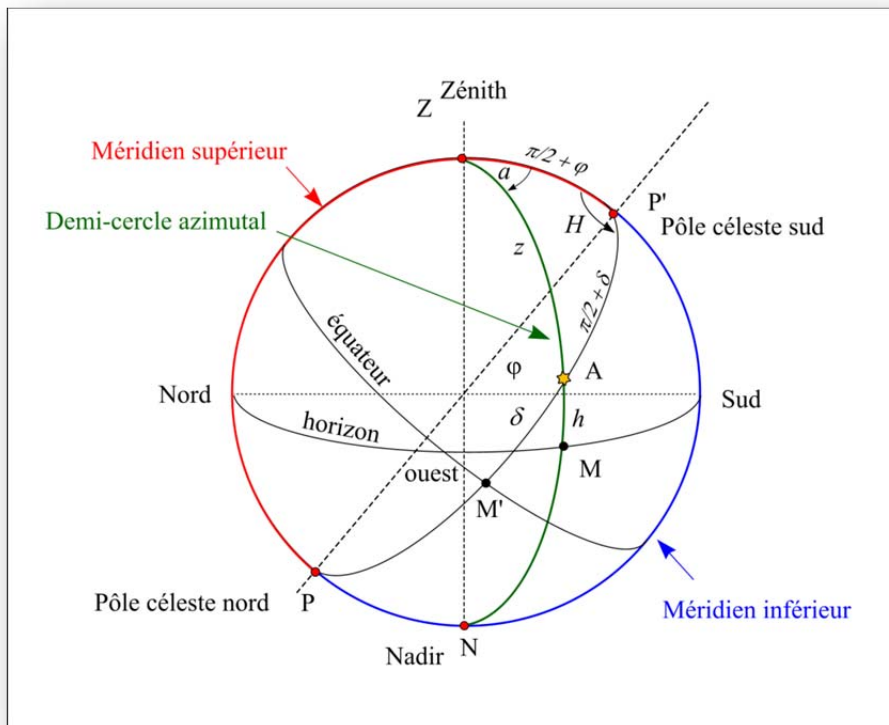


Figure 23. Sphère locale pour un lieu de l'hémisphère sud (latitude négative).



Remarque sur la révolution de la Terre, la Terre tourne sur elle-même autour de l'axe des pôles dans le sens direct (sens inverse des aiguilles d'une montre) dans le repère équatorial direct défini par le plan de l'équateur et la direction du pôle Nord, elle tourne donc d'ouest en est. Les étoiles et les corps célestes semblent donc tourner dans l'autre sens. Ils se lèvent à l'est et se couchent à l'ouest. Dans l'hémisphère nord, un observateur regardant vers le sud voit les astres se lever à l'est (à sa gauche), puis passer au méridien supérieur au sud et se coucher à l'ouest (à sa droite), ces astres tournent dans le sens rétrograde (sens des aiguilles d'une montre). Si l'observateur se retourne et observe vers le nord, il voit les étoiles circumpolaires tourner dans le sens direct autour du pôle nord (sens inverse des aiguilles d'une montre). Dans l'hémisphère sud, un observateur regardant vers le nord voit les astres se lever à l'est (à sa droite), passer au méridien supérieur au nord, puis se coucher à l'ouest (à sa gauche). Si l'observateur se retourne et observe vers le sud, il voit les étoiles circumpolaires tourner dans le sens rétrograde (sens des aiguilles d'une montre).

## 2.8 Calcul de la hauteur d'un astre à ces passages aux méridiens

Soit  $\alpha$  et  $\delta$  l'ascension droite et la déclinaison de l'astre.

La distance zénithale  $z$  (ou la hauteur  $h$ ) et l'azimut  $a$  d'un astre dans le repère local défini par le zénith du lieu et le plan horizontal du lieu sont reliés aux coordonnées équatoriales locales ( $H$  et  $\delta$ ) par les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \cos z &= \sin \varphi \cdot \sin \delta + \cos \varphi \cdot \cos \delta \cdot \cos H \\ \sin z \cdot \sin a &= \cos \delta \cdot \sin H \\ \sin z \cdot \cos a &= -\cos \varphi \cdot \sin \delta + \sin \varphi \cdot \cos \delta \cdot \cos H \end{aligned}$$

Avec

$$H = T - \alpha$$

La distance zénithale et la hauteur son reliées par la formule :

$$h = 90^\circ - z$$

Tous les corps passent deux fois par jour dans le cercle méridien : une fois au méridien supérieur lorsque  $H = 0^\circ$  et une fois au méridien inférieur lorsque  $H = 180^\circ$ .

On pourra vérifier que ces formules sont les mêmes que l'on soit dans l'hémisphère nord ou dans l'hémisphère sud.

## 2.9 Passage au méridien supérieur

Pour  $H = 0^\circ$  les équations de transformations de coordonnées donnent :

$$\cos H = 1; \sin H = 0$$

$$\cos z = \sin \varphi \cdot \sin \delta + \cos \varphi \cdot \cos \delta$$

$$\sin z \cdot \sin a = 0$$

$$\sin z \cdot \cos a = -\cos \varphi \cdot \sin \delta + \sin \varphi \cdot \cos \delta$$

$$\cos(z) = \cos(\varphi - \delta)$$

$$\sin a = 0 \rightarrow a = 0^\circ \text{ ou } a = 180^\circ$$

$$\text{si } a = 0^\circ \rightarrow \sin(z) = \sin(\varphi - \delta)$$

$$\text{si } a = 180^\circ \rightarrow -\sin(z) = \sin(\varphi - \delta)$$



On a donc deux solutions :

$$a = 0^\circ \text{ et } h = 90^\circ - \varphi + \delta = 90^\circ - (\varphi - \delta) \quad (1)$$

$$a = 180^\circ \text{ et } h = 90^\circ + \varphi - \delta \quad (2)$$

Avec la condition supplémentaire :  $-90^\circ \leq h \leq 90^\circ$

On remarque qu'il y a toujours une seule solution qui réponde à ce système, en effet :

La hauteur issue de l'équation (1) est inférieure à  $90^\circ$  si  $\varphi - \delta > 0$  donc si  $\varphi > \delta$ . Dans ce cas le passage au méridien supérieur se fait au sud ( $a = 0^\circ$ ).

La hauteur issue de l'équation (2) est inférieure à  $90^\circ$  si  $\varphi - \delta < 0$  donc si  $\varphi < \delta$ . Dans ce cas le passage au méridien supérieur se fait au nord ( $a = 180^\circ$ ).

Cas particulier, si la hauteur est de  $90^\circ$ , donc si le corps passe au zénith, alors  $\varphi = \delta$ . Dans ce cas l'azimut n'est pas défini.

## 2.10 Passage au méridien inférieur

Pour  $H = 180^\circ$  les équations de transformations de coordonnées donnent :

$$\cos H = -1; \sin H = 0$$

$$\cos z = \sin \varphi \cdot \sin \delta - \cos \varphi \cdot \cos \delta$$

$$\sin z \cdot \sin a = 0$$

$$\sin z \cdot \cos a = -\cos \varphi \cdot \sin \delta - \sin \varphi \cdot \cos \delta$$

$$\cos(z) = -\cos(\varphi + \delta)$$

$$\sin a = 0 \rightarrow a = 0^\circ \text{ et } a = 180^\circ$$

$$\text{si } a = 0^\circ \rightarrow \sin(z) = -\sin(\varphi + \delta)$$

$$\text{si } a = 180^\circ \rightarrow \sin(z) = \sin(\varphi + \delta)$$

On a donc deux solutions :

$$a = 0^\circ \text{ et } h = -90^\circ - \varphi - \delta = -90^\circ - (\varphi + \delta) \quad (3)$$

$$a = 180^\circ \text{ et } h = -90^\circ + \varphi + \delta \quad (4)$$

Avec toujours la condition supplémentaire :  $-90^\circ \leq h \leq 90^\circ$

On remarque qu'il y a toujours une seule solution qui réponde à ce système.

La hauteur issue de l'équation (3) est supérieure à  $-90^\circ$  si  $\varphi + \delta < 0$  donc si  $\varphi < -\delta$ . Dans ce cas le passage au méridien inférieur se fait au sud ( $a = 0^\circ$ ).

La hauteur issue de l'équation (4) est supérieure à  $-90^\circ$  si  $\varphi + \delta > 0$  donc si  $\varphi > -\delta$ . Dans ce cas le passage au méridien inférieur se fait au nord ( $a = 180^\circ$ ).

Cas particulier, si la hauteur est de  $-90^\circ$ , donc si le corps passe au nadir, alors  $\varphi = -\delta$ . Dans ce cas l'azimut n'est pas défini.

### 2.10.1 Conclusion

On voit donc que la hauteur  $h$  est une fonction des deux paramètres  $\varphi$  et  $\delta$  et qu'elle doit être toujours comprise entre  $-90^\circ$  et  $90^\circ$ .

On est donc toujours ramené à résoudre les quatre équations et à conserver les solutions qui donnent une hauteur comprise entre  $-90^\circ$  et  $90^\circ$ .

Le tableau suivant résume ces quatre possibilités

Passage au méridien supérieur $H = 0^\circ$	$a = 0^\circ$	$h = 90^\circ - \varphi + \delta$	1
	$a = 180^\circ$	$h = 90^\circ + \varphi - \delta$	2
Passage au méridien inférieur $H = 180^\circ$	$a = 0^\circ$	$h = -90^\circ - \varphi - \delta$	3
	$a = 180^\circ$	$h = -90^\circ + \varphi + \delta$	4

À l'aide de ces formules, on peut, soit se placer en un lieu donné (en fixant  $\varphi$ ) et étudier les passages au méridien des corps en fonction de leurs déclinaisons, soit choisir un corps donné et étudier son passage au méridien en fonction des latitudes.

## 2.11 Première application

### 2.11.1 Hauteur de l'équateur au-dessus de l'horizon

$\delta = 0^\circ$  et méridien supérieur  $\Rightarrow$  équation 1 ou 2

$h$  doit être positif.

La hauteur  $h$  obtenue avec l'équation [1] est positive (comprise entre  $0^\circ$  et  $90^\circ$ ) si la latitude  $\varphi$  est comprise entre  $0^\circ$  et  $90^\circ$  donc dans l'hémisphère nord, la hauteur  $h$  de l'équateur sur l'horizon est égale à  $h = 90^\circ - \varphi$  et la direction de l'intersection de l'équateur avec le méridien est orientée au sud ( $a = 0^\circ$ ).

La hauteur  $h$  obtenue avec l'équation [2] est positive ou nulle (comprise entre  $0^\circ$  et  $90^\circ$ ) si la latitude  $\varphi$  est comprise entre  $-90^\circ$  et  $0^\circ$  donc dans l'hémisphère sud, la hauteur  $h$  de l'équateur sur l'horizon est égale à  $h = 90^\circ + \varphi$  et la direction de l'intersection de l'équateur avec le méridien est orientée au nord ( $a = 180^\circ$ ).

On vérifie donc que la hauteur de l'équateur est bien le complémentaire de la latitude du lieu si le complémentaire est égal à  $90^\circ$  moins la valeur absolue de la latitude. De même la hauteur du pôle au-dessous de l'horizon, qui est le complémentaire de cet angle est égale à la valeur absolue de la latitude.

### 2.11.2 Hauteur de l'équateur au-dessous de l'horizon

$\delta = 0^\circ$  et méridien inférieur  $\Rightarrow$  équation 3 ou 4

$h$  doit être négatif.

La hauteur  $h$  obtenue avec l'équation [3] est négative et comprise entre  $-90^\circ$  et  $0^\circ$  si la latitude  $\varphi$  est comprise entre  $-90^\circ$  et  $0^\circ$  donc dans l'hémisphère sud, la hauteur  $h$  de l'équateur sous l'horizon est égale à  $h = -90^\circ - \varphi$  et la direction de l'intersection de l'équateur avec le méridien est orientée au sud ( $a = 0^\circ$ ).

La hauteur  $h$  obtenue avec l'équation [4] est négative et comprise entre  $-90^\circ$  et  $0^\circ$  si la latitude  $\varphi$  est comprise entre  $0^\circ$  et  $90^\circ$  donc dans l'hémisphère nord, la hauteur  $h$  de l'équateur sous l'horizon est égale à  $h = -90^\circ + \varphi$  et la direction de l'intersection de l'équateur avec le méridien est orientée au nord ( $a = 180^\circ$ ).

On vérifie bien que la hauteur de l'équateur sous l'horizon et l'opposée de la hauteur de l'équateur sur l'horizon.

## 2.12 Deuxième application

### 2.12.1 Passage du Soleil au zénith entre les tropiques

Le passage au zénith est par définition un passage supérieur. Entre les tropiques la latitude du lieu est comprise entre  $\pm \varepsilon$  et la déclinaison du Soleil varie également entre ces deux bornes, donc les hauteurs des passages au méridien supérieur sont données par les équations (1) ou (2):

$$a = 0^\circ \quad \text{et} \quad h = 90 - \varphi + \delta_s$$

$$a = 180^\circ \quad \text{et} \quad h = 90 + \varphi - \delta_s$$

Le Soleil passe au zénith deux fois par an lorsque  $h = 90^\circ$ , alors  $a$  n'est plus défini, et :

$$\delta_s = \varphi$$

Le Soleil passe au zénith les jours où sa déclinaison est égale à la latitude du lieu soit deux fois par an. Sauf sur les tropiques où l'on a qu'une solution par an : pour le tropique du Cancer  $\varphi = \varepsilon$  la solution est  $\delta = \varepsilon$ , donc le Soleil passe au zénith le jour du solstice d'été de juin. Un raisonnement identique pour le tropique du Capricorne montre que le Soleil passe au zénith uniquement le jour du solstice d'été de l'hémisphère sud. Sur l'équateur  $\varphi = 0$  le Soleil passe au zénith deux fois par an lorsque sa déclinaison est nulle, c'est-à-dire aux équinoxes.

Le Soleil passe donc au zénith deux fois par an lorsque  $h = 90^\circ$ , alors  $a$  n'est plus défini :

$$\delta_s = \varphi$$

$$\delta_s = -\varphi$$

À l'aide de ces formules, on peut également définir, pour un point situé entre les tropiques quand le Soleil passe au méridien vers le nord et quand il passe au méridien vers le sud.

Pour les lieux à l'extérieur de la zone intertropicale le Soleil passe au méridien supérieur toujours dans la même direction : au sud dans l'hémisphère nord et au nord dans l'hémisphère sud.

On peut donc refaire le tableau donnant les hauteurs du Soleil à chaque début de saison :

Saison	Amplitudes ortives ou occases	Hauteur au méridien sud	Hauteur au méridien nord
Équinoxe de mars	Proche de zéro	$\frac{\pi}{2} - \varphi + R(\frac{\pi}{2} - \varphi)$	$\frac{\pi}{2} + \varphi + R(\frac{\pi}{2} + \varphi)$
Solstice de juin	Valeur maximale	$\frac{\pi}{2} - \varphi + 23^\circ 26' + R(\frac{\pi}{2} - \varphi + 23^\circ 26')$	$\frac{\pi}{2} + \varphi + 23^\circ 26' + R(\frac{\pi}{2} + \varphi + 23^\circ 26')$
Équinoxe de septembre	Proche de zéro	$\frac{\pi}{2} - \varphi + R(\frac{\pi}{2} - \varphi)$	$\frac{\pi}{2} + \varphi + R(\frac{\pi}{2} + \varphi)$
Solstice de décembre	Valeur maximale	$\frac{\pi}{2} - \varphi - 23^\circ 26' + R(\frac{\pi}{2} - \varphi - 23^\circ 26')$	$\frac{\pi}{2} + \varphi - 23^\circ 26' + R(\frac{\pi}{2} + \varphi - 23^\circ 26')$

## 2.13 Troisième application

### 2.13.1 Trouver pour une latitude donnée la limite des déclinaisons des étoiles qui ne se lèvent pas (elles restent toujours sous l'horizon).

La hauteur du passage au méridien supérieur doit donc être toujours négative ou nulle.

L'équation (1) donne  $90^\circ - \varphi + \delta \leq 0 \rightarrow \delta \leq \varphi - 90^\circ$

L'équation (2) donne  $90^\circ + \varphi - \delta \leq 0 \rightarrow 90^\circ + \varphi \leq \delta$

De plus la déclinaison doit toujours être comprise entre  $-90^\circ$  et  $+90^\circ$  donc la première inéquation n'a des solutions que pour les latitudes positives, donc dans l'hémisphère nord. On en conclut que dans l'hémisphère nord les étoiles qui ne se lèvent pas doivent avoir une déclinaison vérifiant  $\delta \leq \varphi - 90^\circ$ . De même la seconde inéquation n'a des solutions que pour les latitudes négatives, donc dans l'hémisphère sud. On en conclut que dans l'hémisphère sud les étoiles qui ne se lèvent pas doivent avoir une déclinaison vérifiant  $90^\circ + \varphi \leq \delta$ .

Cas particulier à l'équateur aucune étoile ne se couche jamais, seules les étoiles qui ont une déclinaison de  $\pm 90^\circ$ , donc exactement aux pôles, sont en permanence sur l'horizon.

Au pôle Nord on ne voit aucune des étoiles ayant une déclinaison négative et au pôle Sud on ne voit aucune des étoiles ayant une déclinaison positive. Ces remarques ne sont rigoureusement exactes que si l'on néglige la réfraction atmosphérique.

## 2.14 Quatrième application

### 2.14.1 Trouver pour une latitude donnée la limite des déclinaisons des étoiles qui ne se couchent pas (circumpolaires, elles restent toujours au-dessus de l'horizon)

La hauteur du passage au méridien inférieur doit donc être toujours positive ou nulle.

L'équation (3) donne  $-90^\circ - \varphi - \delta \geq 0 \rightarrow \delta \leq -90^\circ - \varphi$

L'équation (4) donne  $-90^\circ + \varphi + \delta \geq 0 \rightarrow \delta \geq 90^\circ - \varphi$

De nouveau, la déclinaison doit toujours être comprise entre  $-90^\circ$  et  $+90^\circ$  donc la première inéquation n'a des solutions que pour les latitudes négatives, donc dans l'hémisphère sud. On en conclut que dans l'hémisphère sud les étoiles circumpolaires doivent avoir une déclinaison vérifiant  $\delta \leq -90^\circ - \varphi$ .

De même, la seconde inéquation n'a des solutions que pour les latitudes positives, donc dans l'hémisphère nord. On en conclut que dans l'hémisphère nord les étoiles circumpolaires doivent avoir une déclinaison vérifiant  $\delta \geq 90^\circ - \varphi$ .

Cas particuliers : À l'équateur il n'y a aucune étoile circumpolaire. Au pôle Nord toutes les étoiles de déclinaisons positives sont circumpolaires et au pôle Sud toutes les étoiles de déclinaisons négatives sont circumpolaires.

## 2.15 Cinquième application

### 2.15.1 Trouver pour une latitude donnée les étoiles qui ont une plus grande digression occidentale ou orientale

D'une manière générale une digression est un écart angulaire d'un astre par rapport à un système de référence (astre, plan fixe).

Dans le cas des étoiles proches du pôle, l'étoile décrit un petit cercle autour du pôle, si ces deux passages aux méridiens (supérieur et inférieur) se font dans la même direction (nord dans l'hémisphère nord et sud dans l'hémisphère sud) alors à son passage supérieur l'étoile passe entre le pôle céleste et le zénith.

Dans ce cas l'azimut de l'astre ne varie pas de  $0^\circ$  à  $360^\circ$  mais oscille entre deux valeurs extrêmes (de part et d'autre de  $180^\circ$  dans l'hémisphère nord et de part et d'autre de  $0^\circ$  dans l'hémisphère sud), ces deux valeurs extrêmes de l'azimut correspondent aux plus grandes digressions orientale et occidentale : dans ce cas la digression est un écart angulaire en azimut.

Donc les étoiles qui ont une plus grande digression orientale ou occidentale sont les étoiles qui passent au méridien supérieur entre le zénith et le pôle.

Dans l'hémisphère nord : le passage au méridien supérieur doit se faire au nord ( $a = 180^\circ$ ) donc  $h = 90^\circ + \varphi - \delta$  doit être inférieur à  $90^\circ$  donc  $\delta > \varphi > 0$ .

Dans l'hémisphère sud : le passage au méridien supérieur doit se faire au sud ( $a = 0^\circ$ ) donc  $h = 90^\circ - \varphi + \delta$  doit être inférieur à  $90^\circ$  donc  $\delta < \varphi < 0$ .

**Attention**, il ne faut pas confondre étoiles circumpolaires et étoiles présentant une plus grande digression, ces deux notions ne sont pas identiques.

Par exemple dans l'hémisphère nord on a :

$$\text{Étoiles circumpolaires} \Leftrightarrow \delta > 90^\circ - \varphi \quad (1)$$

$$\text{Plus grande digression} \Leftrightarrow \delta > \varphi \quad (2)$$

Si la latitude est supérieure à  $45^\circ$  la relation (2) implique (1), donc toutes les étoiles ayant une plus grande digression sont circumpolaires. Par contre l'inverse n'est pas vrai (1) n'implique pas (2), donc toutes les circumpolaires n'ont pas forcément une plus grande digression. Par exemple pour une latitude de  $50^\circ$  nord, les étoiles ayant une déclinaison de  $43^\circ$  vérifient (1) ( $43^\circ > 40^\circ$ ), mais ne vérifient pas (2) ( $43^\circ < 50^\circ$ ).

Si la latitude est inférieure à  $45^\circ$ , c'est l'inverse : (1) implique (2), donc toutes les étoiles circumpolaires ont une plus grande digression, mais (2) n'implique pas (1) c'est-à-dire que toutes les étoiles ayant une plus grande digression ne sont pas forcément circumpolaires, par exemple pour une latitude de  $30^\circ$ , les étoiles ayant une déclinaison de  $40^\circ$  vérifient (2) ( $40^\circ > 30^\circ$ ), mais ne vérifient pas (1) ( $40^\circ < 60^\circ$ ).

Il y a identité entre les types d'étoiles uniquement pour la latitude  $45^\circ$ .

### 2.15.2 Pour en savoir plus

Il y a une autre méthode pour trouver les étoiles circumpolaires et les étoiles ayant une plus grande digression.

## 2.16 Étoiles circumpolaires

L'angle horaire  $H$  d'un astre à son lever ou à son coucher, si l'on néglige la réfraction atmosphérique, est solution de l'équation pour  $z = 90^\circ$  :

$$\begin{aligned} \cos z &= \sin \varphi \cdot \sin \delta + \cos \varphi \cdot \cos \delta \cdot \cos H \\ \sin z \cdot \sin a &= \cos \delta \cdot \sin H \\ \sin z \cdot \cos a &= -\cos \varphi \cdot \sin \delta + \sin \varphi \cdot \cos \delta \cdot \cos H \end{aligned}$$

Ce qui donne

$$\cos H = -\tan \varphi \cdot \tan \delta$$

Si la somme des valeurs absolues de  $|\varphi|$  et de  $|\delta|$  est supérieure à  $90^\circ$  le produit des tangentes est supérieur à un et il n'y a pas de solution à l'équation, donc soit le corps est circumpolaire soit le corps reste sous l'horizon.

Si  $\varphi$  et  $\delta$  sont de même signe alors la hauteur au passage au méridien ( $H = 0$ ) est positive et l'astre est circumpolaire et si  $\varphi$  et  $\delta$  sont de signes contraires alors la hauteur au passage au méridien est négative et l'astre est toujours sous l'horizon.

Les conditions pour qu'une étoile soit circumpolaire sont les suivantes :

$$|\delta| + |\varphi| > 90^\circ \text{ et } \delta \times \varphi > 0$$

On vérifie que l'on retrouve bien les conditions trouvées dans la quatrième application.

L'équation [3] donne  $-90^\circ - \varphi - \delta \geq 0 \rightarrow \delta \leq -90^\circ - \varphi$

L'équation (4) donne  $-90^\circ + \varphi + \delta \geq 0 \rightarrow \delta \geq 90^\circ - \varphi$

Si les deux angles sont négatifs alors  $|\delta| + |\varphi| = -\delta - \varphi > 90^\circ \Leftrightarrow \delta < -90^\circ - \varphi$  on retrouve l'équation [3] et si les deux angles sont positifs alors  $|\delta| + |\varphi| = \delta + \varphi > 90^\circ \Leftrightarrow \delta > 90^\circ - \varphi$  on retrouve l'équation [4].

## 2.17 Étoiles ayant une plus grande digression

Calculons d'abord les formules différentielles reliant les coordonnées horaires aux coordonnées horizontales locales :

On a

$$\cos h \cdot da = \cos S \cdot \cos \delta \cdot dH + \sin S \cdot d\delta - \sin h \cdot \sin a \cdot d\varphi$$

$$dh = -\sin S \cdot \cos \delta \cdot dH + \cos S \cdot d\delta - \cos a \cdot d\varphi$$

Où  $S$  est l'angle parallactique défini par

$$\cos h \cdot \sin S = \cos \varphi \cdot \sin H$$

$$\cos h \cdot \cos S = \sin \varphi \cdot \cos \delta - \cos \varphi \cdot \sin \delta \cdot \cos H$$

Si l'on considère la variation de l'azimut en fonction de l'angle horaire pour un corps de déclinaison fixe et en un lieu donné, on trouve :

$$\frac{da}{dH} = \frac{\cos S \cdot \cos \delta}{\cos h}$$

En remplaçant  $\cos S$  par sa valeur tirée de la seconde équation on trouve :

$$\frac{da}{dH} = \frac{\cos^2 \delta \cos \varphi}{\cos^2 h} (\tan \varphi - \tan \delta \cdot \cos H)$$

On distingue deux cas :

Si  $|\varphi| > |\delta|$ , alors  $\frac{da}{dH}$  garde toujours le même signe, qui est celui de  $\varphi$ , on retrouve donc par le calcul que l'azimut  $a$  croît avec le temps dans l'hémisphère nord et décroît avec le temps dans l'hémisphère sud. Sa valeur à l'instant du passage supérieur est nulle dans le premier cas (hémisphère nord) et est égale à  $180^\circ$  dans le second cas (hémisphère sud).

Si  $|\varphi| < |\delta|$  l'équation

$$\cos H = \frac{\tan \varphi}{\tan \delta}$$

a deux racines,  $\pm H''$ ,  $H''$  étant compris entre  $0^\circ$  et  $180^\circ$ . Si la valeur  $H$  croît à partir de  $-180^\circ$ , l'azimut commence à croître ou à décroître en fonction de la valeur de  $\varphi$ , puis il atteint un extrémum (un minimum ou un maximum en fonction du signe de la latitude)  $-a''$  pour la valeur  $H = -H''$ , l'azimut  $a''$  est alors compris entre  $0^\circ$  et  $180^\circ$  ; ensuite l'azimut repart en sens contraire pour redevenir extrême (un minimum ou un maximum en fonction du signe de la latitude) pour l'angle horaire  $H = +H''$ , puis il recommence à croître ou à décroître.

Lorsque l'astre est en plus grande digression, c'est-à-dire pour l'azimut  $a''$  alors le triangle de position PZM est rectangle en  $S$ , car si l'azimut est extrême, alors la variation d'azimut est nulle donc  $\cos S$  est nul donc  $S$  est un angle droit. Les relations dans un triangle rectangle donnent directement les valeurs suivantes :

$$\sin h'' = \frac{\sin \varphi}{\sin \delta}, \quad \sin a'' = \frac{\cos \delta}{\cos \varphi} \quad \text{et} \quad \cos a'' = -\frac{\tan \varphi}{\tan h''}$$

### 2.17.1 Passage au zénith du Soleil entre les tropiques

Entre les tropiques la latitude du lieu est comprise entre  $\pm\varepsilon$  et la déclinaison du Soleil varie également entre ces deux bornes, donc les hauteurs des passages au méridiens sont données par :

$$a = 0^\circ \quad \text{et} \quad h = \frac{\pi}{2} - \varphi + \delta_s$$

$$a = 180^\circ \quad \text{et} \quad h = \frac{\pi}{2} + \varphi + \delta_s$$

On ne peut préciser l'orientation des amplitudes

## 2.18 Étude de la durée du jour

La durée du jour est l'intervalle de temps compris entre le lever et le coucher du centre du Soleil. Attention : certaines publications utilisent comme définition de la durée du jour l'intervalle de temps qui s'écoule entre le lever et le coucher du bord supérieur du Soleil.

### 2.18.1 Les crépuscules

En astronomie, on appelle crépuscule la lueur, croissante avant le lever du Soleil, décroissante après son coucher, qui provient de l'éclairement des couches supérieures de l'atmosphère par les rayons de l'astre situé sous l'horizon, mais très voisin de celui-ci. Dans le langage courant, le crépuscule du matin est appelé aube ou aurore.

Le crépuscule du soir, par exemple, commence au coucher du bord supérieur du Soleil et finit lorsque le centre du Soleil est abaissé de l'angle  $h$  au-dessous de l'horizon. On définit ainsi le crépuscule civil ( $h = 6^\circ$ ), le crépuscule nautique ( $h = 12^\circ$ ), et le crépuscule astronomique ( $h = 18^\circ$ ).

Dans l'hémisphère nord, le jour le plus long de l'année est le jour du solstice d'été, le jour le plus court de l'année est le jour du solstice d'hiver, le jour des équinoxes si l'on néglige la réfraction atmosphérique la durée du jour est égale à la durée de la nuit, et ce quel que soit l'endroit sur la Terre.

Si l'on ne néglige pas la réfraction atmosphérique, le jour de l'année où la durée du jour est égale à la durée de la nuit se trouve quelques jours après l'équinoxe d'automne et quelques jours avant l'équinoxe de printemps.

Exemple pour Paris en 2004 :

Tous les instants sont donnés en Temps Universel coordonné (UTC), ajouter une heure ou deux pour avoir l'heure légale en France. Les levers et les couchers tiennent compte de la réfraction atmosphérique (36,6')

En 2004 les saisons tombent aux dates suivantes :

- le 20/03/2004 à 06h 48m 38s UTC : équinoxe de printemps.
- le 21/06/2004 à 00h 56m 52s UTC : solstice d'été.
- le 22/09/2004 à 16h 29m 50s UTC : équinoxe d'automne.
- le 21/12/2004 à 12h 41m 36s UTC : solstice d'hiver.

date	Lever	Azimut	Coucher	Azimut	Durée du jour	Durée de la nuit suivante
17 mars	6h 0m 46s	271,1°	17h 57m 56s	89,2°	11h 57m 10s	12h 0m 44s
18 mars	5h 58m 40s	270,5°	17h 59m 27s	89,8°	12h 00m 32s	11h 57m 7s
19 mars	5h 56m 34s	269,9°	18h 0m 58s	90,4°	12h 04m 24s	11h 53m 30s
20 mars	5h 54m 28s	269,3°	18h 2m 29s	91,0°	12h 08m 01s	



Ce tableau permet de faire plusieurs commentaires : le jour où la durée du jour est égale à la durée de la nuit n'est pas le jour de l'équinoxe (20 mars), mais le 18 mars. Le centre du Soleil se lève presque plein est le 19 mars au matin et se couche presque plein ouest le 18 mars au soir. On remarque également que si l'on fait la somme de la durée du jour et de la durée de la nuit on n'obtient pas 24 heures, mais des valeurs légèrement inférieures.

Au voisinage de l'équinoxe d'automne, on a les résultats suivants :

Date	Lever	Azimut	Coucher	Azimut	Durée du jour	Durée la nuit suivante
21 sept.	5h 37m 24s	268,4°	17h 48m 53s	91,3°	12h 11m 29s	11h 49m 57s
22 sept.	5h 38m 50s	269,0°	17h 46m 45s	90,7°	12h 7m 55s	11h 53m 31s
23 sept.	5h 40m 16s	269,6°	17h 44m 37s	90,1°	12h 4m 21s	11h 57m 5s
24 sept.	5h 41m 42s	270,2°	17h 42m 29s	89,5°	12h 0m 47s	12h 0m 39s
25 sept.	5h 43m 8s	270,8°	17h 40m 22s	88,9°	11h 57m 14s	

On constate de nouveau que le jour où la durée du jour est égale à la durée de la nuit n'est pas le jour de l'équinoxe (22 septembre), mais le 24 septembre. Le 23 septembre le Soleil se couche pratiquement plein ouest, et le 22 septembre il se lève pratiquement plein est. De nouveau si l'on fait la somme des durées du jour et des durées de la nuit on n'obtient pas 24 heures, mais des valeurs légèrement supérieures.

### 2.18.2 Étude des levers et couchers du Soleil au voisinage du solstice d'hiver

Nous allons étudier un phénomène étrange que vous allez devoir expliquer.

Les tableaux suivants donnent les instants des levers et des couchers et des passages au méridien du centre du Soleil à Paris en décembre 2004 et en janvier 2005.

Dans ces tableaux les instants sont donnés en temps légal français (TLF). Pour avoir le temps universel coordonné (UTC) il suffit de retrancher une heure.

Dans un premier temps, on peut vérifier que le jour le plus court de l'année est bien le 21 décembre, jour du solstice d'hiver. Normalement à partir du 22 décembre les journées doivent commencer à s'allonger. Vérifier que c'est effectivement le cas.

On remarquera que les azimuts aux levers et couchers sont stationnaires au voisinage du solstice (plus grandes amplitudes ortives et occases).

Par contre, après le 21 décembre on observe que si la durée du jour commence effectivement à augmenter, le Soleil continue de se lever de plus en plus tard le matin, et cela jusqu'au 1<sup>er</sup> janvier. De même, le jour où le Soleil se couche le plus tôt n'est pas le 21 décembre, mais le 11 décembre. On constate que le Soleil ne passe pas au méridien à 12h en temps légal et qu'il y a une dissymétrie entre la durée du matin (durée comprise entre le lever et le passage méridien) et la durée de l'après-midi (durée comprise entre le passage méridien et le coucher).

Pouvons-nous expliquer ces phénomènes ?

Pour nous aider dans cette explication, nous allons rappeler quelques éléments importants concernant les échelles de temps :

Le temps universel coordonné UTC est le temps solaire moyen de Greenwich.



Le temps légal français TLF est le temps universel plus une heure (ou deux en période d'été).

Le temps solaire moyen est égal au temps solaire vrai plus l'équation du temps.

Le temps solaire moyen à Paris est le temps solaire moyen de Greenwich moins la longitude de Paris (si les longitudes sont comptées négativement vers l'est).

Le temps solaire vrai est l'angle horaire du Soleil plus douze heures.

Ainsi pour passer du temps légal français au temps solaire vrai à Paris, il faut effectuer les opérations suivantes :

1. retrancher une heure (ou deux) au temps légal pour avoir le temps universel coordonné,
2. retrancher l'équation du temps pour avoir le temps solaire vrai au méridien international,
3. retrancher la longitude de Paris pour avoir le temps solaire vrai à Paris.

date	Lever TLF	Azimut	Passage au méridien TLF	hauteur	Coucher TLF	Azimut
01/12/2004	8h 24m 37s	303,6°	12h 39m 50s	19,3°	16h 54m 44s	56,3°
02/12/2004	8h 25m 52s	303,9°	12h 40m 13s	19,1°	16h 54m 15s	56,0°
03/12/2004	8h 27m 6s	304,1°	12h 40m 36s	19,0°	16h 53m 49s	55,8°
04/12/2004	8h 28m 19s	304,4°	12h 41m 1s	18,8°	16h 53m 26s	55,6°
05/12/2004	8h 29m 29s	304,6°	12h 41m 25s	18,7°	16h 53m 6s	55,4°
06/12/2004	8h 30m 38s	304,8°	12h 41m 51s	18,6°	16h 52m 49s	55,2°
07/12/2004	8h 31m 44s	305,0°	12h 42m 17s	18,5°	16h 52m 35s	55,0°
08/12/2004	8h 32m 49s	305,1°	12h 42m 43s	18,4°	16h 52m 25s	54,8°
09/12/2004	8h 33m 51s	305,3°	12h 43m 10s	18,3°	16h 52m 17s	54,6°
10/12/2004	8h 34m 52s	305,5°	12h 43m 37s	18,2°	16h 52m 12s	54,5°
11/12/2004	8h 35m 50s	305,6°	12h 44m 5s	18,1°	16h 52m 11s	54,3°
12/12/2004	8h 36m 45s	305,7°	12h 44m 33s	18,0°	16h 52m 12s	54,2°
13/12/2004	8h 37m 38s	305,9°	12h 45m 2s	18,0°	16h 52m 17s	54,1°
14/12/2004	8h 38m 29s	306,0°	12h 45m 30s	17,9°	16h 52m 24s	54,0°
15/12/2004	8h 39m 17s	306,1°	12h 45m 59s	17,9°	16h 52m 35s	53,9°
16/12/2004	8h 40m 3s	306,1°	12h 46m 28s	17,8°	16h 52m 49s	53,8°
17/12/2004	8h 40m 46s	306,2°	12h 46m 58s	17,8°	16h 53m 6s	53,8°
18/12/2004	8h 41m 26s	306,2°	12h 47m 27s	17,8°	16h 53m 26s	53,7°
19/12/2004	8h 42m 4s	306,3°	12h 47m 57s	17,7°	16h 53m 48s	53,7°
20/12/2004	8h 42m 38s	306,3°	12h 48m 27s	17,7°	16h 54m 14s	53,7°
21/12/2004	8h 43m 10s	306,3°	12h 48m 57s	17,7°	16h 54m 43s	53,7°
22/12/2004	8h 43m 39s	306,3°	12h 49m 26s	17,7°	16h 55m 15s	53,7°
23/12/2004	8h 44m 5s	306,3°	12h 49m 56s	17,7°	16h 55m 49s	53,7°
24/12/2004	8h 44m 28s	306,3°	12h 50m 26s	17,8°	16h 56m 27s	53,7°
25/12/2004	8h 44m 48s	306,2°	12h 50m 56s	17,8°	16h 57m 7s	53,8°
26/12/2004	8h 45m 6s	306,2°	12h 51m 25s	17,8°	16h 57m 50s	53,9°
27/12/2004	8h 45m 20s	306,1°	12h 51m 55s	17,9°	16h 58m 35s	53,9°
28/12/2004	8h 45m 31s	306,0°	12h 52m 24s	17,9°	16h 59m 24s	54,0°
29/12/2004	8h 45m 39s	305,9°	12h 52m 53s	18,0°	17h 0m 15s	54,1°
30/12/2004	8h 45m 44s	305,8°	12h 53m 22s	18,0°	17h 1m 8s	54,2°
31/12/2004	8h 45m 46s	305,7°	12h 53m 50s	18,1°	17h 2m 4s	54,4°
date	Lever TLF	Azimut	Passage au méridien TLF	Hauteur	Coucher TLF	Azimut
01/01/2005	8h 45m 46s	305,5°	12h 54m 19s	18,2°	17h 3m 3s	54,5°
02/01/2005	8h 45m 42s	305,4°	12h 54m 47s	18,3°	17h 4m 4s	54,7°
03/01/2005	8h 45m 35s	305,2°	12h 55m 14s	18,4°	17h 5m 7s	54,8°

04/01/2005	8h 45m 25s	305,0°	12h 55m 42s	18,5°	17h 6m 12s	55,0°
05/01/2005	8h 45m 12s	304,9°	12h 56m 9s	18,6°	17h 7m 20s	55,2°
06/01/2005	8h 44m 56s	304,7°	12h 56m 35s	18,7°	17h 8m 30s	55,4°
07/01/2005	8h 44m 37s	304,4°	12h 57m 1s	18,8°	17h 9m 41s	55,6°
08/01/2005	8h 44m 16s	304,2°	12h 57m 27s	19,0°	17h 10m 55s	55,9°
09/01/2005	8h 43m 51s	304,0°	12h 57m 52s	19,1°	17h 12m 11s	56,1°
10/01/2005	8h 43m 23s	303,7°	12h 58m 16s	19,3°	17h 13m 28s	56,4°
11/01/2005	8h 42m 53s	303,5°	12h 58m 40s	19,4°	17h 14m 47s	56,6°
12/01/2005	8h 42m 19s	303,2°	12h 59m 3s	19,6°	17h 16m 8s	56,9°
13/01/2005	8h 41m 43s	302,9°	12h 59m 26s	19,7°	17h 17m 30s	57,2°
14/01/2005	8h 41m 4s	302,6°	12h 59m 48s	19,9°	17h 18m 54s	57,5°
15/01/2005	8h 40m 23s	302,3°	13h 0m 9s	20,1°	17h 20m 19s	57,8°
16/01/2005	8h 39m 38s	302,0°	13h 0m 30s	20,3°	17h 21m 46s	58,1°
17/01/2005	8h 38m 51s	301,7°	13h 0m 50s	20,5°	17h 23m 14s	58,5°
18/01/2005	8h 38m 1s	301,3°	13h 1m 9s	20,7°	17h 24m 43s	58,8°
19/01/2005	8h 37m 9s	301,0°	13h 1m 27s	20,9°	17h 26m 13s	59,1°
20/01/2005	8h 36m 14s	300,6°	13h 1m 45s	21,1°	17h 27m 44s	59,5°
21/01/2005	8h 35m 17s	300,3°	13h 2m 2s	21,3°	17h 29m 15s	59,9°
22/01/2005	8h 34m 17s	299,9°	13h 2m 18s	21,6°	17h 30m 48s	60,3°
23/01/2005	8h 33m 14s	299,5°	13h 2m 34s	21,8°	17h 32m 22s	60,6°
24/01/2005	8h 32m 10s	299,1°	13h 2m 48s	22,0°	17h 33m 56s	61,0°
25/01/2005	8h 31m 3s	298,7°	13h 3m 2s	22,3°	17h 35m 32s	61,4°
26/01/2005	8h 29m 54s	298,3°	13h 3m 15s	22,5°	17h 37m 7s	61,9°
27/01/2005	8h 28m 43s	297,9°	13h 3m 27s	22,8°	17h 38m 44s	62,3°
28/01/2005	8h 27m 29s	297,5°	13h 3m 38s	23,1°	17h 40m 21s	62,7°
29/01/2005	8h 26m 13s	297,0°	13h 3m 49s	23,3°	17h 41m 58s	63,1°
30/01/2005	8h 24m 56s	296,6°	13h 3m 59s	23,6°	17h 43m 36s	63,6°
31/01/2005	8h 23m 36s	296,1°	13h 4m 8s	23,9°	17h 45m 14s	64,0°

Réponse : Tous ces phénomènes sont liés à l'usage d'un Soleil moyen comme échelle de temps.

Nous allons voir d'abord comment la connaissance de l'instant du passage au méridien en temps légal français et la connaissance de la longitude de Paris nous permettent de connaître l'équation du temps à l'instant du passage au méridien.

La longitude de Paris est de  $-9\text{min } 21\text{s}$ .

Soit  $T_m$  l'instant du passage au méridien en heure légale française. Cet instant exprimé en temps universel est égal à  $T_m$  moins une heure. Cela représente le temps moyen de Greenwich. Pour avoir le temps moyen de Paris on retranche la longitude de Paris, donc on ajoute  $9\text{m } 21\text{s}$ . On obtient ainsi le temps moyen de Paris. L'équation du temps est la différence entre le temps moyen de Paris et le temps vrai de Paris. Or par définition, le temps vrai de Paris au passage au méridien est 12 heures, donc l'équation du temps à l'instant du passage du centre du Soleil au méridien de Paris est égale au temps moyen de Paris  $-12$  heures.

$$TSV_{Paris} = T_m - 1h - E - \lambda$$

$$12h = T_m - 1h - E - \lambda$$

$$E = T_m - 1h - \lambda - 12h$$

$$E = T_m - 12h50m39s$$

Cette expression donnant l'équation du temps en fonction du temps de passage en heure légale est valable chaque jour de l'année. On peut donc calculer le jour où le midi vrai est le plus proche du midi moyen, c'est le jour où  $E=0$  donc le jour où le passage au méridien est le plus proche de  $12\text{h } 50\text{m}39\text{s}$ , c'est-à-dire le 24 décembre 2004.

Calculons par exemple l'équation du temps à l'instant du passage au méridien le 1<sup>er</sup> décembre 2004.

Le Soleil passe au méridien à 12h 39m 50s en temps légal français, donc l'équation du temps est égale à  $12\text{h } 39\text{m } 50\text{s} - 12\text{h } 50\text{m } 39\text{s} = -10\text{m } 49\text{s}$ .

Si l'on néglige les variations de l'équation du temps entre l'instant du passage au méridien et les instants du lever et du coucher du Soleil, les heures de lever coucher en temps solaire vrai s'obtiennent en retranchant une heure puis la longitude de Paris et l'équation du temps.

Pour le lever on obtient :  $8\text{h } 24\text{m } 37\text{s} - 1\text{h} - (-9\text{m } 21\text{s}) - (-10\text{m } 49\text{s}) = 8\text{h } 24\text{m } 37\text{s} - (1\text{h} + 9\text{m } 21\text{s} + 10\text{m } 49\text{s}) = 8\text{h } 24\text{m } 37\text{s} - 39\text{m } 50\text{s} = 7\text{h } 44\text{m } 47\text{s}$ .

Et pour le coucher on obtient :  $16\text{h } 54\text{m } 44\text{s} - 39\text{m } 50\text{s} = 16\text{h } 14\text{m } 54\text{s}$ . On voit que ces deux instants sont pratiquement symétriques par rapport à 12 heures. L'écart que l'on observe (environ 19s) provient du fait que la déclinaison du Soleil n'est pas fixe dans la journée, donc il y a une petite dissymétrie, le matin est plus long que l'après-midi lorsque la déclinaison décroît et c'est l'inverse lorsque la déclinaison croît. Il y a quasi égalité lorsque la déclinaison est stationnaire c'est-à-dire aux solstices.

La forte dissymétrie que l'on observe provient donc bien de l'usage du temps solaire moyen à la place du temps solaire vrai.

En effet, en temps solaire vrai, le Soleil passerait tous les jours au méridien à 12 heures, et il y aurait presque une parfaite symétrie dans les heures de lever coucher du Soleil par rapport à midi.

Comme le montre les éphémérides du Soleil à Paris pour les mois de décembre et janvier, l'équation du temps est croissante, donc l'heure du passage au méridien se rapproche de midi moyen (12h 50m 39s TLF), puis le dépasse (vers le 24-25 décembre), en même temps les jours diminuent (jusqu'au 21 décembre) puis recommencent à croître à partir du 22 décembre.

En effet, l'heure de lever du Soleil est égale à l'instant du passage au méridien moins la demi-durée du jour, et l'heure du coucher est l'heure du passage au méridien plus la demi-durée du jour.

Exprimé en temps moyen, à partir du 11 décembre l'instant du passage au méridien croît plus que la demi-durée du jour ne décroît donc le Soleil va se coucher plus tard en temps moyen.

À partir du 21 décembre et jusqu'au 1<sup>er</sup> janvier, l'instant du passage au méridien croît plus que la demi-durée du jour augmente donc le Soleil va se lever plus tard en temps moyen.

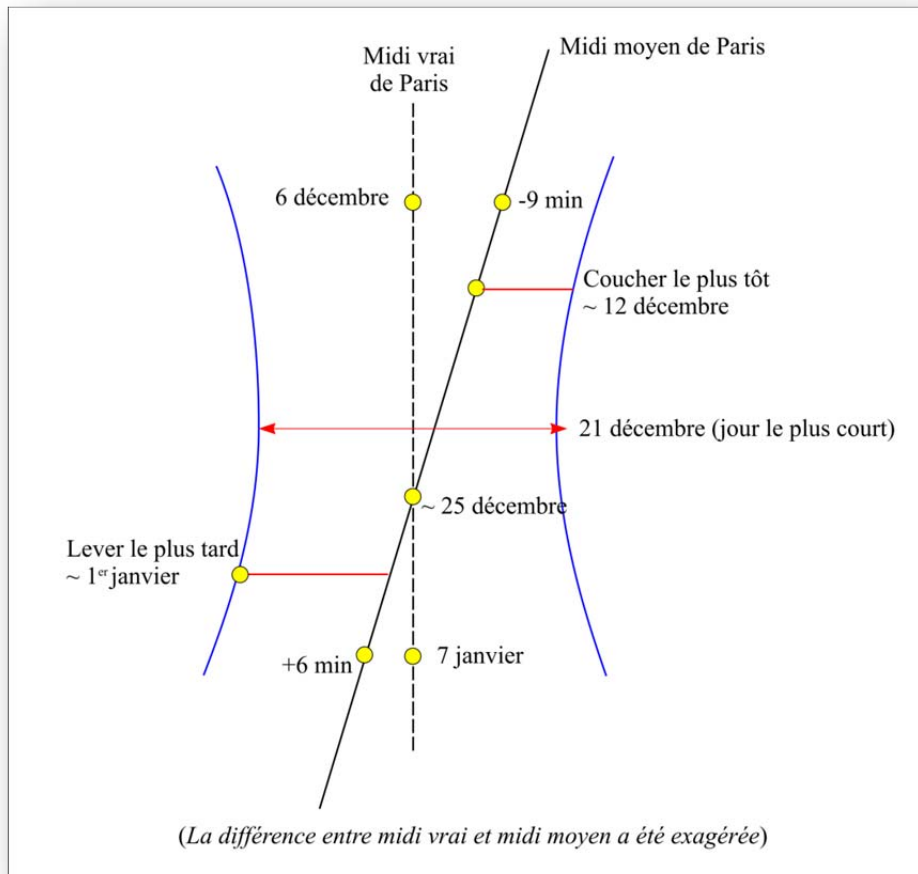


Figure 24. Évolution de la durée du jour à Paris au voisinage du solstice d'hiver.

Pour vérifier notre explication, les tableaux suivants donnent les instants des levers, des couchers et des passages au méridien du centre du Soleil à Paris en décembre 2004 et en janvier 2005, mais les instants sont donnés en temps solaire vrai de Paris.

Date	Lever TSV	Azimut	Passage au méridien TSV	hauteur	Coucher TSV	Azimut
01/12/2004	7h 44m 50,5s	303,6°	12h 0m 0,0s	19,3°	16h 14m 50,6s	56,3°
02/12/2004	7h 45m 43,3s	303,9°	12h 0m 0,0s	19,1°	16h 13m 58,6s	56,0°
03/12/2004	7h 46m 33,8s	304,1°	12h 0m 0,0s	19,0°	16h 13m 9,0s	55,8°
04/12/2004	7h 47m 22,0s	304,4°	12h 0m 0,0s	18,8°	16h 12m 21,7s	55,6°
05/12/2004	7h 48m 7,7s	304,6°	12h 0m 0,0s	18,7°	16h 11m 36,9s	55,4°
06/12/2004	7h 48m 51,0s	304,8°	12h 0m 0,0s	18,6°	16h 10m 54,5s	55,2°
07/12/2004	7h 49m 31,8s	305,0°	12h 0m 0,0s	18,5°	16h 10m 14,6s	55,0°
08/12/2004	7h 50m 10,0s	305,1°	12h 0m 0,0s	18,4°	16h 9m 37,3s	54,8°
09/12/2004	7h 50m 45,7s	305,3°	12h 0m 0,0s	18,3°	16h 9m 2,6s	54,6°
10/12/2004	7h 51m 18,6s	305,5°	12h 0m 0,0s	18,2°	16h 8m 30,6s	54,5°
11/12/2004	7h 51m 49,0s	305,6°	12h 0m 0,0s	18,1°	16h 8m 1,2s	54,3°
12/12/2004	7h 52m 16,6s	305,7°	12h 0m 0,0s	18,0°	16h 7m 34,6s	54,2°
13/12/2004	7h 52m 41,4s	305,9°	12h 0m 0,0s	18,0°	16h 7m 10,7s	54,1°
14/12/2004	7h 53m 3,5s	306,0°	12h 0m 0,0s	17,9°	16h 6m 49,6s	54,0°
15/12/2004	7h 53m 22,8s	306,1°	12h 0m 0,0s	17,9°	16h 6m 31,3s	53,9°
16/12/2004	7h 53m 39,2s	306,1°	12h 0m 0,0s	17,8°	16h 6m 15,8s	53,8°
17/12/2004	7h 53m 52,8s	306,2°	12h 0m 0,0s	17,8°	16h 6m 3,2s	53,8°
18/12/2004	7h 54m 3,5s	306,2°	12h 0m 0,0s	17,8°	16h 5m 53,5s	53,7°
19/12/2004	7h 54m 11,3s	306,3°	12h 0m 0,0s	17,7°	16h 5m 46,7s	53,7°
20/12/2004	7h 54m 16,3s	306,3°	12h 0m 0,0s	17,7°	16h 5m 42,7s	53,7°

21/12/2004	7h 54m 18,3s	306,3°	12h 0m 0,0s	17,7°	16h 5m 41,7s	53,7°
22/12/2004	7h 54m 17,4s	306,3°	12h 0m 0,0s	17,7°	16h 5m 43,5s	53,7°
23/12/2004	7h 54m 13,7s	306,3°	12h 0m 0,0s	17,7°	16h 5m 48,3s	53,7°
24/12/2004	7h 54m 7,0s	306,3°	12h 0m 0,0s	17,8°	16h 5m 55,9s	53,7°
25/12/2004	7h 53m 57,5s	306,2°	12h 0m 0,0s	17,8°	16h 6m 6,4s	53,8°
26/12/2004	7h 53m 45,0s	306,2°	12h 0m 0,0s	17,8°	16h 6m 19,8s	53,9°
27/12/2004	7h 53m 29,8s	306,1°	12h 0m 0,0s	17,9°	16h 6m 36,1s	53,9°
28/12/2004	7h 53m 11,7s	306,0°	12h 0m 0,0s	17,9°	16h 6m 55,2s	54,0°
29/12/2004	7h 52m 50,7s	305,9°	12h 0m 0,0s	18,0°	16h 7m 17,1s	54,1°
30/12/2004	7h 52m 27,0s	305,8°	12h 0m 0,0s	18,0°	16h 7m 41,8s	54,2°
31/12/2004	7h 52m 0,5s	305,7°	12h 0m 0,0s	18,1°	16h 8m 9,2s	54,4°

Date	Lever TSV	Azimut	Passage au méridien	Hauteur	Coucher TSV	Azimuths
01/01/2005	7h 51m 31,3s	305,5°	12h 0m 0,0s	18,2°	16h 8m 39,4s	54,5°
02/01/2005	7h 50m 59,4s	305,4°	12h 0m 0,0s	18,3°	16h 9m 12,3s	54,7°
03/01/2005	7h 50m 24,7s	305,2°	12h 0m 0,0s	18,4°	16h 9m 47,9s	54,8°
04/01/2005	7h 49m 47,5s	305,0°	12h 0m 0,0s	18,5°	16h 10m 26,1s	55,0°
05/01/2005	7h 49m 7,6s	304,9°	12h 0m 0,0s	18,6°	16h 11m 6,9s	55,2°
06/01/2005	7h 48m 25,2s	304,7°	12h 0m 0,0s	18,7°	16h 11m 50,2s	55,4°
07/01/2005	7h 47m 40,3s	304,4°	12h 0m 0,0s	18,8°	16h 12m 36,0s	55,6°
08/01/2005	7h 46m 52,9s	304,2°	12h 0m 0,0s	19,0°	16h 13m 24,3s	55,9°
09/01/2005	7h 46m 3,1s	304,0°	12h 0m 0,0s	19,1°	16h 14m 15,0s	56,1°
10/01/2005	7h 45m 10,9s	303,7°	12h 0m 0,0s	19,3°	16h 15m 8,1s	56,4°
11/01/2005	7h 44m 16,5s	303,5°	12h 0m 0,0s	19,4°	16h 16m 3,4s	56,6°
12/01/2005	7h 43m 19,8s	303,2°	12h 0m 0,0s	19,6°	16h 17m 1,0s	56,9°
13/01/2005	7h 42m 20,8s	302,9°	12h 0m 0,0s	19,7°	16h 18m 0,8s	57,2°
14/01/2005	7h 41m 19,8s	302,6°	12h 0m 0,0s	19,9°	16h 19m 2,7s	57,5°
15/01/2005	7h 40m 16,6s	302,3°	12h 0m 0,0s	20,1°	16h 20m 6,7s	57,8°
16/01/2005	7h 39m 11,5s	302,0°	12h 0m 0,0s	20,3°	16h 21m 12,7s	58,1°
17/01/2005	7h 38m 4,3s	301,7°	12h 0m 0,0s	20,5°	16h 22m 20,6s	58,5°
18/01/2005	7h 36m 55,3s	301,3°	12h 0m 0,0s	20,7°	16h 23m 30,5s	58,8°
19/01/2005	7h 35m 44,4s	301,0°	12h 0m 0,0s	20,9°	16h 24m 42,1s	59,1°
20/01/2005	7h 34m 31,7s	300,6°	12h 0m 0,0s	21,1°	16h 25m 55,6s	59,5°
21/01/2005	7h 33m 17,2s	300,3°	12h 0m 0,0s	21,3°	16h 27m 10,8s	59,9°
22/01/2005	7h 32m 1,1s	299,9°	12h 0m 0,0s	21,6°	16h 28m 27,6s	60,3°
23/01/2005	7h 30m 43,4s	299,5°	12h 0m 0,0s	21,8°	16h 29m 46,1s	60,6°
24/01/2005	7h 29m 24,1s	299,1°	12h 0m 0,0s	22,0°	16h 31m 6,1s	61,0°
25/01/2005	7h 28m 3,3s	298,7°	12h 0m 0,0s	22,3°	16h 32m 27,6s	61,4°
26/01/2005	7h 26m 41,1s	298,3°	12h 0m 0,0s	22,5°	16h 33m 50,5s	61,9°
27/01/2005	7h 25m 17,5s	297,9°	12h 0m 0,0s	22,8°	16h 35m 14,9s	62,3°
28/01/2005	7h 23m 52,5s	297,5°	12h 0m 0,0s	23,1°	16h 36m 40,5s	62,7°
29/01/2005	7h 22m 26,2s	297,0°	12h 0m 0,0s	23,3°	16h 38m 7,5s	63,1°
30/01/2005	7h 20m 58,6s	296,6°	12h 0m 0,0s	23,6°	16h 39m 35,7s	63,6°
31/01/2005	7h 19m 29,9s	296,1°	12h 0m 0,0s	23,9°	16h 41m 5,1s	64,0°

On constate que le passage méridien a effectivement lieu à 12 heures (midi soleil vrai) tous les jours. Si l'on compare la valeur du lever du Soleil le 1<sup>er</sup> décembre en temps solaire vrai (7h 44m 50,5s) et celle que nous avons calculée à l'aide des instants exprimés en temps légal français (7h 44m 47s), on constate un écart d'environ 3s. Ce petit décalage provient de l'usage de l'équation du temps à l'instant du passage au méridien dans le calcul du lever en temps solaire vrai à partir du temps légal. Pour obtenir le résultat exact, on aurait dû prendre l'équation du temps à l'instant du lever du Soleil. On peut faire la même constatation pour l'instant du coucher.

## 2.19 Pour en savoir plus

Nous allons étudier le lever, le coucher et le passage du Soleil en des lieux particuliers à la surface de la Terre.

### Au pôle Nord.

Au pôle Nord, la latitude est de  $90^\circ$  et la colatitude est nulle, l'équateur est donc parallèle à l'horizon et sur notre figure les deux diamètres sont confondus. Le Soleil est visible lorsque sa déclinaison est positive, c'est-à-dire de l'équinoxe de printemps à l'équinoxe d'automne. Le Soleil est invisible lorsque sa déclinaison est négative, c'est-à-dire de l'équinoxe d'automne à l'équinoxe de printemps.

Début des saisons	Hauteur du Soleil
Solstice d'hiver	$23^\circ 26'$ plus la réfraction
Équinoxe de printemps et d'automne	$0^\circ$ plus la réfraction horizontale
Solstice d'été	$-23^\circ 26'$

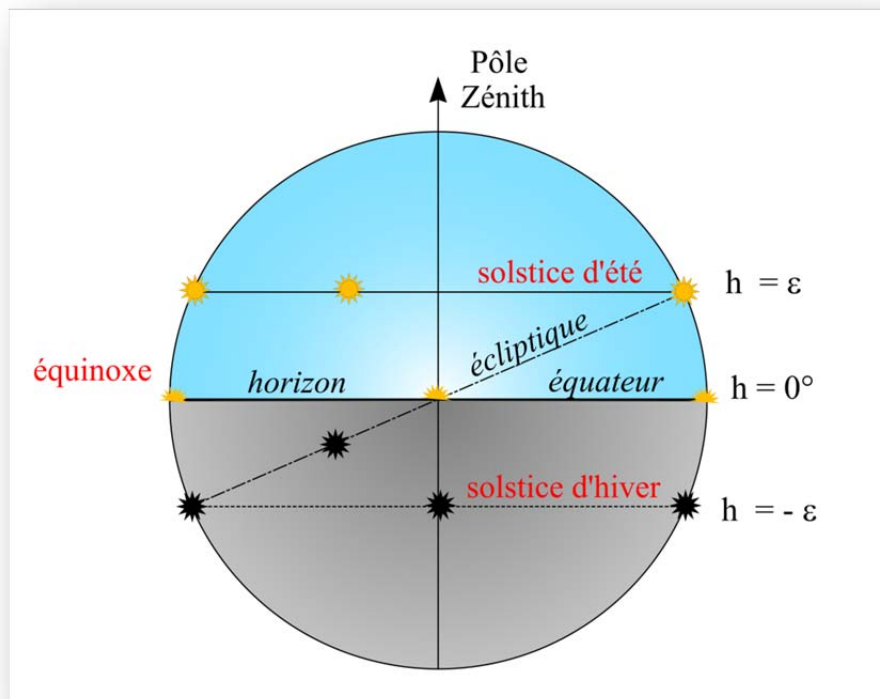


Figure 25. Visibilité au pôle Nord

En raison de la réfraction atmosphérique, le Soleil est visible le jour des équinoxes bien que sa déclinaison soit nulle, en effet à cause de la réfraction atmosphérique il n'est à l'horizon que lorsque sa déclinaison est égale à  $-36,6'$ .

Cela explique pourquoi le jour polaire est plus long que la nuit polaire, si on se place au pôle Nord et que l'on calcule les levers et couchers du Soleil avec une réfraction horizontale de  $36,6'$  on trouve pour l'année 2004-2005 :

- Coucher du centre du Soleil le 24/09/2004 à 5h 55m 57,7s UTC.
- Lever du centre du Soleil le 18/03/2005 à 23h 39m 28,0s UTC.
- Coucher du centre du Soleil le 24/09/2005 à 11h 50m 14,2s UTC.

La nuit polaire arctique dure donc 175 jours 17h 43m et le jour polaire arctique 189 jours 12h 11m.

### À l'Équateur.

À l'équateur l'axe des pôles est parallèle au plan horizontal et le zénith est dans le plan équatorial donc tous les corps se lèvent et se couchent toujours à la verticale. Le jour des équinoxes, le Soleil passe par le zénith. Le jour du solstice d'été, il se lève au nord-est et se couche au nord-ouest en passant au méridien dans la direction du nord, c'est le jour où sa culmination nord-est minimale. Le jour du solstice d'hiver, il se lève au sud-est et se couche au sud-ouest en passant au méridien dans la direction du sud, c'est ce jour également que sa culmination sud-est minimale. Entre l'équinoxe de printemps et l'équinoxe d'automne, le Soleil passe toujours au nord, entre l'équinoxe d'automne et équinoxe de printemps le Soleil passe toujours au sud. Le jour des équinoxes, il se lève exactement à l'est et garde cet azimut jusqu'à son passage au zénith puis il passe à l'ouest et reste à l'ouest jusqu'à son coucher.

Début des saisons	Hauteur du Soleil au méridien
Solstice d'hiver	66°34' plus la réfraction vers le nord
Équinoxes de printemps et d'automne	90°
Solstice d'été	66°34' plus la réfraction vers le sud

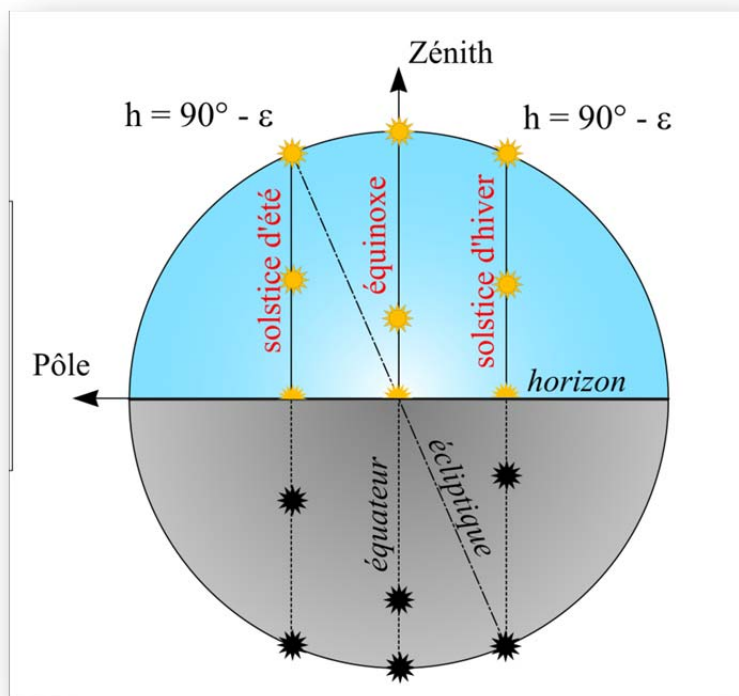


Figure 26. Visibilité à l'équateur.

#### 2.19.1 Lieux particuliers.

*Lieux sur Terre où le Soleil ne se couche pas le jour du solstice d'été.*

Pour que le Soleil ne se couche pas, il faut que la hauteur de son passage inférieur au méridien soit nulle. Le jour du solstice d'été la déclinaison du Soleil est égale à 23°26'. La hauteur du passage inférieur d'un astre est donnée par la relation suivante :

$$h_{mf} = \delta_* - \bar{\varphi}$$



Pour que cette hauteur soit nulle, il faut que la colatitude soit égale à la déclinaison. Donc que la latitude soit égale à  $90^\circ - 23^\circ 26'$  soit  $66^\circ 34'$ . C'est la définition du cercle polaire arctique.

Un raisonnement identique pour l'hémisphère sud permet de définir le cercle polaire antarctique, à une latitude de  $-66^\circ 34'$ .

On remarque que sur les cercles polaires le Soleil ne se lève pas le jour du solstice d'hiver.

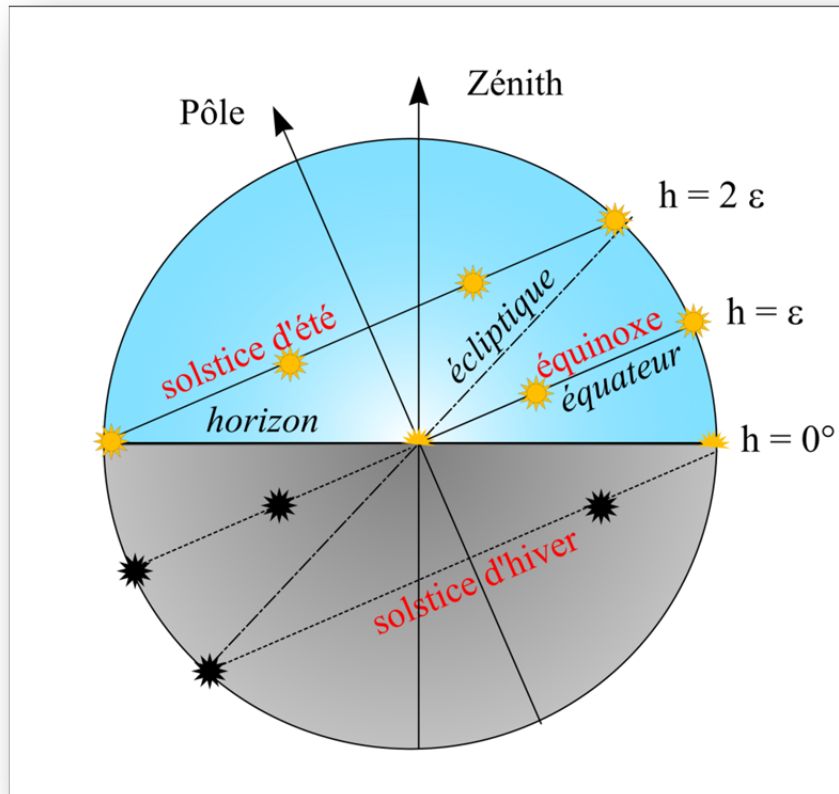


Figure 27. Visibilité sur le cercle polaire arctique.

Lieux où le Soleil passe au zénith le jour des solstices.

La hauteur du Soleil à son passage méridien est donnée par la relation suivante :

$$h_{sup} = \bar{\varphi} + \delta$$

Si le Soleil est au zénith, sa hauteur est de  $90^\circ$ . Alors la colatitude du lieu est égale au complémentaire de la déclinaison du Soleil et la latitude du lieu est égale à la déclinaison du Soleil. Ces lieux sont les parallèles terrestres qui ont pour latitude  $23^\circ 26'$  et  $-23^\circ 26'$ , ils définissent les tropiques. Pour le solstice d'été dans l'hémisphère nord, le tropique s'appelle le tropique du Cancer ( $23^\circ 26'$ ), car à cet instant le Soleil entre dans le signe du Cancer (longitude  $90^\circ$ ). Pour le solstice d'été dans l'hémisphère sud, c'est-à-dire le solstice d'hiver dans l'hémisphère nord, le tropique s'appelle le tropique du Capricorne ( $-23^\circ 26'$ ), car à cet instant le Soleil entre dans le signe du Capricorne (longitude  $270^\circ$ ).



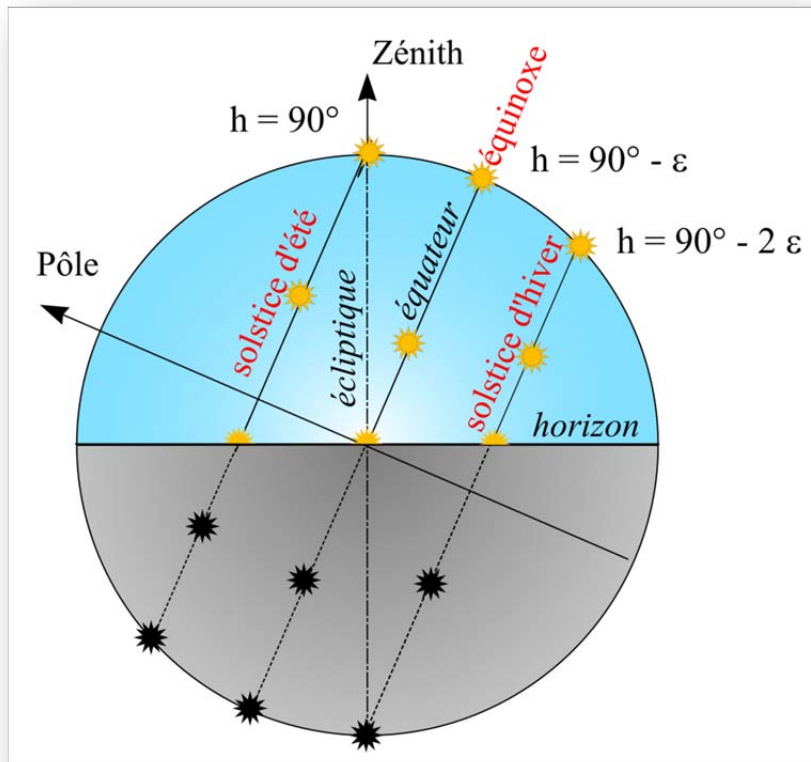


Figure 28. Visibilité sur le tropique du Cancer.

On constate que le Soleil ne passe au zénith qu'entre les tropiques. Pour un lieu quelconque entre les tropiques, le jour où le Soleil passe au zénith est celui où la déclinaison du Soleil est égale à la latitude du lieu. Comme la déclinaison passe deux fois par an par toutes les valeurs comprises entre  $-23^{\circ} 26'$  et  $+23^{\circ} 26'$ , il y a toujours deux jours par an où cette condition est vérifiée.

On remarquera également que les valeurs extrêmes de la hauteur du Soleil au méridien n'ont lieu les jours des solstices que pour les lieux situés à l'extérieur de la bande intertropicale. Pour tous les lieux situés dans cette bande ces valeurs extrêmes ont lieu à des dates quelconques, avec le cas particulier de l'équateur où il y a inversion des dates des extremums par rapport aux tropiques, avec un passage au zénith les jours des équinoxes et des culminations minimales les jours des solstices.

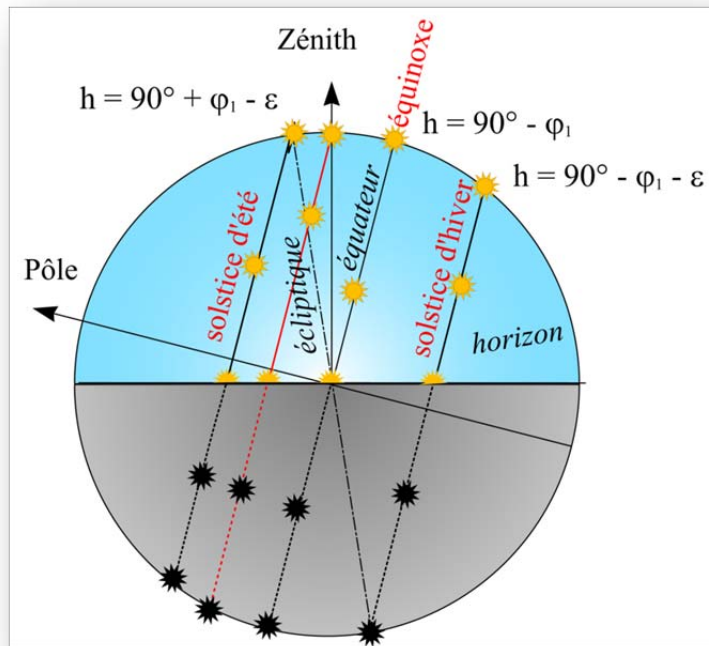


Figure 29. Visibilité entre le tropique du Cancer et l'équateur.

Ainsi si l'on se trouve entre le tropique du Cancer et l'équateur à une latitude  $\varphi_1$  (donc comprise entre  $0^\circ$  et  $\varepsilon$ ), alors le Soleil passe deux fois par an au zénith, une fois ( $T_1$ ) entre l'équinoxe de printemps (le 21 mars) et le solstice d'été (21 juin) et une seconde fois ( $T_2$ ) entre le solstice d'été et l'équinoxe d'automne (22 septembre). Ces deux dates correspondent aux jours où la déclinaison du Soleil est égale à la latitude du lieu. Entre les dates  $T_1$  et  $T_2$ , le Soleil se lève au nord-est, puis passe au méridien nord et se couche au nord-ouest. Sa plus basse culmination au méridien nord a lieu le jour du solstice d'été. À l'inverse entre les dates  $T_2$  et  $T_1$ , le Soleil se lève de plus en plus vers le sud-est, puis il passe au méridien sud et se couche de plus en plus au sud-ouest. Sa plus basse culmination au méridien sud a lieu le jour du solstice d'hiver. On remarquera que le Soleil culmine plus haut au solstice d'été qu'au solstice d'hiver dans le même méridien, mais pas dans la même direction.

Plaçons-nous maintenant entre l'équateur et le tropique du Capricorne, nous sommes donc dans l'hémisphère sud.

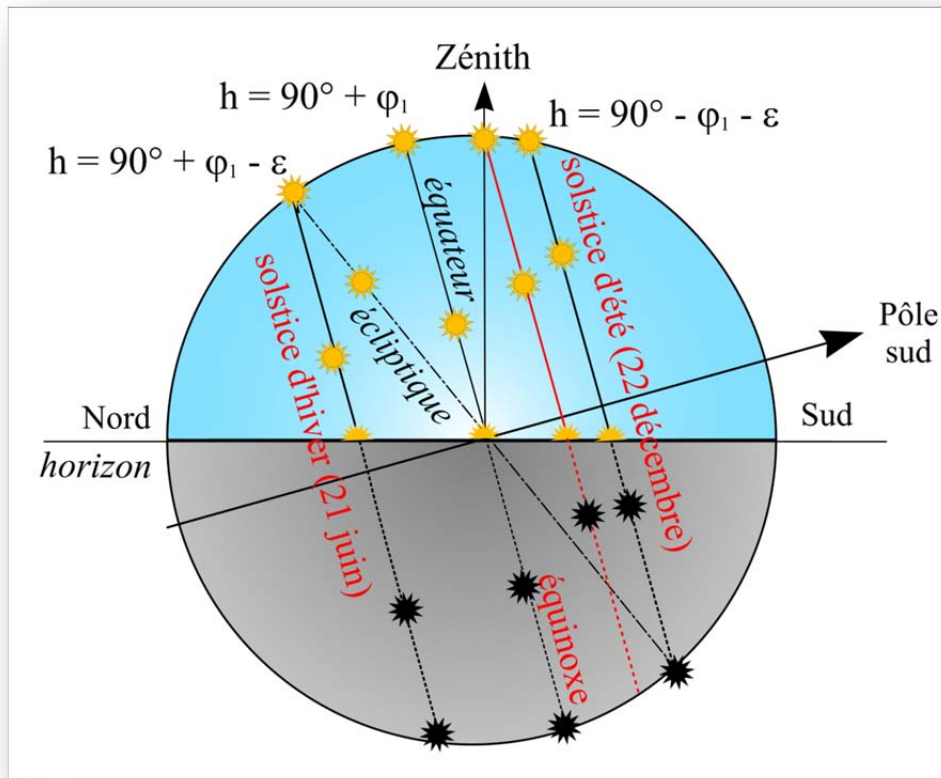


Figure 30. Visibilité entre l'équateur et le tropique du Capricorne.

Si l'on se trouve entre l'équateur et le tropique du Capricorne à une latitude  $\varphi_1$  (négative, donc comprise entre  $0^\circ$  et  $-\varepsilon$ ), alors le Soleil passe deux fois par an au zénith, une fois ( $T_1$ ) entre l'équinoxe de printemps (le 22 septembre) et le solstice d'été (22 décembre) et une seconde fois ( $T_2$ ) entre le solstice d'été (22 décembre) et l'équinoxe d'automne (21 mars). Ces deux dates correspondent aux jours où la déclinaison du Soleil est égale à la latitude du lieu. Entre les dates  $T_1$  et  $T_2$ , le Soleil se lève au sud-est, puis passe au méridien sud et se couche au sud-ouest. Sa plus basse culmination au méridien sud a lieu le jour du solstice d'été (22 décembre). À l'inverse entre les dates  $T_2$  et  $T_1$ , le Soleil se lève de plus en plus vers le nord-est, puis il passe au méridien nord et se couche de plus en plus au nord-ouest. Sa plus basse culmination au méridien nord a lieu le jour du solstice d'hiver (21 juin). On remarquera de nouveau que le Soleil culmine plus haut au solstice d'été qu'au solstice d'hiver dans le même méridien, mais pas dans la même direction.

Pour terminer, plaçons-nous dans l'hémisphère sud, au-dessus du tropique du Capricorne, mais sous le cercle polaire antarctique.

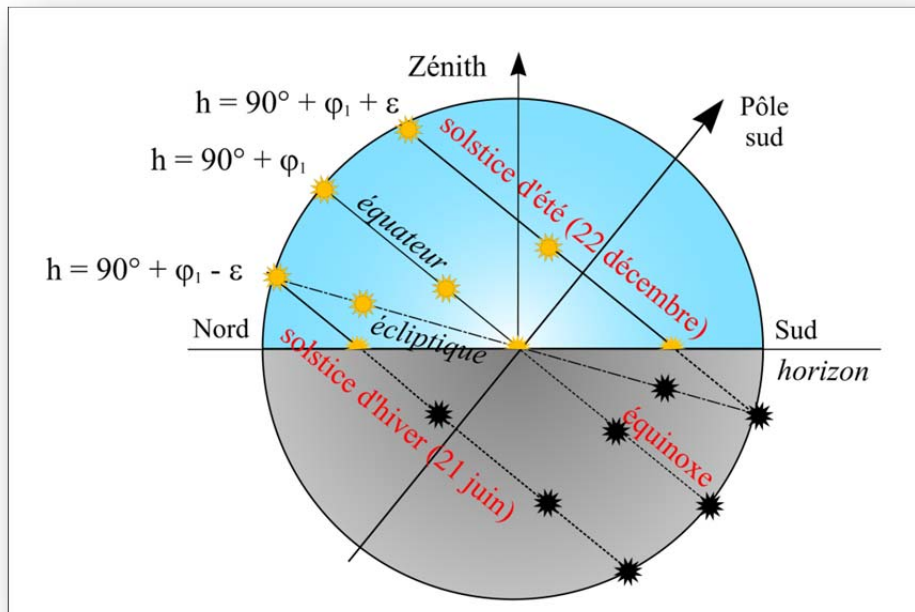


Figure 31. Visibilité dans l'hémisphère sud sous le tropique du Capricorne.

On se trouve à une latitude  $\varphi_1$  (négative et inférieure à  $-\varepsilon$ ), le Soleil ne passe jamais au zénith, il culmine au plus haut, au nord, dans le méridien, le jour du solstice d'été (22 décembre) et au plus bas le jour du solstice d'hiver (21 juin). Il se lève à l'est et se couche à l'ouest, mais il passe tous les jours au méridien nord. Ainsi lorsque l'on regarde le Soleil, il se déplace dans la journée de la droite vers la gauche dans le sens inverse des aiguilles d'une montre. Il en est de même pour son ombre.

**Attention** sur les figures on ne doit pas utiliser la longueur des segments représentant la portion de la trajectoire apparente du Soleil au-dessus ou au-dessous de l'horizon pour mesurer la variation de la durée du jour et de la nuit en fonction de la date dans l'année, en effet au cours de l'année cette longueur n'est pas proportionnelle à la durée du jour ou à la durée de la nuit. Pour s'en convaincre, il suffit de regarder le tracé correspondant à la visibilité du Soleil à l'équateur (figure 18) où la durée du jour est égale à la durée de la nuit tous les jours de l'année et où les segments ont des longueurs différentes. Par contre, pour un jour donné, le rapport du segment au-dessus de l'horizon sur le segment au-dessous de l'horizon est égal au rapport de la durée du jour sur la durée de la nuit (si on néglige la réfraction atmosphérique et si l'on compte les débuts et fins de journée aux levers et aux couchers du centre du Soleil).

### 2.19.2 Position des terminateurs par rapport aux méridiens

Un terminateur solaire est le tracé sur la surface de la Terre de la limite entre la zone sombre (nuit) et la zone éclairée (jour). Physiquement cette limite n'est pas réellement une ligne en raison de la pénombre, due au fait que le Soleil n'est pas ponctuel, et en raison de la diffusion de la lumière par l'atmosphère terrestre. En effet, il continue à faire jour après le coucher du Soleil et il fait jour avant le lever du Soleil, ces périodes définissent les crépuscules du soir et du matin.



Figure 32. Image centrée sur le point  $48^{\circ}$  de latitude nord et  $4^{\circ}17'$  de longitude est. Le terminateur solaire correspond au 5 juillet 2005 à 18h 45m UTC, Cette image a été construite à l'aide du logiciel [Earth and Moon Viewer](#).

Néanmoins on peut tracer à la surface de la Terre les lieux où le centre du Soleil se trouve à l'horizon à un instant donné. Cette ligne n'est pas un grand cercle de la sphère terrestre, car on doit tenir compte à la fois de la réfraction atmosphérique et de la parallaxe solaire. De plus on doit aussi tenir compte de l'aplatissement terrestre et considérer la Terre comme un ellipsoïde.

On entend souvent dire que si une ville se trouve à l'est d'une autre ville le Soleil s'y lève plus tôt et s'y couche plus tard. Cette assertion n'est vraie que si les deux villes ont la même latitude ou si l'on est le jour des équinoxes.

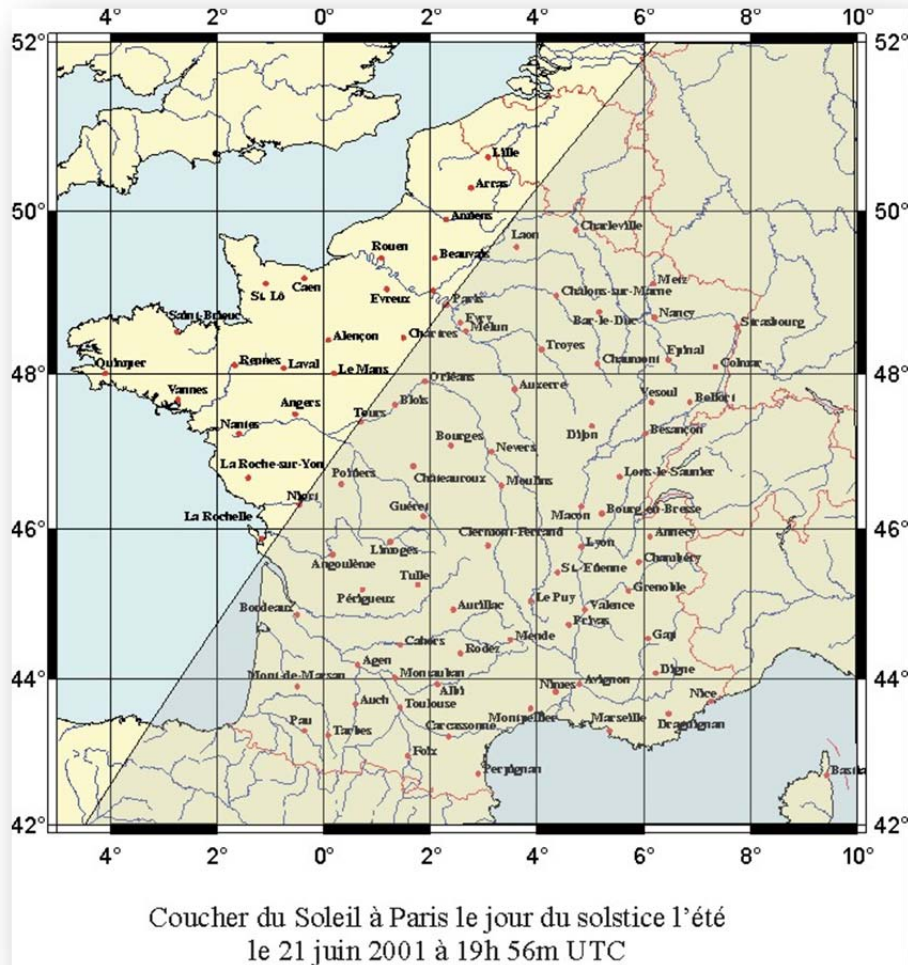
En effet, le terminateur n'est pas parallèle aux méridiens, sauf le jour des équinoxes.



*Figure 33. Lever du Soleil à Paris le jour du solstice d'été.*

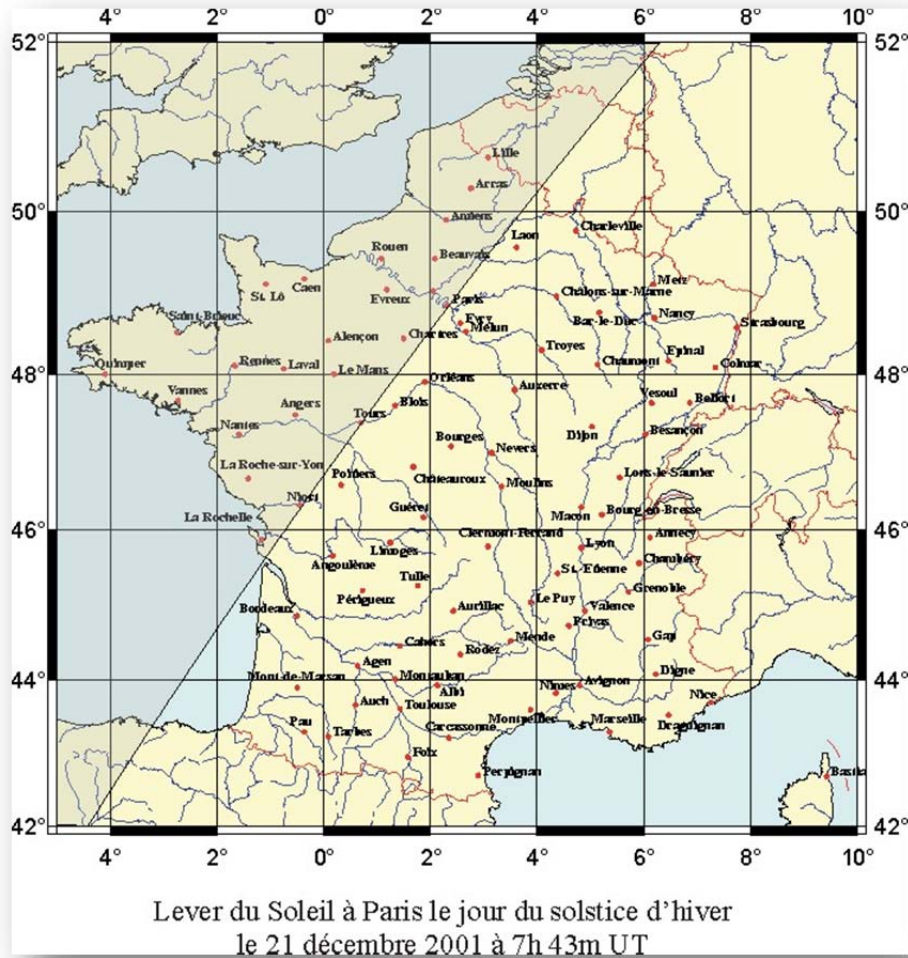
Sur la carte donnant le terminateur à l'instant du lever du Soleil à Paris le jour du solstice d'été, on voit bien que le Soleil se lève à Marseille après son lever à Paris bien que Marseille soit à l'est de Paris. C'est le cas pour tous les lieux situés au sud-est de Paris et à l'ouest du terminateur. De même le Soleil se lève à Calais avant son lever à Paris, bien que Calais soit à l'ouest de Paris. C'est le cas pour tous les lieux situés au nord-ouest de Paris et à l'est du terminateur.





*Figure 34. Coucher du Soleil à Paris le jour du solstice d'été.*

Sur la carte donnant le terminateur à l'instant du coucher du Soleil à Paris le jour du solstice d'été, on voit bien que le Soleil se couche à Bordeaux avant son coucher à Paris bien que Bordeaux soit à l'ouest de Paris. C'est le cas pour tous les lieux situés au sud-ouest de Paris et à l'est du terminateur. De même, le Soleil se couche à Lille après son coucher à Paris, bien que Lille soit à l'est de Paris. C'est le cas pour tous les lieux situés au nord-est de Paris et à l'ouest du terminateur.



*Figure 35. Lever du soleil à paris le jour du solstice d'hiver.*

Sur la carte donnant le terminateur à l'instant du lever du Soleil à Paris le jour du solstice d'hiver, on voit que le Soleil se lève à Lille après son lever à Paris, bien que Lille soit à l'est de Paris. C'est le cas pour tous les lieux situés au nord-est de Paris et à l'ouest du terminateur. De même, Le Soleil se lève à Bordeaux avant son lever à Paris. Bien que Bordeaux soit à l'ouest de Paris. C'est le cas pour tous les lieux situés au sud-ouest de Paris et à l'est du terminateur.



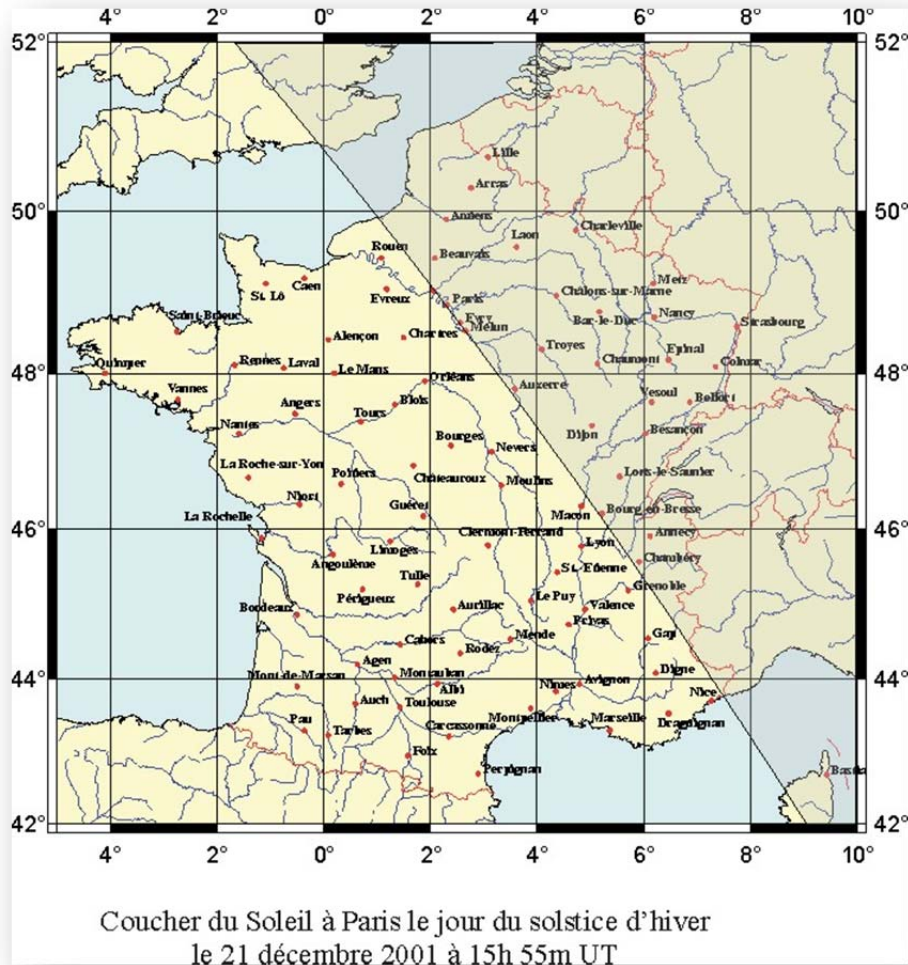


Figure 36. Coucher du soleil à Paris le jour du solstice d'hiver.

Sur la carte donnant le terminateur à l'instant du coucher du Soleil à Paris le jour du solstice d'hiver, on voit bien que le Soleil se couche à Calais avant de se coucher à Paris, bien que Calais soit à l'ouest de Paris. C'est le cas pour tous les lieux situés au nord-est de Paris et à l'ouest du terminateur. De même, le Soleil se couche à Marseille après son coucher à Paris, bien que Marseille soit à l'est de Paris. C'est le cas pour tous les lieux situés au sud-est de Paris et à l'ouest du terminateur.

Le jour des équinoxes, le terminateur passe par l'axe des pôles et est parallèle aux méridiens. Donc quel que soit le lieu sur Terre le Soleil se lève plus tôt pour un lieu plus à l'est et s'y couche plus tard.

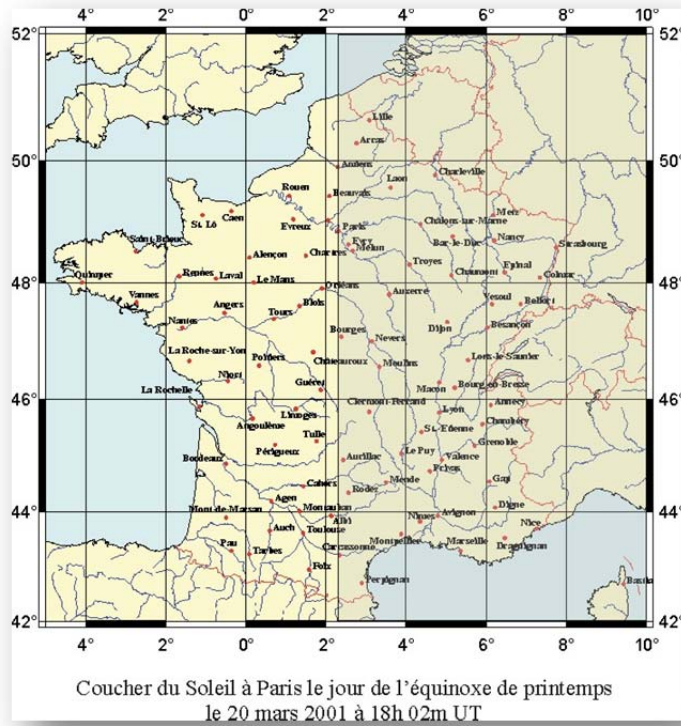


Figure 37. Coucher du Soleil à Paris le jour de l'équinoxe de printemps.



Figure 38. Lever du soleil à paris le jour de l'équinoxe de printemps.

Remarque :

Attention ces cartes peuvent être trompeuses, en effet il ne faut pas croire que l'inclinaison du terminateur avec les méridiens est un angle constant. Cet angle varie avec la latitude comme on le constate sur les cartes suivantes :

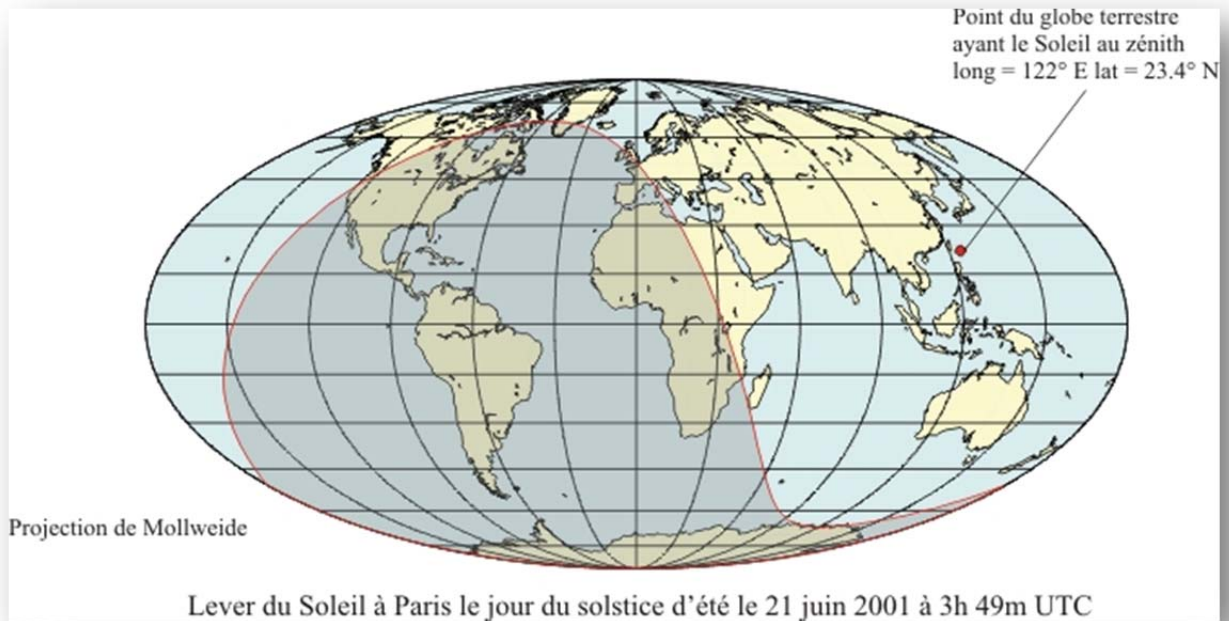


Figure 39. Lever du Soleil le jour du solstice d'été.

Sur la carte montrant le terminateur le jour du solstice d'été à l'instant du lever du Soleil à Paris, on constate au nord que le terminateur est tangent au cercle polaire arctique (jour polaire), et au sud que le terminateur est tangent au cercle polaire antarctique (nuit polaire). On constate également que le point du globe ayant le Soleil au zénith à l'instant du lever du Soleil à Paris est bien situé sur le tropique du Cancer.

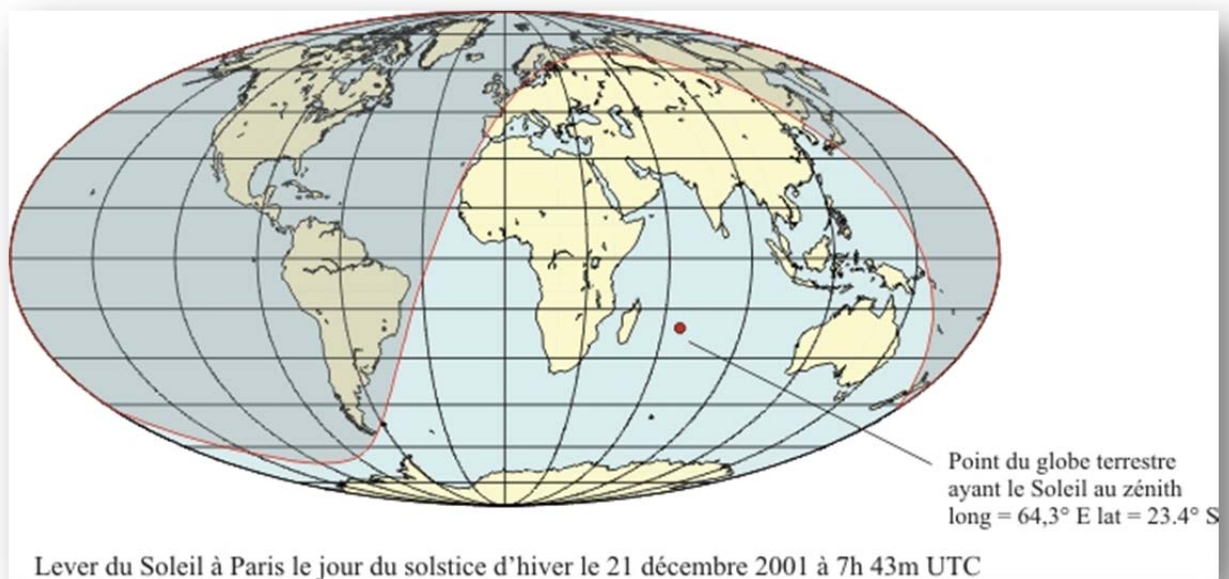


Figure 40. Lever du soleil le jour du solstice d'hiver.



Sur la carte montrant le terminateur le jour du solstice d'hiver à l'instant du lever du Soleil à Paris, on constate au nord que le terminateur est tangent au cercle polaire arctique (nuit polaire), et au sud que le terminateur est tangent au cercle polaire antarctique (jour polaire). On constate également que le point du globe ayant le Soleil au zénith à l'instant du lever du Soleil à Paris est bien situé sur le tropique du Capricorne.

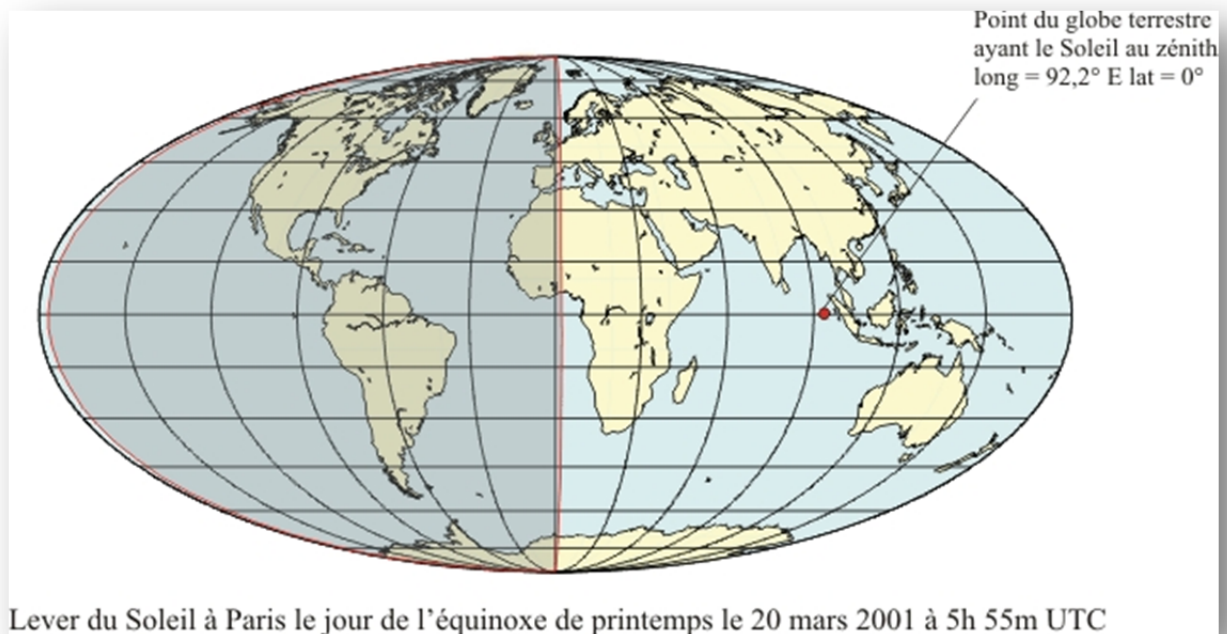


Figure 41. Lever du Soleil le jour de l'équinoxe de printemps.

Sur la carte montrant le terminateur le jour de l'équinoxe à l'instant du lever du Soleil à Paris, on constate que le terminateur passe par les pôles et est parallèle aux méridiens. On constate également que le point du globe ayant le Soleil au zénith à l'instant du lever du Soleil à Paris est bien situé sur l'équateur.

### 2.19.3 Calcul du passage au méridien supérieur d'un astre

Soit un lieu de latitude  $\varphi$  et de longitude  $\lambda$  par rapport au méridien international (compté négativement vers l'est). Nous avons vu que lorsqu'un astre passe au méridien son angle horaire est nul. Pour connaître l'instant du passage au méridien sud il suffit donc de résoudre l'équation :

$$H = 0$$

Or

$$H = T_\lambda - \alpha$$

Où  $T_\lambda$  est le temps sidéral local pour le lieu considéré de longitude et  $\alpha$  l'ascension droite de l'astre.

On a donc

$$T_\lambda = \alpha$$

Or

$$T_\lambda = T_G - \lambda$$

Donc le passage au méridien de l'astre correspond à l'instant  $t$  où le temps sidéral au méridien international vérifie l'équation suivante :

$$T_G = \alpha + \lambda$$

Les éphémérides fournissent des tables donnant la valeur du temps sidéral  $T_0$  au méridien international chaque jour à 0h de temps universel. Or le temps sidéral varie d'environ 23h 56m 4s en 24h de temps universel donc à un instant  $t$  quelconque de la journée le temps sidéral  $T_t$  se déduit du temps sidéral à 0h par la relation suivante :

$$T_t = T_0 + \frac{23\text{h } 56\text{m } 4\text{s}}{24\text{h}} \times t = T_0 + 0.9972685185 \times t$$

Et finalement :

$$t = \frac{\alpha + \lambda - T_0}{0.9972685185}$$

La valeur de  $t$  devant être ramenée entre zéro et vingt-quatre heures.

Deux cas peuvent se présenter :

- L'astre est une étoile, alors ses coordonnées équatoriales peuvent être considérées comme fixes sur la journée. Alors la formule précédente donne directement l'instant du passage au méridien.
- L'astre est mobile (planète, Lune, Soleil...) alors ses coordonnées équatoriales varient avec le temps  $t$ . Dans ce cas, les positions équatoriales géocentriques sont données chaque jour dans les éphémérides à zéro heure de temps universel. Dans ce cas, il faut réitérer la méthode de calcul en démarrant avec la valeur  $\alpha_0$  géocentrique à 0h UT, en déduire une première valeur  $t_1$  du passage au méridien de l'astre, puis calculer l'ascension droite de l'astre  $\alpha_1$  à l'instant  $t_1$  en interpolant les tables puis en déduire une nouvelle estimation  $t_2$  de l'instant du passage. On réitère l'opération, jusqu'à ce que l'on obtienne une précision donnée  $\varepsilon$ , c'est-à-dire jusqu'à ce que  $|t_{i+1} - t_i| < \varepsilon$ . On remarquera qu'il est inutile de calculer les coordonnées topocentriques de l'astre, en effet lors du passage au méridien le plan horaire de l'astre est confondu avec son plan azimutal, la parallaxe n'affecte donc pas l'ascension droite de l'astre (l'ascension droite géocentrique est égale à l'ascension droite topocentrique).

## 2.20 Culmination du Soleil

Si la déclinaison du Soleil était fixe, le Soleil culminerait exactement à l'instant de son passage dans le méridien supérieur du lieu. En fait comme la déclinaison du Soleil varie la culmination du Soleil a lieu légèrement avant ou légèrement après son passage au méridien en fonction du sens de la variation de la déclinaison du Soleil et du signe de la latitude du lieu. Ces écarts sont quasi nuls aux solstices lorsque la variation de la déclinaison est minimale et ils sont maximums (17s à Paris) aux solstices lorsque la variation de la déclinaison du Soleil est maximale.

### 2.20.1 Pour en savoir plus

Pour comprendre et calculer l'écart de temps entre le passage au méridien et la culmination du Soleil, on doit exprimer la variation de la hauteur  $dh$  d'un astre à l'aide des formules différentielles obtenues à partir des formules de trigonométrie sphérique donnant les coordonnées horizontales locales en fonction des coordonnées équatoriales locales.

La culmination d'un astre correspond à l'instant où sa hauteur par rapport à l'horizon est maximale. Donc lorsque la variation de cette hauteur avec le temps est nulle.

La hauteur  $h$  d'un astre à un instant donné est fonction de la latitude du lieu  $\varphi$ , de la déclinaison de l'astre  $\delta$  et de son angle horaire  $H$ . La trigonométrie sphérique, appliquée au triangle sphérique ayant pour sommets le pôle céleste, le zénith et l'astre, nous donne la relation suivante :

$$\sin h = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos H \quad (1)$$

Si l'on dérive cette expression, on trouve, pour un lieu de latitude donnée constante :

$$\cos h \cdot dh = \sin \varphi \cdot \cos \delta \cdot d\delta - \cos \varphi (\cos \delta \cdot \sin H \cdot dH + \cos H \cdot \sin \delta \cdot d\delta) \quad (2)$$

Où  $d\delta$ ,  $dh$  et  $dH$  sont les variations de la déclinaison, de la hauteur et de l'angle horaire avec le temps.

À l'instant de la culmination on a par définition :  $dh = 0$ .

Ce qui s'écrit :

$$(\sin \varphi \cdot \cos \delta - \cos \varphi \cdot \sin \delta) d\delta = \cos \varphi \cdot \cos \delta \cdot \sin H \cdot dH \quad (2)$$

Après des simplifications évidentes dans la formule (2), l'angle horaire  $H_0$  à l'instant de la culmination est donné par :

$$\sin H_0 = (\tan \varphi - \tan \delta) \frac{d\delta}{dH} \quad (3)$$

La culmination coïncide avec le passage au méridien local, uniquement si  $H_0 = 0$ ,

- si  $\varphi = \delta$ , donc si l'astre passe au zénith
- si  $d\delta = 0$  donc si la déclinaison est constante : soit l'astre est une étoile soit sa déclinaison est extrême dans le cas d'un astre mobile.

On voit donc que dans le cas d'une planète, du Soleil et de la Lune la culmination n'a pas lieu strictement à l'instant du passage au méridien.

### **Le cas du Soleil**

*Dans l'hémisphère nord :*

Si  $(\tan \varphi - \tan \delta) > 0$  alors la culmination a lieu au sud du zénith et si  $d\delta$  est positif alors la culmination a lieu après le passage au méridien.

Si  $(\tan \varphi - \tan \delta) = 0$  alors l'astre passe au zénith alors il culmine à son passage au méridien.

Si  $(\tan \varphi - \tan \delta) < 0$ , alors la culmination a lieu entre le pôle Nord et le zénith (c'est-à-dire au nord pour un lieu situé entre le tropique du Cancer et l'équateur) et si  $d\delta$  est positif alors la culmination a lieu après le passage au méridien.

On a des situations inverses si la variation de déclinaison est négative.

*Dans l'hémisphère sud :*

Si  $(\tan \varphi - \tan \delta) < 0$  alors la culmination a lieu au nord du zénith et si  $d\delta$  est négatif alors la culmination a lieu après le passage au méridien.

Si  $(\tan \varphi - \tan \delta) = 0$  alors l'astre passe au zénith alors il culmine à son passage au méridien.

Si  $(\tan \varphi - \tan \delta) > 0$ , alors la culmination a lieu entre le pôle Sud et le zénith (c'est-à-dire au sud pour un lieu situé entre le tropique du Capricorne et l'équateur) et si  $d\delta$  est négatif alors la culmination a lieu avant le passage au méridien.

On a des situations inverses si la variation de déclinaison est positive.

La tangente de la latitude croît avec la latitude, l'écart sera donc plus important si l'on monte en latitude.

L'altitude du Soleil à sa culmination est alors égale à son altitude à l'instant de son passage au méridien augmenté ou diminué de la valeur :

$$\frac{\tan \varphi - \tan \delta}{2} \left( \frac{d\delta}{dH} \right)^2 \text{ exprimée en radians} \quad (4)$$

Au cours de l'année, la variation de la déclinaison du Soleil est extrême aux équinoxes ( $\delta = 0^\circ$  et  $d\delta/dt$  de l'ordre de  $0,395^\circ/\text{jour}$ ), et elle est nulle aux solstices.

Et la variation de l'angle horaire du Soleil est très proche de  $360^\circ/\text{jour}$ .

#### *Exemple pour Paris*

La latitude de Paris est de  $48^\circ 50' 11,2''$ , la formule (3) donne pour l'équinoxe de mars :

$$\sin H_0 = 0.001255$$

Soit  $H_0 = 0,0719^\circ$ , ce qui correspond à environ 17,2s de temps, car l'angle horaire varie d'environ  $360^\circ$  en 24h.

On voit que cet écart de temps n'est pas négligeable.

Par contre l'écart d'altitude est très faible, la formule (4) donne :  $6,884 \cdot 10^{-7}$  radian soit  $0,14''$ .

## **2.21** *Calcul des jours où les durées des crépuscules sont les plus courtes*

On rappelle qu'il y a trois sortes de crépuscules : le crépuscule civil dont la fin correspond à un Soleil  $6^\circ$  sous l'horizon, le crépuscule nautique dont la fin correspond à un Soleil  $12^\circ$  sous l'horizon et le crépuscule astronomique dont la fin correspond à un Soleil  $18^\circ$  sous l'horizon.

Pour cette démonstration on ne peut pas utiliser de formules différentielles donnant la variation de l'angle horaire en fonction du début et de la fin du crépuscule, la précision serait insuffisante, on doit recourir à des formules exactes.

Posons le problème plus général suivant : pour un lieu de latitude  $\varphi$  soit  $M$  et  $M'$  les positions d'un même corps de même déclinaison  $\delta$  (variable) sur la sphère céleste,  $H$  et  $H'$  les angles horaires (supposés positifs) correspondant à deux hauteurs différentes  $h$  et  $h'$  ; calculons les extremums de la différence  $H - H'$ .

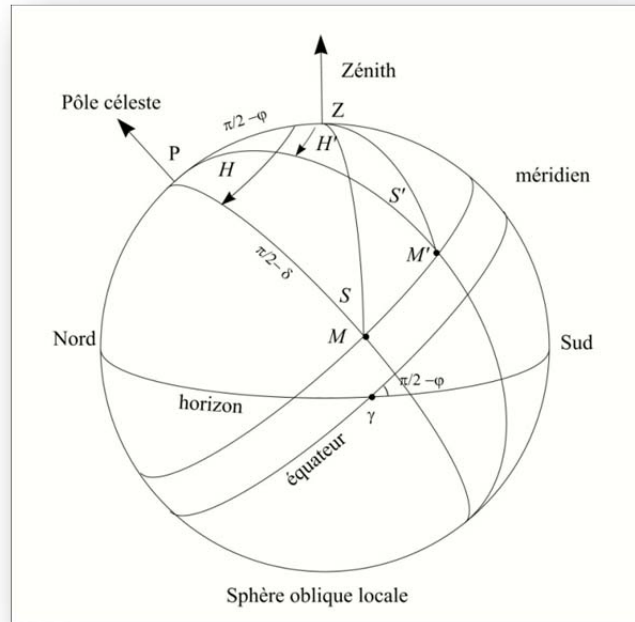


Figure 42. La sphère oblique locale.

Soit  $a$  et  $a'$  les azimuts et  $S$  et  $S'$  les angles parallactiques correspondants dans le triangle PZM on a les relations différentielles suivantes :

$$dh = \cos S \cdot d\delta - \cos \delta \sin S \cdot dH$$

Si l'on considère que  $h$  ne varie pas on obtient :

$$\frac{dH}{d\delta} = \frac{\cos S}{\sin S \cos \delta} = \frac{\cos S}{\sin a \cos \varphi}$$

Même chose pour le triangle PZM' :

$$\frac{dH'}{d\delta} = \frac{\cos S'}{\sin S' \cos \delta} = \frac{\cos S'}{\sin a' \cos \varphi}$$

donc les valeurs extrêmes correspondent à

$$\frac{d(H - H')}{d\delta} = 0$$

$$\frac{\cos S}{\sin a \cos \delta} = \frac{\cos S'}{\sin a' \cos \delta}$$

Les deux solutions sont donc

$$S = S'$$

$$a + a' = \pi$$

En utilisant cette propriété traçons les deux triangles sphériques PZM et PZM' en faisant coïncider les points M et M' les angles S et S' étant égaux le point Z du second triangle devenant le point Z' comme sur la figure suivante :



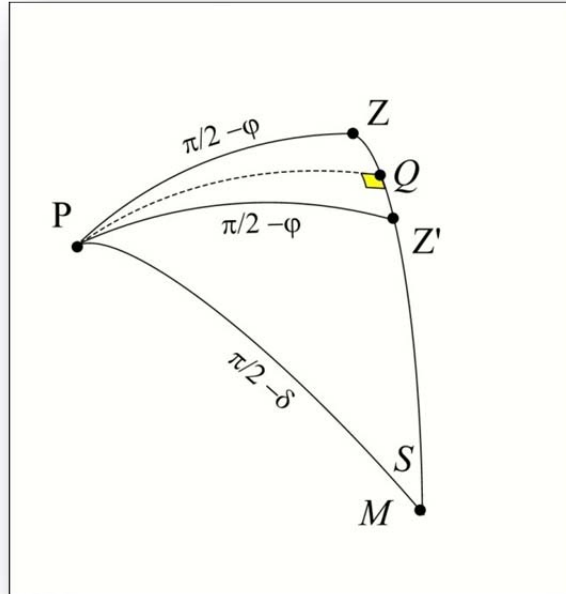


Figure 43.

Le triangle PZZ' est isocèle et si nous traçons le grand cercle PQ perpendiculaire à SZ.

Les deux triangles rectangles SPQ et ZPQ donnent les relations suivantes :

Dans le triangle SPQ :

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \delta\right) = \cos PQ \cdot \cos SQ$$

$$\text{or } SQ = \frac{SZ + SZ'}{2} = \frac{\left(\frac{\pi}{2} - h\right) + \left(\frac{\pi}{2} - h'\right)}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{h + h'}{2}$$

$$\text{d'où } \sin \delta = \cos PQ \cdot \sin\left(\frac{h + h'}{2}\right)$$

Dans le triangle ZPQ :

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \cos PQ \cos QZ$$

$$\text{avec } QZ = \frac{h - h'}{2}$$

$$\text{d'où } \sin \varphi = \cos PQ \cos\left(\frac{h - h'}{2}\right)$$

et par suite :

$$\sin \delta = \sin \varphi \frac{\sin\left(\frac{h + h'}{2}\right)}{\cos\left(\frac{h - h'}{2}\right)}$$

de plus, dans le triangle ZPQ on trouve :

$$\sin\left(\frac{H-H'}{2}\right)\cos\varphi = \sin\left(\frac{h'-h}{2}\right)$$

On a donc à la fois la valeur de  $\delta$  qui correspond à l'extremum cherché, et cet extremum lui-même, s'il existe.

Si l'on applique ces formules aux cas des crépuscules en négligeant la réfraction et si l'on nomme  $h_0$  la hauteur du Soleil correspondant à un crépuscule donné les deux équations précédentes deviennent :

$$\begin{array}{l} h' = 0, \\ h = -h_0 \\ \sin\delta = -\sin\varphi \tan\frac{h_0}{2} \\ \sin\left(\frac{H-H'}{2}\right) = \frac{1}{\cos\varphi} \sin\frac{h_0}{2} \end{array}$$

Exemple pour Paris :  $\varphi = 48^\circ 50'$

Pour  $h_0 = 6^\circ$  :

$$\sin\delta = -0.03945247099$$

$$\delta = -2.26104689^\circ = -2^\circ 15' 39,77''$$

Les crépuscules civils sont donc extrêmes à Paris les jours où le Soleil à cette déclinaison. Cette valeur correspond aux 15-16 mars et au 29 septembre.

Les durées sont données par la seconde formule :

$$\sin\left(\frac{H-H'}{2}\right) = 0.07950752468$$

$$H-H' = 9.120517618^\circ = 0.6080345079h = 36 \text{ min } 29s$$

que l'on doit transformer en temps moyen en multipliant par 0,9972696 ce qui donne 36min 23s.

Cette valeur est toujours un minimum.

Il n'y a pas d'extremum algébrique en effet lorsque la déclinaison du Soleil atteint son maximum elle se met à décroître et lorsque la déclinaison atteint son minimum elle se met à croître, on a donc un maximum de durée au solstice d'été et de même on a un autre maximum au solstice d'hiver.

Remarque :

Il n'y a pas toujours de crépuscule, en effet dans la formule :

$$\cos H = \frac{\sin(h_0) - \sin\varphi \sin\delta}{\cos\varphi \cos\delta}$$

$\cos H$  devient égal à  $-1$  si  $h_0 = \frac{\pi}{2} - \delta - \varphi$ , donc pour que le crépuscule existe en un

lieu de latitude  $\varphi$ , il faut que :

$$\begin{array}{l} \frac{\pi}{2} - \varepsilon - \varphi < h_0 \\ 90^\circ - \varepsilon - h_0 < \varphi \end{array}$$

$\varepsilon$  étant l'obliquité de l'écliptique.

La figure ci-dessous donne la durée moyenne journalière des différents crépuscules pour Paris. Pour chaque jour de l'année, la durée moyenne d'un crépuscule est la moyenne des durées du crépuscule du matin et du crépuscule du soir, ces deux valeurs n'étant pas identiques en raison de la variation de la déclinaison du Soleil en un jour.

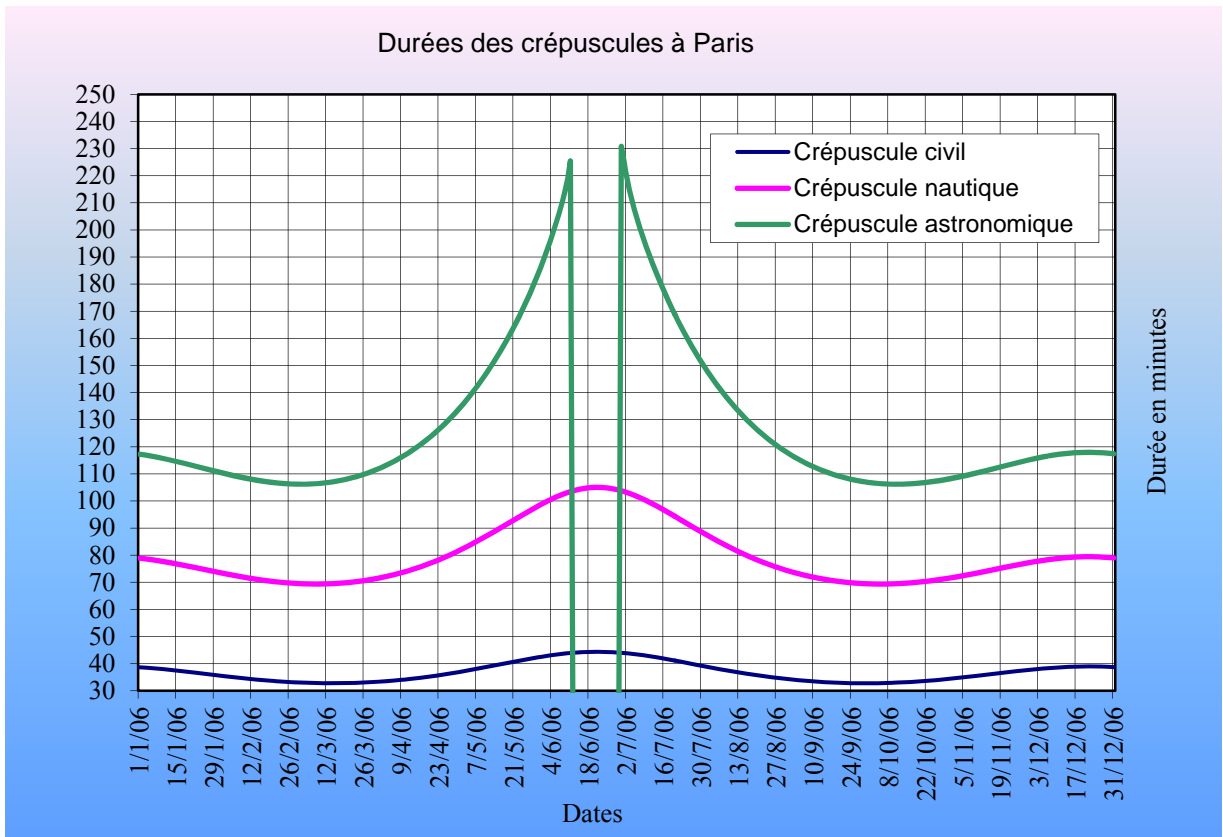


Figure. 43 Durées moyennes des crépuscules à Paris.

### 2.21.1 Pour en savoir plus : Démonstration de la formule différentielle

Nous partons des équations de trigonométrie sphérique suivantes :

$$\begin{aligned} \cos h \sin S &= \cos \varphi \sin H \\ \cos h \cos S &= \sin \varphi \cos \delta - \cos \varphi \sin \delta \cos H \\ \sin h &= \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos H \end{aligned} \quad (1)$$

et celles du problème inverse :

$$\begin{aligned} \cos \delta \sin H &= \cos h \sin a \\ \cos \delta \cos H &= \cos \varphi \sin h + \sin \varphi \cos h \sin a \\ \sin \delta &= \sin \varphi \sin h - \cos \varphi \cos h \sin a \end{aligned} \quad (2)$$

Différencions les deux premières équations de (1), on va supposer que tous les paramètres sont variables sauf  $\varphi$  et  $a$ . On obtient le système suivant :

$$\begin{aligned} -\sin h \sin S \cdot dh + \cos h \cos S \cdot dS &= \cos \varphi \cos H \cdot dH \\ -\sin h \cos S \cdot dh - \cos h \sin S \cdot dS &= -(\sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos H) d\delta \\ &+ \cos \varphi \sin \delta \sin H \cdot dH \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned}
-\sin h \sin S \cdot dh + \cos h \cos S \cdot dS &= \cos \varphi \cos H \cdot dH \\
-\sin h \cos S \cdot dh - \cos h \sin S \cdot dS &= -\sin h \cdot d\delta + \cos \varphi \sin \delta \sin H \cdot dH
\end{aligned} \quad (4)$$

On multiplie la première équation par  $\sin S$  et la seconde par  $\cos S$  et on les additionne, on obtient :

$$\begin{aligned}
-\sin h \cdot dh &= -\sin h \cos S \cdot d\delta \\
&+ (\sin S \cos \varphi \cos H + \cos S \cos \varphi \sin \delta \sin H) \cdot dH
\end{aligned} \quad (5)$$

Nous allons simplifier le coefficient de  $dH$  en utilisant les équations (1).

$$\begin{aligned}
\sin S \cos \varphi \cos H + \cos S \cos \varphi \sin \delta \sin H &= \sin S \cos \varphi \cos H + \cos h \cos S \sin S \sin \delta \\
&= \sin S \cos \varphi \cos H + (\sin \varphi \cos \delta - \cos \varphi \sin \delta \cos H) \cdot \sin S \sin \delta \\
&= \sin S \cos \varphi \cos H + \sin \varphi \cos \delta \sin S \sin \delta - \cos \varphi \sin \delta^2 \cos H \sin S \\
&= \sin S \cos \varphi \cos H (1 - \sin \delta^2) + \sin \varphi \cos \delta \sin S \sin \delta \\
&= \sin S \cos \varphi \cos H \cos \delta^2 + \sin \varphi \cos \delta \sin S \sin \delta \\
&= \cos \delta \sin S (\cos \delta \cos \varphi \cos H + \sin \varphi \sin \delta) \\
&= \cos \delta \sin S \sin h
\end{aligned}$$

Ce qui donne finalement :

$$\begin{aligned}
-\sin h \cdot dh &= -\sin h \cos S \cdot d\delta + \cos \delta \sin S \sin h \cdot dH \\
dh &= \cos S \cdot d\delta - \cos \delta \sin S \cdot dH
\end{aligned}$$

### 2.21.2 Direction du mouvement diurne

En un lieu donné, bien que le mouvement diurne des astres ait lieu toute l'année dans des plans quasi parallèles à l'équateur terrestre donc inclinés sur l'horizon d'un angle égal au complémentaire de la latitude du lieu, les angles de la direction du mouvement diurne changent à chaque instant. Ainsi la pente du mouvement diurne des planètes, de la Lune et du Soleil à leur coucher et à leur lever n'est pas constante dans le temps, mais varie au cours de l'année en fonction de la déclinaison des astres.

Dans le repère équatorial local défini par le plan horizontal et la direction du zénith, la direction du mouvement diurne, c'est-à-dire la direction de la tangente à la trajectoire apparente des étoiles ou des corps du système solaire dans le sens du mouvement a pour coordonnées horaires  $H' = H + \pi/2$  et  $\Delta\delta'$ , si  $H$  est l'angle horaire du corps et si  $\Delta\delta'$  est la variation instantanée de la déclinaison, pour les étoiles cette variation sera nulle.

L'azimut  $a'$  et la hauteur  $h'$  de la direction de la tangente dans le repère horizontal local se déduisent de ces valeurs à l'aide des formules suivantes :

$ \begin{aligned} \sin h' &= \sin \varphi \cdot \sin \Delta\delta' + \cos \varphi \cdot \cos \Delta\delta' \cdot \cos H' \\ \cos h' \cdot \sin a' &= \cos \Delta\delta' \cdot \sin H' \\ \cos h' \cdot \cos a' &= -\cos \varphi \cdot \sin \Delta\delta' + \sin \varphi \cdot \cos \Delta\delta' \cdot \cos H' \end{aligned} $
--

Qui, si on suppose  $\Delta\delta'$  nulle deviennent :

$$\begin{aligned} \sin h' &= -\cos \varphi \cdot \sin H \\ \cos h' \cdot \sin a' &= \cos H \\ \cos h' \cdot \cos a' &= -\sin \varphi \cdot \sin H \end{aligned}$$

Ainsi pour  $H = 0$  on a  $a' = \pi/2$  et  $h' = 0$  ; pour  $H = \pi$  on a  $a' = -\pi/2$  et  $h' = 0$  .

## 2.22 Angle que fait l'arc semi-diurne avec l'horizon au moment des levers couchers des astres

À l'instant du coucher, si on néglige la réfraction atmosphérique et si l'on suppose la déclinaison de l'astre constante, on a les formules suivantes :

$$\begin{aligned} 0 &= \sin \varphi \cdot \sin \delta + \cos \varphi \cdot \cos \delta \cdot \cos H \\ \sin a &= \cos \delta \cdot \sin H \\ \cos a &= -\cos \varphi \cdot \sin \delta + \sin \varphi \cdot \cos \delta \cdot \cos H \end{aligned}$$

Qui s'écrivent également

$$\begin{aligned} \cos H &= -\tan \varphi \cdot \tan \delta \\ \sin a &= \cos \delta \cdot \sin H \\ \cos a &= -\frac{\sin \delta}{\cos \varphi} \end{aligned}$$

Dans l'hémisphère nord les astres qui se lèvent et se couchent ont un azimut croissant avec le temps, à l'horizon la direction  $a'$  en azimut du vecteur tangent à l'arc semi-diurne est égale à :  $a + \pi/2$ .

Donc :

$$\begin{aligned} \cos a' &= \cos \left( a + \frac{\pi}{2} \right) = -\sin a \\ \sin a' &= \sin \left( a + \frac{\pi}{2} \right) = \cos a \end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned} \sin h' &= -\cos \varphi \cdot \sin H \\ \cos h' \cdot \sin a' &= \cos h' \cdot \cos a = \cos H \\ \cos h' \cdot \cos a' &= -\cos h' \cdot \sin a - \sin \varphi \cdot \sin H \end{aligned}$$

Et en combinant les deux premières équations, on obtient :

$$\begin{aligned} \sin h' &= -\cos \varphi \cdot \sin H \\ \cos h' \cdot \cos a &= \cos H \\ \cos a &= -\frac{\sin \delta}{\cos \varphi} \\ \cos h' &= \frac{\cos H}{\cos a} = -\tan \varphi \tan \delta \frac{\cos \varphi}{\sin \delta} = -\frac{\sin \varphi}{\cos \delta} \end{aligned}$$

On trouve :

$$\tan h' = \frac{\cos \delta \cdot \sin H}{\tan \varphi}$$

Avec

$$\begin{aligned} \sin H &= \sqrt{1 - \cos^2 H} = \sqrt{1 - \tan^2 \delta \cdot \tan^2 \varphi} \\ \tan h' &= \frac{\cos \delta \cdot \sqrt{1 - \tan^2 \delta \cdot \tan^2 \varphi}}{\tan \varphi} \end{aligned}$$

### 2.22.1 Quelques cas particuliers

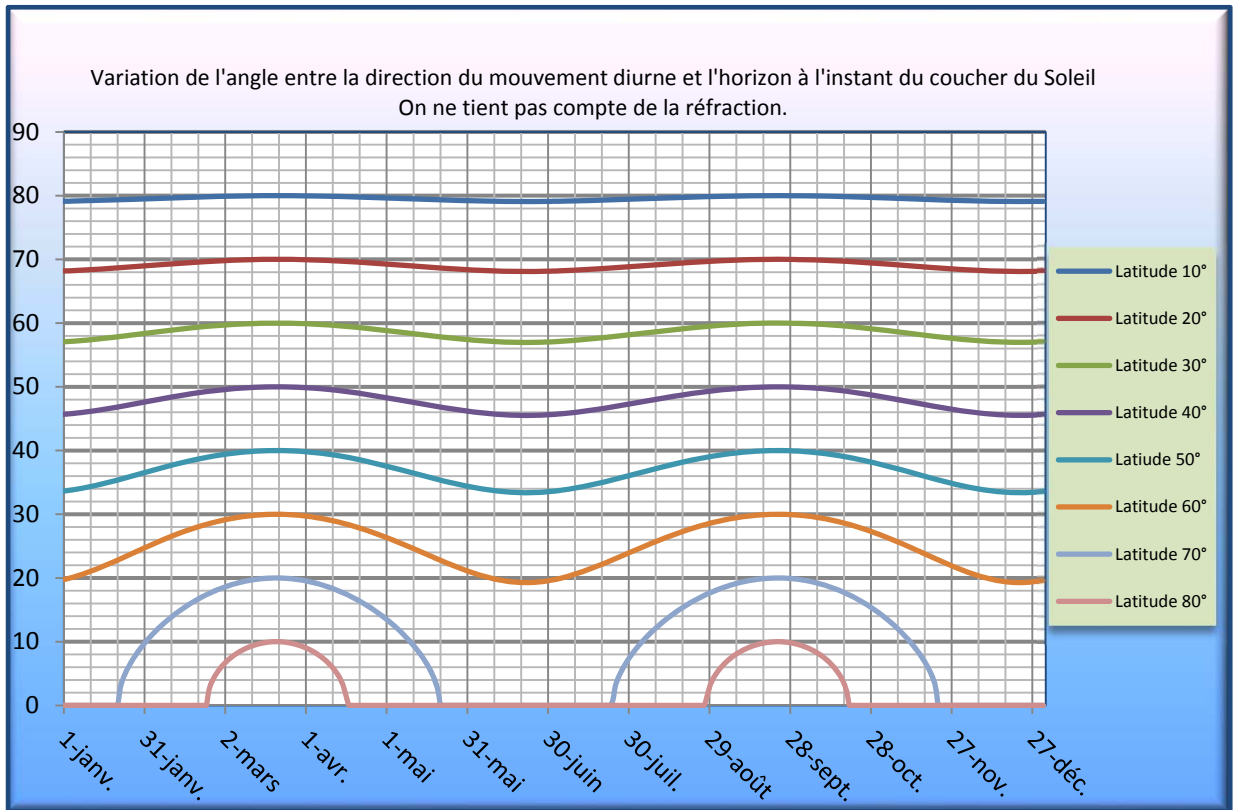
Pour un lieu sur l'équateur : la latitude est nulle, donc sa tangente est nulle, donc la tangente de  $h'$  est infinie et  $h'$  est égale à  $90^\circ$ , donc tous les corps se lèvent et se couchent à la verticale.

Pour un corps sur l'équateur, donc de déclinaison nulle,  $\tan h' = \frac{1}{\tan \varphi}$  donc  $h' = \pi/2 - \varphi$ .

Si le corps est limite circumpolaire, c'est-à-dire si  $\delta = \pi/2 - \varphi$ , alors  $\tan h' = 0$  et le mouvement est horizontal et l'azimut est égale à  $180^\circ$ , donc le passage tangent à l'horizon se fait plein nord dans l'hémisphère nord.

Si le corps est limite de visibilité, c'est-à-dire si  $\delta = \varphi - \pi/2$ , alors  $\tan h' = 0$  et le mouvement est horizontal et l'azimut est égale à  $0^\circ$ , donc le passage tangent à l'horizon se fait plein sud dans l'hémisphère nord.

Le graphique de la page suivante donne les variations de l'angle entre la direction du mouvement diurne et l'horizon à l'instant du coucher du soleil pour une année à différentes latitudes.



## 2.22.2 Visibilité des planètes et de la Lune

Aux basses latitudes, c'est-à-dire sous les cercles polaires, les planètes et la Lune se lèvent et se couchent chaque jour. Les planètes sont visibles lorsqu'elles sont levées et que le Soleil est couché. De même, la Lune est visible lorsqu'elle est levée et lorsque le Soleil est suffisamment loin d'elle, c'est-à-dire lorsque l'élongation entre le Soleil et la Lune est suffisamment grande, environ  $30^\circ$ .

D'une manière générale lorsqu'un corps est au voisinage de la conjonction son élongation est faible, il est visible le soir lorsque le corps est à l'est du Soleil et le matin lorsque le corps est à l'ouest du Soleil. Lorsque le corps est en quadrature est, il est visible le soir après le coucher du Soleil et la première partie de la nuit jusqu'à son coucher. Lorsque le corps est en quadrature ouest il est visible à partir du milieu de la nuit (depuis son lever) jusqu'au lever du Soleil. Lorsque le corps est au voisinage de son opposition, il est visible toute la nuit, il se lève quand le Soleil se couche et se couche quand le Soleil se lève.

Pour les planètes, il convient de distinguer les planètes inférieures et les planètes supérieures.

### **Pour les planètes supérieures :**

La Terre tournant plus rapidement que les planètes supérieures la succession des positions remarquables par rapport au Soleil de ces deux corps se fait dans l'ordre suivant :

Conjonction, quadrature ouest, opposition puis quadrature est. Vu depuis la Terre, c'est le Soleil apparent qui rattrape et dépasse la planète. La planète est donc à l'est du Soleil avant la conjonction. La dernière visibilité de la planète le soir (coucher héliaque du soir) aura donc lieu avant la conjonction et la première visibilité du matin (lever héliaque du matin) aura lieu après la conjonction lorsque le Soleil sera passé à l'est de la planète.

On a donc les visibilités suivantes :

Au voisinage de la conjonction :

Première visibilité du matin (lever héliaque du matin) à l'est avant le lever du Soleil après la conjonction avec le Soleil.

Dernière visibilité du soir (coucher héliaque du soir) à l'ouest juste après le coucher du Soleil avant la conjonction avec le Soleil.

Au voisinage de l'opposition :

Première visibilité de la planète au lever visible le soir à l'est juste après le coucher du Soleil (lever héliaque du soir), généralement avant l'opposition au Soleil. Cette première visibilité correspondant au dernier lever de la planète observable le soir, après cette date la planète est déjà levée lorsque le Soleil se couche.

Dernière visibilité de la planète au coucher visible le matin à l'ouest juste avant le lever du Soleil à l'est (coucher héliaque du matin), généralement après l'opposition au Soleil. Cette dernière visibilité correspond au premier coucher de la planète observable le matin, après cette date la planète est déjà couchée lorsque le Soleil se lève.

Les dates de ces phénomènes, lorsqu'ils existent en un lieu donné, sont fonction des coordonnées de la planète, de la latitude et de la longitude du lieu et du critère ou des critères de visibilité choisis.



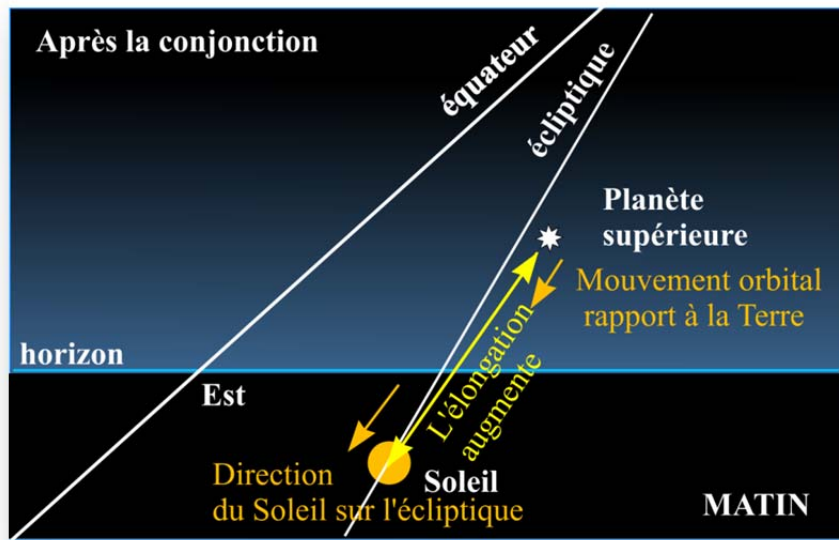


Figure 44. Première visibilité du matin pour une planète supérieure.

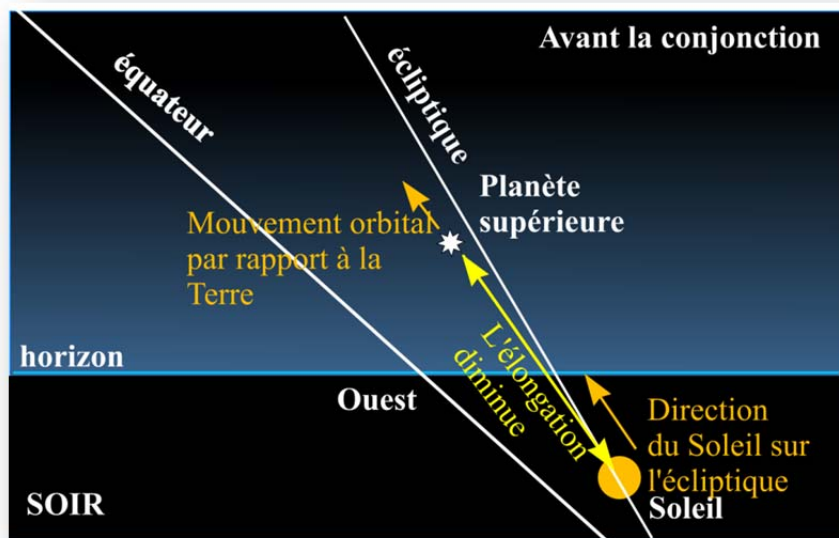


Figure 45. Dernière visibilité du soir pour une planète supérieure.

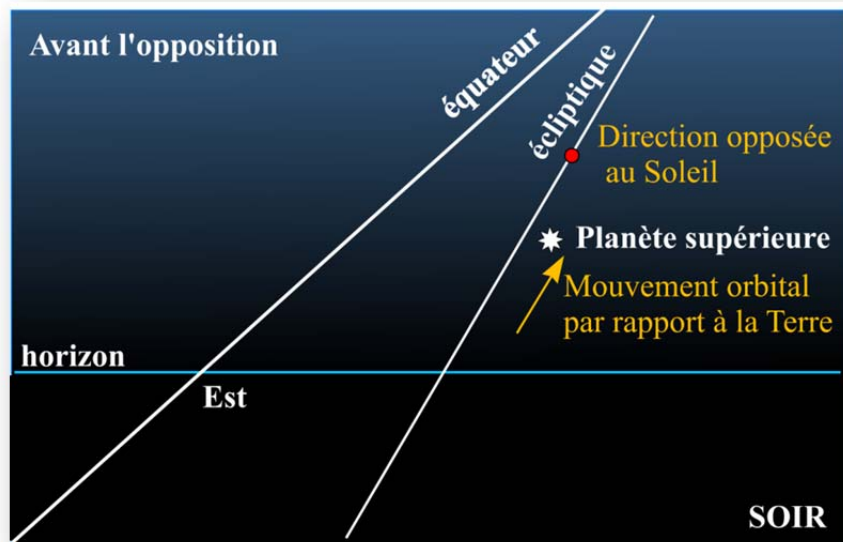


Figure 46. Première visibilité du soir : dernier lever héliaque du soir pour une planète supérieure.

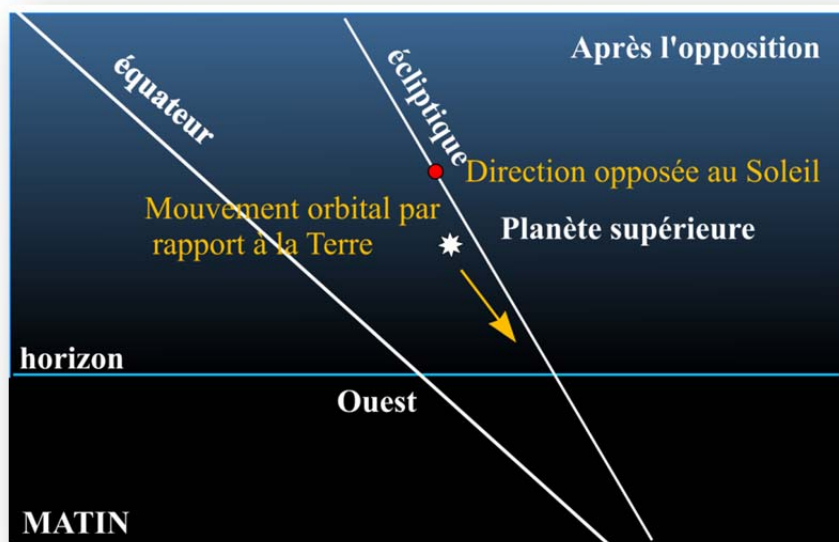


Figure 47. Dernière visibilité du matin : premier coucher héliaque du matin pour une planète supérieure.

### Pour les planètes inférieures

Les planètes inférieures Mercure et Vénus sont des cas particuliers, car elles ne s'éloignent jamais beaucoup du Soleil. Elles ne sont jamais en opposition avec le Soleil, mais présentent des élongations maximales (ouest ou est). Elles tournent plus rapidement que la Terre autour du Soleil, donc vu depuis la Terre, elles rattrapent et dépassent le Soleil. Elles sont bien visibles le matin ou le soir lorsque leur élongation est maximale c'est-à-dire aux instants des plus grandes élongations. Elles sont visibles pour la première fois le soir après la conjonction supérieure (première visibilité du soir) et pour la dernière fois avant la conjonction inférieure (dernière visibilité du soir). Elles sont visibles pour la première fois le matin après la conjonction inférieure (première visibilité du matin) et pour la dernière fois le matin avant la conjonction supérieure (dernière visibilité du matin).

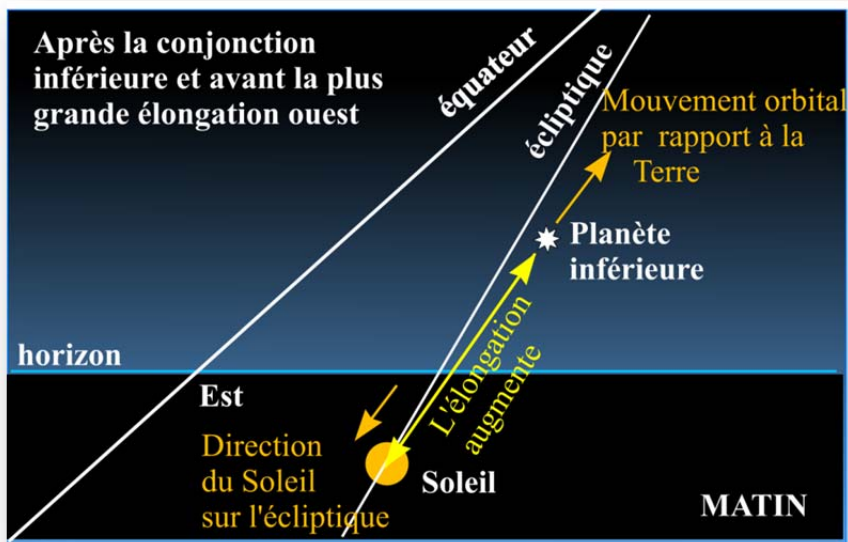


Figure 48. Première visibilité du matin pour une planète inférieure.

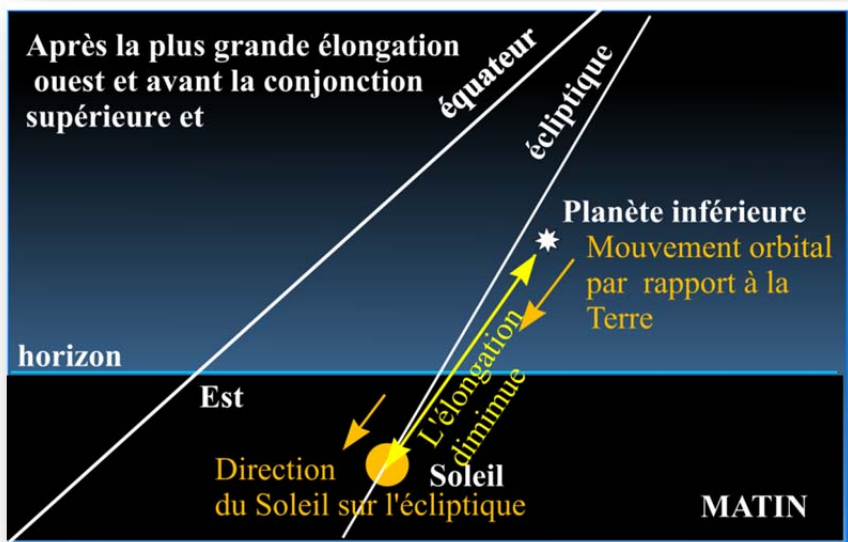


Figure 49. Dernière visibilité du matin pour une planète inférieure.

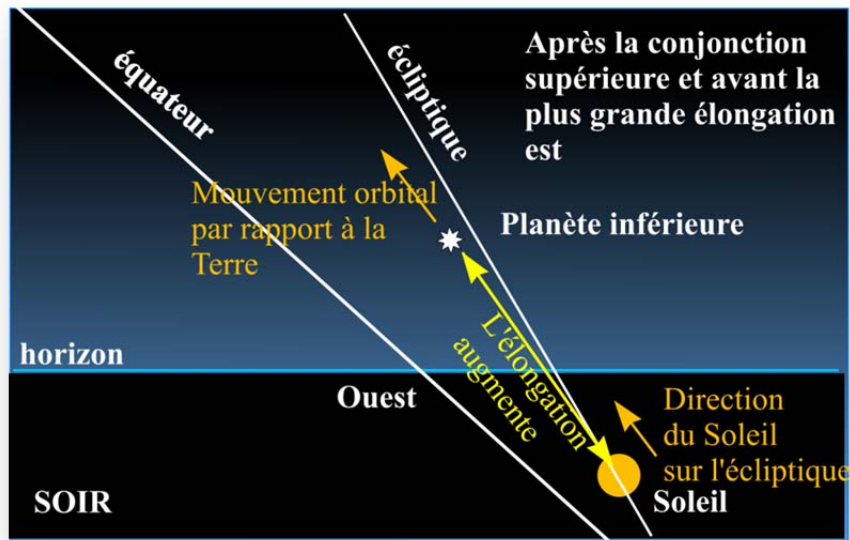


Figure 50. Première visibilité du soir pour une planète inférieure.

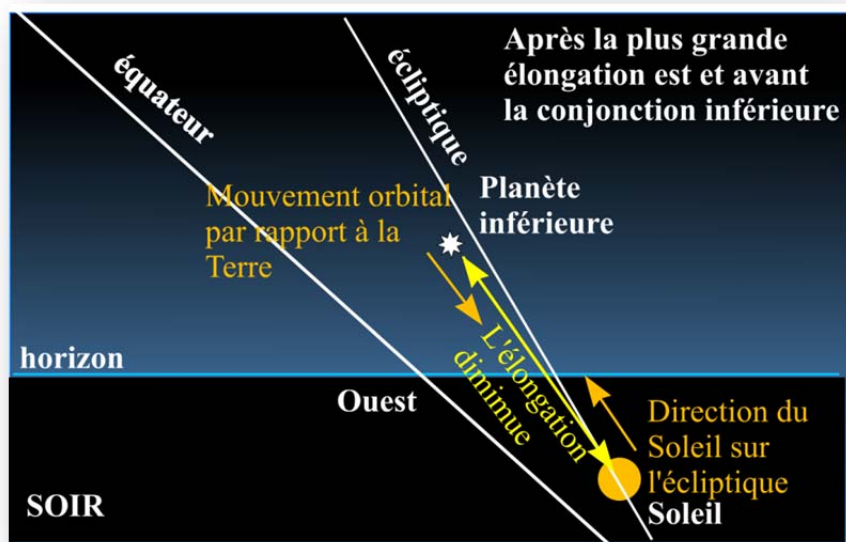


Figure 51. Dernière visibilité du soir pour une planète inférieure.

Sur la figure ci-dessous, on a figé la position de la Terre et l'on n'a pas dessiné les phases de la planète. B correspond à la première visibilité du matin, Vénus est à l'ouest du Soleil, A correspond à la dernière visibilité du matin, puis A' correspond à la première visibilité du soir, la planète est à l'est du Soleil et B' correspond à la dernière visibilité du soir. En réalité, les points A et B et A' et B' ne sont pas alignés (voir le chapitre suivant).

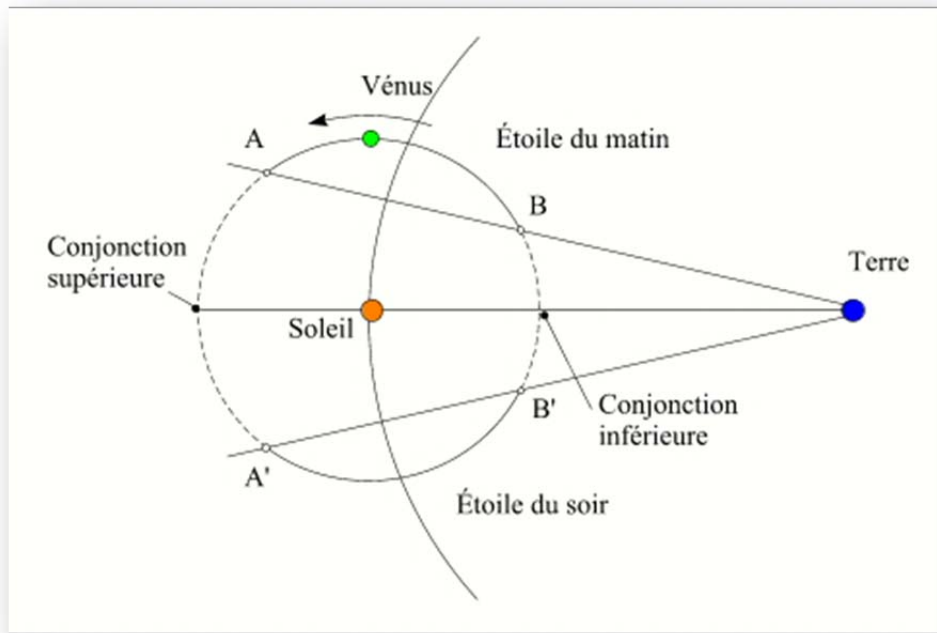


Figure 52. Visibilité d'une planète inférieure.

Dans le tableau suivant, nous donnons les principales caractéristiques des orbites et des mouvements des deux planètes Mercure et Vénus.

Paramètres	Mercure	Vénus
Rayon équatorial	2439,7km	6051,8 km
Masse	$0,33018 \cdot 10^{24}$ kg.	$4,869 \cdot 10^{24}$ kg
Densité	5,4	5,24
Demi-grand axe	58 millions de km.	108,2 millions de km
Inclinaison	$7,004986^\circ$	$3,394662^\circ$
Excentricité	0,205632	0,006772
Distance périhélie	~ 46 millions de km	~ 107,47 millions de km
Distance aphélie	~ 70 millions de km	~ 108,94 millions de km
Hauteur maximale sur l'écliptique	entre 5,6 et 8,5 millions de km (vue de la Terre : latitude de $3,5^\circ$ .)	entre 6,36 et 6,45 millions de km. (vue de la Terre : latitude de $8,8^\circ$ .)
Révolution tropique	87,968434 jours	224,695435 jours
Période de rotation	58,646255 jours.	-243,0209 jours
Durée du jour	175,94 jours (terrestres).	116,750 jours terrestres
Différences de température	de $-170^\circ\text{C}$ à $400^\circ\text{C}$	Température moyenne $460^\circ\text{C}$
Révolution draconitique	87,969132 jours.	224,698895 jours
Révolution synodique	115,877477 jours.	583,921361 jours
Plus grande élongation	entre $17^\circ 52'$ et $27^\circ 49'$	entre $45^\circ 24'$ et $47^\circ 18'$
Diamètre apparent	entre $4,7''$ et $12,2''$	entre $9,7''$ et $66,0''$

Tableau : caractéristiques des planètes inférieures.

### 2.22.3 Critères des premières et des dernières visibilitées des planètes, le matin ou le soir

À l'aube ou au crépuscule, la visibilité d'un corps proche du Soleil, va dépendre de plusieurs paramètres : la luminosité du ciel due à la proximité du Soleil, la hauteur du corps au-dessus de l'horizon et la magnitude du corps.

La première visibilité et la dernière visibilité de certaines étoiles (Sirius), des planètes et du croissant de Lune ont été étudiées depuis la plus haute antiquité. Le critère utilisé était *l'arcus visionis* ou arc de vision. La définition de cet arc est la suivante :

L'arc de visibilité est la dépression du Soleil sous l'horizon, mesurée sur le cercle vertical (donc la hauteur du Soleil) à l'instant où le lever (ou le coucher) du corps le premier ou le dernier matin (ou soir) est visible. Cette notion a été introduite par Claude Ptolémée dans l'*Almageste* pour la prédiction des premières et dernières visibilitées des planètes. Voici les valeurs utilisées par Ptolémée pour le calcul des visibilitées des planètes et des étoiles pour un lieu de latitude de 33° 17' (climat 1,46) :

Astre	Arc de vision
Saturne	11°
Jupiter	10°
Mars	10,5°
Vénus	5°
Mercure	10°
Sirius	11°
Étoiles de première grandeur	7° à 11°
Étoiles de seconde grandeur	8,5° à 14°

**Tableau : Arcs de vision issus de l'*Almageste*.**

En 1924, C. Schoch a publié les valeurs des arcs de vision des différentes planètes et de Sirius calculées à partir des observations babyloniennes. Ces valeurs sont données dans le tableau suivant :

Astre		magnitude	Arc de vision	Astre		magnitude	Arc de vision
Vénus conjonction inférieure	Dernière visibilité du matin	-3,2	5,2°	Mercure conjonction inférieure	Dernière visibilité du matin	1,2	11,1°
	Première visibilité du soir	-3,2	5,7°		Première visibilité du soir	1,2	13,2°
Vénus conjonction supérieure	Dernière visibilité du soir	-3,3	5,8°	Mercure conjonction supérieure	Dernière visibilité du soir	-0,5	9,5°
	Première visibilité du matin	-3,3	5,8°		Première visibilité du matin	-0,5	10,5°
Jupiter	Dernière visibilité du matin	-1,6	7,4°	Saturne	Dernière visibilité du matin	0,9	10,5°
	Première visibilité du soir	-1,6	9,3°		Première visibilité du soir	0,9	13,0°

Sirius	Dernière visibilité du matin	-1,5	6,5°	Mars	Dernière visibilité du matin	1,8	14,2°
	Première visibilité du soir	-1,5	7,8°		Première visibilité du soir	1,8	15,5°

**Tableau : arcs de vision issus des observations babyloniennes.**

On constate que ces valeurs sont assez proches de celles de Ptolémée, mais qu'elles tiennent compte de la magnitude et de la différence d'élongation est ou ouest des corps.

De nos jours, on utilise des formules tenant compte de la variation de magnitude des corps et l'on peut introduire dans les calculs une altitude critique de la planète pour sa visibilité au-dessus de l'horizon.

Ces méthodes sont malgré tout assez approximatives lorsque l'on traite d'étoiles ou de corps situés loin de l'écliptique et lorsque l'on monte à de très hautes latitudes.

Les cas de Vénus et de Mercure suscitent deux remarques importantes :

Pour Mercure, le tableau des caractéristiques de la planète nous montre que les plus fortes élongations possible sont comprises entre 17° 52' et 27° 49'. Avec un arc de vision de l'ordre de 10°, pour de faibles élongations et des fortes latitudes, la planète Mercure n'est plus observable. D'où l'extrême difficulté d'observer Mercure aux fortes latitudes.

Pour Vénus, c'est un phénomène inverse que l'on peut mettre en évidence. Dans le tableau des caractéristiques de la planète on voit que la latitude géocentrique de Vénus peut atteindre +/-8,8° (lorsque la latitude héliocentrique est maximale c'est-à-dire lorsque Vénus est 90° en avance ou en retard par rapport aux nœuds de son orbite) au moment de la conjonction inférieure, or l'arc de vision de Vénus en conjonction inférieure est d'environ 5 à 6 degrés, donc dans ce cas, pour certaines latitudes sur Terre il n'y a pas d'invisibilité de la planète, Vénus est étoile du soir puis étoile du matin au voisinage de ces conjonctions. Pour de hautes latitudes, la planète peut également être visible le matin et le soir. Ces situations particulières se sont produites aux conjonctions du 18 août 1999, du 24 mars 2001 et du 30 octobre 2002, elles se reproduiront aux conjonctions du 16 août 2007, du 25 mars 2009 et du 27 octobre 2010. Ce phénomène ne se produit jamais en conjonction supérieure, car alors la latitude géocentrique maximale de Vénus est toujours inférieure à 1,5°.

#### 2.22.4 Histoire

Observation de Vénus chez les Mayas :

Chez les Mayas on distingue également une étoile du matin, Noh Ek (la grande étoile) et une étoile du soir Xuc Ek (l'étoile guêpe). Les Mayas connaissaient la période de révolution synodique de 584 jours qui correspond à l'année apparente de Vénus. Cette année était divisée en quatre périodes :

- une de 236 jours après la conjonction inférieure (étoile du matin, Vénus est à l'ouest du Soleil).
- une de 90 jours où Vénus est invisible, conjonction supérieure (Vénus est derrière le Soleil).
- une de 250 jours environ après la conjonction supérieure (étoile du soir, Vénus est à l'est du Soleil).



- une de 8 jours où Vénus est invisible, conjonction inférieure (Vénus est entre le Soleil et la Terre).

On constate que pour ces faibles latitudes la période d'invisibilité en conjonction inférieure n'est pas nulle.

Or on trouve des relations simples entre cette période et les longueurs des deux années du calendrier maya de 365 jours et 260 jours.

$$5 \times 584 \text{ jours} = 2920 \text{ jours} = 8 \times 365 \text{ jours} = 8 \text{ haab (calendrier civil)}$$

$$13 \times 2920 \text{ jours} = 37960 \text{ jours} = 146 \times 260 \text{ jours} = 146 \text{ Tzolkin (calendrier religieux)}$$

## 2.23 Lever coucher et visibilité de la Lune

La Lune est le corps céleste naturel qui se déplace le plus rapidement par rapport à la Terre, son mouvement par rapport aux étoiles vu depuis la Terre est donc très rapide. Sa révolution sidérale est de 27,321661547 jours, ce qui correspond à un mouvement angulaire moyen de  $13,1763^\circ$  par jour ( $0,54^\circ/\text{h}$ ) par rapport aux étoiles. Sa révolution synodique est de 29,530588853 jours, ce qui correspond à un mouvement angulaire moyen de  $12,1907^\circ$  par jour ( $0,50^\circ/\text{h}$ ) par rapport au Soleil. De plus en raison de l'excentricité de l'orbite et des fortes perturbations agissant sur la Lune, sa vitesse angulaire géocentrique présente de gros écarts entre l'apogée et le périhélie (de l'ordre de 29%).

### 2.23.1 Les levers, les couchers et les passages au méridien de la Lune

Les révolutions de la Lune et son avance par rapport au Soleil.

La révolution synodique moyenne de la Lune à l'époque J2000 est  $L = 29,53058885$  jours, cette période représente le mouvement moyen de la Lune dans un repère tournant lié au mouvement moyen du Soleil, on l'obtient en combinant les mouvements sidéraux moyens des deux corps. La révolution sidérale moyenne de la Lune est  $T_{SL} = 27,32166154$  jours et la sidérale moyenne du soleil est  $T_{SS} = 365,2563632$  jours. Comme les deux corps tournent dans le même sens, la révolution synodique de la Lune s'obtient par la formule suivante :

$$\frac{1}{L} = \frac{1}{T_{SL}} - \frac{1}{T_{SS}}$$

Le mouvement moyen en longitude de la Lune par rapport au Soleil est donc de  $360^\circ/L = 12,19074912^\circ$  par jour. Si on exprime cet angle en heure, minute et seconde on trouve une avance de 48min 45,78s, on en déduit parfois à tort que la Lune passe au méridien chaque jour avec un retard de 48 minutes environ ce qui est faux !

De même le mouvement moyen de la Lune par rapport aux étoiles, c'est-à-dire sa révolution sidérale moyenne nous donne une avance journalière de  $13,17635823^\circ$  par jour, soit un angle de 52 min 42,33s. De nouveau cette valeur est un angle qui traduit l'évolution moyenne journalière du mouvement en longitude de la Lune par rapport aux étoiles, ce n'est pas un temps qui exprimerait le retard de la Lune à chaque passage au méridien.

Pour avoir le temps moyen qui sépare deux passages au méridien de la Lune, il faut combiner la révolution sidérale moyenne de la Terre est  $R_{ST} = 23\text{h } 56\text{m } 4\text{s}$  avec la révolution sidérale moyenne de la Lune ( $T_{SL} = 27,32166154$  jours). De nouveau les deux corps tournent dans le même sens donc :



$$\frac{1}{T} = \frac{1}{R_{ST}} - \frac{1}{T_{SL}}$$

Ce qui donne  $T = 24,84117258$  jours = 24h 50min 28,22s, donc tous les jours la Lune passe en moyenne 50 min 28,22s en retard au méridien, soit un retard de 50,5 min environ sur le Soleil. On remarquera que c'est également le décalage que l'on constate entre deux marées journalières sur les côtes atlantiques. Ce qui est normal, la marée océanique en atlantique nord-est semi-diurne et la Lune est responsable d'environ les 2/3 de son amplitude. La marée suit donc la Lune.

Cette variation moyenne d'environ 50,5 minutes est également la moyenne des écarts des levers et des couchers successifs, mais les valeurs constatées s'écartent beaucoup de cette valeur moyenne : le tableau suivant donne les variations extrêmes et les moyennes des écarts entre les levers, les passages au méridien et les couchers successifs à Paris sur 12 lunaisons allant du 3 janvier 2005 (PQ) au 23 décembre 2005 (PQ). Nous verrons par la suite l'explication de ce phénomène

Écart entre	Minimum	Moyenne	Maximum
Levers	14m31s	50m 24s	1h26m6s
Passages	39m25s	50m 31s	1h7m55s
Couchers	12m26s	50m 34s	1h32m50s

Nous avons vu que la Lune présente des phases très marquées. Nous pouvons étudier la hauteur de la Lune et la durée du jour lunaire en fonction de la phase et de l'époque de l'année. On rappelle que l'année solaire de 365 jours (366 jours) comporte douze lunaisons de 29,5 jours (soit 354 jours) et onze ou douze jours supplémentaires. Durant ces onze ou douze jours, il ne s'écoule jamais une demi-lunaison (14,5 jours), donc dans une année, il n'y a jamais simultanément 13 nouvelles Lunes et 13 pleines Lunes.

L'orbite de la Lune est inclinée d'environ  $5^\circ$  sur l'écliptique. Donc la Lune peut se trouver à une latitude comprise entre plus ou moins  $5^\circ$  par rapport à l'écliptique, donc à une déclinaison comprise entre la déclinaison du Soleil plus ou moins cinq degrés. Dans les paragraphes suivants, chaque fois que nous utilisons le terme  $\pm 5^\circ$  cela désigne l'intervalle compris entre ces bornes et non les bornes de l'intervalle.

On appelle jour lunaire la période de temps où la Lune est levée et on appelle nuit lunaire la période de temps où la Lune est couchée.

### **Déclinaison de la Lune en fonction des phases.**

Décrivons dans un premier temps la valeur de la déclinaison de la Lune par rapport à la déclinaison du Soleil en fonction des phases lunaires.

#### **Lune en conjonction :**

Lorsque la Lune est en conjonction (nouvelle Lune), elle se trouve à proximité du Soleil, elle se lève et se couche presque en même temps que lui et sa déclinaison est égale à celle du Soleil plus ou moins  $5^\circ$ .

#### **Lune au premier quartier :**

Lorsque la Lune est au premier quartier, elle est en quadrature est, elle se lève approximativement lorsque le Soleil est au méridien supérieur (midi) et se couche lorsque le Soleil est au méridien inférieur (minuit), elle est donc visible depuis midi jusqu'à la fin de la première moitié de la nuit. Sa déclinaison est celle qu'aura le Soleil trois mois plus tard, plus ou moins  $5^\circ$ .

#### **Lune en opposition :**

Lorsque la Lune est en opposition (pleine Lune), elle se trouve à l'opposé du Soleil, elle se lève lorsque le Soleil se couche et se couche lorsque le Soleil se lève. Sa déclinaison est donc l'opposé de la déclinaison de Soleil, plus ou moins  $5^\circ$ .

**Lune au dernier quartier :**

Lorsque la Lune est au dernier quartier, elle est en quadrature ouest, elle se lève approximativement lorsque le Soleil est au méridien inférieur (minuit) et se couche lorsque le Soleil est au méridien supérieur (midi), elle est donc visible depuis la seconde partie de la nuit jusqu'à midi. Sa déclinaison est celle qu'avait le Soleil trois mois plus tôt, plus ou moins  $5^\circ$ .

Dans le tableau suivant, nous allons donner les déclinaisons de la Lune, en fonction des phases et des saisons.  $\varepsilon$  est la valeur de l'obliquité (inclinaison de l'écliptique sur l'équateur,  $\varepsilon = 23^\circ 26' 21,4419''$  pour l'époque J2000).

Saison	Hiver	Printemps	Été	Automne
Nouvelle Lune	$-\varepsilon \pm 5^\circ$	$\pm 5^\circ$	$+\varepsilon \pm 5^\circ$	$\pm 5^\circ$
Premier quartier	$\pm 5^\circ$	$+\varepsilon \pm 5^\circ$	$\pm 5^\circ$	$-\varepsilon \pm 5^\circ$
Pleine Lune	$+\varepsilon \pm 5^\circ$	$\pm 5^\circ$	$-\varepsilon \pm 5^\circ$	$\pm 5^\circ$
Dernier quartier	$\pm 5^\circ$	$-\varepsilon \pm 5^\circ$	$\pm 5^\circ$	$+\varepsilon \pm 5^\circ$
Déclinaison du Soleil $\delta =$	$-\varepsilon$	$0^\circ$	$+\varepsilon$	$0^\circ$

On rappelle que la hauteur du passage au méridien d'un astre est égale à la colatitude du lieu plus la déclinaison de l'astre et que la durée où l'astre est levé croît et décroît avec la déclinaison de l'astre.

L'analyse du tableau nous donne les renseignements suivants :

- La nouvelle Lune tout au long de l'année se comporte comme le Soleil.
- La Pleine Lune se comporte comme le Soleil de la saison opposée, ainsi la pleine Lune d'été se comporte comme le Soleil d'hiver, elle se lève au sud-est, ne monte pas haut au méridien et se couche au sud-ouest. La durée où elle est au-dessus de l'horizon est la plus courte de l'année, le jour lunaire est minimum.
- La pleine Lune d'hiver se comporte comme un Soleil d'été, elle se lève au nord-est, monte haut à son passage au méridien et se couche au nord-ouest. La durée où elle est au-dessus de l'horizon est la plus longue de l'année, le jour lunaire est maximum.
- Les pleines Lunes d'équinoxe se comportent comme le Soleil d'équinoxe. Elles sont proches de l'équateur ( $\pm 5^\circ$ ) : la Lune se lève presque à l'est et se couche presque à l'ouest et sa hauteur au passage au méridien est égale à la colatitude du lieu  $\pm 5^\circ$ . Le jour lunaire est sensiblement égal à la nuit lunaire.
- Les premiers quartiers et les derniers quartiers d'hiver et d'été se comportent également comme un Soleil d'équinoxe : la Lune se lève presque à l'est et se couche presque à l'ouest et sa hauteur au passage au méridien est égale à la colatitude du lieu  $\pm 5^\circ$ . Le jour lunaire est sensiblement égal à la nuit lunaire.
- Le premier quartier de printemps d'hiver et le dernier quartier d'automne se comportent comme le Soleil d'été : la Lune se lève au nord-est, monte haut à son passage au méridien et se couche au nord-ouest. La durée où elle est au-dessus de l'horizon est la plus longue de l'année. Le jour lunaire est maximum.
- Le premier quartier d'automne et le dernier quartier de printemps se comportent comme un Soleil d'hiver : la Lune se lève au sud-est, ne monte pas haut au méridien et se couche au sud-ouest. La durée où elle est au-dessus de l'horizon est la plus courte de l'année. le jour lunaire est minimum.

La figure 44 représente les positions des phases lunaires en fonction des saisons et les valeurs des déclinaisons qui leur correspondent.

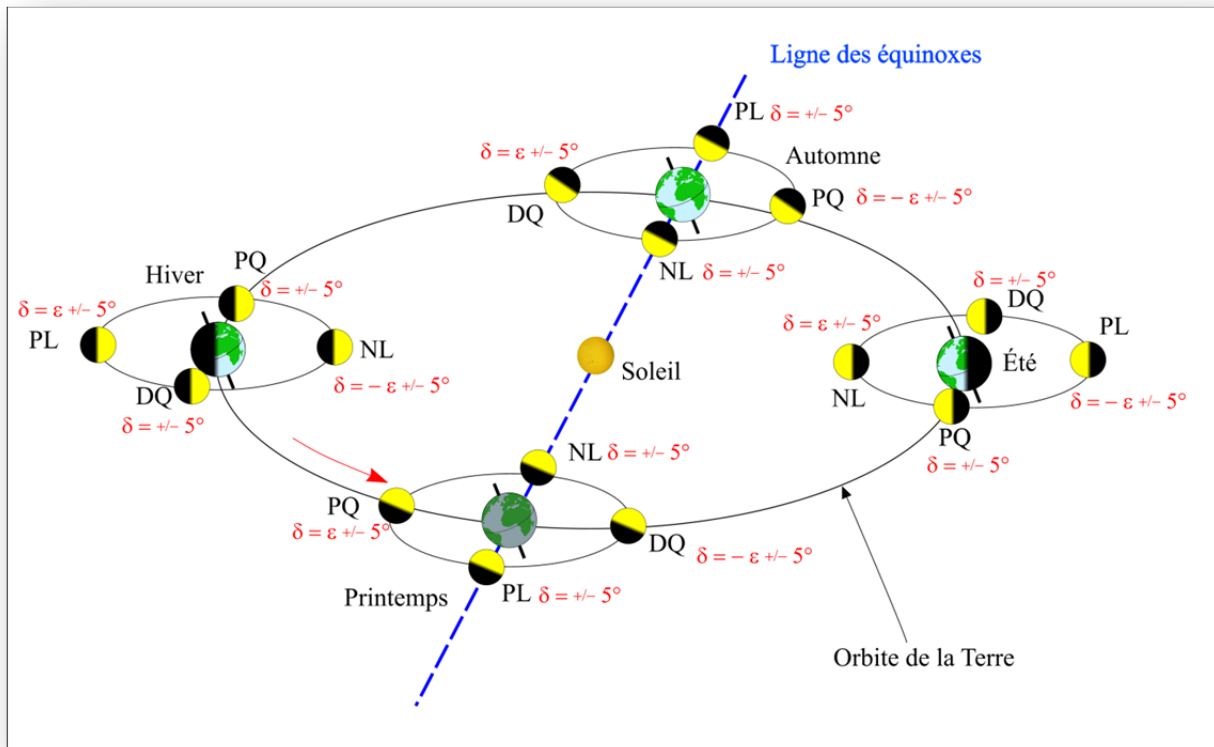
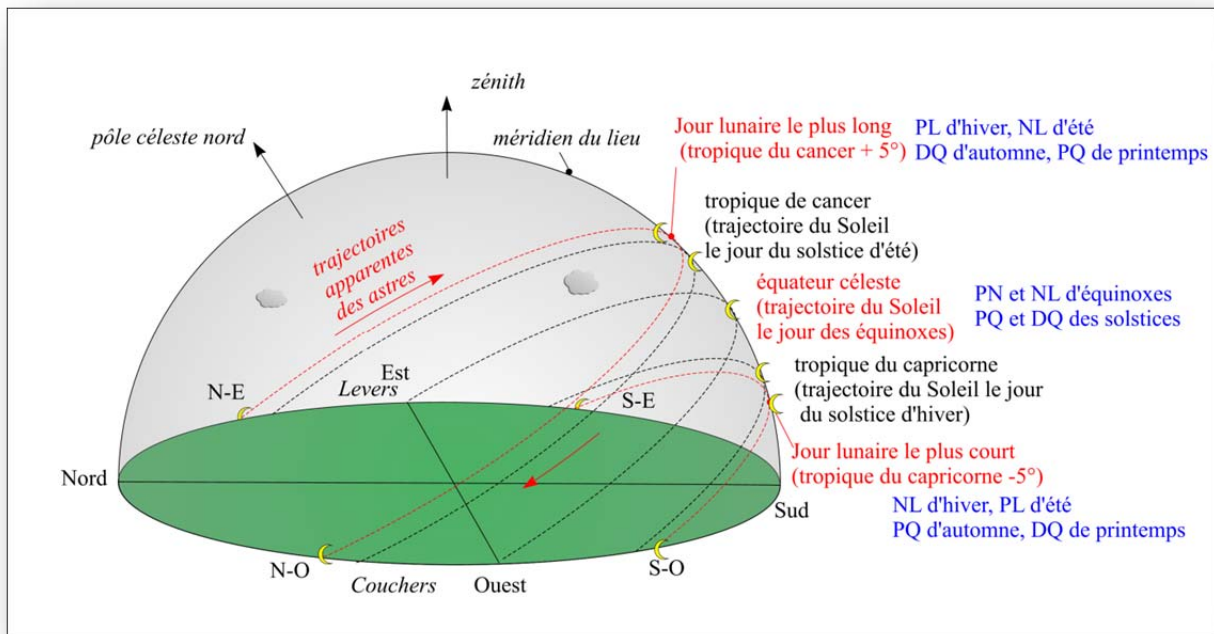


Figure 53. Positions des phases lunaires en fonction des saisons.

Sur la figure 45 nous avons représenté pour un lieu de l'hémisphère nord les trajectoires locales de la Lune pour chaque phase en fonction des saisons, pour un lieu de latitude  $48^\circ$ . Le symbole représentant la Lune est toujours le même quelle que soit la phase.



Pour en savoir plus :

### 2.23.2 Culmination minimale et culmination maximale de la pleine Lune

Nous avons vu que la déclinaison de la Lune était comprise entre  $\varepsilon - 5^\circ$  et  $\varepsilon + 5^\circ$ . Cela signifie que la hauteur de la Lune lors de son passage au méridien peut varier en fonction de l'époque de  $10^\circ$ , soit environ 20 diamètres lunaires. Peut-on prédire ces époques ? Dans l'hémisphère nord et dans le cas de la pleine Lune, nous avons vu que la pleine Lune culmine dans le ciel au voisinage du solstice d'hiver (la pleine Lune se comporte alors comme le Soleil du solstice d'été). Pour que la latitude maximale de la Lune s'ajoute ou se retranche pleinement à la déclinaison de l'écliptique, il faut que la ligne des nœuds de l'orbite lunaire soit confondue avec la ligne des équinoxes. Lorsque le nœud ascendant de la Lune est confondu avec la direction de l'équinoxe de printemps (point  $\gamma$ ) la latitude maximale de la Lune ( $\sim +5^\circ$ ) s'ajoute à l'obliquité  $\varepsilon$  et lorsque le nœud ascendant est confondu avec la direction de l'équinoxe d'automne la latitude minimale de la Lune ( $\sim -5^\circ$ ) s'ajoute à l'obliquité  $\varepsilon$ . A priori, il n'y a aucune raison pour que la Lune soit en opposition à l'instant où la ligne des nœuds passe dans la direction de la ligne des équinoxes. Les extremums se produisent donc aux pleines Lunes les plus proches de ces instants. De même, il n'y a aucune raison pour que cet instant ait lieu au voisinage du solstice d'hiver. , on peut dire que les extremums de culmination de la pleine Lune ont lieu dans l'hémisphère nord au solstice d'hiver le plus proche de cet instant. De même aux équinoxes les plus proches de cet instant, la nouvelle Lune et la pleine Lune seront quasiment dans l'équateur terrestre. Donc les éclipses de Lune et de Soleil auront lieu au voisinage des équinoxes. De plus, les coefficients des marées d'équinoxes seront particulièrement forts cette année-là, car la hauteur de la marée lunaire est proportionnelle, en première approximation, à  $(1 + \cos^2 \delta)$  or ce facteur est maximal lorsque la Lune est dans l'équateur.

La ligne des nœuds de l'orbite lunaire se déplace en moyenne de  $19,34136185^\circ$  par année julienne (de 365,25 jours) dans le sens rétrograde par rapport à la ligne des équinoxes. On a donc un passage du nœud ascendant dans la direction de l'équinoxe de printemps tous les 18,61296029 ans (juliens) soit tous les 6798,383746 jours.

Ce phénomène se produit le 19 juin 2006 et l'on a effectivement cette année des éclipses de Lune et de Soleil proches des équinoxes.

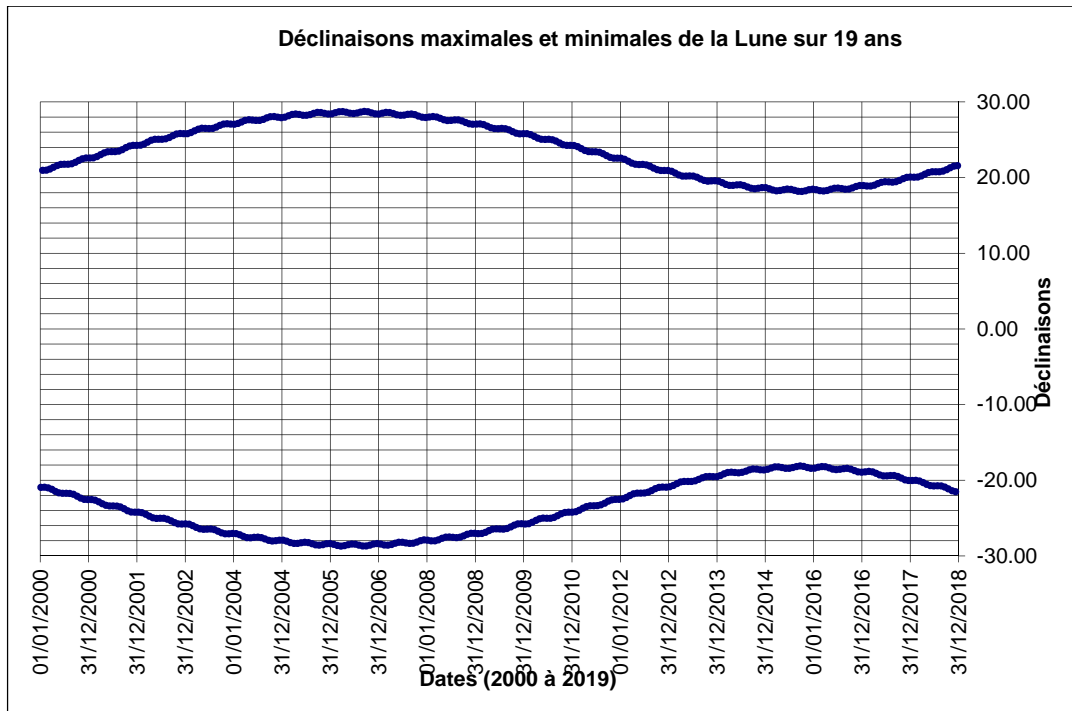


Figure 55. Déclinaisons extrêmes de la Lune sur une période de 19 ans.

Le graphique ci-dessus donne les variations de déclinaisons extrêmes de la Lune sur une période de 19 ans. On constate qu'il y a un maximum en 2006 et un minimum en 2015. Ces extremums sont parfaitement corrélés avec les passages de la ligne des nœuds de l'orbite lunaire dans la direction de la ligne des équinoxes (graphique ci-dessous).

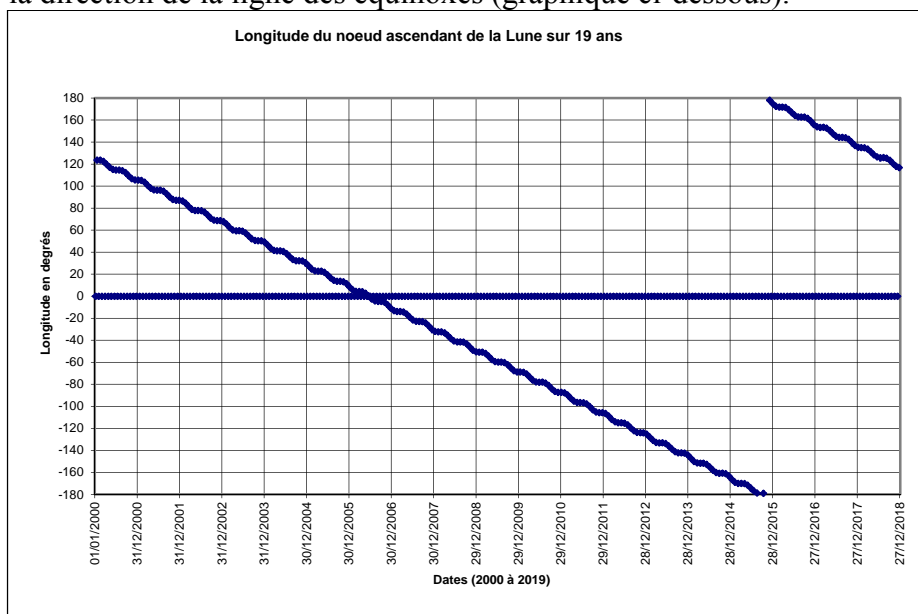


Figure 56. Longitude du nœud ascendant de l'orbite lunaire sur une période de 19 ans.

### 2.23.3 La Lune des moissons et la Lune des chasseurs

#### La Lune des chasseurs.

On appelle Lune des chasseurs la pleine Lune la plus proche de l'équinoxe de printemps. Pour Paris, on constate que les levers consécutifs de la pleine Lune au voisinage de l'équinoxe de printemps présentent des écarts de l'ordre de 1h 15 min à 1h 30 min.

Voici les levers et couchers de Lune à Paris pour l'année 2005 au voisinage de la pleine Lune de printemps qui a lieu le 25 mars à 20h 58,5m UTC.

Date	Lever en UTC	Azimut des Astron	Passage en UTC	Haut.	Coucher en UTC	Azimut des Astron	
<b>17/03/2005</b>	<b>9h 10,3m</b>	<b>225,6°</b>	<b>17h 53,6m</b>	<b>68,9°</b>	<b>1h 41,4m</b>	<b>133,6°</b>	<b>PQ</b>
18/03/2005	9h 57,6m	224,4°	18h 45,5m	69,0°	2h 41,4m	135,6°	
19/03/2005	10h 54,9m	225,9°	19h 36,4m	67,7°	3h 30,2m	134,9°	
20/03/2005	12h 0,0m	229,8°	20h 25,4m	65,1°	4h 8,0m	131,6°	
21/03/2005	13h 9,5m	235,7°	21h 12,2m	61,4°	4h 36,7m	126,4°	
22/03/2005	14h 20,6m	243,1°	21h 56,9m	56,7°	4h 58,9m	119,8°	
23/03/2005	15h 31,9m	251,5°	22h 39,9m	51,3°	5h 16,7m	112,0°	
24/03/2005	16h 43,2m	260,6°	23h 22,1m	45,3°	5h 31,8m	103,5°	
<b>25/03/2005</b>	<b>17h 55,2m</b>	<b>270,2°</b>			<b>5h 45,6m</b>	<b>94,5°</b>	<b>PL</b>
26/03/2005	19h 8,8m	280,0°	0h 4,3m	39,0°	5h 59,0m	85,1°	
27/03/2005	20h 25,1m	289,7°	0h 47,8m	32,6°	6h 13,3m	75,7°	
28/03/2005	21h 44,8m	299,0°	1h 33,6m	26,5°	6h 29,8m	66,5°	
29/03/2005	23h 7,0m	307,2°	2h 22,9m	21,0°	6h 50,3m	57,9°	
30/03/2005			3h 16,5m	16,4°	7h 17,6m	50,6°	
31/03/2005	0h 28,2m	313,4°	4h 14,5m	13,3°	7h 55,7m	45,3°	
01/04/2005	1h 42,0m	316,6°	5h 15,9m	11,9°	8h 48,9m	43,2°	
<b>02/04/2005</b>	<b>2h 42,0m</b>	<b>316,0°</b>	<b>6h 18,4m</b>	<b>12,5°</b>	<b>9h 58,3m</b>	<b>44,9°</b>	<b>DQ</b>
03/04/2005	3h 26,6m	311,7°	7h 19,4m	15,1°	11h 19,9m	50,3°	
04/04/2005	3h 58,7m	304,7°	8h 17,2m	19,4°	12h 46,3m	58,3°	
05/04/2005	4h 22,4m	296,0°	9h 11,0m	25,0°	14h 12,4m	67,9°	
06/04/2005	4h 41,2m	286,2°	10h 1,4m	31,4°	15h 36,0m	78,3°	
07/04/2005	4h 57,3m	276,0°	10h 49,3m	38,3°	16h 57,1m	89,0°	
<b>08/04/2005</b>	<b>5h 12,4m</b>	<b>265,8°</b>	<b>11h 36,1m</b>	<b>45,3°</b>	<b>18h 16,7m</b>	<b>99,6°</b>	<b>NL</b>

L'écart des levers est de 1h 13,6m entre le 26 et le 25 mars 2005.

### La Lune des moissons.

On appelle Lune des moissons la pleine Lune la plus proche de l'équinoxe d'automne. Pour Paris, on constate que les levers consécutifs de la pleine Lune au voisinage de l'équinoxe d'automne présentent des écarts de l'ordre de 20 à 35 minutes.

Voici les levers couchers passages de la Lune à Paris en 2005 au voisinage de la pleine Lune d'automne qui a lieu le 18 septembre à 2h 0,8m UTC

Date	Lever en UTC	Azimut des Astron	Passage en UTC	Haut.	Coucher en UTC	Azimut des Astron	
<b>11/09/2005</b>	<b>14h 16,4m</b>	<b>315,9°</b>	<b>17h 53,0m</b>	<b>12,1°</b>	<b>21h 26,7m</b>	<b>43,4°</b>	<b>PQ</b>
12/09/2005	15h 23,2m	317,1°	18h 55,0m	11,7°	22h 28,3m	43,2°	
13/09/2005	16h 15,5m	314,5°	19h 58,0m	13,4°	23h 46,4m	47,1°	
14/09/2005	16h 53,7m	308,4°	20h 59,2m	17,1°			
15/09/2005	17h 21,4m	299,9°	21h 57,2m	22,5°	1h 14,7m	54,3°	
16/09/2005	17h 42,7m	289,9°	22h 51,5m	29,0°	2h 45,7m	63,8°	
17/09/2005	18h 0,2m	279,2°	23h 42,9m	36,3°	4h 15,1m	74,7°	
<b>18/09/2005</b>	<b>18h 16,1m</b>	<b>268,4°</b>			<b>5h 41,9m</b>	<b>86,0°</b>	<b>PL</b>
19/09/2005	18h 32,0m	257,8°	0h 32,5m	43,6°	7h 6,4m	97,3°	
20/09/2005	18h 49,3m	247,9°	1h 21,5m	50,7°	8h 29,7m	108,0°	
21/09/2005	19h 9,8m	239,1°	2h 11,2m	57,0°	9h 52,1m	117,7°	
22/09/2005	19h 35,6m	231,9°	3h 2,2m	62,2°	11h 12,6m	125,8°	
23/09/2005	20h 9,0m	226,7°	3h 54,8m	66,2°	12h 28,7m	131,9°	
24/09/2005	20h 52,6m	224,1°	4h 48,4m	68,6°	13h 36,3m	135,4°	

25/09/2005	21h 46,9m	224,4°	5h 42,2m	69,4°	14h 32,1m	136,0°	DQ
26/09/2005	22h 50,0m	227,4°	6h 34,9m	68,7°	15h 15,3m	133,8°	
27/09/2005	23h 58,4m	232,6°	7h 25,3m	66,7°	15h 47,5m	129,3°	
28/09/2005			8h 12,9m	63,4°	16h 11,8m	123,2°	
29/09/2005	1h 8,5m	239,4°	8h 57,7m	59,1°	16h 30,6m	115,9°	
30/09/2005	2h 18,4m	247,2°	9h 40,2m	54,1°	16h 45,9m	107,9°	
01/10/2005	3h 27,7m	255,9°	10h 21,2m	48,4°	16h 59,3m	99,3°	
02/10/2005	4h 36,7m	265,0°	11h 1,5m	42,5°	17h 11,8m	90,3°	
03/10/2005	5h 46,3m	274,4°	11h 42,2m	36,3°	17h 24,5m	81,2°	NL

L'écart des levers est de 15,9 minutes entre le 18 et le 19 septembre 2005.

On remarquera que les couchers successifs de la nouvelle Lune d'automne présentent les mêmes gros écarts (1h 24,5m) que les levers de la pleine Lune de printemps et que les couchers successifs de la nouvelle Lune de printemps présentent les mêmes faibles écarts (12,7m) que les levers de la pleine Lune d'automne.

Nous allons expliquer ces deux phénomènes.

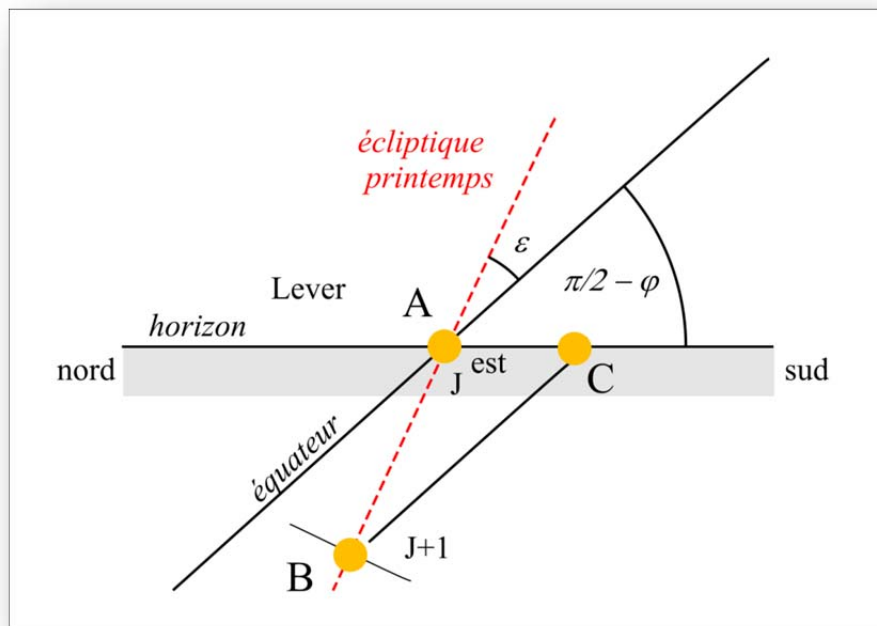


Figure 57. La Lune des chasseurs.

Pour simplifier le problème et les tracés, nous allons supposer, dans un premier temps, que la Lune est dans l'écliptique (inclinaison nulle) et qu'elle avance uniformément de  $13^\circ$  par jour. Sur la figure nous traçons, dans un plan normal à la direction horizontale est, l'horizon est, la projection de l'équateur, qui fait un angle avec l'horizon de  $\pi/2 - \varphi$  égal à la colatitude du lieu. Nous traçons également l'écliptique qui fait un angle  $\varepsilon$  avec l'équateur. Pour simplifier on suppose que la pleine Lune se lève le jour J en A exactement au moment où elle est à l'équinoxe (intersection de l'écliptique et de l'équateur). Le lendemain le jour J+1, à la même heure, la Lune a avancé de  $13^\circ$  sur l'écliptique et se trouve en B. Or la Terre tourne par rapport à un axe normal à l'équateur, donc la trajectoire de B due à la rotation de la Terre sur elle-même se fait parallèlement à l'équateur. La durée qui sépare l'instant du lever de la Lune en C et l'instant où elle est en B (instant identique à son lever la veille) est le temps que va mettre la Terre pour tourner de l'angle BC (segment BC).



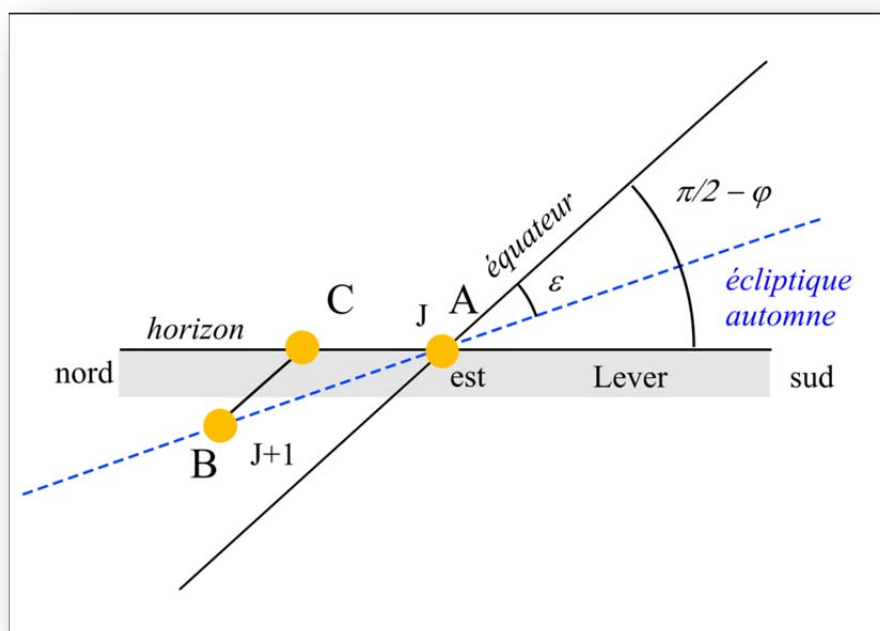


Figure 58. La Lune des moissons.

Reprenons la même figure, mais six mois plus tard à l'équinoxe d'automne. L'écliptique fait toujours un angle  $\varepsilon$  avec l'équateur, mais maintenant il se trouve sous l'équateur. On fait toujours la même hypothèse : le jour J la Lune à son lever se trouve à l'équinoxe A et elle varie de  $13^\circ$  par jour. Le lendemain, jour J+1, au même instant, elle s'est déplacée de  $13^\circ$  sur l'écliptique et se trouve de nouveau en B, le mouvement diurne se fait toujours parallèlement à l'équateur et de nouveau la durée qui sépare l'instant du lever de la Lune en C et l'instant où elle est en B (instant identique à son lever la veille) est le temps que va mettre la Terre pour tourner de l'arc BC (segment BC).

On voit bien sur ces deux figures la grande différence de longueur des deux segments BC qui correspondent tous les deux à la même variation en longitude (segment AB).

Le seul paramètre qui change entre les deux époques est la position de l'écliptique de part et d'autre de l'équateur. Et l'on voit bien que plus l'équateur est proche de l'horizon plus le point B de la Lune des moissons sera proche de l'horizon, avec une valeur limite qui correspond à  $\pi/2 - \varphi = \varepsilon$ . donc au cercle polaire.

Dans le cas réel, la Lune peut se trouver plus ou moins cinq degrés au-dessus ou au-dessous de l'écliptique et sa vitesse n'est pas constante. De plus, les pleines Lunes ne tombent pas forcément à l'équinoxe et même si une des deux pleines Lunes tombe un jour d'équinoxe, la seconde pleine Lune ne tombera pas le jour de l'équinoxe suivant. En réalité, le phénomène fluctue de manière significative d'une année à l'autre pour de multiples raisons : les dates de la pleine Lune dérivent par rapport aux équinoxes, la latitude de la Lune dépend de sa position par rapport aux nœuds de son orbite et la vitesse de la Lune sur son orbite dépend de sa position par rapport à la ligne des apsides. L'évolution du phénomène suit donc le mouvement du nœud de l'orbite lunaire et le mouvement de l'axe des apsides. On a des valeurs extrêmes lorsque l'un des nœuds de l'orbite lunaire est proche de la direction des équinoxes et lorsque l'on monte en latitude. On a vu que cela se produit en 2006.

Les tableaux suivants donnent les levers et couchers de Lune les quinze premiers jours de septembre (Lune des moissons). Comparer les écarts des levers successifs au fur et à mesure que l'on monte en latitude.

Date	Lever en UTC	Azimut des Astron	Coucher en UTC	Azimut des Astron
01/09/2006	14h 41m 15,3s	316,0°	21h 49m 27,2s	43,2°
02/09/2006	15h 45m 12,5s	317,4°	22h 46m 37,9s	42,8°
03/09/2006	16h 36m 40,6s	315,3°		
04/09/2006	17h 15m 12,7s	309,7°	0h 0m 7,4s	46,1°
05/09/2006	17h 43m 41,1s	301,6°	1h 25m 17,6s	52,7°
06/09/2006	18h 5m 34,9s	291,8°	2h 55m 30,9s	61,9°
<b>07/09/2006</b>	<b>18h 23m 42,4s</b>	<b>281,0°</b>	<b>4h 26m 7,5s</b>	<b>72,7°</b> PL
08/09/2006	18h 40m 8,6s	269,7°	5h 55m 23,4s	84,4°
09/09/2006	18h 56m 35,7s	258,6°	7h 23m 30,1s	96,1°
10/09/2006	19h 14m 43,5s	248,1°	8h 51m 16,1s	107,5°
11/09/2006	19h 36m 29,9s	238,8°	10h 18m 56,7s	117,8°
12/09/2006	20h 4m 26,3s	231,1°	11h 45m 10,0s	126,5°
13/09/2006	20h 41m 34,7s	225,9°	13h 6m 14,3s	132,8°
<b>14/09/2006</b>	<b>21h 30m 26,6s</b>	<b>223,7°</b>	<b>14h 16m 54,2s</b>	<b>136,0°</b> DQ
15/09/2006	22h 30m 58,9s	224,8°	15h 13m 13,4s	135,9°

Tableau : Levers, coucher du centre de la Lune à Paris  
Latitude : 48° 50' 11,2" N Longitude : 2° 20' 13,8" E

Date	Lever en UTC	Azimut des Astron	Coucher en UTC	Azimut des Astron
01/09/2006	14h 22m 27,9s	321,1°	20h 35m 39,1s	38,1°
02/09/2006	15h 28m 9,3s	322,9°	21h 31m 19,1s	37,3°
03/09/2006	16h 17m 30,0s	320,3°	22h 47m 20,9s	41,0°
04/09/2006	16h 51m 15,7s	313,9°		
05/09/2006	17h 14m 11,3s	304,8°	0h 17m 50,7s	48,6°
06/09/2006	17h 30m 42,0s	294,0°	1h 54m 12,5s	58,9°
<b>07/09/2006</b>	<b>17h 43m 46,4s</b>	<b>282,2°</b>	<b>3h 30m 46,1s</b>	<b>70,8°</b> PL
08/09/2006	17h 55m 22,0s	270,1°	5h 5m 36,9s	83,4°
09/09/2006	18h 6m 58,5s	258,1°	6h 39m 5,5s	96,2°
10/09/2006	18h 20m 3,6s	246,7°	8h 12m 15,2s	108,6°
11/09/2006	18h 36m 27,2s	236,3°	9h 45m 33,7s	120,1°
12/09/2006	18h 58m 48,0s	227,6°	11h 17m 37,2s	129,9°
13/09/2006	19h 30m 52,5s	221,4°	12h 44m 4,6s	137,2°
<b>14/09/2006</b>	<b>20h 16m 46,1s</b>	<b>218,6°</b>	<b>13h 58m 9,1s</b>	<b>141,1°</b> DQ
15/09/2006	21h 17m 45,6s	219,7°	14h 54m 33,6s	140,9°

Tableau : Levers, coucher du centre de la Lune à Berlin  
 Latitude : 52° 32' 0,0" N, Longitude : 13° 25' 0,0" E

Date	Lever en UTC	Azimut des Astron	Coucher en UTC	Azimut des Astron	
01/09/2006	15h 19m 27,3s	342,5°	18h 0m 56,4s	16,6°	
02/09/2006	16h 39m 9,2s	347,1°	18h 43m 23,8s	13,2°	
03/09/2006	17h 5m 58,5s	339,9°	20h 23m 1,0s	21,6°	
04/09/2006	17h 11m 51,9s	327,8°	22h 22m 36,2s	35,0°	
05/09/2006	17h 12m 43,5s	314,3°			
06/09/2006	17h 11m 57,3s	300,0°	0h 22m 16,6s	49,9°	
<b>07/09/2006</b>	<b>17h 10m 34,3s</b>	<b>285,4°</b>	<b>2h 17m 22,0s</b>	<b>65,5°</b>	<b>PL</b>
08/09/2006	17h 9m 1,9s	270,7°	4h 7m 59,7s	81,3°	
09/09/2006	17h 7m 38,6s	256,1°	5h 56m 12,6s	97,1°	
10/09/2006	17h 6m 45,5s	241,9°	7h 44m 32,4s	112,6°	
11/09/2006	17h 6m 57,8s	228,2°	9h 34m 57,5s	127,6°	
12/09/2006	17h 9m 33,4s	215,6°	11h 27m 37,2s	141,5°	
13/09/2006	17h 18m 9,9s	204,6°	13h 18m 28,0s	153,8°	
<b>14/09/2006</b>	<b>17h 44m 25,8s</b>	<b>197,8°</b>	<b>14h 53m 13,1s</b>	<b>161,8°</b>	<b>DQ</b>
15/09/2006	18h 48m 58,9s	199,5°	15h 47m 10,9s	161,2°	

Tableau : Levers, coucher du centre de la Lune à Helsinki  
 Latitude : 60° 8' 0,0" N, Longitude : 25° 3' 0,0" E

Date	Lever en UTC	Azimut des Astron	Coucher en UTC	Azimut des Astron	
01/09/2006	T. dessous H.		T. dessous H.		
02/09/2006	T. dessous H.		T. dessous H.		
03/09/2006	T. dessous H.		T. dessous H.		
04/09/2006	21h 27m 5,5s	340,4°			
05/09/2006	20h 56m 20,4s	320,0°	0h 41m 14,7s	22,9°	
06/09/2006	20h 39m 47,8s	302,4°	3h 12m 27,5s	44,8°	
<b>07/09/2006</b>	<b>20h 27m 14,3s</b>	<b>285,4°</b>	<b>5h 23m 20,4s</b>	<b>63,9°</b>	<b>PL</b>
08/09/2006	20h 16m 7,0s	268,6°	7h 25m 39,2s	82,4°	
09/09/2006	20h 5m 10,2s	252,0°	9h 24m 48,9s	100,5°	
10/09/2006	19h 53m 13,2s	235,5°	11h 25m 28,7s	118,6°	
11/09/2006	19h 38m 5,8s	218,7°	13h 32m 32,7s	136,9°	
12/09/2006	19h 11m 43,7s	199,9°	15h 55m 28,9s	157,1°	
13/09/2006	T. dessus H.		T. dessus H.		
<b>14/09/2006</b>	<b>T. dessus H.</b>		<b>T. dessus H.</b>		<b>DQ</b>
15/09/2006	T. dessus H.		T. dessus H.		

Tableau : Levers, coucher du centre de la Lune à Reykjavik  
 Latitude :  $64^{\circ} 9' 0,0''$  N, Longitude :  $21^{\circ} 58' 0,0''$  O

Date	Lever en UTC	Azimet des Astron	Coucher en UTC	Azimet des Astron
01/09/2006	T. dessous H.		T. dessous H.	
02/09/2006	T. dessous H.		T. dessous H.	
03/09/2006	T. dessous H.		T. dessous H.	
04/09/2006	21h 27m 5,5s	$340,4^{\circ}$		
05/09/2006	20h 56m 20,4s	$320,0^{\circ}$	0h 41m 14,7s	$22,9^{\circ}$
06/09/2006	20h 39m 47,8s	$302,4^{\circ}$	3h 12m 27,5s	$44,8^{\circ}$
<b>07/09/2006</b>	<b>20h 27m 14,3s</b>	<b><math>285,4^{\circ}</math></b>	<b>5h 23m 20,4s</b>	<b><math>63,9^{\circ}</math></b>
08/09/2006	20h 16m 7,0s	$268,6^{\circ}$	7h 25m 39,2s	$82,4^{\circ}$
09/09/2006	20h 5m 10,2s	$252,0^{\circ}$	9h 24m 48,9s	$100,5^{\circ}$
10/09/2006	19h 53m 13,2s	$235,5^{\circ}$	11h 25m 28,7s	$118,6^{\circ}$
11/09/2006	19h 38m 5,8s	$218,7^{\circ}$	13h 32m 32,7s	$136,9^{\circ}$
12/09/2006	19h 11m 43,7s	$199,9^{\circ}$	15h 55m 28,9s	$157,1^{\circ}$
13/09/2006	T. dessus H.		T. dessus H.	
<b>14/09/2006</b>	<b>T. dessus H.</b>		<b>T. dessus H.</b>	
15/09/2006	T. dessus H.		T. dessus H.	

PL

DQ

On remarque que pour les hautes latitudes, Berlin, Helsinki et Reykjavik, les écarts sont négatifs !

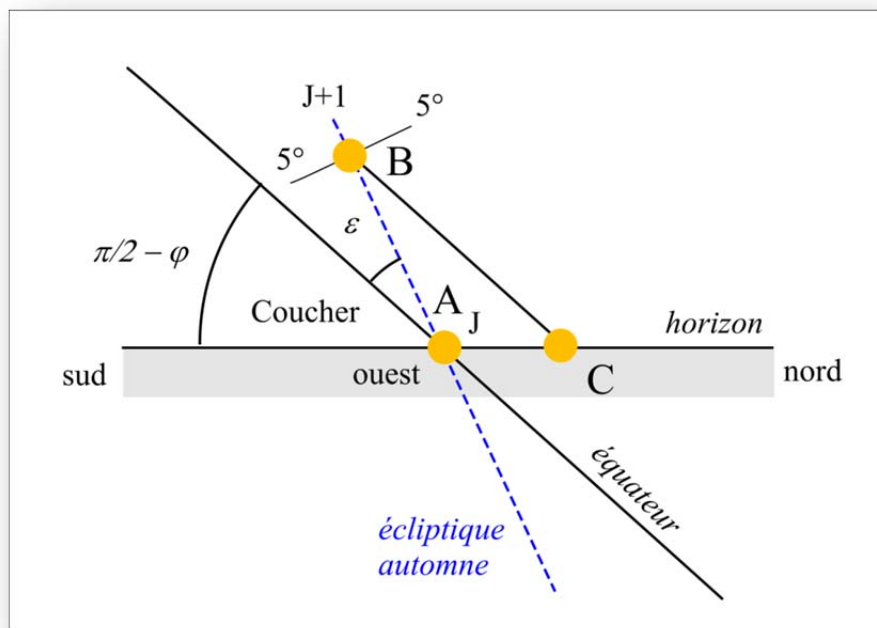


Figure 59. Coucher de la pleine Lune à l'équinoxe d'automne.

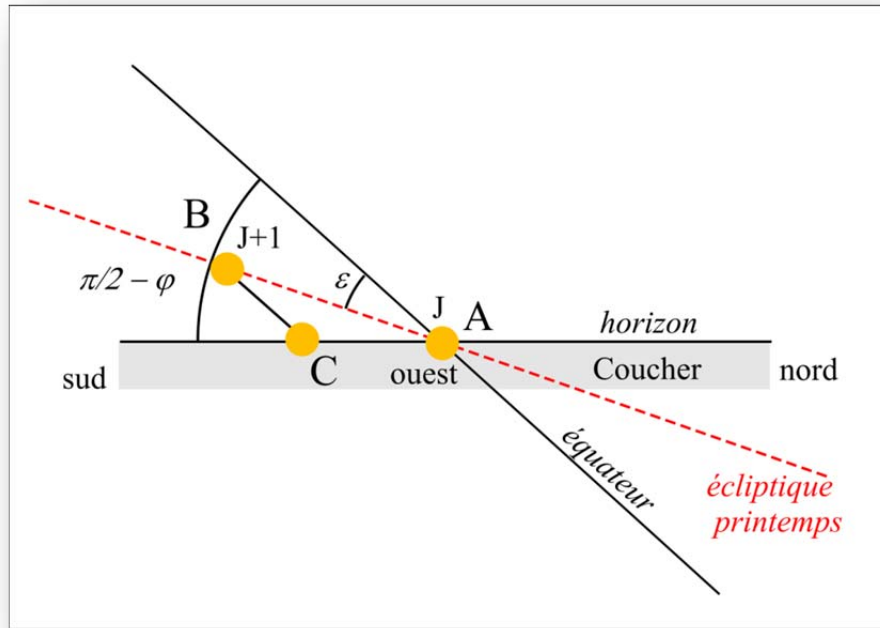


Figure 60. Coucher de la pleine Lune à l'équinoxe de printemps.

On constate également que l'effet est inversé pour les couchers de pleine Lune, ainsi les couchers au voisinage de la pleine Lune à l'équinoxe de printemps présentent de faibles écarts du jour au lendemain alors que les couchers au voisinage de la pleine Lune à l'équinoxe d'automne présentent de grands écarts du jour au lendemain. Dans l'hémisphère sud le phénomène est identique, mais les dates des équinoxes sont inversées

#### 2.23.4 Visibilité du premier croissant de Lune

Le premier croissant de Lune est visible après la conjonction, le soir vers l'ouest juste après le coucher du Soleil.

La visibilité du premier croissant de Lune est un problème très ancien, il s'est posé dès la plus haute antiquité, en raison de l'usage des calendriers lunaires dans lesquels le mois lunaire débute avec la visibilité du premier croissant de Lune. De nos jours, ce problème se pose chaque année pour la communauté musulmane pour déterminer le début et la fin du mois de Ramadan. C'est un problème identique au coucher héliaque des planètes et des étoiles, avec une particularité liée à la valeur importante de la vitesse angulaire de la Lune par rapport au Soleil.

Si pour un corps fixe ou lent par rapport au Soleil les conditions de visibilité sont sensiblement les mêmes pour des lieux situés à une même latitude, ce n'est plus vrai pour un corps comme la Lune dont la vitesse angulaire moyenne par rapport au Soleil est de l'ordre de  $12^\circ$  par jour. Ainsi pour deux lieux A et B ayant la même latitude et un décalage de 6h en longitude, les positions de la Lune par rapport au Soleil en A et B à son coucher diffèrent d'environ  $3^\circ$  soit environ six diamètres lunaires.

La visibilité du croissant de Lune est donc un problème local qui dépend à la fois de la longitude et de la latitude du lieu. De plus pour un lieu donné la visibilité du croissant de Lune varie en fonction des paramètres suivants :

- La vitesse angulaire de la Lune qui dépend de la position orbitale de la Lune par rapport à la ligne des apsides.
- De la latitude écliptique de la Lune, donc de la proximité du plan de l'écliptique qui dépend du mouvement de la ligne des nœuds.

- De l'époque de l'année qui conditionne l'inclinaison de l'écliptique et de l'orbite lunaire par rapport à l'équateur.

Si pour de faibles latitudes l'écart de la première visibilité excède rarement un jour (nuit du doute) il n'en est pas de même aux fortes latitudes où en fonction des critères choisis et de la période de l'année la visibilité peut devenir impossible.

Avant d'aborder le problème des critères de visibilité, nous allons donner un exemple pour montrer l'importance de l'époque de l'année associée à la latitude des lieux considérés.

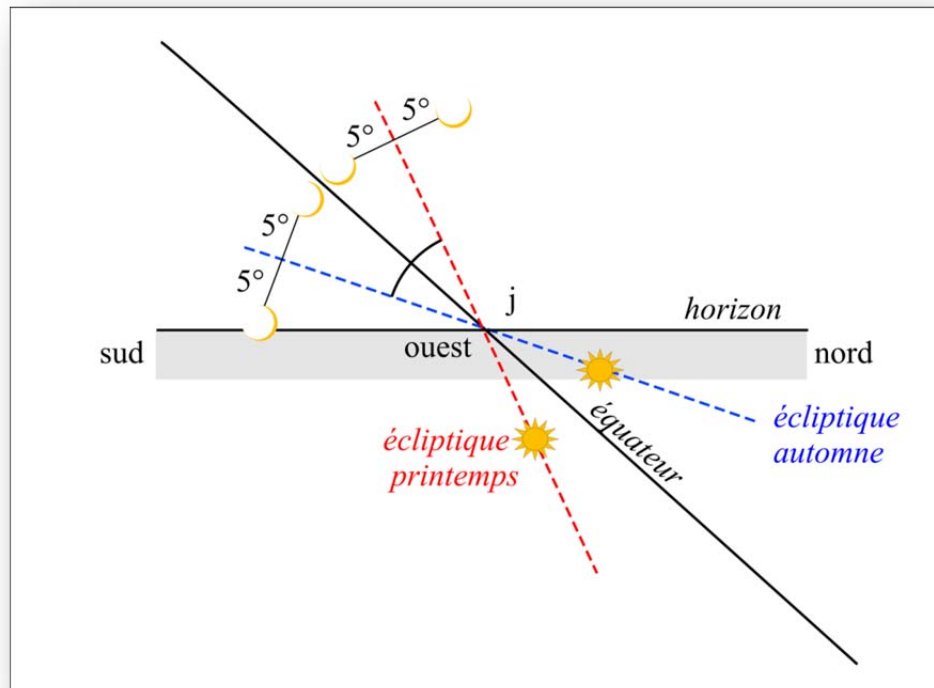


Figure 61. Visibilité du premier croissant de Lune aux équinoxes à Paris

Traçons pour la latitude de Paris, l'aspect du coucher de la Lune et du Soleil au voisinage des équinoxes de printemps et d'automne. Le tracé est fait en projection dans un plan normal à la direction du point équinoxial. L'équateur est incliné sur l'horizon d'un angle égal à la colatitude du lieu ( $\pi/2 - \varphi$ ). L'écliptique est incliné de  $23^\circ 26'$  environ sur l'équateur, vers le nord au printemps et vers le sud en automne. Le Soleil est sur l'écliptique à une même élongation par rapport aux points équinoxiaux (même longitude), on suppose qu'à chaque équinoxe l'élongation entre la Lune et le Soleil est la même. La Lune peut se trouver en raison de l'inclinaison de l'orbite lunaire sur un segment de plus ou moins  $5^\circ$  par rapport à l'écliptique. La figure montre bien que pour une même élongation entre la Lune et le Soleil les conditions d'observations peuvent être très différentes, ainsi au printemps la Lune est haute au-dessus de l'horizon et le Soleil est relativement bas sous l'horizon, par contre en automne, la Lune se trouve presque à l'horizon et le Soleil est à peine couché. Le phénomène est encore plus fort lorsque l'on monte en latitude. On voit bien que le seul critère en élongation n'est pas un bon critère pour la visibilité du premier croissant de Lune et qu'un critère élaboré pour une latitude donnée peut ne pas être correct pour une autre latitude.

A ces problèmes viennent s'ajouter les problèmes physiques liés à l'atmosphère terrestre, les variations de l'extinction atmosphérique en fonction des conditions météorologiques.

### **Le critère de Danjon**

En 1931 A. Danjon a remarqué que les clichés photographiques des premiers croissants de Lune ne présentaient pas un croissant de  $180^\circ$ , mais un croissant s'étendant sur environ  $80^\circ$  et que la largeur de la phase observée était bien inférieure à la largeur théorique prévue par le calcul. Selon Danjon, cet accourcissement du croissant et cet amincissement de la phase visible sont dus à un effet de perspective, en effet la Lune n'est pas lisse et lorsque la phase est faible nous voyons le bord de son limbe en contre-jour, de sorte que les montagnes tournent vers la Terre leurs faces obscures, de plus elles projettent les unes sur les autres des ombres portées qui accentuent encore l'effet. Cela produit une diminution de la largeur de la phase et réduit l'amplitude des cornes de la phase.

En analysant les clichés disponibles à cette époque, il en conclut que le croissant de Lune ne devient visible que si son élongation est supérieure à  $7^\circ$ .

Par la suite, le critère de Danjon et son explication furent remis en cause, notamment par D. McNally (1983) qui réduit le critère à une valeur plus petite de  $5^\circ$  et attribua l'amincissement de la phase à la turbulence atmosphérique. En 1998, L.F. Fatoohi, F.R. Stephenson et S.S. Dargazelli après comparaison avec des séries d'observations ramenèrent le critère à la valeur de  $7,5^\circ$  (avec une assez faible possibilité de visibilité du croissant) et à  $9^\circ$  (avec une assez forte possibilité de visibilité du croissant).

Au cours des siècles, les astronomes et les religieux (principalement les musulmans) ont cherché à déterminer des critères fiables pour la visibilité du premier croissant de Lune (début du mois lunaire). Ces critères portèrent sur la différence d'élongation entre le centre de la Lune et le centre du Soleil, ou sur la différence d'azimuts ou de hauteurs des deux astres et parfois sur l'âge de la Lune. Ce dernier paramètre n'est pas un bon paramètre, car pour un même âge la Lune peut présenter des élongations au Soleil différentes la vitesse angulaire de la Lune variant avec l'anomalie vraie. On remarquera que ces critères basés sur l'observation ne sont pas sans biais observationnels, en effet il y a une très forte proportion d'observateurs aux faibles latitudes due tout simplement à la répartition des musulmans à la surface du globe. Ces critères sont donc plus adaptés aux faibles latitudes (inférieure à  $40^\circ$ ). Pour les hautes latitudes, ces critères peuvent ne plus être adaptés, ainsi plus on monte en latitude et plus des phénomènes identiques à la Lune des moissons et des chasseurs, mais portant sur le coucher du premier croissant de Lune sont observables. De plus la luminosité du ciel nocturne et les conditions météorologiques sont loin d'être négligeables, le ciel brumeux des Highlands ne ressemblera jamais au ciel limpide d'Égypte. Nous ne discuterons pas ici de ces différents critères, nous allons simplement décrire le critère que nous utilisons à l'IMCCE pour prédire la visibilité du premier croissant de lune et voir ses limites. Notre critère de visibilité est le suivant : **le croissant de Lune est observable au moment du coucher du Soleil, si le centre de la Lune est au moins  $5^\circ$  au-dessus de l'horizon et si sa distance au Soleil (élongation) est au moins de  $8^\circ$ .**

#### **2.23.5 Visibilité en fonction des saisons et des lieux**

La visibilité du premier croissant de Lune varie en fonction de la position de la lunaison dans l'année solaire et du lieu d'observation.

Ainsi sous nos latitudes, plus la nouvelle Lune est proche de l'équinoxe d'automne, plus elle est difficile à observer. En effet, il se produit le phénomène inverse à la « *Lune des moissons* », c'est-à-dire que les différences des temps des couchers successifs (jour après jour) de la Lune sont très faibles (13 à 20 min) par rapport à la moyenne (53min) alors que les différences de temps des levers successifs sont très fortes (71 à 77min).



Ainsi pour Paris en octobre 2005, on a les résultats suivants :

Date	Lever en UTC	Azimut des Astron	Passage en UTC	Haut.	Coucher en UTC	Azimut des Astron
03/10/2005	5h 46,3m	274,4°	11h 42,2m	36,3°	17h 24,5m	81,2°
04/10/2005	6h 57,8m	283,8°	12h 24,4m	30,3°	17h 38,3m	72,2°
05/10/2005	8h 12,1m	293,1°	13h 9,1m	24,5°	17h 54,7m	63,4°
06/10/2005	9h 29,6m	301,8°	13h 57,5m	19,4°	18h 15,6m	55,4°

13,8 min d'écart entre le coucher du 3 et le coucher du 4 octobre,  
 16,4min d'écart entre le coucher du 4 et le coucher du 5 octobre,  
 20,9 min d'écart entre le coucher 5 octobre et le coucher du 6 octobre.

Sous nos latitudes (environ 48° nord) la visibilité devient plus donc plus difficile lorsque la lunaison est proche de l'équinoxe d'automne et elle devient plus facile lorsque la lunaison est proche de l'équinoxe de printemps. Ce phénomène est également vrai dans l'hémisphère sud.

Pour l'année 2005, la lunaison d'octobre commence le 3 octobre 2005, le premier croissant sera donc difficile à voir aux hautes latitudes dans l'hémisphère nord et il sera facile à voir dans l'hémisphère sud.

### 2.23.6 Exemples de visibilité en différents lieux

Pour illustrer notre propos, nous avons calculé les levers couchers de la Lune et du Soleil en différents lieux et nous avons utilisé notre critère de visibilité pour estimer si le croissant est visible ou non. Nous avons effectué le calcul pour cinq villes situées à des longitudes assez voisines, mais ayant des latitudes très différentes :

**Ville : Johannesburg, latitude : 26° 10' 0,0" S, longitude : 28° 2' 0,0" E**

Lever coucher et passage au méridien du Soleil.

Date	Lever en UTC	Azimut	Passage en UTC	Hauteur	Coucher en UTC	Azimut
02/10/2005	3h 47m 29,2s	274° 17' 56,0"	9h 57m 11,1s	67° 31' 38,4"	16h 7m 16,6s	85° 28' 45,2"
03/10/2005	3h 46m 24,5s	274° 43' 48,9"	9h 56m 52,4s	67° 54' 50,5"	16h 7m 43,9s	85° 2' 52,0"
04/10/2005	3h 45m 20,1s	275° 9' 39,0"	9h 56m 33,9s	68° 17' 59,7"	16h 8m 11,4s	84° 37' 1,9"
05/10/2005	3h 44m 16,1s	275° 35' 25,9"	9h 56m 15,9s	68° 41' 5,6"	16h 8m 39,3s	84° 11' 15,3"
06/10/2005	3h 43m 12,5s	276° 1' 9,1"	9h 55m 58,2s	69° 4' 8,0"	16h 9m 7,6s	83° 45' 32,5"

Lever coucher et passage au méridien de la Lune

Date	Lever en UTC	Azimut	Passage en UTC	Hauteur	Coucher en UTC	Azimut
02/10/2005	3h 14m 59,0s	265° 33' 1,1"	9h 15m 50,7s	61° 0' 2,4"	15h 22m 42,0s	91° 9' 19,4"
03/10/2005	3h 43m 19,8s	272° 13' 53,5"	9h 56m 28,4s	67° 9' 26,3"	16h 15m 58,3s	84° 19' 15,9"
04/10/2005	4h 12m 39,1s	278° 56' 12,3"	10h 38m 29,9s	73° 16' 44,0"	17h 10m 59,2s	77° 35' 21,5"
05/10/2005	4h 44m 14,8s	285° 24' 50,7"	11h 23m 2,5s	79° 6' 4,8"	18h 8m 35,1s	71° 15' 19,5"
06/10/2005	5h 19m 34,5s	291° 21' 20,3"	12h 11m 9,1s	84° 18' 34,3"	19h 9m 10,9s	65° 41' 8,2"

On constate, bien que la latitude ne soit pas très forte, le phénomène de la « Lune des chasseurs », nous sommes près de l'équinoxe de printemps dans l'hémisphère sud et les instants des couchers successifs de la Lune se font avec d'assez grands écarts de temps (presque une heure), le croissant va donc être visible facilement et tôt par rapport à la nouvelle Lune.

Voici les éphémérides de la Lune à l'instant du coucher du Soleil les 3 et 4 octobre :

*Date et instant du calcul : le lundi 3 octobre 2005 à 16h 7m 43,90s UTC*

*On prend en compte la réfraction atmosphérique.*

- *azimut* :  $85^{\circ} 13' 51,42''$
- *hauteur* :  $1^{\circ} 31' 40,26''$
- *élongation soleil* :  $2,70^{\circ}$
- *hauteur du bord supérieur* :  $1^{\circ} 45' 27,19''$
- *hauteur du bord inférieur* :  $1^{\circ} 18' 1,98''$
- *diamètre apparent horizontal* :  $0^{\circ} 30' 19,44''$
- *diamètre apparent vertical* :  $0^{\circ} 27' 25,21''$
- *magnitude* :  $-4,63$

*Date et instant du calcul* : le mardi 4 octobre 2005 à 16h 8m 11,40s UTC

*On prend en compte la réfraction atmosphérique.*

- *azimut* :  $84^{\circ} 18' 3,29''$
- *hauteur* :  $12^{\circ} 52' 34,23''$
- *élongation soleil* :  $14,32^{\circ}$
- *hauteur du bord supérieur* :  $13^{\circ} 7' 49,65''$
- *hauteur du bord inférieur* :  $12^{\circ} 37' 19,00''$
- *diamètre apparent horizontal* :  $0^{\circ} 30' 40,59''$
- *diamètre apparent vertical* :  $0^{\circ} 30' 30,65''$
- *magnitude* :  $-5,68$

Comme le montre le dessin suivant, dès le 4 octobre le croissant de Lune est bien visible, presque  $13^{\circ}$  au-dessus de l'horizon au moment du coucher du Soleil. Sur ce dessin  $\Delta e$  indique l'élongation entre le centre de la Lune et le centre du Soleil,  $\Delta a$  la différence d'azimut,  $\Delta h$  la hauteur du centre de la Lune sur l'horizon et  $W$  est la largeur du croissant de Lune.

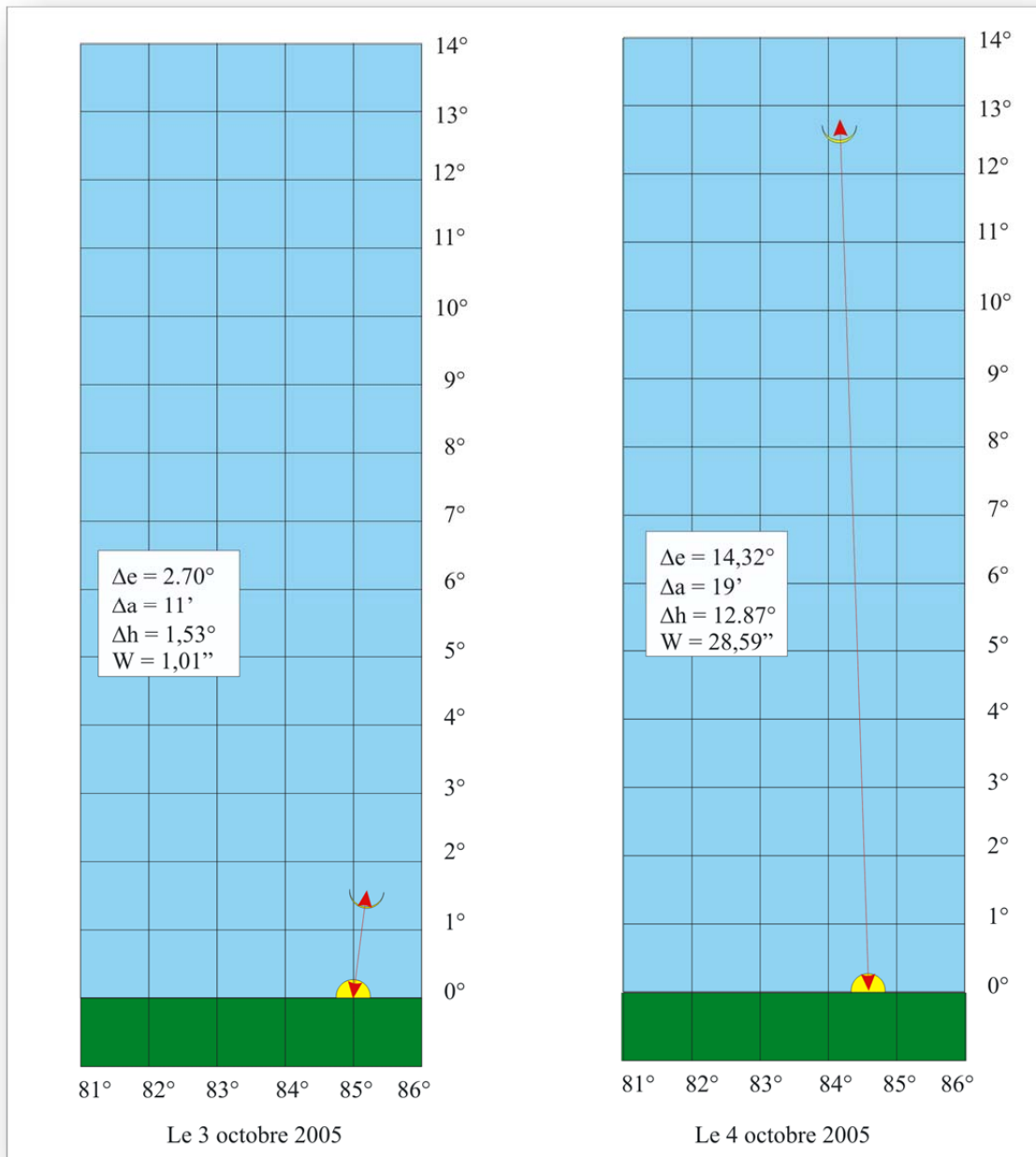


Figure 62. Position de la Lune et du Soleil à Johannesburg à l'instant du coucher du centre du Soleil.

Voici les mêmes calculs pour la ville de La Mecque.

**Ville : La Mecque, latitude : 21° 26' 0,0" N, longitude : 39° 49' 0,0" E**

Levers couchers et passages au méridien du centre du Soleil.

Date	Lever en UTC	Azimut	Passage en UTC	Hauteur	Coucher en UTC	Azimut
02/10/2005	3h 13m 9,2s	273° 36' 25,9"	9h 10m 3,7s	64° 53' 50,9"	15h 6m 40,1s	86° 11' 11,9"
03/10/2005	3h 13m 26,9s	274° 1' 23,4"	9h 9m 45,0s	64° 30' 38,8"	15h 5m 45,0s	85° 46' 17,0"
04/10/2005	3h 13m 44,9s	274° 26' 18,0"	9h 9m 26,5s	64° 7' 29,5"	15h 4m 50,2s	85° 21' 25,2"
05/10/2005	3h 14m 3,2s	274° 51' 9,3"	9h 9m 8,5s	63° 44' 23,5"	15h 3m 55,8s	84° 56' 36,9"
06/10/2005	3h 14m 21,8s	275° 15' 56,9"	9h 8m 50,8s	63° 21' 21,1"	15h 3m 1,8s	84° 31' 52,6"

Levers couchers et passages au méridien du centre de la Lune.

Date	Lever en UTC	Azimut	Passage en UTC	Hauteur	Coucher en UTC	Azimut
02/10/2005	2h 12m 0,9s	265° 41' 47,3"	8h 27m 23,6s	70° 52' 16,3"	14h 37m 52,6s	91° 2' 59,2"
03/10/2005	3h 2m 18,7s	272° 14' 4,7"	9h 7m 59,7s	64° 42' 30,9"	15h 8m 53,5s	84° 33' 7,8"
04/10/2005	3h 53m 51,1s	278° 48' 23,3"	9h 49m 57,4s	58° 34' 54,6"	15h 41m 27,0s	78° 8' 25,6"
05/10/2005	4h 47m 35,7s	285° 9' 3,1"	10h 34m 24,0s	52° 45' 10,4"	16h 16m 53,1s	72° 5' 14,1"
06/10/2005	5h 44m 18,0s	290° 57' 1,0"	11h 22m 22,7s	47° 31' 57,9"	16h 56m 38,4s	66° 43' 31,9"

On constate que bien que la latitude soit relativement faible, les écarts entre les couchers successifs sont déjà faibles (une trentaine de minutes).

Voici les éphémérides de la Lune à l'instant du coucher du Soleil les 3 et 4 octobre :

*Date et instant du calcul : le lundi 3 octobre 2005 à 15h 5m 45,00s UTC*

*On prend en compte la réfraction atmosphérique.*

- *azimut : 84° 17' 3,85"*
- *hauteur : 0° 35' 29,46"*
- *élongation soleil : 2,20°*
- *hauteur du bord supérieur : 0° 48' 32,16"*
- *hauteur du bord inférieur : 0° 22' 40,28"*
- *diamètre apparent horizontal : 0° 30' 18,28"*
- *diamètre apparent vertical : 0° 25' 51,89"*
- *magnitude : - 4,58*

*Date et instant du calcul : le mardi 4 octobre 2005 à 15h 4m 50,20s UTC*

*On prend en compte la réfraction atmosphérique.*

- *azimut : 74° 52' 28,99"*
- *hauteur : 7° 36' 47,84"*
- *élongation soleil : 13,80°*
- *hauteur du bord supérieur : 7° 51' 54,01"*
- *hauteur du bord inférieur : 7° 21' 42,40"*
- *diamètre apparent horizontal : 0° 30' 37,21"*
- *diamètre apparent vertical : 0° 30' 11,61"*
- *magnitude : - 5,63*

On constate que le croissant n'est pas visible le 3 octobre, mais qu'il sera visible le 4 octobre.

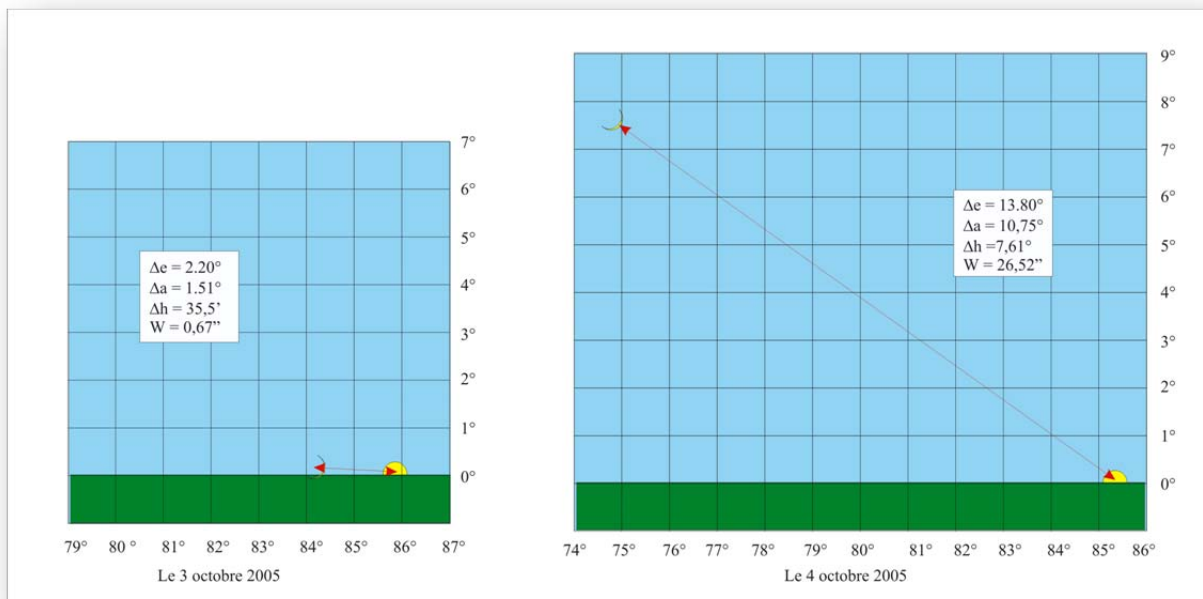


Figure 63. Position de la Lune et du Soleil à La Mecque à l'instant du coucher du centre du Soleil.

Voici les mêmes calculs pour la ville de Madrid.

**Ville : Madrid, latitude : 40° 25' 0,0" N, longitude : 3° 43' 0,0" O**

Levers couchers et passages au méridien du centre du Soleil.

Date	Lever en UTC	Azimut	Passage en UTC	Hauteur	Coucher en UTC	Azimut
02/10/2005	6h 13m 24,8s	274° 14' 56,4"	12h 4m 9,4s	45° 52' 31,2"	17h 54m 15,4s	85° 30' 11,7"
03/10/2005	6h 14m 25,4s	274° 45' 29,3"	12h 3m 50,7s	45° 29' 19,7"	17h 52m 37,5s	84° 59' 43,7"
04/10/2005	6h 15m 26,4s	275° 15' 59,0"	12h 3m 32,3s	45° 6' 11,2"	17h 51m 0,0s	84° 29' 19,1"
05/10/2005	6h 16m 27,6s	275° 46' 25,0"	12h 3m 14,3s	44° 43' 5,9"	17h 49m 22,9s	83° 58' 58,4"
06/10/2005	6h 17m 29,0s	276° 16' 46,9"	12h 2m 56,6s	44° 20' 4,3"	17h 47m 46,3s	83° 28' 41,9"

Levers couchers et passages au méridien du centre de la Lune.

Date	Lever en UTC	Azimut	Passage en UTC	Hauteur	Coucher en UTC	Azimut
02/10/2005	5h 6m 0,0s	265° 46' 16,2"	11h 26m 24,0s	50° 53' 26,6"	17h 36m 5,7s	90° 12' 43,0"
03/10/2005	6h 8m 5,9s	273° 51' 9,5"	12h 7m 6,5s	44° 44' 13,3"	17h 55m 54,2s	82° 18' 53,0"
04/10/2005	7h 11m 47,6s	281° 58' 2,7"	12h 49m 18,6s	38° 39' 7,0"	18h 17m 12,2s	74° 30' 20,7"
05/10/2005	8h 17m 58,3s	289° 49' 55,4"	13h 34m 7,6s	32° 54' 6,0"	18h 41m 27,4s	67° 4' 26,7"
06/10/2005	9h 27m 1,0s	297° 4' 10,7"	14h 22m 35,7s	27° 48' 6,4"	19h 10m 32,4s	60° 24' 24,8"

Nous sommes montés en latitude et les écarts successifs des couchers se sont réduits (une vingtaine de minutes).

Voici les éphémérides de la Lune à l'instant du coucher du Soleil les 3, 4 et 5 octobre :

*Date et instant du calcul : le lundi 3 octobre 2005 à 17h 52m 37,50s UTC*

*On prend en compte la réfraction atmosphérique.*

- *azimut : 81° 48' 27,34"*
- *hauteur : 0° 30' 15,34"*
- *angle de phase : 176,46°*

- *élongation soleil* :  $3,53^\circ$
- *hauteur du bord supérieur* :  $0^\circ 43' 13,42''$
- *hauteur du bord inférieur* :  $0^\circ 17' 31,34''$
- *diamètre apparent horizontal* :  $0^\circ 30' 19,94''$
- *diamètre apparent vertical* :  $0^\circ 25' 42,08''$
- *magnitude* :  $-4,71$

*Date et instant du calcul* : le mardi 4 octobre 2005 à 17h 51m 0,00s UTC

*On prend en compte la réfraction atmosphérique.*

- *azimut* :  $70^\circ 23' 24,82''$
- *hauteur* :  $4^\circ 16' 5,57''$
- *angle de phase* :  $164,80^\circ$
- *élongation soleil* :  $15,16^\circ$
- *hauteur du bord supérieur* :  $4^\circ 30' 53,96''$
- *hauteur du bord inférieur* :  $4^\circ 1' 19,65''$
- *diamètre apparent horizontal* :  $0^\circ 30' 37,25''$
- *diamètre apparent vertical* :  $0^\circ 29' 34,32''$
- *magnitude* :  $-5,75$

*Date et instant du calcul* : le mercredi 5 octobre 2005 à 17h 49m 22,90s UTC

*On prend en compte la réfraction atmosphérique.*

- *azimut* :  $58^\circ 39' 23,66''$
- *hauteur* :  $8^\circ 10' 44,01''$
- *angle de phase* :  $152,94^\circ$
- *élongation soleil* :  $26,99^\circ$
- *hauteur du bord supérieur* :  $8^\circ 26' 0,52''$
- *hauteur du bord inférieur* :  $7^\circ 55' 28,11''$
- *diamètre apparent horizontal* :  $0^\circ 30' 55,25''$
- *diamètre apparent vertical* :  $0^\circ 30' 32,41''$
- *magnitude* :  $-6,69$

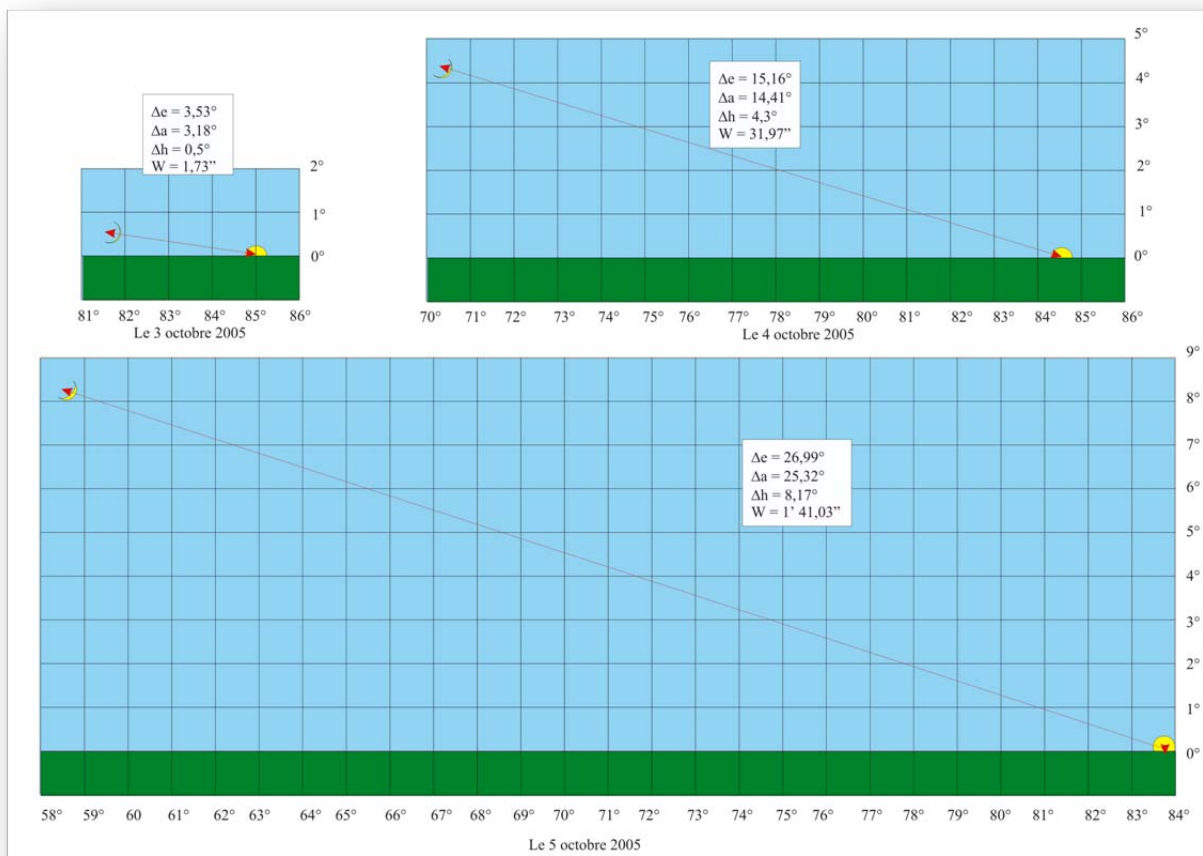


Figure 64. Position de la Lune et du Soleil à Madrid à l'instant du coucher du centre du Soleil.

On constate, toujours en considérant notre critère, que le croissant de Lune n'est visible qu'à partir du 5 octobre, le 4 il est encore bas sur l'horizon au coucher du Soleil. Les autres critères de visibilité le donnent difficilement visible le 4 octobre avec des moyens optiques et le donnent invisible à l'œil nu le 4 octobre, il ne devient visible à l'œil nu que le 5 octobre.

Voici les mêmes calculs pour la ville de Paris.

**Ville : Paris, latitude :  $48^\circ 50' 11,2''$  N, longitude :  $2^\circ 20' 13,8''$  E**

Levers couchers et passages au méridien du centre du Soleil.

Date	Lever en UTC	Azimut	Passage en UTC	Hauteur	Coucher en UTC	Azimut
02/10/2005	5h 52m 55,6s	$274^\circ 48' 40,2''$	11h 39m 56,8s	$37^\circ 28' 3,3''$	17h 26m 6,7s	$84^\circ 54' 18,7''$
03/10/2005	5h 54m 23,6s	$275^\circ 24' 2,8''$	11h 39m 38,1s	$37^\circ 4' 52,1''$	17h 24m 1,4s	$84^\circ 19' 2,7''$
04/10/2005	5h 55m 52,0s	$275^\circ 59' 22,3''$	11h 39m 19,7s	$36^\circ 41' 43,8''$	17h 21m 56,6s	$83^\circ 43' 50,1''$
05/10/2005	5h 57m 20,6s	$276^\circ 34' 38,1''$	11h 39m 1,7s	$36^\circ 18' 38,8''$	17h 19m 52,2s	$83^\circ 8' 41,4''$
06/10/2005	5h 58m 49,5s	$277^\circ 9' 49,8''$	11h 38m 44,0s	$35^\circ 55' 37,4''$	17h 17m 48,3s	$82^\circ 33' 37,1''$

Levers couchers et passages au méridien du centre de la Lune.

Date	Lever en UTC	Azimut	Passage en UTC	Hauteur	Coucher en UTC	Azimut
02/10/2005	4h 36m 41,4s	$264^\circ 58' 29,6''$	11h 1m 30,4s	$42^\circ 28' 46,7''$	17h 11m 50,5s	$90^\circ 20' 51,6''$
03/10/2005	5h 46m 19,4s	$274^\circ 22' 13,0''$	11h 42m 11,9s	$36^\circ 20' 16,7''$	17h 24m 29,6s	$81^\circ 14' 53,0''$
04/10/2005	6h 57m 46,3s	$283^\circ 50' 31,6''$	12h 24m 22,0s	$30^\circ 15' 44,8''$	17h 38m 20,6s	$72^\circ 11' 11,3''$
05/10/2005	8h 12m 4,3s	$293^\circ 7' 35,5''$	13h 9m 7,8s	$24^\circ 31' 5,8''$	17h 54m 44,5s	$63^\circ 25' 54,4''$
06/10/2005	9h 29m 35,8s	$301^\circ 50' 16,6''$	13h 57m 31,8s	$19^\circ 25' 11,3''$	18h 15m 38,0s	$55^\circ 22' 48,7''$



Levers couchers et passages au méridien du centre de la Lune.

Nous sommes montés en latitude et les écarts successifs des couchers se sont encore réduits (13 à 14 minutes).

Voici les éphémérides de la Lune à l'instant du coucher du Soleil les 3, 4, 5 et 6 octobre :

*Date et instant du calcul : le lundi 3 octobre 2005 à 17h 24m 1,40s UTC*

*On prend en compte la réfraction atmosphérique.*

- *azimut : 81° 9' 47,49"*
- *hauteur : 0° 3' 41,02"*
- *angle de phase : 176,69°*
- *élongation soleil : 3,31°*
- *hauteur du bord supérieur : 0° 16' 7,55"*
- *hauteur du bord inférieur : -0° 8' 28,62"*
- *diamètre apparent horizontal : 0° 30' 19,37"*
- *diamètre apparent vertical : 0° 24' 36,17"*
- *magnitude : -4,69*

*Date et instant du calcul : le mardi 4 octobre 2005 à 17h 21m 56,60s UTC*

*On prend en compte la réfraction atmosphérique.*

- *azimut : 69° 12' 26,68"*
- *hauteur : 2° 12' 47,24"*
- *angle de phase : 165,04°*
- *élongation soleil : 14,92°*
- *hauteur du bord supérieur : 2° 27' 2,36"*
- *hauteur du bord inférieur : 1° 58' 38,43"*
- *diamètre apparent horizontal : 0° 30' 35,82"*
- *diamètre apparent vertical : 0° 28' 23,93"*
- *magnitude : -5,73*

*Date et instant du calcul : le mercredi 5 octobre 2005 à 17h 19m 52,20s UTC*

*On prend en compte la réfraction atmosphérique.*

- *azimut : 57° 0' 40,95"*
- *hauteur : 4° 29' 57,30"*
- *angle de phase : 153,19°*
- *élongation soleil : 26,75°*
- *hauteur du bord supérieur : 4° 44' 55,41"*
- *hauteur du bord inférieur : 4° 15' 1,47"*
- *diamètre apparent horizontal : 0° 30' 52,94"*
- *diamètre apparent vertical : 0° 29' 53,94"*
- *magnitude : -6,67*

*Date et instant du calcul : le jeudi 6 octobre 2005 à 17h 17m 48,30s UTC*

*On prend en compte la réfraction atmosphérique.*

- *azimut : 44° 32' 7,73"*
- *hauteur : 6° 42' 21,18"*
- *angle de phase : 141,13°*
- *élongation soleil : 38,78°*
- *hauteur du bord supérieur : 6° 57' 40,75"*
- *hauteur du bord inférieur : 6° 27' 2,63"*
- *diamètre apparent horizontal : 0° 31' 10,40"*
- *diamètre apparent vertical : 0° 30' 38,12"*

- *magnitude* : - 7,52

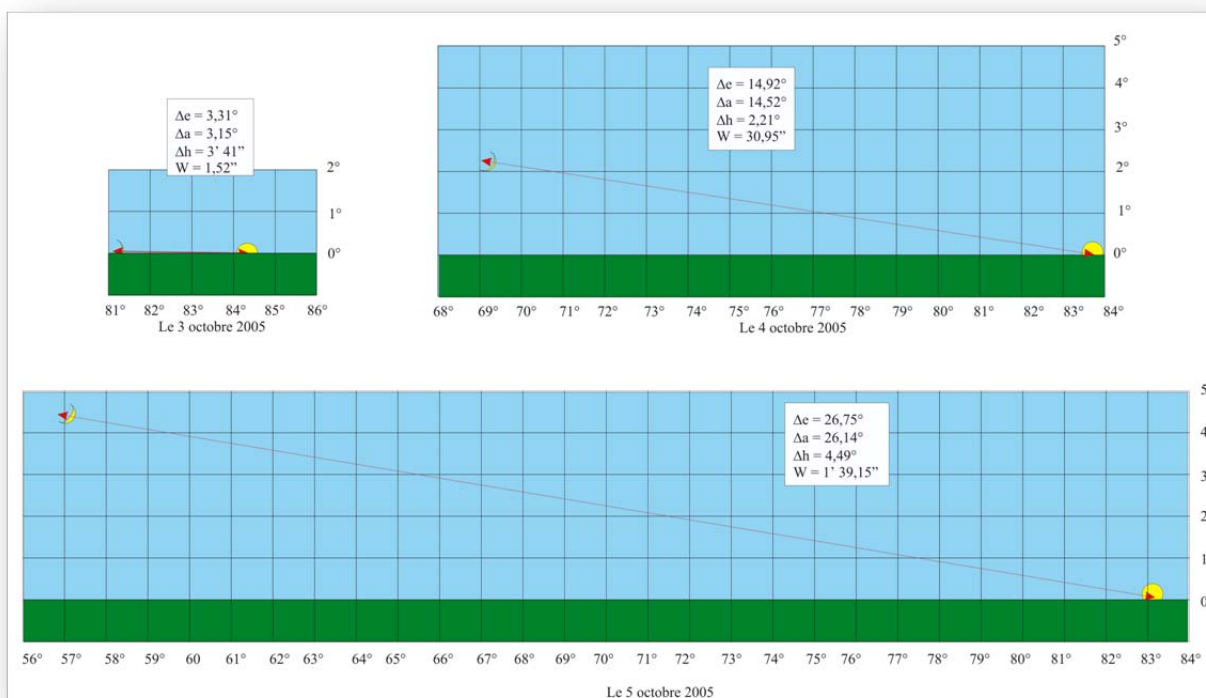


Figure 65. Position de la Lune et du Soleil à Paris à l'instant du coucher du centre du Soleil.

On constate que suivant notre critère, le croissant n'est pas visible avant le 6 octobre à Paris, mais on a vu qu'il est donné comme visible avec les autres critères dès le 5 octobre, cela en raison de la forte différence d'azimut obtenue dès le 5 octobre.

Voici les mêmes calculs pour la ville de Stockholm.

**Ville : Stockholm, latitude : 59° 20' 0,0" N, longitude : 18° 5' 0,0" E**

Levers couchers et passages au méridien du centre du Soleil.

Date	Lever en UTC	Azimut	Passage en UTC	Hauteur	Coucher en UTC	Azimut
02/10/2005	4h 56m 40,1s	276° 3' 19,2"	10h 36m 58,6s	26° 59' 54,2"	16h 16m 2,6s	83° 35' 6,3"
03/10/2005	4h 58m 59,3s	276° 49' 6,8"	10h 36m 39,8s	26° 36' 43,8"	16h 13m 6,4s	82° 49' 29,7"
04/10/2005	5h 1m 19,0s	277° 34' 52,0"	10h 36m 21,4s	26° 13' 36,2"	16h 10m 10,6s	82° 3' 55,8"
05/10/2005	5h 3m 38,9s	278° 20' 34,4"	10h 36m 3,4s	25° 50' 32,0"	16h 7m 15,1s	81° 18' 24,8"
06/10/2005	5h 5m 59,2s	279° 6' 13,6"	10h 35m 45,7s	25° 27' 31,4"	16h 4m 20,1s	80° 32' 57,2"

Levers couchers et passages au méridien du centre de la Lune.

Date	Lever en UTC	Azimut	Passage en UTC	Hauteur	Coucher en UTC	Azimut
02/10/2005	3h 22m 28,9s	262° 59' 0,3"	9h 56m 45,5s	32° 9' 18,3"	16h 9m 20,1s	90° 53' 10,9"
03/10/2005	4h 46m 18,4s	275° 13' 21,6"	10h 37m 24,7s	26° 2' 0,3"	16h 8m 50,4s	79° 13' 33,4"
04/10/2005	6h 12m 35,4s	287° 40' 59,8"	11h 19m 29,5s	19° 58' 14,5"	16h 8m 34,0s	67° 24' 47,0"
05/10/2005	7h 43m 24,9s	300° 17' 54,9"	12h 4m 7,1s	14° 13' 56,7"	16h 8m 56,5s	55° 31' 57,3"
06/10/2005	9h 20m 26,8s	312° 55' 32,4"	12h 52m 20,5s	9° 8' 13,7"	16h 10m 45,0s	43° 44' 51,5"

On est « seulement » à une latitude proche de  $60^\circ$  et les écarts entre les couchers successifs sont négatifs ou quasi nuls. On remarque que les 3 et 4 octobre, bien que l'on soit après l'instant de la nouvelle Lune, le coucher du centre de la Lune a lieu avant le coucher du centre du Soleil.

*Date et instant du calcul : le lundi 3 octobre 2005 à 4h 58m 59,30s UTC*

*On prend en compte la réfraction atmosphérique.*

- *azimut :  $277^\circ 54' 16,24''$*
- *hauteur :  $1^\circ 17' 45,90''$*
- *élongation soleil :  $2,67^\circ$*
- *hauteur du bord supérieur :  $1^\circ 31' 20,93''$*
- *hauteur du bord inférieur :  $1^\circ 4' 20,49''$*
- *diamètre apparent horizontal :  $0^\circ 30' 12,65''$*
- *diamètre apparent vertical :  $0^\circ 27' 0,44''$*
- *magnitude :  $-4,62$*

Ainsi le 3 octobre au matin à l'instant du lever du centre du Soleil, le centre de la Lune est à  $1^\circ 17' 45,90''$  au-dessus de l'horizon. Cette hauteur et l'élongation ( $2,67^\circ$ ) sont bien trop faibles pour que le croissant soit observable.

Remarques : Il est donc faux de dire que le premier croissant se couche et se lève toujours après le Soleil. Il convient de dire que le premier croissant n'est jamais observable le matin et qu'il s'observe uniquement le soir. On peut faire la même remarque pour le dernier croissant de Lune, à certaines époques et sous certaines latitudes le dernier croissant peut se coucher après le Soleil, mais de nouveau lorsque cela se produit il n'est pas observable, car l'élongation est toujours trop faible (inférieure au critère de Danjon). Il n'y a donc pas de risque de confusion on observe toujours le premier croissant le soir et le dernier croissant le matin.

Les jours suivants, le croissant se lève le matin après le Soleil et se couche le soir pratiquement en même temps, ce qui rend son observation quasi impossible. Il faut attendre que l'élongation soit suffisamment grande pour que la Lune devienne visible en plein jour.

Voici les positions de la Lune, le soir des 3, 4, 5 et 6 octobre à l'instant du coucher du centre du Soleil.

*Date et instant du calcul : le lundi 3 octobre 2005 à 16h 13m 6,40s UTC*

*On prend en compte la réfraction atmosphérique.*

- *azimut :  $80^\circ 6' 32,90''$*
- *hauteur :  $-0^\circ 25' 12,29''$*
- *angle de phase :  $177,25^\circ$*
- *élongation soleil :  $2,74^\circ$*
- *hauteur du bord supérieur :  $-0^\circ 13' 29,05''$*
- *hauteur du bord inférieur :  $-0^\circ 36' 36,10''$*
- *diamètre apparent horizontal :  $0^\circ 30' 18,34''$*
- *diamètre apparent vertical :  $0^\circ 23' 7,04''$*
- *magnitude :  $-4,64$*

*Date et instant du calcul : le mardi 4 octobre 2005 à 16h 10m 10,60s UTC*

*On prend en compte la réfraction atmosphérique.*

- *azimut :  $67^\circ 44' 47,36''$*
- *hauteur :  $-0^\circ 9' 5,52''$*
- *angle de phase :  $165,63^\circ$*
- *élongation soleil :  $14,33^\circ$*

- hauteur du bord supérieur :  $0^{\circ} 3' 9,01''$
- hauteur du bord inférieur :  $-0^{\circ} 21' 1,59''$
- diamètre apparent horizontal :  $0^{\circ} 30' 33,63''$
- diamètre apparent vertical :  $0^{\circ} 24' 10,60''$
- magnitude :  $-5,68$

Date et instant du calcul : le mercredi 5 octobre 2005 à 16h 7m 15,10s UTC

On prend en compte la réfraction atmosphérique.

- azimut :  $55^{\circ} 10' 57,30''$
- hauteur :  $0^{\circ} 8' 38,26''$
- angle de phase :  $153,79^{\circ}$
- élongation soleil :  $26,14^{\circ}$
- hauteur du bord supérieur :  $0^{\circ} 21' 23,84''$
- hauteur du bord inférieur :  $-0^{\circ} 3' 50,41''$
- diamètre apparent horizontal :  $0^{\circ} 30' 49,62''$
- diamètre apparent vertical :  $0^{\circ} 25' 14,25''$
- magnitude :  $-6,62$

Date et instant du calcul : le jeudi 6 octobre 2005 à 16h 4m 20,10s UTC

On prend en compte la réfraction atmosphérique.

- azimut :  $42^{\circ} 24' 58,96''$
- hauteur :  $0^{\circ} 27' 38,32''$
- angle de phase :  $141,75^{\circ}$
- élongation soleil :  $38,16^{\circ}$
- hauteur du bord supérieur :  $0^{\circ} 40' 53,44''$
- hauteur du bord inférieur :  $0^{\circ} 14' 38,30''$
- diamètre apparent horizontal :  $0^{\circ} 31' 6,01''$
- diamètre apparent vertical :  $0^{\circ} 26' 15,14''$
- magnitude :  $-7,48$

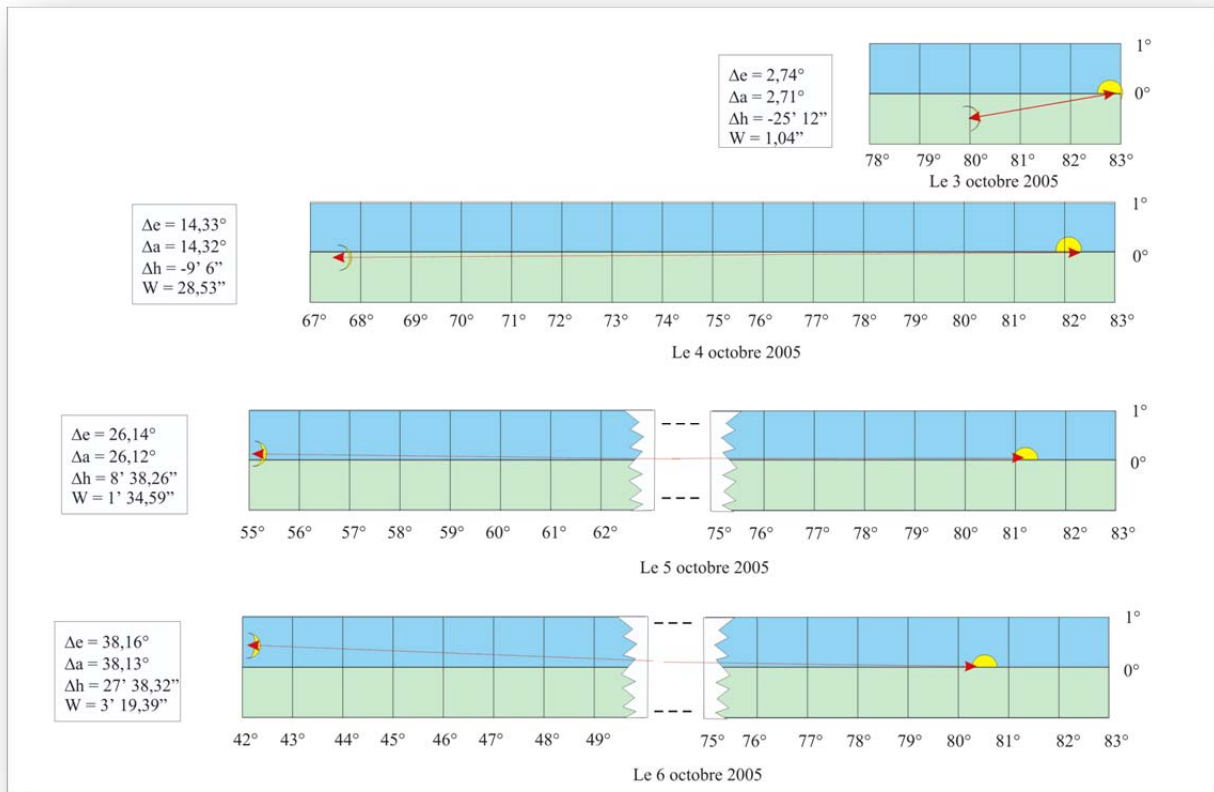


Figure 66. Position de la Lune et du Soleil à Stockholm à l'instant du coucher du centre du Soleil.

On constate bien que la visibilité du premier croissant de Lune dépend de la latitude du lieu et de l'élongation entre la Lune et le Soleil. Elle dépend également de la longitude du lieu et de la ligne de changement de date. Il n'est donc pas rare que pour un critère donné un pays soit coupé en deux par la ligne délimitant les régions de visibilité du croissant de Lune pour un jour donné. Ce fut le cas en France pour le début du mois de Ramadan de l'année 2005, où en fonction de notre critère le premier croissant de Lune était visible dès le 5 octobre dans le sud de la France et seulement le 6 octobre plus au nord.

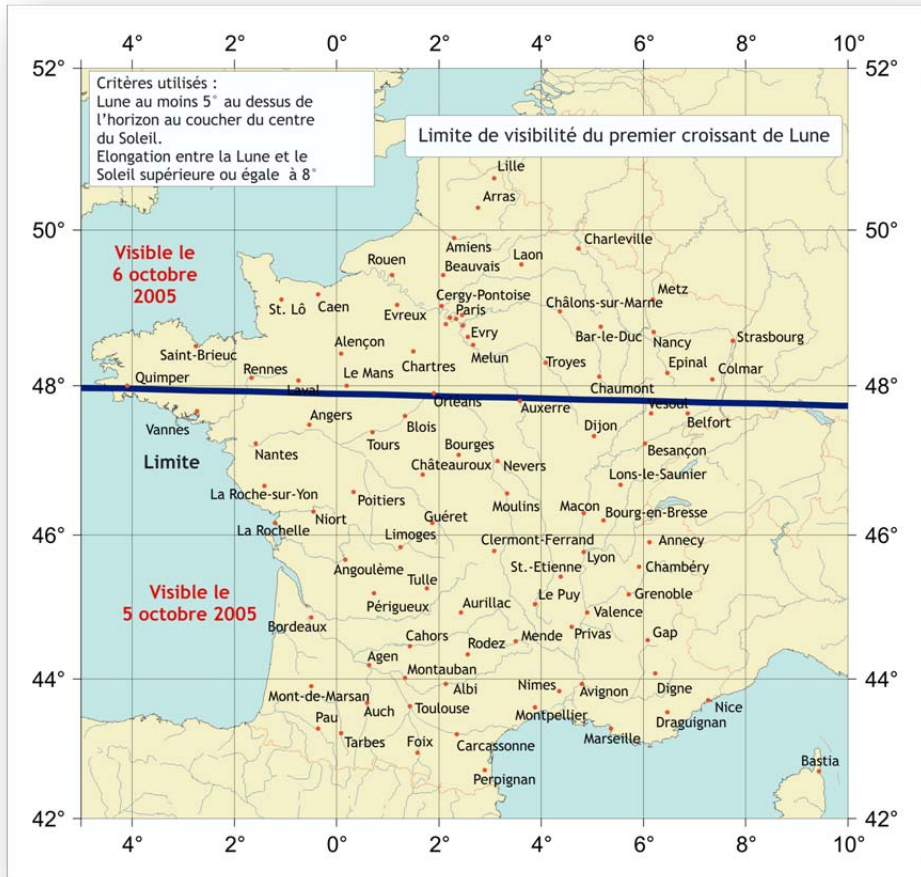


Figure 67. Visibilité du premier croissant de Lune en octobre 2005.

### 2.24.1 Les formules de trigonométrie sphérique

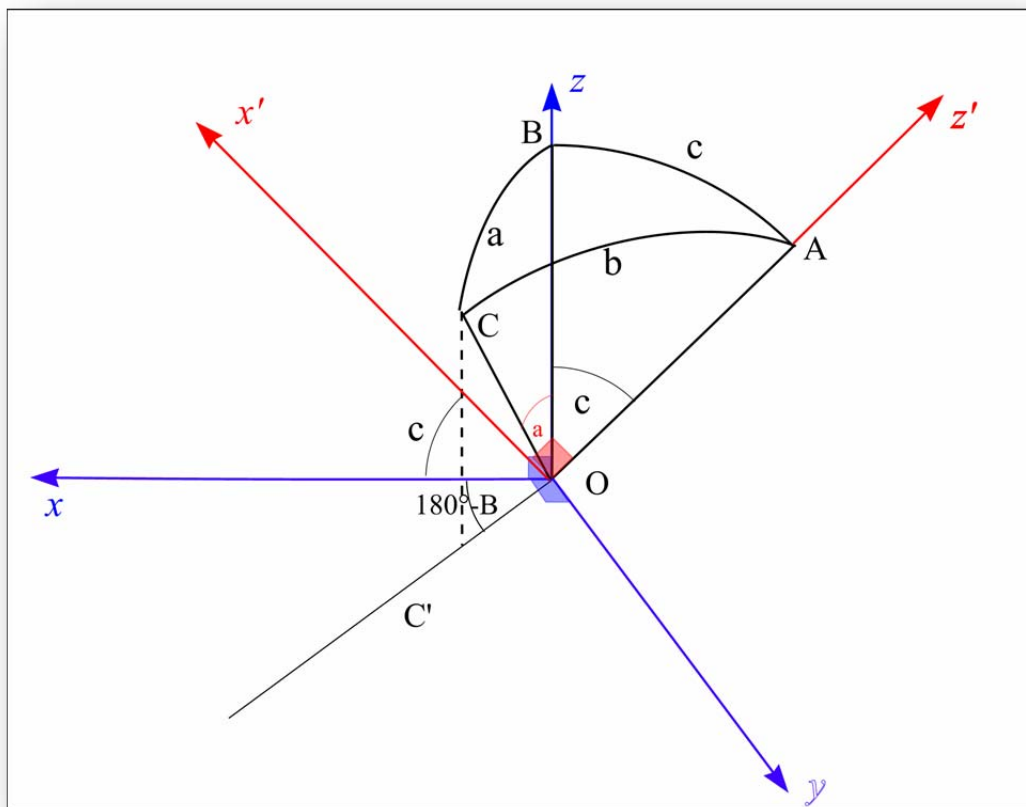


Figure 68. Triangle sphérique.

Soit le triangle sphérique OABC et le repère Oxyz : tel que B soit sur Oz et AB soit dans le plan xOz.

Le vecteur OC dans Oxyz a pour coordonnées :

$$x = -\sin a \cos B$$

$$y = \sin a \sin B$$

$$z = \cos a$$

où  $a$  est l'angle COB et  $B$  est l'angle des plans COB et BOA.

Ox'yz' est le trièdre obtenu par une rotation de Oxyz d'un angle  $c$  autour de l'axe Oy.

Le vecteur OC dans Ox'yz' a pour coordonnées :

$$x' = \sin b \cos A$$

$$y' = \sin b \sin A$$

$$z' = \cos b$$

où  $b$  est l'angle COA et  $A$  l'angle des plans COA et AOB.



On passe du repère  $Oxyz$  au repère  $Ox'y'z'$  par la rotation d'angle  $c$  autour de  $Oy$ , donc on a la relation suivante entre les coordonnées  $xyz$  et  $x'y'z'$ .

$$x = x' \cos c - z' \sin c$$

$$y = y'$$

$$z = x' \sin c + z' \cos c$$

D'où l'on déduit les trois formules principales suivantes :

$$\sin a \cos B = \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos A$$

$$\sin a \sin B = \sin b \sin A$$

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$$

Ces formules constituent les formules dites du système I, mettant en jeu 4 éléments : 3 côtés et un angle. Il existe d'autres systèmes mettant en jeu d'autres éléments, on choisira le bon système à utiliser en fonction des éléments connus et des éléments cherchés.

Voici la liste de ces différents systèmes :

Systeme I, 4 éléments : 3 côtés et 1 angle.

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$$

$$\cos b = \cos c \cos a + \sin c \sin a \cos B$$

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C$$

Systeme II, 4 éléments : 2 côtés et les 2 angles opposés.

$$\sin a \sin B = \sin b \sin A$$

$$\sin b \sin C = \sin c \sin B$$

$$\sin c \sin A = \sin a \sin C$$

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C}$$

Systeme III, 5 éléments : 3 côtés et 2 angles.

$$\sin a \cos B = \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos A$$

$$\sin a \cos C = \cos c \sin b - \sin c \cos b \cos A$$

$$\sin b \cos C = \cos c \sin a - \sin c \cos a \cos B$$

$$\sin b \cos A = \cos a \sin c - \sin a \cos c \cos B$$

$$\sin c \cos A = \cos a \sin b - \sin a \cos b \cos C$$

$$\sin c \cos B = \cos b \sin a - \sin b \cos a \cos C$$

Systeme IV, 4 elements : 2 cotes et 2 angles.

$$\begin{aligned}\cos a \cos B &= \sin a \cot c - \sin B \cot C \\ \cos a \cos C &= \sin a \cot b - \sin C \cot B \\ \cos b \cos C &= \sin b \cot a - \sin C \cot A \\ \cos b \cos A &= \sin b \cot c - \sin A \cot C \\ \cos c \cos A &= \sin c \cot b - \sin A \cot B \\ \cos c \cos B &= \sin c \cot a - \sin B \cot A\end{aligned}$$

Systeme I bis, 4 elements : 1 cote et 3 angles.

$$\begin{aligned}\cos A &= -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a \\ \cos B &= -\cos C \cos A + \sin C \sin A \cos b \\ \cos C &= -\cos A \cos B + \sin A \sin B \cos c\end{aligned}$$

Systeme III bis, 5 elements : 2 cotes et 3 angles.

$$\begin{aligned}\sin A \cos b &= \cos B \sin C + \sin B \cos C \cos a \\ \sin A \cos c &= \cos C \sin B + \sin C \cos B \cos a \\ \sin B \cos c &= \cos C \sin A + \sin C \cos A \cos b \\ \sin B \cos a &= \cos A \sin C + \sin A \cos C \cos b \\ \sin C \cos a &= \cos A \sin B + \sin A \cos B \cos c \\ \sin C \cos b &= \cos B \sin A + \sin B \cos A \cos c\end{aligned}$$

Systeme V, 6 elements : les 3 cotes et les 3 angles

$$\begin{aligned}\sin a \sin c + \cos a \cos c \cos B &= \sin A \sin C - \cos A \cos C \cos b \\ \sin b \sin a + \cos b \cos a \cos C &= \sin B \sin A - \cos B \cos A \cos c \\ \sin c \sin b + \cos c \cos b \cos A &= \sin C \sin B - \cos C \cos B \cos a\end{aligned}$$

### 2.24.2 Récapitulatif des formules du premier ordre

Systeme I 4 elements : 3 cotes, 1 angle.

I bis 4 elements : 1 cote, 3 angles.

II 4 elements : 2 cotes, 2 angles.

III 5 elements : 3 cotes, 2 angles.

III bis 5 elements : 2 cotes, 3 angles.

IV 4 elements : 2 cotes, 1 angle oppose, 1 angle compris.

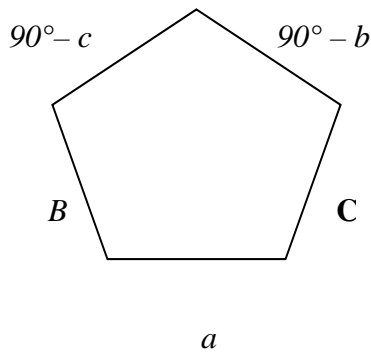
V 6 elements : 3 cotes et 3 angles.

### 2.24.3 Triangles rectangles et triangles rectilatères

#### Triangle rectangle

Un triangle est rectangle si un de ces angles est droit.

$A = 90^\circ \Rightarrow \cos A = 0 \text{ et } \sin A = 1$ $\cos a = \cos b \cos c = \cot B \cot C$ système I (1) et système I bis (1) $\sin b = \sin a \sin B = \tan c \cot C$ système II (1) et système IV (4) $\sin c = \sin a \sin C = \tan b \cot B$ système II (3) et système IV (5) $\cos B = \cos b \sin C = \tan c \cot a$ système I bis (2) et système IV (6) $\cos C = \cos c \sin B = \tan b \cot a$ système I bis (3) et système IV (3)
---



On peut retrouver ces formules au moyen de la règle mnémorique du pentagone de Neper. Les côtés sont respectivement égaux à  $a$ ,  $B$ ,  $90^\circ - c$ ,  $90^\circ - b$ ,  $C$ .

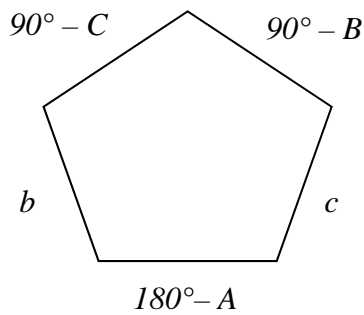
Le cosinus d'un côté du pentagone est égal :

1. Au produit des sinus des côtés opposés,
2. Au produit des cotangentes des côtés adjacents.

#### Triangle rectilatère

Un triangle est rectilatère si un de ces côtés est droit.

$a = 90^\circ \Rightarrow \cos a = 0 \text{ et } \sin a = 1$ $\cos A = -\cos B \cos C = -\cot b \cot c$ $\sin B = \sin A \sin b = \tan C \cot c$ $\sin C = \sin A \sin c = \tan B \cot b$ $\cos b = \cos B \sin c = -\tan C \cot A$ $\cos c = \cos C \sin b = -\tan B \cot A$
--



On peut retrouver ces formules au moyen de la règle mnémomonique du pentagone de Neper. Les côtés sont respectivement égaux à  $180^\circ - A$ ,  $b$ ,  $90^\circ - C$ ,  $90^\circ - B$ ,  $c$ .

- Le cosinus d'un côté du pentagone est égal :
3. Au produit des sinus des côtés opposés,
  4. Au produit des cotangentes des côtés adjacents.

### 2.24.4 Formules de changements de coordonnées

Coordonnées équatoriales  $\Leftrightarrow$  coordonnées écliptiques  
 Ascension droite  $\alpha$  et déclinaison  $\delta$   $\Leftrightarrow$  longitude  $l$  et latitude  $b$

$$\begin{aligned} \sin b &= \cos \varepsilon \cdot \sin \delta - \sin \varepsilon \cdot \cos \delta \cdot \sin \alpha \\ \cos b \cdot \cos l &= \cos \delta \cdot \cos \alpha \\ \cos b \cdot \sin l &= \sin \varepsilon \cdot \sin \delta + \cos \varepsilon \cdot \cos \delta \cdot \sin \alpha \\ \varepsilon &\text{ étant l'obliquité.} \end{aligned}$$

Et inversement

$$\begin{aligned} \sin \delta &= \cos \varepsilon \cdot \sin b + \sin \varepsilon \cdot \cos b \cdot \sin l \\ \cos \delta \cdot \cos \alpha &= \cos b \cdot \cos l \\ \cos \delta \cdot \sin \alpha &= -\sin \varepsilon \cdot \sin b + \cos \varepsilon \cdot \cos b \cdot \sin l \end{aligned}$$

Coordonnées horizontales  $\Leftrightarrow$  coordonnées équatoriales  
 Azimut  $a$  et distance zénithale  $z$   $\Leftrightarrow$  ascension droite  $\alpha$  et déclinaison  $\delta$








$$\begin{aligned} T &= H + \alpha \\ \sin \delta &= \sin \varphi \cdot \cos z - \cos \varphi \cdot \sin z \cdot \cos a \\ \cos \delta \cdot \sin H &= \sin z \cdot \sin a \\ \cos \delta \cdot \cos H &= \cos \varphi \cdot \cos z + \sin \varphi \cdot \sin z \cdot \cos a \\ \varphi &\text{ étant la latitude du lieu et } T \text{ le temps sidéral} \end{aligned}$$











Et inversement

$$\begin{aligned}\cos z &= \sin \varphi \cdot \sin \delta + \cos \varphi \cdot \cos \delta \cdot \cos H \\ \sin z \cdot \sin a &= \cos \delta \cdot \sin H \\ \sin z \cdot \cos a &= -\cos \varphi \cdot \sin \delta + \sin \varphi \cdot \cos \delta \cdot \cos H\end{aligned}$$


### 2.24.5 Rappel des formules de trigonométrie plane

$$\begin{aligned}\cos(a+b) &= \cos a \cos b - \sin a \sin b \\ \cos(a-b) &= \cos a \cos b + \sin a \sin b \\ \sin(a+b) &= \sin a \cos b + \cos a \sin b \\ \sin(a-b) &= \sin a \cos b - \cos a \sin b \\ \cos a \cos b &= \frac{1}{2} \cos(a+b) + \frac{1}{2} \cos(a-b) \\ \sin a \sin b &= \frac{1}{2} \cos(a-b) - \frac{1}{2} \cos(a+b) \\ \sin a \cos b &= \frac{1}{2} \sin(a+b) + \frac{1}{2} \sin(a-b) \\ \cos a \sin b &= \frac{1}{2} \sin(a+b) - \frac{1}{2} \sin(a-b) \\ \sin p + \sin q &= 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2} \\ \sin p - \sin q &= 2 \sin \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2} \\ \cos p + \cos q &= 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2} \\ \cos p - \cos q &= -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}\end{aligned}$$

INTRODUCTION.....	3
COURS SUR LES PHÉNOMÈNES ASTRONOMIQUES.....	3
1 Les repères astronomiques .....	3
1.1 Les repères fondamentaux de l’astronomie.....	3
1.2 Les repères écliptiques et équatoriaux.....	4
2 Les phénomènes astronomiques.....	6
2.1 Phénomènes entre une planète ou la Lune, la Terre et le Soleil.....	6
2.1.1 Les conjonctions et les oppositions .....	6
2.1.2 Les quadratures et les plus grandes élongations.....	8
2.1.3 Les phases des planètes .....	8
2.1.4 La révolution synodique moyenne .....	9
2.2 Station et rétrogradation des planètes.....	9
2.3 Autres phénomènes.....	10
2.4 Le lever, le coucher et le passage au méridien des astres.....	11
2.4.1  Les formules de trigonométrie sphérique.....	12
2.4.2 Le lever et le coucher des étoiles.....	14
2.4.3 Pour en savoir plus .....	16
2.5 Calcul des levers et des couchers (formulaire).....	21
2.5.1  Lever cosmique et achronique des étoiles.....	21
2.5.2  Pour améliorer le calcul .....	24
2.5.3  Calcul du lever achronique et du lever héliaque du soir de l’étoile.....	27
2.5.4  Coucher cosmique et achronique des étoiles .....	28
2.5.5  Amélioration du calcul.....	30
2.5.6  Calcul du coucher achronique et du coucher héliaque du matin de l’étoile	34
2.6 Le lever, le coucher et le passage au méridien du Soleil.....	35
2.7 Le passage au méridien en un lieu quelconque.....	38
2.8 Calcul de la hauteur d’un astre à ces passages aux méridiens.....	40
2.9 Passage au méridien supérieur.....	40
2.10 Passage au méridien inférieur .....	41
2.10.1 Conclusion .....	41
2.11 Première application.....	42
2.11.1 Hauteur de l’équateur au-dessus de l’horizon.....	42
2.11.2 Hauteur de l’équateur au-dessous de l’horizon.....	42

2.12	Deuxième application.....	42
2.12.1	Passage du Soleil au zénith entre les tropiques.....	42
2.13	Troisième application.....	43
2.13.1	Trouver pour une latitude donnée la limite des déclinaisons des étoiles qui ne se lèvent pas (elles restent toujours sous l'horizon).....	43
2.14	Quatrième application.....	44
2.14.1	Trouver pour une latitude donnée la limite des déclinaisons des étoiles qui ne se couchent pas (circumpolaires, elles restent toujours au-dessus de l'horizon).....	44
2.15	Cinquième application.....	44
2.15.1	Trouver pour une latitude donnée les étoiles qui ont une plus grande digression occidentale ou orientale.....	44
2.15.2	 Pour en savoir plus.....	45
2.16	 Étoiles circumpolaires.....	45
2.17	 Étoiles ayant une plus grande digression.....	46
2.17.1	Passage au zénith du Soleil entre les tropiques.....	47
2.18	Étude de la durée du jour.....	47
2.18.1	Les crépuscules.....	47
2.18.2	 Étude des levers et couchers du Soleil au voisinage du solstice d'hiver 48	
2.19	Pour en savoir plus.....	54
2.19.1	Lieux particuliers.....	55
2.19.2	Position des terminateurs par rapport aux méridiens.....	60
2.19.3	 Calcul du passage au méridien supérieur d'un astre.....	68
2.20	Culmination du Soleil.....	69
2.20.1	 Pour en savoir plus.....	69
2.21	 Calcul des jours où les durées des crépuscules sont les plus courtes.....	71
2.21.1	 Pour en savoir plus : Démonstration de la formule différentielle.....	75
2.21.2	 Direction du mouvement diurne.....	76
2.22	Angle que fait l'arc semi-diurne avec l'horizon au moment des levers couchers des astres 77	
2.22.1	Quelques cas particuliers.....	78
2.22.2	 Visibilité des planètes et de la Lune.....	80
2.22.3	Critères des premières et des dernières visibilités des planètes, le matin ou le soir 86	



2.22.4	Histoire.....	87
2.23	Lever coucher et visibilité de la Lune .....	88
2.23.1	Les levers, les couchers et les passages au méridien de la Lune .....	88
2.23.2	Culmination minimale et culmination maximale de la pleine Lune.....	92
2.23.3	La Lune des moissons et la Lune des chasseurs .....	93
2.23.4	Visibilité du premier croissant de Lune .....	100
2.23.5	Visibilité en fonction des saisons et des lieux .....	102
2.23.6	Exemples de visibilité en différents lieux.....	103
2.24	ANNEXES  .....	116
2.24.1	Les formules de trigonométrie sphérique .....	116
2.24.2	Récapitulatif des formules du premier ordre .....	118
2.24.3	Triangles rectangles et triangles rectilatères .....	119
2.24.4	Formules de changements de coordonnées.....	120
2.24.5	Rappel des formules de trigonométrie plane .....	121